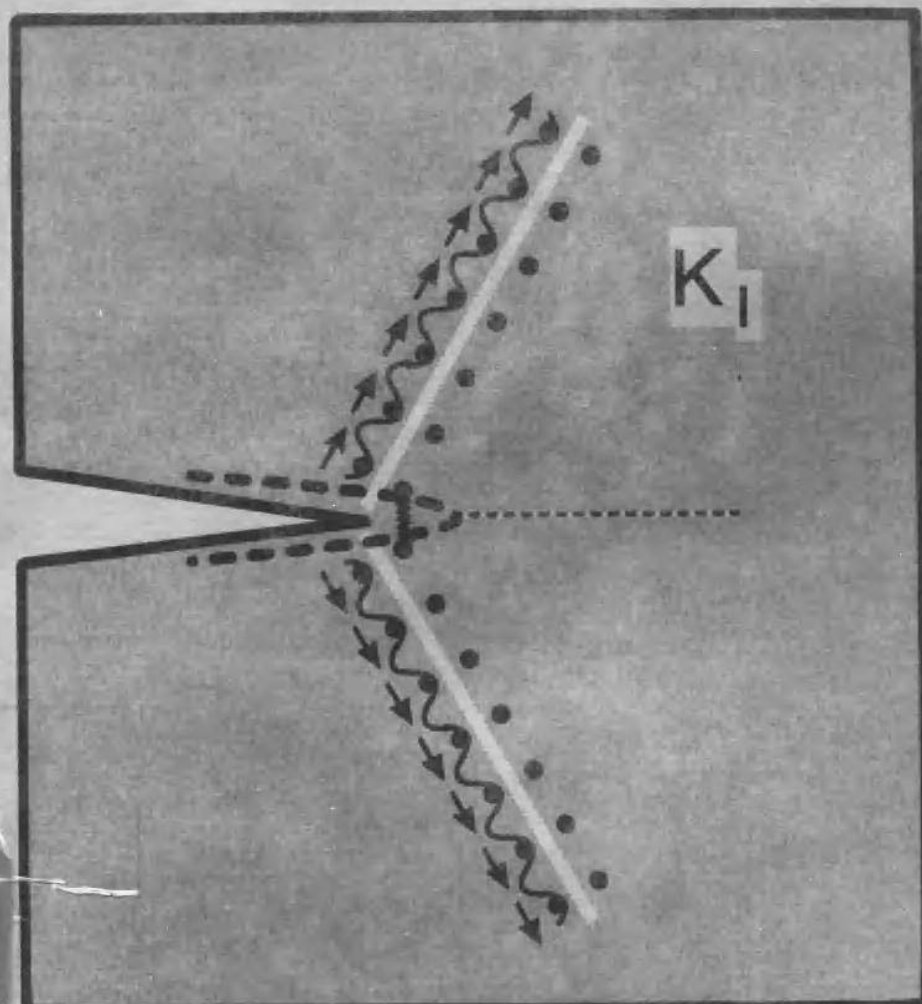


宏微观断裂力学

HONGWEIGUAN DUANLIE LIXUE

杨卫 著



G F G Y G B S

1697401

宏微观断裂力学

杨卫 著

J21/39/111



国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

宏微观断裂力学/杨卫著.—北京:国防工业出版社,
1995.9
ISBN 7-118-01426-5

I. 宏… I. 杨… III. 断裂力学-基础理论 IV. O346.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 01861 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 12 308 千字
1995 年 9 月第 1 版 1995 年 9 月北京第 1 次印刷
印数:1—3000 册 定价:21.60 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。
4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。
5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版,随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第二届评审委员会组成人员

名誉主任委员	怀国模		
主任委员	黄宁		
副主任委员	殷鹤龄	高景德	陈芳允
	曾铎		
秘书长	刘琯德		
委员	尤子平	朱森元	朵英贤
(按姓氏笔划为序)	刘仁	何庆芝	何国伟
	何新贵	宋家树	张汝果
	范学虹	胡万忱	柯有安
	侯迁	侯正明	莫梧生
	崔尔杰		

序

据一些工业化国家的统计,因材料和结构的破坏所造成的损失占国民经济生产总值的 8%~12%。破坏事故还造成人员的伤亡,其后果更是无法估量。我国的情况甚至比西方发达国家还要严重。另一方面,开发新材料还存在很大的潜力。传统的配方(即“炒菜”)与试探(即“试一试”)的方法需要用定量化分析的方法来取代。无论是为了减少破坏事故的损失,还是为了发展材料的潜力与创造新的材料,都要求对断裂的过程有科学的定量化的认识。破坏或断裂是一个从原子键尺度到宏观尺度跨越约 10^7 量级尺度的过程。认识这样一个过程是人类多个世纪以来为之奋斗而远未达到的目标,是对人类科学的严重挑战。断裂过程贯通宏、细、微观多个层次尺度,涉及固体力学、材料科学与物理学的跨学科领域。力学正在采取对同一问题在不同尺度上进行研究的方法。从科学发展的历史与趋势来看,有理由预言首先突破这一难点的非常可能是力学。

杨卫教授自从 1984 年初以优异的成绩获得美国布朗大学博士学位以后,立即投入祖国的科学与教育事业中。他以充沛的精力和深刻的洞察力,在多方的支持下,经过十余年辛勤的努力,数多科研项目在祖国的土壤中开花结果。《宏微观断裂力学》一书便是他研究成果的一个阶段的总结,该书的出版将有利于推动我国断裂学科的发展。我乐于向读者推荐并作序。

清华大学 黄克智

1995 年 4 月 10 日

前 言

唐人魏征言：“欲流之远者，必浚其泉源；求木之长者，必固其根本”。固本浚源，体现了基础研究之重要性。想数千种材料、上百类结构、十余门工程，其破坏行为归根到底，在于那些或明或暗的裂纹。Griffith 和 Irwin 等学者把裂纹的学问上升为“断裂力学”，其应用发展不但为现代社会避免了上万亿元的损失，也为人类征服自然、保护自己提供了工具。

由弥散分布的微裂纹串接为宏观裂纹，再由宏观裂纹演化至灾难性失稳裂纹，这一发展过程称之为断裂过程。了解断裂过程才能阐明裂纹的演变史，才能表达载荷环境氛围与材料断裂的因果关系，才能把断裂学说的应用奠基于科学的背景之上。断裂过程是一个宏微观结合的多层次过程。它既受到以裂尖奇异场为表征的宏观力学氛围之外部推动，又诱发于裂尖原子区动力失稳之内聚过程。因此，单纯从连续介质力学或固态物理角度均无法展示断裂过程的全貌。

以断裂过程的宏微观结合特征可联想至力学研究的宏微观轮回。从牛顿到柯西，固体力学的经典理论建立于粒子模型之上，其研究的物质体系大到天体星球，小到分子原子。力学原为物理学的一支，只是在近一个世纪才由连续介质化的手段脱胎为一门独立学科。由微观到宏观的表述转换导致了应用力学的进展。对大多数工程应用，连续介质往往能比粒子聚集体模型更集中、更概括、更简单地表达研究对象。以有限元为代表的计算力学发展使连续介质的力学求解手段臻于完备。然而，连续介质的模型化过程导致了破坏状态描述的不封闭。本构方程、损坏演化率、断裂准则等概念固然可以半经验性地刻划破坏过程的一些宏观断面，但却缺乏

早期力学大师们那种纵览宇宙万物而追本溯源的精神。作为否定之否定,近二三十年来断裂力学研究由宏观重返微观,导致宏微观结合的断裂力学理论。

断裂过程研究由宏观到微观的发展动力并不完全来自于对科学真理的追求,它在很大程度上亦得益于当代高新技术的发展。这既包含着研究手段的更新,如万亿次的大规模并行计算机和具有原子分辨率的观测与加工设备;也起因于先进材料、微机械工程和精密制造工艺进展的定量化需要。新一代结构材料是如此之精细而昂贵,微结构的设计要素是如此错综复杂,以至于无法用配方试探来加以研制。只有基于宏微观力学的定量化分析方法才能一矢中的,达到高新材料研制的竞争性要求。从微观到宏观,再从宏观到微观,最终走上宏微观结合之路,工业技术水平的提高带来断裂科学发展的峰回路转。

宏微观断裂力学的先兆为细观力学的形成。连续介质力学描述与原子描述之间有着丰富的中间层次,对它们的研究拓展了材料科学。细观力学沟通了宏观与微观层次之间的鸿沟,促进了连续介质与原子研究方法的贯穿。

著者本人的学习与研究经历可由材料与力学结合、宏观与微观结合来表征:从大学期间主修材料热加工转至研究生阶段主修固体力学,从归国后前五年关于宏观断裂力学的研究转至近五年对材料力学行为的研究。材料科学以其丰富的内涵和层出不穷的新鲜问题而引人入胜,力学由其准确、完备的逻辑体系而令人叹服。力学工作者们常说:宇宙之大,基本粒子之小,力无所不在。如何从最根本的物理力学原理,来逐层解开固体材料断裂过程的谜团是我多年铭心向往的一项追求。断裂力学近十年来朝这一目标已经前进了一大步,以至于著者可以写出这样一本不成熟的书来吸引有志于这一领域研究的学者和学生。这一学科在飞速发展,书稿中很多论述会被证实是牵强的、支离破碎的、甚至是谬误的。但著者仅望它能引起从事断裂科学研究的同行们(尤其年轻同行们)的兴趣与关注。以力学之深邃严谨、物理之广博神奇、材料科学之

千变万化,必然能令跨学科的研究者在这一新开辟的园地中收获到丰硕的科学果实。

杨卫
清华大学
破坏力学开放研究实验室
1994年10月

绪 论

0.1 破坏力学的三个发展阶段

0.1.1 破坏力学概述

固体材料的破坏过程是与湍流相并列的两大力学难题之一,是力学家与材料学家为之奋斗了近一个世纪的多尺度、跨学科命题。破坏力学是当前国内外发展起来的一门概括性学科,它泛指对各种工程结构(如机械结构、土木结构、航空航天结构、核电结构、电子元件结构等)和工程材料(如金属、陶瓷、高分子、岩土、复合材料、生物材料等)破坏行为(包括断裂、损伤、疲劳、腐蚀、磨损)的力学规律研究。虽然破坏行为具有多学科的特点,但破坏力学往往是其最集中、最系统的研究手段。破坏力学具有广延性和学科交叉性,它在现代科学史中的发展是与其他学科融会贯通的一个范例。

力学是自然科学的七大基础科学之一^[1],与八大应用基础学科紧密相联。宇宙之大、基本粒子之小,力无所不在。破坏力学是力学学科中富有革命性和学科渗透性的活跃前沿,它的发展带动了近代力学的发展。举例说明:对土木、钢结构的强度、刚度、稳定性研究导致了变形力学的产生,奠定了机器大工业时代的工程科学基础;对航空、航天、机械、能源等工程结构的断裂研究导致了断裂力学的诞生,使近代破坏力学初具雏形;近年来对强韧材料、微结构元件和制造工艺过程的研究导致了具有宏微观结合特征的现代破坏力学之孕育形成。由学科纵向关系而论,破坏力学研究力学过程的终极阶段,在固体力学理论中占有支配性地位;从诸学科的横向联系而看,破坏力学与材料、能源、国防、土木、机械、信息等重

大工程科学领域密切相关,可对国民经济发展和劳动事故防范产生重大影响。

0.1.2 三个发展阶段

破坏力学的学科发展经历了三个主要的发展阶段。从伽里略^[2]到第二次世界大战前的无缺陷经验理论可视为第一阶段。其主要技术特征在于:①以变形量、塑性屈服等破坏先兆现象作为防范目标,并提出了以强度理论为中心的破坏准则体系;②不引入任何缺陷尺度;③对材料的本构行为采用简单连续介质描述(如虎克定律);④将材料的缺陷和破坏抗力经验地反映于若干材料指标上(如常规的五项强度韧性指标)。上述理论尽管简单,却也曾带动了200年来变形体力学(如弹性力学、塑性力学、连续介质力学等)盛极一时的发展。破坏力学的第二发展阶段是从第二次世界大战结束至今的宏观断裂力学阶段。其主要技术特征在于:①以断裂等破坏终极现象作为防范目标,并提出了以断裂韧性理论为中心的破坏准则体系;②引入宏观缺陷,但不考虑细一微观缺陷;③对材料的本构行为采用较复杂的连续介质描述,但材料构元仍不具有细微观结构;④将材料的破坏抗力唯象地反映在带裂纹标准试件的断裂指标上。宏观缺陷的引入带动了近40年来破坏力学发展成为一门独立学科。破坏力学的第三发展阶段——宏微观理论阶段,正在国内外力学界中展开。这一阶段自80年代萌生,在跨世纪期间将发展成为主要学科方向。其主要技术特征为:①追溯从变形、损伤至断裂的全过程;②引入多层次的缺陷几何结构;③对材料的本构行为采用宏一细一微观相结合的描述,即在材料构元中体现特定的微结构;④材料的破坏抗力体现为可预测的力学指标。

0.2 宏微观断裂力学的理论与应用特征

0.2.1 宏微观断裂力学

以往对固体断裂的研究体现为从宏观和微观两方面并行不悖

的探讨。宏观研究在文献上称之为断裂力学,由 Griffith 所开创^[3],并经 Irwin 发展而形成线弹性断裂力学(LEFM)的构架。在著名固体力学家 Rice、Hutchinson 等的努力下^[4,5],弹塑性断裂力学也趋于完成^[6,7,8]。微观研究称之为断裂物理,它渊源久远,起步于理论断裂强度的研究。由于断裂物理早期研究未曾致力于与宏观力学氛围的定量连接,所以一度进展不及断裂力学迅速。断裂力学的发展在近年来出现了宏观至细观^[9],再由细观至纳观^[10]的势头。断裂力学与断裂物理相结合而形成宏微观断裂力学,已成为跨世纪学科发展的趋势。

0.2.2 理论特征

宏微观断裂力学的出现是当代科学技术发展的必然产物。孕育该理论出现的主要科学技术环境为:①对破坏全过程认识的逐步深化;②与材料科学的交叉渗透,尤其得益于高强韧材料和带有确定微结构材料(如复合材料)的研制;③损伤力学的发展以及对断裂前细微观材料劣化的研究;④现代计算和实验技术的发展。上述科学技术环境的变化产生以断裂过程为主线带动多种材料、微元件和工艺过程的发展,以及开展跨材料的断裂机制比较学研究等学术思想,促使宏微观断裂力学得以应运而生。

宏微观结合的断裂力学使人们对材料力学行为的研究上升到一个新的高度。关于有序微细结构和界面的力学研究使复合材料设计产生了具有革命性的新概念;对精细结构陶瓷中扩展裂纹尖端区的相变、桥联和微裂纹过程区的力学研究使得 80 年代结构陶瓷的增韧理论和韧性指标发生了深刻的变革;对含微缺陷材料的制备工艺的力学研究将为提高材料的服役可靠性奠定理论基础。上述例子明确地表明了宏微观断裂力学对材料科学和技术所产生的正向推动作用。

断裂力学的宏微观理论将引导人类对种种自然和技术性破坏行为产生认识论方面的飞跃。这一认识飞跃体现为:①认识到断裂行为是由宏—细—微诸层次下多种破坏机制相耦合而发生和发展的;②认识到宏观偶然发生的灾难性断裂行为是由细微观尺度内

确定的力学过程所制约的；③认识到通过细观力学这一中枢环节的沟通可为结构材料的强韧设计产生创新和定量的理论学说。上述创新认识思维将启迪其他相关学科中发生连锁性的概念更新。

断裂力学宏微观理论的出现推动了力学界思维定势的更新和计算、实验技术的发展。宏微观理论中大量引入了材料科学、物理学、化学、信息科学、近代数学的学术思想，这些交缘学科概念与断裂力学原有学术体系的撞击促进了力学理论思维定势的更新。宏微观理论吸收了物理测试手段、显微量测技术和微结构计算技术，促进了细观实验力学和细观计算力学的兴起。

0.2.3 应用特征

宏微观断裂力学有着广阔的工程应用前景。这一论断的根据在于：第一，微细结构的引入使得该理论能适应更多的力学、物理、化学和材料破坏过程。现举例如下：①细观力学的引入使人们得以定量地模拟延性断裂和脆性断裂过程，进而解释了多种以往难于阐明的基本破坏过程；②界面力学的引入使人们得以揭示复合材料的和微电子元件界面断裂的力学规律；③相变亚结构的引入使人们能够定量地描述相变增韧陶瓷、形状记忆合金等材料体系及热加工工艺过程的变形和断裂力学行为；④分子动力学微观计算模型的引入使人们得以区分晶态材料和无定形材料的不同塑性变形模式和断裂机制。第二，科学技术的发展、科学意识的深化将使工程师们在未来的十年中更加依赖具有宏微观结合特征的力学理论。断裂行为是工程师们严加防范的主要技术目标，宏观断裂理论将随着工程技术发展的多样性而渐趋陈旧，而宏微观断裂力学的发展将使破译种种断裂过程的黑匣子成为可能。计算机技术的日益普及将为宏微观断裂力学思想的应用实施产生技术和心理上的促进。上述论据预示着断裂力学的宏微观理论具有广阔的工程应用前景。

断裂力学对材料(包括结构材料和要求高可靠性的智能材料)技术的发展起着理论依托和定量描述的作用。新材料、高技术材料从成材工艺过程、内部组织结构、成分变化、变形和破坏的模式都

和传统材料有着根本的不同,这不但是对力学家、物理学家和冶金学家的严重挑战,而且也提出了许许多多具有生命力的新研究课题,为宏微观断裂力学提供了广阔的用武之地。

不管是传统材料还是新技术、高技术材料都是在一定环境和载荷下使用的。它们都会遇到变形和破坏及使用寿命的问题。从变形到断裂这一固体材料最基本的力学响应过程出发,从宏观与微观相结合的角度建立起有关的物理模型和相应的力学理论,正确预报材料使用时的可靠性、稳定性及使用寿命是当代材料与力学相结合的重大课题和任务。

宏微观断裂力学研究可间接或直接导致巨大的经济效益和社会效益。据统计,由于机件、构件及电子元件的断裂、疲劳、腐蚀、磨损破坏,每年造成巨大的经济损失,占美、日、欧洲共同体等国每年国民生产总值的6%~8%^[11,12]。据我国劳动部统计^[13],我国在80年代发生的锅炉和压力容器的爆炸事故约五千起,人员累计伤亡近万人,居国内劳动安全事故的第二位。我国锅炉和压力容器的爆炸事故比工业化先进国家高十倍,其中恶性重大事故比工业化先进国家高一百倍。宏微观断裂力学研究可对防范上述破坏行为产生重大作用。美国国家标准局^[14]和日本通产省的预测数字表明:利用目前和到2000年可能发展的科学技术成果(宏微观断裂力学是后者的核心内容之一)可以避免上述事故中约一半的损失,即产生达到当年国民生产总值3%~4%的经济效益。在我国开展断裂力学的宏微观研究必将为跨世纪期间降低破坏经济损失及显著减少劳动事故打下基础。

综上所述:宏观断裂力学的发展曾推动40年来断裂研究面貌的改观。而宏微观断裂力学的出现将使人们对断裂行为的认识上升到一个新高度,从而将材料宏观失效与其细观结构及更深层次内发生的断裂物理、断裂化学机理相联系,推动力学界思维方式的更新和材料科学界的定量化进程。材料的损伤、断裂机理和宏微观力学理论的深入研究将有助于促进力学、材料科学、物理学、化学领域的学科交叉和深化。它通过引入多层次的缺陷背景和损伤、断

裂机制,如细观层次的微孔洞、微裂纹、界面和剪切带这四种典型破坏基元,和微观层次的疲劳物理损伤、韧脆转变和氢致断裂等断裂机理,来研究材料从变形、损伤至失效的全过程。宏微观断裂力学研究可为在我国降低断裂所造成的经济损失及显著减少劳动事故莫立基础,直接或间接导致巨大的经济和社会效益。

0.3 断裂的宏微观尺度——空间与时间

0.3.1 宏微观空间尺度

表 0.1 在不同空间尺度下的断裂研究

尺 度	研究目标	研究方法
埃(10^{-10}m)	电子云交互作用	量子力学
纳米(10^{-9}m)	原子结合力、价键破断、位错形核、晶界结构	原子断裂力学
10 纳米(10^{-8}m)	原子聚集体断裂、纳米晶体断裂	统计力学 分子动力学
亚微米(10^{-7}m)	位错发射、无位错区、离散塑性	弹性力学 位错力学
微米(10^{-6}m)	位错交互、界面、微结构、局部化剪切、韧脆转变	细观力学 微结构计算力学
忽米(10^{-5}m)	滑移、织构、微孔洞、微裂纹、多相介质	晶体塑性理论 细观损伤力学
丝米(10^{-4}m)	复合材料、多层介质、强韧化	连续介质力学 宏观断裂力学
毫米(10^{-3}m)	裂纹尖端奇异场	连续介质力学 宏观断裂力学
厘米(10^{-2}m)	试件几何 结构完整性评定	计算力学

断裂行为体现出强烈的跨层次特征。表 0.1 列出了断裂研究从埃 (10^{-10}m) 到厘米 (10^{-2}m) 诸空间尺度下的研究目标与方法。

上述空间尺度粗略地定义了四个观察层次：埃 (\AA) 及小于埃的尺度称为物理微观，专指核物理意义上的微观；几分之一纳米到几十个纳米的尺度称为纳观 (英文词为 nanoscopic)；从亚微米到丝米之间的尺度称为细观 (英文词为 mesoscopic)；毫米以上则称为宏观 (英文词为 macroscopic)。与宏观相对应，也可以将从埃到丝米之间的尺度统称为微观 (英文词为 microscopic)，它又分为细观、纳观和物理微观三个逐级变小的层次。从物质模型上来看：物理微观模型考虑复杂的电子—量子效应；在纳观范围内可把物质模拟为原子作用势下结合为一体的粒子阵；在细观尺度上采用具有内禀微结构的连续介质单元；而在宏观尺度上则把物质进一步简化为无结构的连续介质。对不同的材料体系，应按上述物理模型定义来调整对应于宏观、细观和纳观的空间尺度范围。如建筑材料的细观模型可以粗到毫米或厘米的量级，而地质研究中的细观模型则可能粗到千米的量级。本书不拟讨论物理微观意义下的断裂行为，而将宏微观断裂力学规定为从宏观到细观再到纳观的断裂力学研究。

0.3.2 诸空间尺度下的断裂行为

现阐述表 0.1 所表达的诸空间尺度下的断裂行为。在埃 (10^{-10}m) 或小于埃的尺度上，可由量子力学的方法研究电子云之间的交互作用，建立与断裂物理过程关系重大的“原子结合力模型”。在纳米尺度上可包容几个或几十个原子的近邻作用，采用原子断裂力学来研究加载环境下由原子或原子团之间的价键破断所刻划的物质分离过程。而原子间结合力模型则构成上述原子断裂力学计算的基础。在该尺度下还可以探讨诸如位错芯结构、位错形核、晶界结构、腐蚀脆化等命题，建立材料断裂的纳观韧脆判断理论。在 10nm 左右的尺度上，可利用非确定性的统计力学方法或确定性的分子动力学方法来研究原子聚集体的断裂，如纳米晶体的

断裂。

若把空间尺度放大到亚微米(10^{-7}m)量级,则可将粒子点阵的畸变用弹性连续介质来表达。在该尺度下的塑性行为尚不能连续化,因为位错间距常在微米量级。这种连续弹性/离散塑性理论借助于弹性力学与位错力学的结合,对认识裂纹尖端场的应力应变表征(如裂尖位错发射或裂尖无位错区的存在)颇为重要。微米尺度(10^{-6}m)是细观力学的中心尺度。在英文文献中,细观力学被称为 micromechanics 或 mesomechanics^[14],前者的词头与微米(micron)相一致。在该尺度下可利用微结构计算力学^[15]来计算位错交互作用,处理微结构和连续介质界面的影响,讨论由材料微结构诱发的局部化剪切。上述因素在材料强韧化力学原理研究中^[16]起重要影响。在微米尺度(10^{-6}m)下,离散塑性变形可积分表达为晶体塑性理论。该理论又可纳入细观塑性理论^[17]的范畴,用以研究连续滑移、材料织构、几何软化、晶界滑错等命题。在该空间尺度上下还可以进行细观损伤力学研究^[18,19],如微孔洞、微裂纹的形核、长大与汇聚,以及细观损伤与主干裂纹的交互作用。丝米尺度(10^{-4}m)介于细观与宏观之间,可以使用连续介质塑性理论。在该尺度下常见的一类细观问题是纤维复合材料与颗粒相复合材料的断裂行为,这时纤维薄层的厚度恰为丝米量级。上述多层介质强韧化力学的研究重点在于界面断裂,该分支学科近年来的飞速发展使多层介质的力学设计和断裂路径控制成为现实。

毫米尺度(10^{-3}m)的研究属于宏观断裂力学的范畴。在连续介质模型下可求解出断裂力学中具有根本意义的裂纹尖端奇异场,该奇异场为细观和纳观力学分析提供了一个含场强参数的宏观力学氛围。超过厘米(10^{-2}m)尺度的研究主要探索裂纹结构几何的影响,并在计算力学的帮助下将断裂力学推向工程结构的完整性评定。

0.3.3 宏微观断裂力学的时间尺度

宏微观断裂力学并不仅仅体现了空间尺度上由粗至细的贯穿,也刻划了时间尺度上由慢到快的过渡。对纳观断裂力学来讲,

对晶格点阵进行分子动力学模拟时所取时间步长常控制在几飞秒到几十飞秒 ($1\text{fs}=10^{-15}\text{s}$) 之间, 而点阵振荡周期在 0.1ps ($1\text{ps}=10^{-12}\text{s}$) 上下。这类极短时间步长的计算主要模拟点阵的热涨落和能量涨落, 而这些涨落是纳观缺陷 (如点阵位错、空位和原子尺度裂纹) 之速率形成过程的基础。形成缺陷的特征时间在 ps 左右, 如加载下裂尖在每 $1\sim 10\text{ps}$ 间隔可发射一个位错。而位错越过非完整点阵障碍 (如晶界) 的耗时要长得多, 可在 $10\sim 10\,000\text{ps}$ 内变化。

在连续弹性/离散塑性模型下的特征时间常在 ns ($1\text{ns}=10^{-9}\text{s}$) 左右。如位错间交互作用的传递时间, 位错排列花样的数值模拟步长都常取在 ns 的量级。若取位错运行速度在 $1\,000\text{m/s}$ 左右, 则它在 1ns 间可移动 $1\mu\text{m}$, 而位错距离常为 1 到 $10\mu\text{m}$ 。缓慢运行的位错 (如 SiGe/Si 多层超晶格膜的位错延展模拟^[20]) 所用的特征时间步长要大得多, 达到 100ns 的量级。细晶粒相变固体中的晶粒相变完成时间为 ns 量级。

裂尖钝化时间是一个变化幅度很大的量。若位错运行速度估算为 $1\,000\text{m/s}$, 位错发射间距为 $100b$ (b 为伯格向量大小, 在 0.5nm 的长度量级), 则产生 $100b$ ($0.05\mu\text{m}$) 钝化所需的时间为 5ns , 产生 $2000b$ ($1\mu\text{m}$) 钝化所需的时间为 100ns 。若进一步考虑位错运行的各种障碍, 则裂尖钝化所需时间将大幅度延长。如位错穿过晶界的时间在 10ns 的量级, 若存在晶界障碍, 产生 $1\mu\text{m}$ 裂尖钝化所需的时间就增至 $20\mu\text{s}$ ($1\mu\text{s}=10^{-6}\text{s}$) 或更长。产生宏观裂尖钝化 ($0.1\sim 1\text{mm}$ 钝化量) 所需的时间往往在 ms ($1\text{ms}=10^{-3}\text{s}$) 至 s 的量级。

有鉴于此, 当我们把注意力逐渐贴近裂尖时, 不仅在空间尺度上从宏观尺度细化为细观尺度再细化为纳观尺度, 在特征时间上也同时出现了十几个量级的变化。这就使宏微观断裂力学的研究更具有困难性和挑战性, 并得以揭示在不同时空尺度上断裂行为的物理力学特征。

0.4 内 容 概 述

本书按研究尺度的逐级细化分上中下三篇展开讨论,即从宏观断裂力学到细观断裂力学再到纳观断裂力学。追溯了力学家对断裂过程认识由宏观至微观的跃进。

上篇**宏观断裂力学**以裂纹尖端奇异场和断裂准则为理论核心,提纲挈领地表达宏观断裂力学的主要数理框架。第1章线弹性断裂力学从三维弹性力学基本方程演绎地推导出裂尖二维渐近方程,并借助于复变函数表示建立了静动态条件下的应力强度因子理论。第2章弹塑性断裂力学阐述了 J 积分理论体系之精华,重点放在 J 的物理内涵以及它对静止裂纹与扩展裂纹尖端奇异场的控制。该章还收入了对扩展裂纹尖端场的综述^[2]与 $J-Q$ 理论的最新进展。在 J 积分理论体系下,本书第3章系统构想了结构缺陷评定的三级评定体系,其最高一级评定基于著者及合作者近年提出的 $J-T$ 双参量评定法及其多种表达形式。上述方案把宏观断裂力学在结构缺陷评定中的应用建立于理性的基础之上。

本书中篇系统地展开了**细观断裂力学**的全貌。第4章细观断裂力学引论从裂纹尖端奇异场、断裂准则和断裂过程区三个角度上剖析了宏观断裂力学的固有局限,并随之展开了对细观损伤理论的讨论,从微孔洞、微裂纹、界面失效、失稳带这4种细观损伤基元出发,讨论了从损伤孕育发展为断裂的过程。在第5章界面断裂力学与多层介质断裂及第6章微裂纹理论中,深入地讨论了异于均匀材料宏观裂纹的界面裂纹和微裂纹群,并从界面与平均化两个方面考察细观断裂的特点。这两章的部分内容取自于著者近年来的研究成果。第7章断裂过程区是细观断裂力学的核心,它从损伤力学和位错力学这两个角度上阐述了断裂过程区内的损伤形态和韧脆判断,为定量鉴别延性断裂、解理断裂和准解理断裂奠定了基础。上述结果在第8章材料增韧的细观力学中得到了应用,从材料增韧定量预测和材料微结构设计两方面揭示了细观断裂力学在

材料增韧理论中的重要作用。作者数年来在材料强韧化力学原理上的多项研究成果为该章提供了实例。

本书下篇尝试性地勾勒出我们命名为纳观断裂力学这一崭新学科的雏形。在第9章纳观力学基础中陈述了纳观力学(nanomechanics)的基本假定、主要框架和研究方法。继而在该框架下于第10章介绍了纳观断裂过程的数值模拟,所模拟的构形包括均相固体断裂、理想界面断裂和峰峦界面的原子聚集构形之形成。在第11章宏微观结合中把上述纳观原子模型嵌套于细观连续弹性/离散塑性和宏观弹塑性连续介质之中,实现了宏微观的定量贯穿。该章将试图对空间尺度的跨层次过渡提出可行的解决方案,并列举定量宏微观计算的实例。最后,作为对宏微观非线性力学的理论探讨,考虑了裂尖原子混沌运动的模式及其对材料解理与位错发射过程的影响。

著者谨将此书作为用断裂力学严密分析来定量讨论固体材料力学行为的尝试,力图从宏微观结合的高度和水平上展现断裂力学的丰富内涵。

参 考 文 献

- 1 国家科委. 1991年—1995年全国基础研究和应用基础研究优先领域和重点课题建议草案. 1990
- 2 Galileo D G. Two New Sciences. 1594. English translation by Henry Crew and Alfonso de Salvio. New York: The MecMillan Company, 1993
- 3 Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. ,Ser. A, 1920, 221; 163~198
- 4 Rice J R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture. In, Liebowitz H, ed. Fracture, An Advanced Treatise, V. 2. New York: Acad. Press, 1968. 191~311
- 5 Hutchinson J W. Nonlinear Fracture Mechanics. Dept. of Solid Mech. , TU Denmark, 1979
- 6 Kannien M F, Popelar C H. Advanced Fracture Mechanics. Oxford: Oxford Univ. press, 1985

- 7 黄克智,余寿文. 弹塑性断裂力学. 北京:清华大学出版社,1986
- 8 Anderson T L. Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications. Boca Raton, CRC Press, 1991
- 9 杨卫,孙庆平,黄克智等. 固体的宏细观本构理论与断裂. 自然科学进展, 1993, 3(6): 515~524
- 10 杨卫,谭鸿来. 断裂过程的细观力学与纳观力学. 中国科学基金, 1993, 7(4): 249~254
- 11 Duga J J, Fisher W H, Baxbdum R W et al. Fracture Costs US \$ 119 billion a year, says study by Battelle/NBS. Int. J. Fracture, 1983, 23, R81~R83
- 12 Miller K J. 致 FFEMS 编委的公开信. 1992
- 13 劳动部文件. 关于开展锅炉和压力容器防爆技术研究的通知. 1990
- 14 Haritos G K, Hager J W, Amos A K et al. Mesomechanics: the microstructure mechanics connection. Int. J. Solids & Structs, 1988, 24, 1081
- 15 Needleman A. Computational micromechanics. Keynote Lecture in ICTAM VIII, Grenoble (France), 1988
- 16 杨卫,黄克智,余寿文. 材料强韧化的宏细观断裂力学理论. 力学与实践, 1991, 13(6): 1~9
- 17 Yang W, Lee W B. Mesoplasticity and Its Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- 18 杨卫. 细观力学与细观损伤力学. 力学进展, 1992, 22(1): 1~9
- 19 杨卫. 细观损伤理论进展. 见:黄克智等编. 固体力学发展趋势. 北京:北京理工大学出版社, 1995
- 20 Zhang H, Yang W. Three dimensional dislocation loops generated from a weak inclusion in a strained material heterostructure. J. Mech. Phys. Solids, 1994, 42: 913~930
- 21 Hwang K C, Yu S W, Yang W. Theoretical investigation of crack-tip singularity fields in China. Appl. Mech. Rev. , 1990, 43: 19~33

上篇 宏观断裂力学

第 1 章 线弹性断裂力学

1.1 宏观断裂力学发展史

传统的强度设计渊源于伽利略^[1]的材料强度学说,即任一构件受载时最大特征应力达到材料抗力时便发生破坏。类似的思想可从上述一次性加载工况推广到往复加载工况,得到传统的 $S-N$ 设计曲线。

传统的强度设计方法存在下述弊端:

(1)从物理学角度上,它不能识别固体材料的典型特征破坏过程。这些特征破坏过程包括:①从微裂纹形核、亚临界扩展、微裂纹汇合成宏观裂纹,并发展至灾难性失稳扩展的脆性断裂过程;②从孔洞形核、长大、片状汇合到持续撕裂的韧性断裂过程;③从驻留滑移带处累积塑性变形到疲劳裂纹形核,继而呈花纹状辗压扩展的疲劳断裂过程。

(2)从力学角度上,它不能描述由于裂纹状缺陷存在而于裂纹尖端产生的严重应力集中。材料的强度不仅与载荷水平有关,还与裂纹几何有关。传统强度理论无法表征裂纹尖端的奇异场。

(3)从材料科学角度上,它不能解释理论强度远高于实际强度的原因。对于这些原因的探索导致了材料强韧化力学的诞生。

(4)从工程应用角度上,它不足以防止工程结构的破坏。在第二次世界大战中出现的大量低应力脆断事故加速了断裂力学发展

为一门前缘学科的进程。

断裂力学学科的先导者是英国科学家 A. A. Griffith。他在 1920 年、1924 年相继发表的两篇论文^[2,3]中建立了脆断理论的基本框架。Griffith 这一划时代的贡献得益于 Inglis^[4]关于含椭圆孔无限平面介质的弹性解。在 Griffith 以后二十余年间,很多科学家在这一学科中播下了对断裂力学发展有启蒙作用的火花,但均没有上升到在 40 年代末、50 年代初 G. Irwin 等人所达到的高度。Irwin 和 Orowan 在同一历史时期内分别独立地建立了工程材料的脆性断裂理论^[5,6],提出了把 Griffith 学说应用于不局限于表面能控制的脆性断裂过程的物理基础和操作方案^①。Irwin 在 1957 年^[7]完成了应力强度因子理论的基本构架,并提出弹塑性材料的小范围屈服理论。裂纹这类规整力学边值问题的出现激发了固体力学家的热忱。复变函数和积分变换等方法在求解应力强度因子时显示出威力。1973 年,以 Tada、Paris 和 Irwin 编纂的第一本应力强度因子手册^[8]问世,标志着线弹性断裂力学趋于成熟。

弹塑性断裂的发展起步于 60 年代。英、美两国科学家在研究这一困难问题时采取了不同的切入角度。英国科学家认为弹塑性断裂过程集聚于裂纹前方的条状屈服区^②,并发展了各种断裂过程区模型,如 BCS 连续位错模型^[9]、Cottrell 的各种断裂过程区模型^[10,11]、Dugdale 的简化条状塑性区模型^[12]、Barenblatt 的内聚断裂模型^[13]等。上述模型为 Wells^[14]在 60 年代初提出以裂纹张开位移(COD)为断裂参量的想法提供了物理基础,并在 70 年代末发展为压力容器结构^[15]和承压核结构^[16]的缺陷评定标准。美国科学家则更多地继承了 Irwin 关于用应力强度因子来刻画裂纹尖端奇异场强度的思想。这一探索在 1968 年获得突破, J 积分^[17]^③ 和 HRR

① 在 Griffith 的著作中,已隐含考虑材料塑性效应的学术思想雏形。

② 前苏联科学家 Barenblatt 最早从固体物理的角度上提出这一模型。

③ J 积分是 Eshelby 在 50 年代提出的若干个能动能量守恒积分中的一个,以后由 Günther (1962) 推广至大变形情况。此外,Cherepanov 与 Rice 同时独立地提出了 J 积分,但 Rice 赋予了 J 积分在断裂力学方面最清晰和完整的解释。

场^[18,19]成为影响一代弹塑性断裂力学学者的断裂参量和奇异场分析方法。以 J 积分作为断裂准则,美国电力研究院发展了弹塑性缺陷评价的工程估算方法,称为 EPRI 方法^[20],并在 1991 年推出了一本较完整的延性断裂手册^[21],标志着弹塑性断裂力学走向成熟。

无论是条状断裂过程区的研究,还是弥散状裂纹尖端奇异场的研究都只是弹塑性断裂研究的一个方面。它们相辅相成。前者强调自裂尖发出的形变和损伤局部化过程,忽略了局部化带外的塑性耗散;后者在不发生局部化的前提下对非钝化的裂尖几何进行精确的力学分析。关于内嵌过程区的塑性耗散氛围研究是沟通这两条研究路线的一个有益努力。

本篇按线弹性断裂力学,弹塑性断裂力学和结构缺陷评定的次序来提纲挈领地概述宏观断裂力学的主要框架。

1.2 Griffith 脆断理论

Griffith^[2,3]在 20 年代初研究了玻璃、陶瓷等材料的脆断问题,试图解释这些材料的理论强度与实测强度不符的矛盾。他在研究中采取了 Inglis^[4]关于含椭圆孔无限平面介质的弹性解,并按能量平衡的观点来导出脆性材料断裂的准则。我们借助于 Bueckner (1958)^[22]的阐述来介绍 Griffith 的分析模型。

考虑图 1.1 所示的脆性介质开裂过程。为简单起见,我们讨论二维构形。材料假定为弹性各向同性,仅有杨氏模量 E 和泊桑比 ν 两个材料参数。对平面问题往往用剪切模量 μ 和一个与泊桑比有关的无量纲参数 κ 来描述。对平面应变情况, $\kappa = 3 - 4\nu$; 对平面应力情况, $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ 。图 1.1(a)表示该二维介质在无应力状态下的高度为 L 。图 1.1(b)表明该介质在位移加载 δ 下的变形,为维持这一均匀变形,介质受到竖直方向的拉应力 σ 。假想在该介质中央切开一条长度为 $2a$ 的水平走向中心裂纹 ($a \ll L$),并在裂纹表面

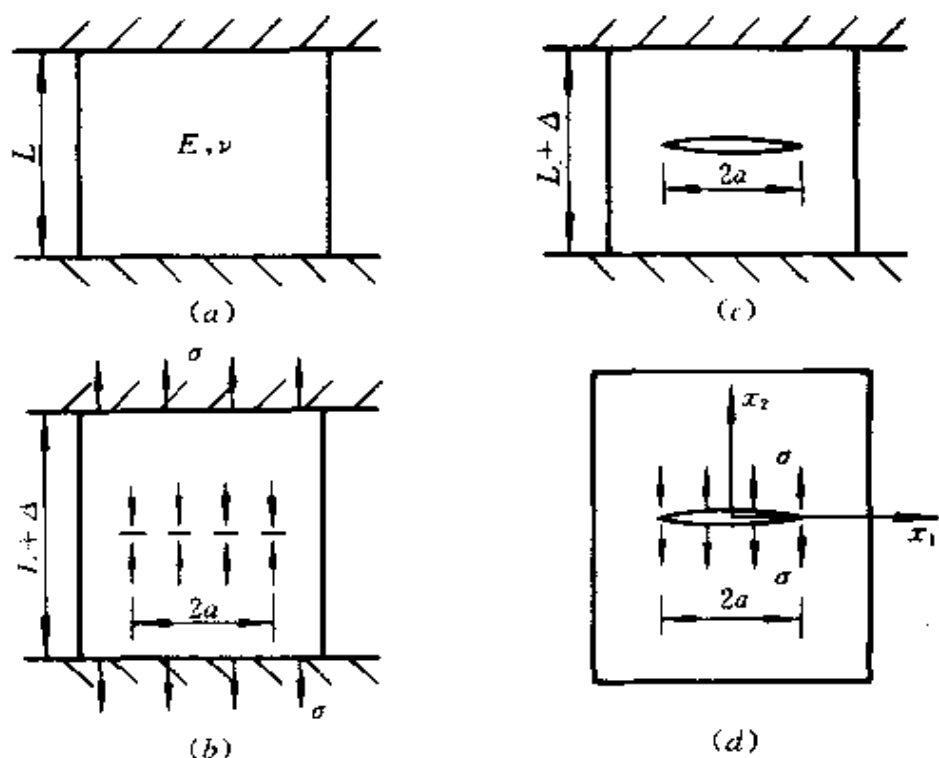


图 1.1 脆性介质开裂过程的叠加示意图

(a) 受拉伸的无裂纹板; (b) 假想裂纹与保持应力; (c) 位移加载下的自由表面裂纹; (d) 保持应力反向作用下的裂纹张开。

作用保持应力 σ , 则裂纹体仍维持原有的均匀应力状态。若保持远方位移加载不变, 但准静态地将裂纹表面的保持力释放为零, 便可实现图 1.1(c) 所示的位移加载 Δ 下的自由表面裂纹构形。由线弹性力学的叠加原理, 可知在形成 $2a$ 中心裂纹时所释放的能量等价于裂纹表面作用均匀压应力 σ 而远场为自由的构形中所蕴藏的能量, 见图 1.1(d)。对后者可写出热力学第一定律为

$$\frac{d}{dt}(U + T + \Gamma) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (1.1)$$

式中, U 为储存在介质中的内能; T 为动能; Γ 为表面能; \dot{W} 为外力功率; \dot{Q} 为传热率。记号 \dot{W} 和 \dot{Q} 在这里并不表示全微分。若断裂过程中的总体热交换效果可忽略(近似绝热假设), 则 $\dot{Q} \approx 0$ 。对准静态过程(即裂纹扩展速率远小于应力波速), 有 $T \approx 0$ 。对图 1.1

所示的固定位移加载下的断裂,有 $\dot{W} = 0$ 。若介质为弹性,则 U 等同于弹性应变能 U_e 。若上述假设均成立,式(1.1)简化为

$$\frac{d}{dt}(U_e + \Gamma) = 0 \quad (1.2)$$

对图 1.1(d)所示情况,易于求出

$$\Gamma = 4aB\gamma \quad (1.3)$$

式中, B 为板厚; γ 为单位表面能或表面张力;对不同材料可在物理学手册中查到。参照图 1.1(d),断裂过程中所释放的应变能(用 $-U_e$ 表示)可由虚功原理算出为

$$-U_e = 4B \int_0^a \int_0^{x_1} \tilde{\sigma} d\tilde{u}_2 dx_1 = 2B\sigma \int_0^a u_2(x_1) dx_1 \quad (1.4)$$

上式第二步的推导利用了加载过程中裂纹面法向位移 \tilde{u}_2 与裂纹面均匀应力 $\tilde{\sigma}$ 的正比关系。 $u_2(x_1)$ 为在最终应力 σ 下裂纹面的法向位移,可由线弹性力学求解为(参阅 1.8 节)

$$u_2(x_1) = \frac{\sigma}{4\mu} (\kappa + 1) \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad |x_1| \leq a \quad (1.5)$$

将式(1.5)代入式(1.4)并进行积分运算,便得到 Griffith 经过修正后的结果^[3]

$$-U_e = \frac{\kappa + 1}{8\mu} \pi a^2 B \sigma^2 \quad (1.6)$$

若考虑加载端位移恒定时裂纹半长从 a 到 $a + da$ 的微小扩展,则能量平衡式(1.2)中的全导数 $\frac{d}{dt}$ 可化为 $\dot{a} \frac{d}{da}$ 。将式(1.3)与式(1.6)代入式(1.2)可得

$$2\gamma = \frac{\kappa + 1}{8\mu} \sigma^2 \pi a = \frac{\sigma^2 \pi a}{E'} \quad (1.7)$$

对平面应力情况 $E' = E$,对平面应变情况 $E' = E/(1-\nu^2)$ 。对任一固定材料, γ, μ, κ (或 γ, E') 为已知。因此式(1.7)定义了裂纹临界扩展条件下应力 σ 与裂纹半长 a 之间必须满足的一个关系。可写出裂纹临界扩展的 Griffith 判据为

$$a_{cr} = \frac{2E'\gamma}{\pi\sigma^2} \quad \text{或} \quad \sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi a}} \quad (1.8)$$

式中, a_c 表示在应力 σ 下的临界裂纹半长; σ_c 表示裂纹半长为 a 时的临界应力。式(1.7)或式(1.8)的关键在于: Griffith 脆断判据包括裂纹长度。

Griffith 还发现, 若将式(1.7)改写为

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E' \gamma} \quad (1.9)$$

则方程式右端纯粹为材料参数组合, 对同一材料它应为常数。因此, 方程式左端的载荷与裂纹几何参数组合亦应为常数。从这一意义上来说, Griffith 已接近于发现应力强度因子理论(见第 1.7 节)。式(1.9)的左端就是后文中的应力强度因子 K , 而右端就是材料断裂韧性 K_c 。为验证式(1.9), Griffith 对含裂纹玻璃泡进行了充压实验。他用薄膜封住半长为 a 的裂纹的内壁面, 并按薄壳的膜应力理论由压强 p 导出 σ 。Griffith 发现: 在 a 的一定变化范围内, 载荷—几何组合参数 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 在玻璃泡破裂时确实近似为常数。这样, 材料的破坏强度不仅与应力有关, 也与缺陷尺寸有关。

Griffith 进一步测量了玻璃的弹性常数 E 和 ν , 并把高温下测得的表面张力 γ 值外推至室温。于是他可以确切地定出式(1.9)右端的值, 并检验该值是否与玻璃破裂时的 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 组合相等。在当时的实验条件下, 这样的定量比较从学科意义和实验技术上都是划时代的。Griffith 发现, 他所测得的式(1.9)右端值大约为其左端预测值的 60%。

Griffith 理论揭示了脆断过程受控于一个称之为能量释放率的物理参量

$$G = - \left. \frac{\partial U_e}{\partial A} \right|_D = - \frac{1}{2B} \left. \frac{\partial U_e}{\partial a} \right|_D \quad (1.10)$$

式中, 符号 G 是为了纪念 Griffith; A 代表面积。 G 的量纲为 N/m , 代表单位厚度上的裂纹扩展力, 它是一种广义能量力。 G 与载荷、裂纹几何、材料性能和应力状态有关。对含半长为 a 中心裂纹的无穷大平板, 可将式(1.6)代入式(1.10)得

$$G = \frac{\sigma^2}{E'} \pi a \quad (1.11)$$

同理,可将材料对裂纹临界扩展的抗力定义为

$$G_c = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} = 2\gamma \quad (1.12)$$

其中第二个等式只对理想脆断过程成立。式(1.12)所定义的临界裂纹扩展力是一个可由实验确定的材料性质。Griffith 起裂准则可写为

$$G \begin{cases} < & \text{不起裂} \\ = & \text{临界状态} \end{cases} G_c \quad (1.13)$$

即当 $G < G_c$ 时,裂纹不会起裂; $G = G_c$ 是裂纹起裂扩展的必要条件,这时裂纹处于临界状态。对平衡态静止裂纹, G 不可能超出 G_c 。

当裂纹处于临界状态时,需要利用下述稳定性条件来判定该裂纹呈失稳扩展还是扩展中止

$$\frac{\partial G}{\partial a} \begin{cases} > & \text{失稳扩展} \\ = & \text{随遇平衡} \\ < & \text{稳定裂纹} \end{cases} \frac{\partial G_c}{\partial a} \quad (1.14)$$

该式的左端由力学分析决定,而右端标志了材料的断裂阻力。对理想脆断,式(1.14)的右端为零。对其他断裂过程,将 G_c 随 a 的变化称为材料的断裂阻力曲线。

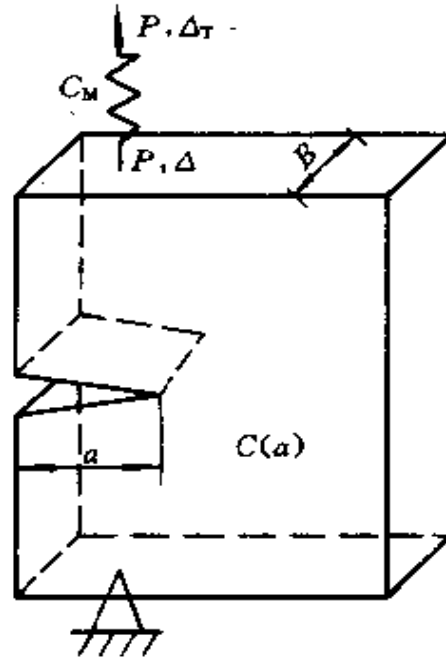
可用柔度标定的方法将上述中心裂纹无限大板在恒定位移加载下的分析拓展到其他二维几何和非位移恒定加载情况,见 Hutchinson^[23]。图 1.2 示出了一般加载条件下的任选二维裂纹构形。图中, P 与 Δ_T 为试验机上读出的载荷与位移; P 与 Δ 为试件的实际载荷与端点位移; C_M 为试验机柔度,用来定量地描述加载方式; a 为裂纹长度; $C(a)$ 表示与裂纹长度有关的试件柔度,它与加载系统和载荷大小无关,仅由试件几何和弹性常数确定。对任何线弹性材料的二维试件,仅需一次柔度标定便可得到 $C(a)$ 曲线。

当 Δ_T 给定时,其传递载荷 P 为

$$P = \frac{\Delta_T}{C(a) + C_M} \quad (1.15)$$

而试件加载点位移为

$$\Delta = PC(a) = \frac{C(a)}{C(a) + C_M} \Delta_T \quad (1.16)$$

图 1.2 G 的柔度标定

若 $C_M = 0$, 则由式(1.16)有 $\Delta = \Delta_T$, 即刚性机加载的情况。若 $C_M \rightarrow \infty$, 则由式(1.15)有 $P \rightarrow \frac{\Delta_T}{C_M}$, 这时载荷 P 与裂纹长度和试件几何无关, 相当于呆载荷(即完全柔性机)的情况。其他 C_M 值表示从刚性机至完全柔性机之间的过渡加载方式。

整个加载系统的势能为

$$\Pi = U_e - W = \frac{1}{2} P \Delta_T = \frac{1}{2} \frac{\Delta_T^2}{C(a) + C_M} = \frac{1}{2} (C(a) + C_M) P^2 \quad (1.17)$$

式中, W 为外载所做的功。在推导式(1.17)时用到了材料的线弹性假设和式(1.15)。

在一般加载条件下, 能量释放率可定义为

$$G = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A} \right)_{\Delta_T} = - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right)_{\Delta_T} \quad (1.18)$$

这里不出现式(1.10)中的 $\frac{1}{2}$ 因子, 因为式(1.18)中的 a 是裂纹的全长, 而非半长。综合上述两式可得 G 的柔度标定公式

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (1.19)$$

G 仅与试件形状和载荷大小有关,而与加载方式(即 C_M 值)无关。

我们继而讨论在一般加载方式下的裂纹扩展稳定性。在 Δ_T 固定的情况下,将式(1.19)对裂纹长度 a 求导可得

$$\left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|_{\Delta_T} = \frac{P^2}{2B} \left[\frac{d^2 C}{da^2} - \frac{2}{C + C_M} \left(\frac{dC}{da} \right)^2 \right] \quad (1.20)$$

在推导上式中利用了式(1.15)。将式(1.20)代入式(1.14)可得到一般加载条件下的裂纹稳定性判断式

$$\frac{d^2 C}{da^2} - \frac{2}{C + C_M} \left(\frac{dC}{da} \right)^2 \begin{matrix} > \frac{2B}{P^2} \frac{\partial G_0}{\partial a} & \text{失稳扩展} \\ < & \text{随遇平衡} \\ & \text{稳定裂纹} \end{matrix} \quad (1.21)$$

对理想脆断过程,式(1.21)的右端为零。由此可见,裂纹扩展的稳定性与加载方式有关。式(1.21)左端第2项(不计负号)恒为正,且当 $C_M = 0$ 时取最大值,当 $C_M = \infty$ 时取最小值。所以, C_M 值越大,越容易实现裂纹失稳扩展。

Griffith 在他的经典性著作中^[2]还讨论了如何修正上述脆断理论而适用于非理想脆性材料的理论设想。但该设想的实施却由 Irwin^[5,7]和 Orowan^[6]完成。Irwin 论证了若下述假设成立:

①塑性变形仅局限于裂纹尖端(即塑性区尺寸远小于 a 或其他特征长度尺寸);

②裂纹扩展所释放的机械能大部分消耗于裂纹尖端的塑性变形功;

③塑性功的大小足以表征材料的断裂性能;

就可以把 Griffith 脆断理论推广到工程准脆性材料。这时材料的临界裂纹扩展抗力由式(1.12)变为

$$G_c = 2\gamma + \gamma_F \quad (1.22)$$

式中, γ 仍代表表面张力; γ_F 表示每单位裂纹长度扩展时在断裂过程区内消耗的塑性变形功。通常 γ_F 比 γ 大二至三个数量级。这时临界裂纹长度和临界断裂应力表达式(1.8)可改写为

$$a_{cr} = \frac{E'(2\gamma + \gamma_F)}{\pi\sigma^2} \approx \frac{E' \gamma_F}{\pi\sigma^2}, \quad \sigma_{cr} = \sqrt{\frac{E'(2\gamma + \gamma_F)}{\pi a_{cr}}} \approx \sqrt{\frac{E' \gamma_F}{\pi a_{cr}}} \quad (1.23)$$

Orowan^[6]在显微观察中确实看到了裂纹面表层的塑性流动,并给出了形成 γ_p 的物理机理和预测公式。Irwin的工作不侧重于探讨 γ_p 的物理机制,而在于说明上述概念的引入可导致一个将Griffith脆断理论应用于工程准脆性材料的操作方案,而 G_c 值的确定则可按唯象学方法对具体材料用柔度标定法得到。

1.3 弹性力学基本方程

本节概述三维小变形条件下弹性力学的基本方程。三维体的一般构形见图1.3。在体域 V 内的三维位移、应变和应力场分别记为 u_i, ε_{ij} 和 σ_{ij} ,它们均为坐标 x_i 的函数。本书中拉丁字母指标的值域从1到3。

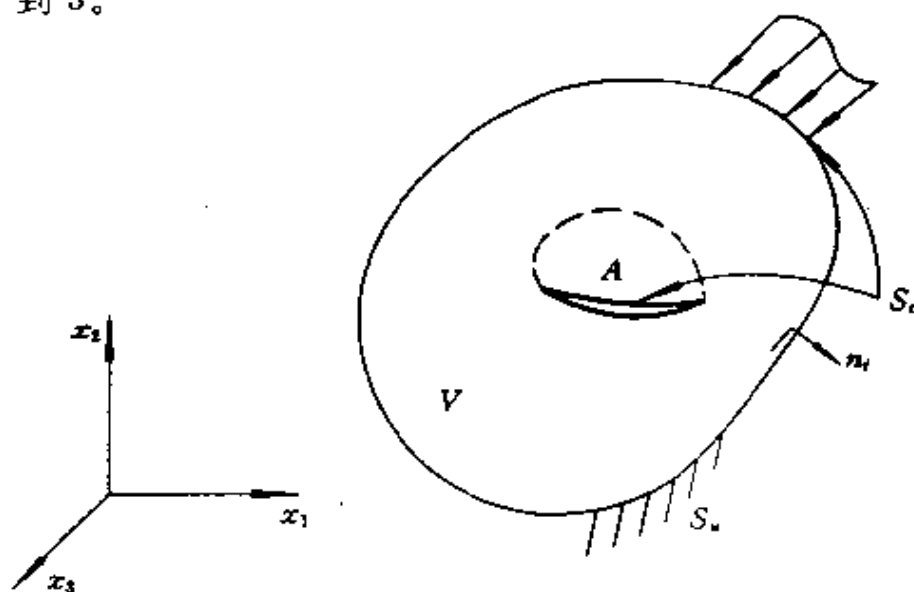


图 1.3 受载三维物体构形

对时间与空间的求导运算简记为

$$\frac{\partial}{\partial t} () = (\dot{ }), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} () = ()_{,i} \quad (1.24)$$

在域 V 内所需满足的场方程有

(1) 线动量守恒方程(牛顿第二定律)

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.25)$$

式中, f_i 为单位体积上的体力; ρ 为密度; 重复拉丁指标从 1 到 3 求和。

(2) 动量矩守恒方程

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.26)$$

即应力为二阶对称张量, 只有 6 个独立分量。

(3) 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.27)$$

即应变张量亦为二阶对称张量, 由对称化的位移梯度组成。

(4) 本构方程。若考虑均匀各向同性弹性体, 则有下述广义 Hooke 定律

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.28)$$

式中, δ_{ij} 为 Kronecker delta。Lamè 弹性常数 λ, μ 与 E, ν 的关系为

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.29)$$

方程组(1.25)到(1.28)给出了三维各向同性弹性体的全部定解方程。该控制方程的椭圆性条件为 $E > 0, -1 < \nu \leq \frac{1}{2}$, 此时应变能

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (1.30)$$

恒为正。

设体域 V 的全部边界为 $S = \partial V$, 且 S 为位移边界 S_u 与力边界 S_f 的非交直和, 见图 1.3。边界条件可写为

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } S_u \text{ 上}, \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{在 } S_f \text{ 上} \quad (1.31)$$

式中 n_i 为单位外法线向量, \bar{u}_i 和 \bar{t}_i 分别为边界上的给定位移和面力, 在自由裂纹表面上 \bar{t}_i 为零。

三维弹性体的机械势能可写为

$$\Pi = U_e - W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V f_i u_i dV - \int_S \bar{t}_i u_i dS \quad (1.32)$$

定义力加载参数 P 与位移加载参数 Δ , 使得

$$\bar{t}_i = P \cdot T_i, \quad \bar{u}_i = \Delta \cdot U_i \quad (1.33)$$

式中归一化的力加载模式 T_i 沿 S_i 变化但与载荷幅值无关, 归一化的位移加载模式 U_i 沿 S_i 变化但与位移幅值无关。利用这两个广义加载参数可形式上把式(1.32)写为

$$\Pi = U_e(\Delta, A) - P\Delta = \Pi(P, A) \quad (1.34)$$

控制 P 加载并不计体力时, 其功共轭意义上的广义位移为

$$\Delta = \int_{S_i} T_i u_i dS \quad (1.35)$$

控制 A 加载时, 其功共轭意义上的广义力为

$$P = \int_{S_i} \sigma_{ij} n_j U_i dS \quad (1.36)$$

在裂纹面积参数 A 固定时, 利用式(1.30)、式(1.32)、式(1.35)、式(1.36)和虚功原理可得

$$P = \left. \frac{\partial U_e}{\partial \Delta} \right|_A, \quad \Delta = - \left. \frac{\partial \Pi}{\partial P} \right|_A \quad (1.37)$$

在 Δ 或 P 固定但 A 变化时, 可利用上述结果推得能量释放率为

$$G = - \left. \frac{\partial U_e}{\partial A} \right|_P = - \left. \frac{\partial \Pi}{\partial A} \right|_P \quad (1.38)$$

1.4 裂纹尖端的二维渐近方程和断裂分类

参照图 1.4, 在光滑裂纹前缘 l 上的某一点 O 处建立局部直角

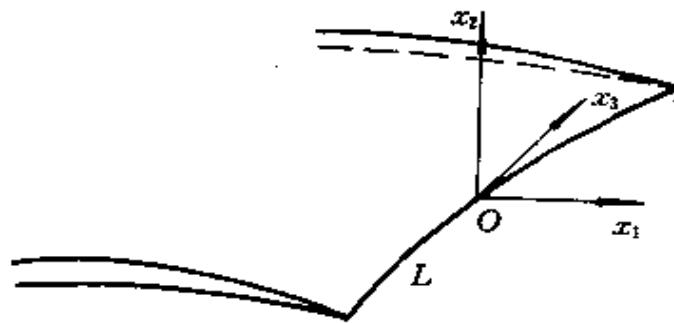


图 1.4 光滑裂纹前缘处 O 点的局部直角坐标系

坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 。其中 x_3 恰与前缘 l 相切, x_1 垂直于 x_3 且相切于裂纹面, x_2 垂直于裂纹面。

我们现在考虑三维线弹性力学基本方程(1.25)~(1.28)在裂纹尖端处的渐近表达式。当无限靠近 l 时,有

$$|f_i| < \infty, \quad (\quad)_{,3} \ll (\quad)_{,a}, \quad \bar{u}_i \ll u_{i,a\beta} \quad (1.39)$$

本书中所有希腊字母下标的值域为从 1 到 2。式(1.39)的最后一式仅适用于裂纹扩展速度远小于弹性波速的情况。满足于该条件的断裂行为称为准静态扩展裂纹,否则称为动态扩展裂纹,对后者将在第 1.9 节中进行讨论。将关系式(1.39)代入方程(1.25)至(1.28)并重新整理,可得下述两组方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\beta} &= 0 & \sigma_{3\beta,\beta} &= 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) & \varepsilon_{3\alpha} &= \frac{1}{2}u_{3,\alpha} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} & \sigma_{3\alpha} &= 2\mu\varepsilon_{3\alpha} \\ \varepsilon_{33} &\ll \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

场变量 $\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}, u_{\alpha}; \sigma_{3\alpha}, \varepsilon_{3\alpha}, u_3$ 均主要依赖于 x_1 和 x_2 。方程(1.40)中所示的两套方程是完全解耦的,左边一套对应于近似平面应变问题,右边一套对应于近似反平面剪切问题。也就是说:当距离光滑裂纹前缘足够近时,三维弹性力学方程可渐近地解耦为一个平面应变问题和一个反平面剪切问题。按 Irwin 的话来讲:“当贴近于裂尖时,你可感觉到其尖端奇异场,而问题简化为二维”。

与上述渐近分析不一致的例子包括:

(1) 薄板断裂问题。这时应力沿板厚的变化很快,所以式(1.39)中的第二渐近条件不能成立。杨卫与 Freund(1985)^[24]证明在离裂尖一半板厚以外的区域中,近似存在着平面应力场;而在离裂尖一半板厚以内的区域为三维应力状态,离面位移 u_3 在裂尖处有界但却不等于零。

(2) 裂纹弯折或裂纹与自由表面相交处。此时的应力状态变为角点附近的应力场,可在角点处取球坐标渐近展开。关于这一问题的详细分析计算可参阅 Ghahremani 和 Shih(1992)^[25]。

式(1.40)左侧所示的平面问题还可以继续分解为对称和反对称两种情况。不失一般性,总可在上述渐近分析中截取一个包含裂尖且相对于裂纹对称的二维构形。取裂纹延长线为 x_1 轴,而 x_2 轴与之垂直且指向上方。任何变量场 $y(x_1, x_2)$ 都可以分解为与裂纹延长线呈对称和反对称的两部分 y^s 和 y^a

$$y(x_1, x_2) = y^s(x_1, x_2) + y^a(x_1, x_2) \quad (1.41)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} y^s(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} [y(x_1, x_2) + y(x_1, -x_2)] \\ y^a(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} [y(x_1, x_2) - y(x_1, -x_2)] \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

所有反对称量在裂纹延长线上为零。此外,求导和投影算子 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, n_1\right)$ 维持所作用场量的对称性;而求导和投影算子 $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, n_2\right)$ 颠倒所作用场量的对称性。于是不难证明式(1.40)左列方程的 8 个场变量可分解为两组互相解耦的问题

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^s, \sigma_{22}^s, \sigma_{12}^s & \quad \sigma_{11}^a, \sigma_{22}^a, \sigma_{12}^a \\ \varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{22}^s, \varepsilon_{12}^s & \quad \varepsilon_{11}^a, \varepsilon_{22}^a, \varepsilon_{12}^a \\ u_1^s, u_2^s & \quad u_1^a, u_2^a \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

左边一组称为 I 型问题,右边一组称为 II 型问题。综合式(1.40)和式(1.43),断裂问题可渐近地分为三种类型,如图 1.5 所示。它们

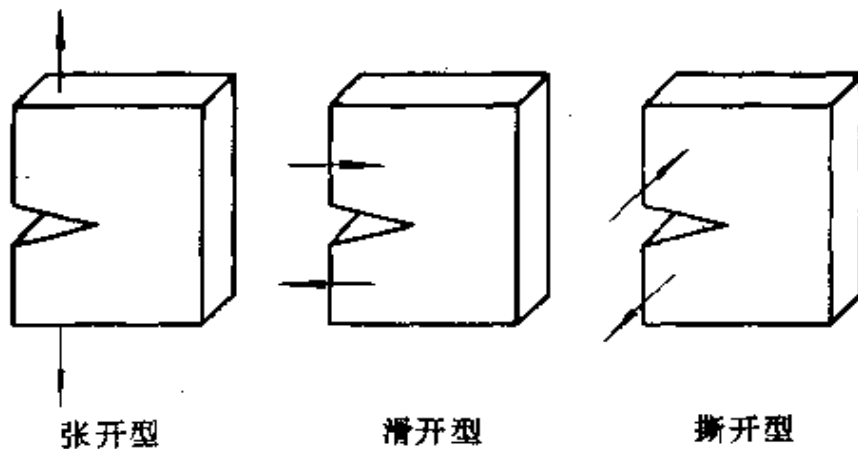


图 1.5 三种裂尖断裂类型

分别称为平面问题 I 型(张开型)、平面问题 II 型(滑开型)和反平面剪切 III 型(撕开型)。

1.5 平面问题和反平面问题的复变函数法

1.5.1 反平面剪切问题

反平面剪切问题的全部场方程由式(1.40)右列给出。综合消元后,可得

$$\nabla^2 u_3 = 0 \quad (1.44)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 为 Laplace 算子。式(1.44)表明离面位移 u_3 是调合函数。由解析函数论可知, u_3 可由复变量 $z = x_1 + ix_2$ ($i = \sqrt{-1}$) 的解析函数的实部或虚部来表示。例如我们可取解析函数 ϕ 为

$$\phi(z) = u_3 + i\psi_3 \quad (1.45)$$

式中,虚部 ψ_3 称之为应力函数。由 $\sigma_{3\alpha} = \mu u_{3,\alpha}$ 和柯西-黎曼条件可得

$$\sigma_{31} = \mu\psi_{3,2}, \quad \sigma_{32} = -\mu\psi_{3,1}, \quad \nabla^2\psi_3 = 0 \quad (1.46)$$

由之可构造复应力、复应变为

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = \mu\phi'(z), \quad \varepsilon_{31} - i\varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\phi'(z) \quad (1.47)$$

位移边界条件为

$$\operatorname{Re}\{\phi\} = \bar{u}_3, \quad z \in S_n \quad (1.48)$$

力边界条件为

$$\operatorname{Im}\{\phi\} = \frac{1}{\mu} \int_{l_0}^{l(z)} \bar{l}_3 dl, \quad z \in S_t \quad (1.49)$$

上述两式中, \bar{u}_3 与 \bar{l}_3 分别表示在边界上给定的位移和面力; l 为沿边界的弧长。式(1.49)中积分的起点 l_0 为一无关紧要的常数。综上所述,反平面问题的求解成为如图 1.6 所示的典型解析函数混合边值问题。

反平面剪切问题的应变能密度为

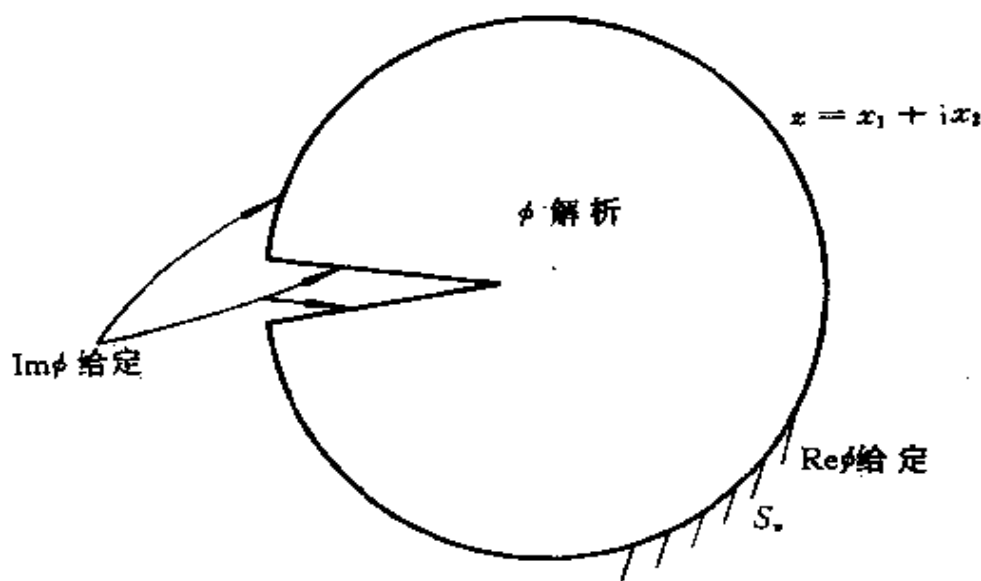


图 1.6 反平面剪切问题的数学提法

$$w = \sigma_{3a}\varepsilon_{3a} = \frac{\mu}{2} |\phi'(z)|^2 \quad (1.50)$$

在上述各式中, $\text{Re}\{\cdot\}$ 代表取实部, $\text{Im}\{\cdot\}$ 代表取虚部, $|\cdot|$ 代表取绝对值。

1.5.2 平面问题

现转而讨论式(1.40)左列方程所表征的平面问题。关于该问题复变函数法求解的细节可参阅 Muskhelishvili 的经典著作^[26]。为将该方法拓展至平面应力问题,可将式(1.40)中左列方程组中的后两个方程换为

$$\varepsilon_{a\beta} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{a\beta} - \frac{3-\kappa}{4} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{a\beta}) \quad (1.51)$$

上式对平面应变与平面应力均适用。引入二维 Airy 应力函数 F

$$\sigma_{a\beta} = \nabla^2 F \delta_{a\beta} - F_{,a\beta} \quad (1.52)$$

可使式(1.40)左列第一个方程自动满足。因此应力张量 $\sigma_{a\beta}$ 可由一标量函数 F 来描述。由上式可知面内应力和 σ_{aa} 为

$$\sigma_{aa} = \nabla^2 F \quad (1.53)$$

由式(1.40)左列第二个方程(即几何方程)可得下述协调方程

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0 \quad (1.54)$$

将式(1.51)代入上述方程,并利用平衡方程来化简可得

$$\nabla^2 \sigma_{\alpha\alpha} = \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (1.55)$$

于是可知: $\sigma_{\alpha\alpha}$ 是调合函数, F 是双调合函数。利用解析函数理论,可写出双调合方程的通解为^[26]

$$F = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z}\varphi(z) + \int \psi(z) dz \right\} \quad (1.56)$$

式中, φ, ψ 均为复变量 z 的解析函数, 上加一杠表示复共轭。

将式(1.56)代入式(1.52)可得下述复应力组合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\alpha} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \\ \sigma_d &= \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12} = \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

式中, σ_m 为面内平均应力, 相当于二维 Mohr 圆的圆心; σ_d 为复偏斜应力, 相当于二维 Mohr 圆的半径向量。

将式(1.57)代入式(1.51)可得下述复应变组合表达式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\kappa - 1}{4\mu} (\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) \\ \varepsilon_d &= \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} + i\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \} \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

式中, ε_m 为面内平均应变; ε_d 为复偏斜应变, 它们在应变 Mohr 圆上有类似的意义。将应变表达式积分, 并经过较长计算可得下述复位移表达式

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (1.59)$$

平面问题的应变能密度为

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \sigma_m \varepsilon_m + \sigma_d \bar{\varepsilon}_d \\ &= \frac{1}{2\mu} \{ |\varphi' + \bar{z}\varphi''|^2 + 2(\kappa - 1)[\operatorname{Re}\varphi'(z)]^2 \} \quad (1.60) \end{aligned}$$

在上述基本公式下, 对各类平面边值问题的复变函数提法可参见 Muskhelishvili^[26]。

若考虑图 1.7 所示的极坐标转换 $z = re^{i\theta}$, 极坐标下的位移与

应力组合为

$$\left. \begin{aligned} u_r + iu_\theta &= e^{-i\theta}(u_1 + iu_2) \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2\sigma_m \\ \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2} + i\sigma_{r\theta} &= e^{2i\theta}\sigma_d \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

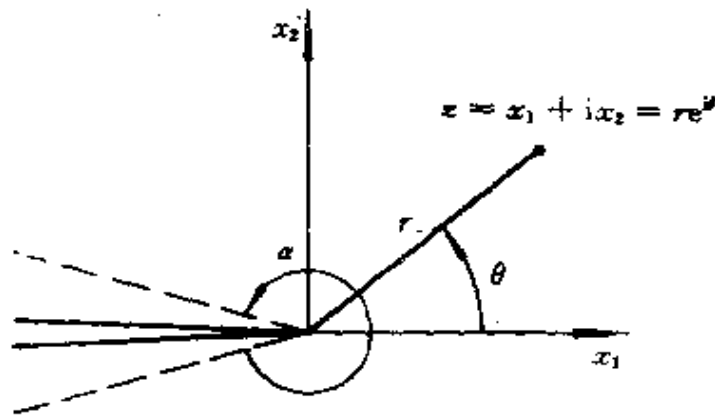


图 1.7 极坐标

1.6 复应力特征展开——I、II、III型

1.6.1 III型裂尖场

考虑图 1.7 所示坐标,在裂尖附近可将解析函数 $\phi(z)$ 作下述特征展开

$$\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{\lambda_n} \quad (1.62)$$

由于裂纹尖端 $z=0$ 可能是 $\phi(z)$ 的枝点,所以 λ_n 不一定为整数。我们暂假定对任意整指标 n 均有 λ_n 为实数,且 $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ 。将式 (1.62) 代入式 (1.47) 可得复应力组合为

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n C_n z^{\lambda_n - 1} \quad (1.63)$$

利用裂纹上下岸面力为零的边界条件

$$\sigma_{32} |_{\theta = \pm\pi} = 0 \quad (1.64)$$

并将特征展开式 (1.63) 代入可得

$$C_n e^{\pm 2\lambda_n r} - \bar{C}_n = 0 \quad (1.65)$$

关于复常数 C_n 的这对方程存在非平凡解的条件为 λ_n 满足下述特征根方程

$$e^{4i\lambda_n} = 1 \quad \text{或} \quad \lambda_n = \frac{n}{2} \quad (1.66)$$

由式(1.50), 在以裂尖为中心, 半径为 ρ 的圆域内所具有的应变能为^①

$$U_n(\rho) = \int_0^\rho \int_{-\pi}^\pi w r dr d\theta = \frac{\mu}{2} \int_0^\rho r dr \int_{-\pi}^\pi |\phi'(z)|^2 d\theta \quad (1.67)$$

将式(1.62)、式(1.66)代入可得上式在 ρ 趋于零时的主项为

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U_n(\rho) = \frac{\pi m^2}{4} \mu C_n \bar{C}_n \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\rho r^{m-1} dr \quad (1.68)$$

式中, m 为整数。我们要求该极限有界, 即裂尖处所储存的能量不为无穷。由这一要求可得 $m \geq 0$ 。由式(1.63)、式(1.66)可见, 对应于 $m=0$ 的解为零应力解, 代表刚体平移。因此若刚体平移模式可由一定位移边界条件排除的话, 便有

$$m = 1 \quad (1.69)$$

这时式(1.62)简化为

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n i^n z^{\frac{n}{2}} \quad (1.70)$$

后一等式由式(1.65)所得, α_n 为实数。

下面讨论展开式(1.70)的前两项, 取

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{\text{I}}}{\mu} \quad (1.71)$$

式中, K_{I} 为 I 型应力强度因子(今后所有应力强度因子均具有 $N/m^{3/2}$ 量纲), 则裂纹尖端的主导场为

$$u_3 = \frac{K_{\text{I}}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

① 不失一般性, 在以后二维分析中我们均假定板厚为单位长。

$$\sigma_{33} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{33}(\theta) \quad \Sigma_{31} = -\sin \frac{\theta}{2} \quad \Sigma_{32} = \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.72)$$

$\Sigma_{33}(\theta)$ 称为Ⅲ型问题的普适角分布函数。式(1.72)表明应力在裂纹尖端具有 $-\frac{1}{2}$ 次奇异性。奇异场的强度 K_{I} 无法由渐近方法决定,它与载荷和裂纹几何有关。

展开式(1.70)中 $n=2$ 的项对应于图1.8所示均匀剪切

$$u_3 = -\alpha_2 x_1, \quad \sigma_{31} = -\alpha_2 \mu, \quad \sigma_{32} = 0 \quad (1.73)$$

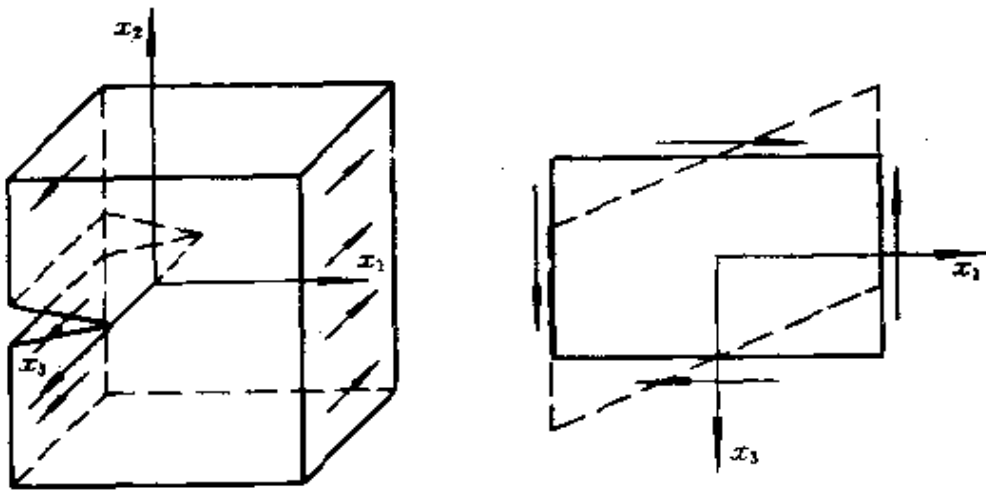


图 1.8 Ⅲ型问题的均匀剪切模式

1.6.2 I—Ⅲ型裂尖场

我们按上一小节的方法来讨论 I—Ⅲ型裂纹尖端奇异场。在图 1.7 所示极坐标裂纹尖端处,解析函数 φ 和 ψ 的特征展开式为

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} z^{\lambda_n} \quad \lambda_{n+1} > \lambda_n \quad (1.74)$$

式中,设 λ_n 为实数。对一般角点问题(见图 1.7 中虚线),或其他边界条件下的裂纹和角点问题, λ_n 不一定为实数。对各种边界条件组合和任意角点包角 α ,杨卫与余寿文^[27]统一讨论了平面问题、古典板弯曲问题和 Reissner 板弯曲问题,得到了各种情况下的 λ 值。角点奇异性的研究由 Williams(1957)^[28]开创。他首先用实特征展

开的方法讨论了平面问题的角点奇异性,这一研究思想推进了断裂力学奇异场研究的发展。本小节所叙述的方法比 Williams 的原有方法简便。对式(1.74)这类特征展开式的收敛性研究还未能提出有效的收敛判据。

对图 1.7 所示的裂纹,其裂纹面的边界条件为

$$(\sigma_{22} + i\sigma_{12})|_{\theta=\pm\pi} = (\sigma_m + \sigma_d)|_{\theta=\pm\pi} = 0 \quad (1.75)$$

将式(1.57)和式(1.74)代入,并经过类似于上小节的计算,可得与式(1.66)完全相同的特征值方程。复常数 A_n 与 \bar{A}_n 之间由下式联系

$$B_n = -\frac{n}{2}A_n - (-1)^n \bar{A}_n \quad (1.76)$$

在以裂尖为中心,半径为 ρ 的圆域内所具有的应变能为

$$U_e(\rho) = \int_0^\rho \int_{-\pi}^\pi w r dr d\theta \quad (1.77)$$

式中, w 由式(1.60)给出。若要求 $U_e(\rho)$ 在 $\rho \rightarrow 0$ 时有界,则必需 $m \geq 0$ 。而 $m = 0$ 的解同样对应于零应力解(即在 $x_1 - x_2$ 平面内的刚体平移和转动)。因此,式(1.69)对平面问题亦成立,而式(1.74)可简化为

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ -\frac{n}{2}A_n - (-1)^n \bar{A}_n \end{Bmatrix} z^n \quad (1.78)$$

首先讨论主项 $n = 1$,取平面问题复应力强度因子为

$$K = K_I + iK_{II} = \sqrt{2\pi A_1} \quad (1.79)$$

式中, K_I 和 K_{II} 分别为 I 型和 II 型应力强度因子,量纲均为 $N/m^{3/2}$,对应于面内对称和反对称变形模式下的裂纹尖端场强度。对 I 型问题,式(1.78)中的首项简化为

$$\varphi = K_I \sqrt{\frac{z}{2\pi}}, \quad \psi = \frac{K_I}{2} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \quad (1.80)$$

将上式代入式(1.57)和式(1.59)可得

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta), \quad \sigma_{33} = \begin{matrix} 0 & \text{平面应力} \\ \nu\sigma_{\alpha\alpha} & \text{平面应变} \end{matrix}$$

$$u_a = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} U_a^I(\theta; \kappa) \quad (1.81)$$

式中

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^I \\ \Sigma_{22}^I \\ \Sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} U_1^I \\ U_2^I \end{Bmatrix} = (\kappa - \cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.82)$$

为普适的 I 型角分布函数。

对 II 型问题, 式(1.78)中的首项简化为

$$\varphi = -iK_{II} \sqrt{\frac{z}{2\pi}}, \quad \psi = \frac{3}{2}iK_{II} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \quad (1.83)$$

类似可得裂纹尖端应力—位移场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta) \\ \sigma_{33} &= 0 \quad \text{平面应力} \\ &= \nu\sigma_{\alpha\alpha} \quad \text{平面应变} \\ u_a &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} U_a^I(\theta; \kappa) \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

而 II 型普适角分布函数为

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^I \\ \Sigma_{22}^I \\ \Sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) \end{Bmatrix} \quad (1.85)$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^I \\ U_2^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3}{2}\theta \\ -(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3}{2}\theta \end{Bmatrix}$$

现讨论平面问题特征展开式(1.78)的第二项。设

$$A_2 = \frac{1}{4}\sigma_T + i\frac{2\mu}{\kappa-1}\omega \quad (1.86)$$

于是该项所对应的应力和位移场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_T \delta_{1\alpha} \delta_{1\beta} \\ u_1 + iu_2 &= i\omega z + \frac{\kappa-1}{8\mu}\sigma_T z + \frac{1}{4\mu}\sigma_T \bar{z} \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

即为刚性转动 ω 和横向应力场 σ_T 的叠加,如图 1.9 所表征。 σ_T 在文献中又称为 T 应力。平面问题前两项所构成的渐近场又称为 K - T 场。

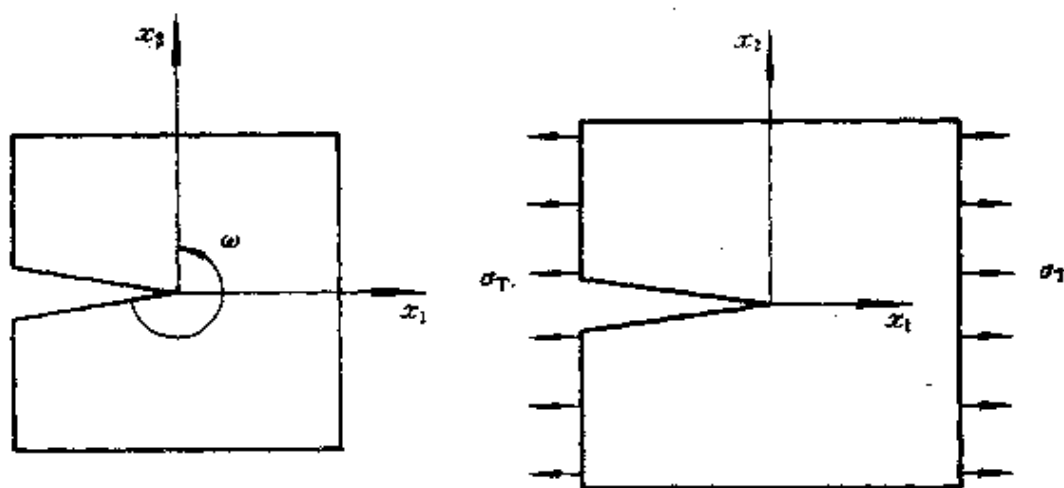


图 1.9 平面问题的二阶渐近场模式

1.6.3 线弹性裂纹尖端场小结

对线弹性各向同性材料,其裂纹尖端场可总结如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{K_I \Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{\alpha\beta}^{II}(\theta)\} + \sigma_T \delta_{1\alpha} \delta_{1\beta} + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_{3\alpha} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{3\alpha}^{III}(\theta) - \alpha_2 \mu \delta_{1\alpha} + O(\sqrt{r}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \text{平面应力} \\
 & \sigma_{33} = \begin{cases} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2\pi r}} \{K_I \Sigma_{33}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{33}^{II}(\theta)\} + \nu \sigma_1 + O(\sqrt{r}), \\ \text{平面应变} \end{cases} \\
 & u_\alpha = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{K_I U_\alpha^I(\theta; \kappa) + K_{II} U_\alpha^{II}(\theta; \kappa)\} + O(r) \\
 & u_3 = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + O(r)
 \end{aligned} \right\} \\
 \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

上式中的诸角分布函数由式(1.72)、式(1.82)和式(1.85)给出。各类应力角分布函数均与材料性质无关,且按下述形式进行归一化

$$\Sigma_{22}^I(0) = \Sigma_{12}^I(0) = \Sigma_{32}^I(0) = 1 \quad (1.89)$$

式(1.88)中的诸应力强度因子 K_I, K_{II}, K_{III} 均具有 $N/m^{3/2}$ 的量纲,它们仅取决于载荷和试件几何。由问题的线性和量纲分析可得

$$K_{I,II,III} = \sigma \sqrt{\pi a} Y_{I,II,III}(g) \quad (1.90)$$

式中, σ 为外载应力幅度; $Y_{I,II,III}$ 为 I、II、III 型问题的无量纲形因子。形因子仅与无量纲几何长度组合(缩写为 g)有关。

线弹性断裂问题在裂纹尖端多具有 $r^{-1/2}$ 奇异性(三维角点问题的奇异性可能不为 $r^{-1/2}$)。这种奇异场是由问题的数学提法(即变形前裂纹为无限尖锐,且只容许线弹性小变形模式)所决定的。 $r^{-1/2}$ 奇异场的描述仅适用于裂纹尖端附近的一个环形域。当 r 较大时,渐近分析所得到的首项将不再占优;当 r 过小时,实际问题的几何和物理非线性(如大转动、裂尖钝化、塑性变形等)使得 $r^{-1/2}$ 奇异性不再成立。我们在第 2.1 节中还要详细阐述 K 环域的概念。

对含裂纹薄板,若采用“平面应力”假定,可推得

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{-2\nu}{E \sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1.91)$$

对厚度为 B 的薄板,其上表面的离面位移为

$$u_3|_{x_3=\frac{B}{2}} = \frac{B}{2} \epsilon_{33} = -\frac{\nu B}{E \sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1.92)$$

与面内位移的有界性相反,在裂纹尖端的离面位移具有奇异性!显然与物理事实不符。通过对含裂纹薄板的准三维分析,杨卫和 Freund^[24]证明上述平面应力场只在距裂尖 $r > \frac{B}{2}$ 以外处才近似适用。在裂尖的横向收缩为一确定的非零值。图 1.10 给出了他们所计算的 u_3/B 值沿裂纹延长线的变化曲线。

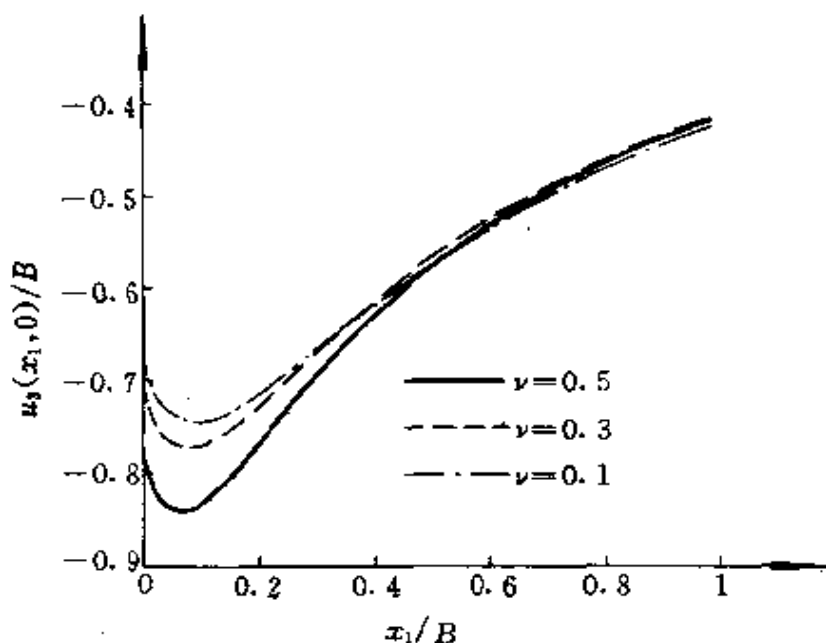


图 1.10 裂纹延长线上离面收缩随裂尖距的变化

1.7 应力强度因子理论

1.7.1 $K_{I,II,III}$ 与 G 的关系

我们在本章的讨论中建立了两套刻画线弹性断裂过程的物理量:①能量释放率 G ,它与裂纹延伸时全板的能量释放有关;②应

力强度因子 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} ，它们仅与裂纹尖端区域的场强度有关。为建立 G 与 $K_{I,II,III}$ 的关系，可考虑图 1.11 所示模型。

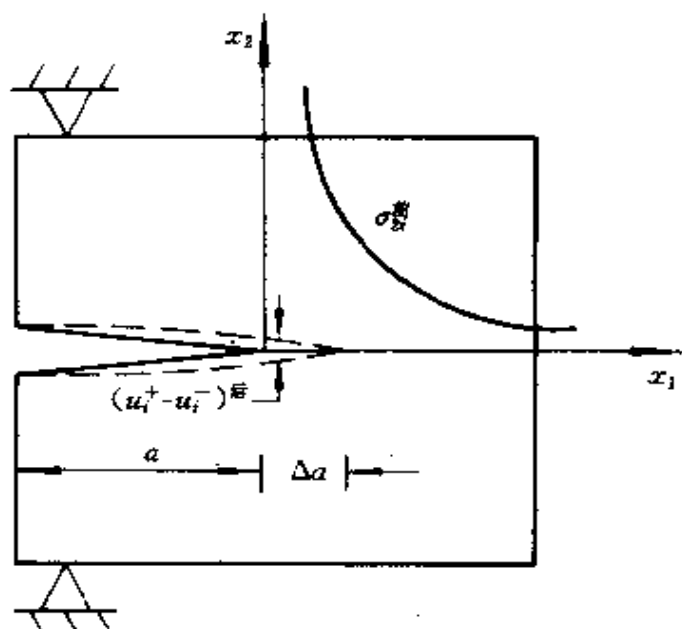


图 1.11 模拟裂纹扩展的保持力释放模型

设有一含长度为 a 裂纹的二维构形受固定位移加载。在裂纹未扩展前沿 x_1 轴的应力记为 σ_{22}^0 ，且有

$$\sigma_{22}^0 = \frac{K_M(a)}{\sqrt{2\pi x_1}} + O(\sqrt{x_1}) \quad (1.93)$$

当 i 取 1、2、3 变化时，上式中的断裂类型下标 M 取 I、II、III。裂纹扩展 Δa 的过程可由逐步释放该段的保持力（即沿 Δa 段加载 $-\sigma_{22}^0$ ）来实现。保持力释放后，新裂纹尖端后方的相对位移为

$$\begin{aligned} (u_i^+ - u_i^-)^E &= 2u_i(\Delta a - x_1, \pi) \\ &\approx \sqrt{\frac{\Delta a - x_1}{2\pi}} \frac{K_M(a + \Delta a)}{\mu} \begin{cases} \kappa + 1 & \text{I} \\ \kappa + 1 & \text{II} \\ 4 & \text{III} \end{cases} \quad (1.94) \end{aligned}$$

由图 1.11 可见，在该保持力释放过程（也就是裂纹扩展 Δa 的过程）中势能的变化为

$$\Delta \Pi = -G \Delta a = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \sigma_{2i}^{\text{III}} (u_i^+ - u_i^-)^{1/2} dx_1 \quad (1.95)$$

式中, 因子 $\frac{1}{2}$ 来自于对线性加载过程的积分。将式(1.93)与式(1.94)代入上式并取 $\Delta a \rightarrow 0$ 的极限, 可得

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (1.96)$$

于是, 已知裂纹尖端场的强度, 就可以计算出整个板内的能量释放率。

1.7.2 K_I, K_{II}, K_{III} 的计算

应力强度因子唯一地刻划了裂纹尖端场的强度, 是判定脆性材料断裂的重要参量。对一种特定的断裂类型, 裂纹尖端场由单参数完全确定。由应力强度因子可推算能量释放率。

由解析函数 φ, ψ 和 ϕ 可方便地求出 K_I, K_{II}, K_{III} 值。若将坐标原点选在裂纹尖端, 则有

$$K_{\text{III}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi x_1} \sigma_{2i}(x_1, 0) \quad (1.97)$$

式中, $i = 1, 2, 3$ 仍对应于 $M = \text{I}, \text{II}, \text{III}$ 。将复特征展开式(1.78)、式(1.79)和式(1.70)、式(1.71)代入式(1.97), 可得下述计算应力强度因子的公式

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= K_I - iK_{II} = 2 \sqrt{2\pi} \lim_{|z| \rightarrow 0} \sqrt{z} \varphi'(z) \\ K_{III} &= i\mu \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{\phi(z)}{\sqrt{z}} \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

因此, 对有些复应力函数无法闭式表达的情况, 通过式(1.98)中的极限运算却可能求得应力强度因子的闭式解。

1.7.3 平面应变断裂韧性

能量释放率 G 和应力强度因子间的关系式(1.96)是假定裂纹呈直线延伸下得到的。在 II 型和 III 型加载下裂纹扩展往往会发生拐折或分叉。对很多材料的实验观察表明, 裂纹实际的扩展路径会

逐渐转向为 I 型断裂占优的路径。此外, I 型断裂最为危险。对纯 I 型情况,式(1.96)简化为

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.99)$$

由于这一等效关系,我们可以把经 Irwin-Orowan 修正的 Griffith 准则改写为

$$K_I < K_c \quad \begin{array}{l} \text{安全} \\ \text{临界状态} \end{array} \quad (1.100)$$

式中应力强度因子 K_I 由力学分析给出,它与载荷和裂纹几何有关;而 K_c 代表了材料抗脆性起裂的能力,又称为断裂韧性。

K_c 值与试件厚度 B 有关,其关系曲线见图 1.12。当 B 很小时,断口形貌为斜剪型;当 B 取值中等时,断口形貌为中心粗糙平断面与两侧剪切唇的结合;当 B 值较大时,平直断面占优。 B 值的加大标志着平面应变状态的形成。平面应变断裂韧性 K_{Ic} 是 K_c 的稳定低值。

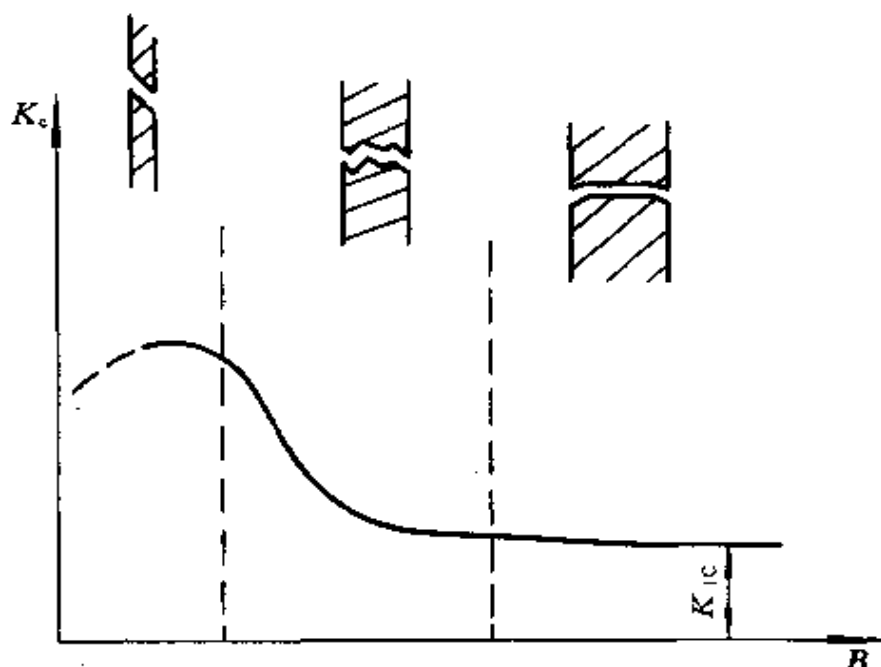


图 1.12 断裂韧性 K_c 随板厚 B 的变化

1.8 应力强度因子求解

1.8.1 Westergaard 函数法

我们在第 1.5.2 节中将平面问题的求解归结为确定两个 Kolosov-Muskhelishvili 解析函数 φ 和 ψ 。在对称和反对称问题的特例下,可利用 Westergaard 函数法进一步简化为一个解析函数的求解^[29]。

先讨论图 1.13 所示的 I 型对称问题。设 x_1 轴上开有若干条裂纹,且外载荷与 x_1 轴对称。在对称轴 x_1 上有对称条件

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in (-\infty, +\infty) \quad (1.101)$$

将复变函数表达式(1.57)第二式代入上式后得

$$\operatorname{Im}\{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}|_{x_2=0} = \operatorname{Im}\{z\varphi'(z) + \psi'(z)\}|_{x_2=0} = 0 \quad (1.102)$$

上式推导中第二步由于在实轴 x_1 上 $\bar{z} = z$ 而成立。这一代换的目的在于使该组合变为一个 z 平面解析函数组合的虚部。由于式(1.102)在整个实轴都成立,由柯西-黎曼关系,我们有

$$\{z\varphi'(z) + \psi'(z)\}|_{x_2=0} = A \quad (1.103)$$

式中, A 为任一实常数。在 Westergaard 的原始文献^[29]未能考虑非零的 A 值。这一失误被薛昌明(Sih G C)发现^[30],后又经 Eftis 等做了补充讨论。 A 值与横向 T 应力有关。 $z\varphi'(z) + \psi'(z)$ 在除裂纹外的全平面解析,且在整个实轴上连续并等于实常数 A 。由解析延拓可得

$$\psi'(z) = A - z\varphi'(z) \quad (1.104)$$

这样便建立了对称问题中两个解析函数 φ 和 ψ 之间的联系。若记

$$Z_1(z) = 2\varphi'(z) \quad (1.105)$$

为 I 型问题的 Westergaard 函数,将上述两式代入式(1.57)和式(1.59),并经一定运算后可得下述通解

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \operatorname{Re}\{Z_1\} - x_2 \operatorname{Im}\{Z_1'\} - A \\
 \sigma_{22} &= \operatorname{Re}\{Z_1\} + x_2 \operatorname{Im}\{Z_1'\} + A \\
 \sigma_{12} &= -x_2 \operatorname{Re}\{Z_1'\} \\
 2\mu_1 &= \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Re}\left\{\int Z_1 dz\right\} - x_2 \operatorname{Im}\{Z_1\} - Ax_1 \\
 2\mu_2 &= \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Im}\left\{\int Z_1 dz\right\} - x_2 \operatorname{Re}\{Z_1\} + Ax_2
 \end{aligned} \right\} (1.106)$$

为详细讨论 I 型裂纹的求解, 现讨论双轴载荷下含中心裂纹的无穷大板之特例。自由裂纹表面的边界条件可表述为

$$(\sigma_{22} + i\sigma_{21})_{x_2=0, |x_1| < a} = 0 \quad (1.107)$$

式中, a 为中心裂纹的半长。将式(1.106)代入上式可得

$$\operatorname{Re}\{Z_1(x_1)\} + A = 0 \quad |x_1| < a \quad (1.108)$$

$x_1 = \pm a$ 是 Z_1 的两个枝点, 而 $x_1 = -a$ 到 $x_1 = a$ 是联结黎曼曲面的割缝。式(1.108)的通解为

$$Z_1 = \frac{R(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - A \quad (1.109)$$

式中, $R(z)$ 为在全平面(包括裂纹)全纯的实解析函数(即 $\operatorname{Im}\{R(x_1)\} = 0$)。在 $|z| \rightarrow \infty$ 时, Z_1 趋于 $\frac{R(z)}{z} - A$; 这时无穷远处的边界条件为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_n &= -ix_2 Z_1'(z) + A = \frac{\sigma - \sigma_T}{2} \\
 \sigma_m &= \operatorname{Re}\{Z_1\} = \frac{\sigma + \sigma_T}{2}
 \end{aligned} \right\} (1.110)$$

如图 1.13 所示, σ 为无穷远处沿 x_2 方向施加的应力, 而 σ_T 为横向应力。求解这一问题可得 I 型 Westergaard 函数为

$$Z_1 = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sigma - \sigma_T}{2} \quad (1.111)$$

而 Westergaard 的原始解^[29]相当于 $\sigma = \sigma_T$ (即双轴等值拉伸)的特

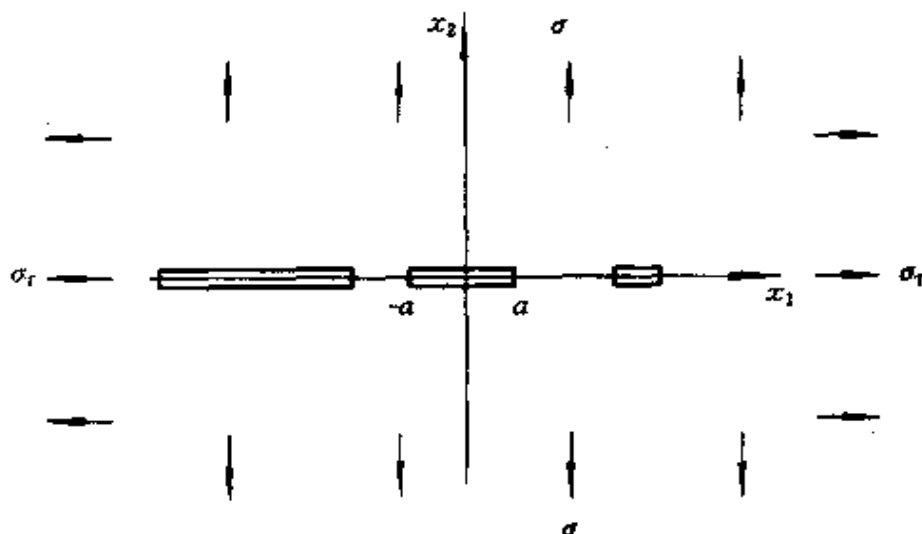


图 1.13 对称断裂问题

例。常数 $A = \frac{\sigma - \sigma_T}{2}$ 为偏离双轴等值拉伸的横向应力值。将式 (1.111) 代入式 (1.106) 中最后一式可得上下裂纹面的垂直张开位移为

$$u_2(x_1, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma}{4\mu} (\kappa + 1) \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad |x_1| \leq a \quad (1.112)$$

该式与前面引用过的式 (1.5) 完全相同。

在裂纹尖端 $z = a$ 处的应力强度因子也可以由 Westergaard 函数求得

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z - a} Z_I(z) \quad (1.113)$$

将式 (1.111) 代入后可得, 对中心裂纹受双轴拉伸的特例, 有

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.114)$$

对比式 (1.90) 可知, 该基准断裂问题的形函数 Y_I 为 1。式 (1.112) 和式 (1.114) 还表明, 横向应力 (或实常数 A) 并不影响裂纹张开位移和应力强度因子。

为讨论裂纹之间的相互作用, 可考察长度为 $2a$, 间距为 $2b$ 沿

x_1 轴周期分布的裂纹, 在远方受均匀等值双轴拉伸 σ 。这时式 (1.104)、式 (1.106) 中的实常数 A 为零。非等值双轴拉伸的情况可由叠加一个均匀横向应力场来实现, 它并不影响应力强度因子和裂纹面法向位移值。

仿照上例解法和周期性延拓可得, 参见 Koiter^[31]

$$Z_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{\pi a}{2b}}{\sin \frac{\pi z}{2b}} \right)^2}} \quad (1.115)$$

将上式代入式 (1.113) 可得应力强度因子为

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} Y_1 \left(\frac{\pi a}{2b} \right), \quad Y_1(\alpha) = \sqrt{\frac{\tan \alpha}{\alpha}} \quad (1.116)$$

式中, 第一项为单条穿透裂纹的解; 第二项所代表的形因子在 $a \ll b$ 时近似为 1, 而当 $a \rightarrow b$ 时趋于无穷。由此可见共行裂纹的交互作用为加强各自的应力强度因子。而共列裂纹 (参见 Koiter^[32]) 则起互相屏蔽作用。

上述关于对称问题的 Westergaard 函数法可类似应用于反对称问题。I 型 Westergaard 函数定义为

$$Z_1(z) = 2i\varphi'(z) \quad (1.117)$$

它在反对称问题时为实解析函数。I 型 Westergaard 函数下应力、位移和应力强度因子的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \text{Im} Z_1 \\ \sigma_d &= -x_2 Z_1' + i Z_1 - iB \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= -\frac{i\kappa}{2} \int Z_1 dz + x_2 \bar{Z}_1 + \frac{i}{2} \int \bar{Z}_1 d\bar{z} - iB\bar{z} \\ K_1 &= -\sqrt{2\pi i} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z-a} Z_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

式中, B 为一实常数。对含中心穿透裂纹无穷大板受远方均匀剪应力 τ 的情况, 可求出

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ K_1 &= \tau \sqrt{\pi a} \\ u_1(x_1, 0^\pm) &= \pm \frac{\tau}{4\mu} (\kappa + 1) \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad |x_1| \leq a \end{aligned} \right\} \quad (1.119)$$

上述各式的具体推导过程不再赘述。

1.8.2 权函数法

应力强度因子与裂纹几何和载荷配置有关。后两者的组合可派生出很多情况,从而使应力强度因子的求解变得繁琐。权函数法给出了解耦研究这两类影响的途径。针对任一裂纹几何,均可求出适用于该几何的权函数,而该裂纹几何在任意载荷下的应力强度因子(乃至位移场)都可由该载荷经权函数加权积分获得。Bueckner(1970)^[33]最早提出权函数法。后经 Rice(1972)^[34]加以理论升华,并由 Freund 和 Rice(1974)^[35]推广到动力学问题。权函数法下所得到的第一部应力强度因子手册由吴学仁和 Carlsson(1991)^[36]给出。

下面阐述权函数法的建立过程。考虑图 1.14 所示加有两套载荷的裂纹几何,其载荷强度分别为 P_1 和 P_2 ,并假定 P_1 和 P_2 引起同一类型的裂纹尖端奇异场。

在 P_1 和 P_2 共同作用下产生的功共轭广义位移为 Δ_1 和 Δ_2 。 Δ_a 与 P_a 的功共轭意义同式(1.35)与式(1.36)。由线弹性力学的叠加原理,有

$$\Delta_a = C_{ab}(a)P_b \quad (1.120)$$

式中, $C_{ab}(a)$ 为与裂纹长度有关的柔度系数矩阵。重复希腊字母下标从 1 至 2 求和。同理,应力强度因子 K 必为广义载荷 P_1 和 P_2 的线性齐次函数

$$K = k_a(a)P_a \quad (1.121)$$

对任一断裂类型, K 与能量释放率 G 按式(1.96)相联系。

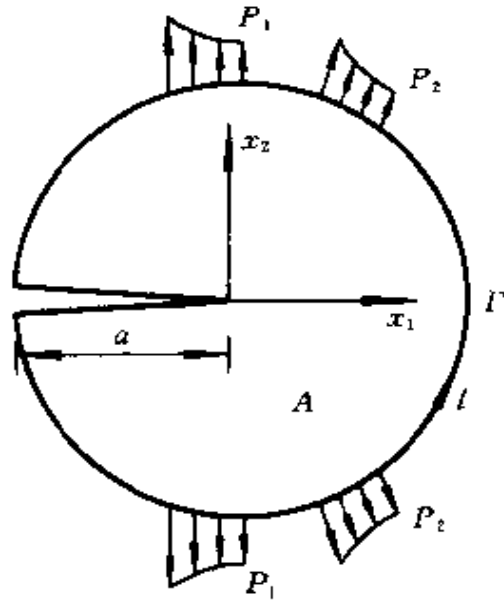


图 1.14 利用两套同类载荷 P_1 和 P_2 来构造权函数

该问题的机械势能为

$$\Pi = \Pi(P_a, a) = U_e(\Delta_a, a) - P_a A_a \quad (1.122)$$

其变分可写为

$$\delta\Pi = -\Delta_a \delta P_a - G \delta a = \frac{\partial \Pi}{\partial P_a} \delta P_a + \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a \quad (1.123)$$

由上式可得下述 Maxwell 关系

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta_2}{\partial P_1} \right)_{P_2, a} &= \left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial P_2} \right)_{P_1, a} \\ \left(\frac{\partial \Delta_a}{\partial a} \right)_{P_a} &= \left(\frac{\partial G}{\partial P_a} \right)_{a, P_{\beta \neq a}} \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

将式(1.120)代入第一个 Maxwell 关系可得下述互易定理

$$C_{12}(a) = C_{21}(a) \quad (1.125)$$

即 $C_{\alpha\beta}$ 为对称矩阵。将式(1.96)、式(1.120)、式(1.121)代入第 2 个 Maxwell 关系,并顾及到该关系对任意广义力组合全成立,可得对平面问题有

$$\frac{d}{da} C_{\alpha\beta}(a) = \frac{2}{E} k_\alpha(a) k_\beta(a) \quad (1.126)$$

该方程组的一个特例为

$$\frac{d}{da}C_{12}(a) = \frac{2}{E'}k_1(a)k_2(a) \quad (1.127)$$

现假设载荷“1”下的解已知而欲求载荷“2”下的解。这时 k_1 、 C_{11} 、 $C_{12} = C_{21}$ 均为已知。令

$$K^{(1)} = k_1(a)P_1, \quad K^{(2)} = k_2(a)P_2 \quad (1.128)$$

为载荷 P_1 和 P_2 分别单独作用下产生的应力强度因子,于是可写出

$$K^{(2)} = P_2 \left. \frac{E'}{2K^{(1)}} \frac{\partial \Delta_2}{\partial a} \right|_{P_2=0} \quad (1.129)$$

式中右端均为已知值。将上述想法连续介质化,便可得到如下权函数法求解步骤。

(1)对任一特定裂纹构形,利用该构形的任何一个已知解 K^* 、 u_a^* , 计算权函数

$$h_a = \frac{E'}{2K^*} \frac{\partial u_a^*}{\partial a} \quad (1.130)$$

如此求得的权函数与加载无关,仅表示该裂纹构形的特征。

(2)由权函数 h_a 可计算任何其他面力载荷 t_a 和体力载荷 f_a 下的应力强度因子

$$K = \int_{\Gamma} t_a h_a d\Gamma + \int_A f_a h_a dA \quad (1.131)$$

式中面域 A 和力边界 Γ 如图 1.14 所示。上述方法在位移和混合边界问题中的应用可参阅吴学仁与 Carlsson^[35]。在上两步计算中,应注意在能量释放率和应力强度因子之间的关系中只允许裂尖的单侧扩展。

(3)由计算所得的应力强度因子和权函数可积分求解该载荷下的位移场

$$\frac{\partial u_a}{\partial a} = \frac{2K}{E'} h_a(x_p; a) \quad (1.132)$$

应用上述步骤时往往并不需要知道权函数的全场值,只要知道与 t_a 、 f_a 所功共轭的部分权函数分布值(或位移解 u_a^*)即可。当然

这时由式(1.132)也只能得到对应的位移场。

我们用图 1.15 的例子来说明权函数法的具体应用过程。该图表明在含中心穿透裂纹无穷大板裂纹面上作用有任意对称载荷 $p(x_1)$ 的情况,在无穷远处无载荷作用。我们欲求右端裂尖的应力强度因子。现利用上小节中含中心裂纹(长度为 $2a=l$)无穷大平板在远方均匀拉应力下的解来求解图 1.15 所示的问题。按图 1.15 所示的坐标与符号,式(1.112)和式(1.114)可改写为

$$K^* = \sigma \sqrt{\pi l/2}$$

$$u_z^*(x_1, 0^\pm) = \pm \frac{2\sigma}{E} \sqrt{x_1(l-x_1)} \quad x_1 \in (0, l)$$

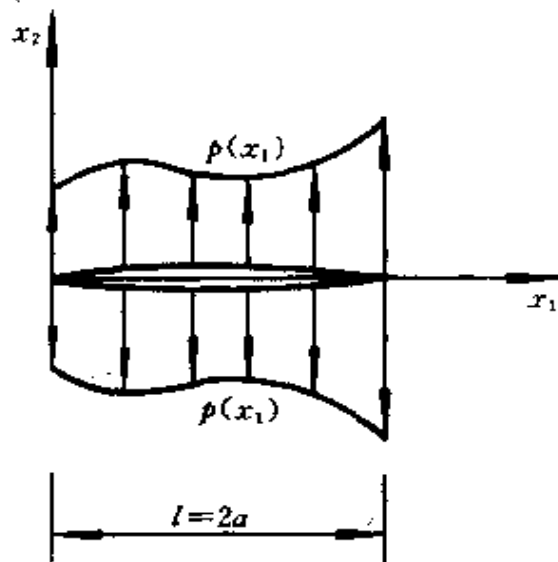


图 1.15 裂纹面上作用有任意分布对称载荷下的应力强度因子

将上述两式代入式(1.130)可得权函数为

$$h_2(x_1, 0^\pm, l) = \pm \sqrt{\frac{x_1}{2\pi l(l-x_1)}} \quad x_1 \in (0, l) \quad (1.133)$$

将式(1.133)代入式(1.131)可得右端应力强度因子为

$$K = 2 \int_0^l p(x_1) h_2(x_1, 0^+, l) dx_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \int_0^l p(x_1) \sqrt{\frac{x_1}{l-x_1}} dx_1 \quad (1.134)$$

对裂纹面中点作用上下集中力 P 的特例, $p(x_1) = P\delta(x_1 - \frac{l}{2})$ 。将之代入式(1.134)可得

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} P = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (1.135)$$

利用解(1.134)和叠加法,可求解含任意多条穿透裂纹在一般远场应力下的解。权函数法求解应力强度因子的大量应用可从吴学仁和 Carlsson 所著的应力强度因子手册^[36]中找到。

关于求解应力强度因子的其他方法可以从应力强度因子手册^[8,37,38]和经典断裂力学教科书(如 Cherepanov (1968)^[39])中找到。

1.9 动态扩展裂纹尖端场

在从弹性力学动量方程(1.25)简化为裂尖区方程(1.40)的过程中,需要用到式(1.39)中最后一式,即准静态裂纹扩展假定。本节讨论惯性项不可忽略的情况,此时定解方程变为时空坐标下的双曲型波动方程。惯性项至少在以下两种情况下是重要的:①冲击载荷的波效应,如地震作用、穿甲与破甲过程、太空作战中定向能束的入射与吸收,等等;②裂纹动态扩展问题,即研究裂纹扩展的加速、止裂与分叉。关于动态断裂力学的详细介绍可见 Freund (1990)^[40]的专著。本节仅扼要阐述在均匀各向同性弹性体中裂纹动态扩展尖端场,关于亚音速与跨音速分层力学的阐述将留待第 5.5 节与第 5.6 节中处理。

1.9.1 基本波动方程

现回到弹性动力学基本方程(1.25)至(1.28)。不失一般性,可取式(1.25)中的体力项为零而不影响下面的讨论,见 Sternberg^[41]。将式(1.27)与式(1.28)代入式(1.25)可得到下述 Navier 方程

$$(\lambda + \mu)u_{j,j} + \mu \nabla^2 u_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.136)$$

Sternberg^[41]曾严格证明,受式(1.136)制约的位移场总可以用一个标量势函数 ϕ 和一个散度为零的向量势函数 Ψ_i 来表示

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\Psi_{k,j} \quad \Psi_{i,i} = 0 \quad (1.137)$$

式中, e_{ijk} 为置换记号; $e_{ijk}\Psi_{k,j}$ 为向量 Ψ_i 的旋度。式(1.137)称为 Helmholtz 变换。在式(1.137)所表达的位移场下,可证明 Navier 方程(1.136)等价于下述波动方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{C_1^2} \ddot{\phi} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_i - \frac{1}{C_2^2} \ddot{\Psi}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.138)$$

式中, C_1 与 C_2 分别为固体中纵波与横波的速度,定义为

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.139)$$

显然 $C_1 > C_2$, 即纵波快于横波。注意方程(1.138)中的向量势函数仍受到式(1.137)中最后一式的制约。

1.9.2 裂纹尖端方程

对光滑裂纹前缘上一点 O 仍可取如图 1.4 所示的局部直角坐标系。这时由式(1.39)中第二式可把上节中的定解方程解耦为平面问题与反平面问题。对 III 型反平面剪切问题,可得其离面位移与向量势函数的面内分量 Ψ_3 有关

$$u_3 = \Psi_{2,1} - \Psi_{1,2} \quad \Psi_{3,3} = 0 \quad (1.140)$$

因此可写出对 u_3 的下述定解方程

$$u_{3,33} - \frac{1}{C_2^2} \ddot{u}_3 = 0 \quad (1.141)$$

对平面问题,其面内位移与标量势函数 ϕ 与向量势函数的离面分量 Ψ_3 有关

$$u_1 = \phi_{,1} + \Psi_{3,2}, \quad u_2 = \phi_{,2} - \Psi_{3,1} \quad (1.142)$$

而 ϕ 与 Ψ_3 满足下述面内波动方程

$$\Phi_{,aa} - \frac{1}{C_1^2} \ddot{\Phi} = 0, \quad \Psi_{3,aa} - \frac{1}{C_3^2} \ddot{\Psi}_3 = 0 \quad (1.143)$$

若取 x_1, x_2 为固定于初始裂尖材料点的坐标系, x'_1, x'_2 为原点随裂尖移位的动坐标系, 见图 1.16 所示, 则两套坐标系之间的关系为

$$x'_1 = x_1 - l(t), \quad x'_2 = x_2 \quad (1.144)$$

式中, $l(t)$ 为裂纹扩展长度。

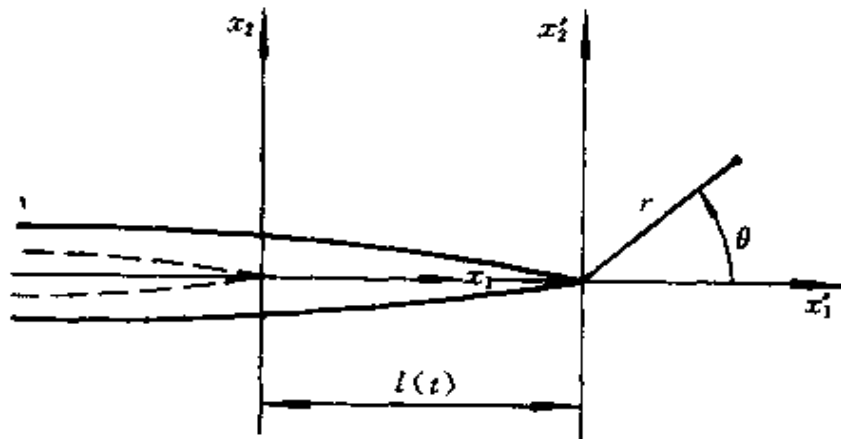


图 1.16 固定坐标系 x_1, x_2 与原点置于裂尖的动坐标系 x'_1, x'_2

在上述坐标系定义下, 可将物质导数 (即在固定物质质点处任一函数值随时间的变化率) 简化为

$$\dot{(\quad)} = \frac{\partial}{\partial t} (\quad) |_{x_a} = \frac{\partial}{\partial t} (\quad) |_{x'_a} - l \frac{\partial}{\partial x'_1} (\quad) |_{x'_a} \approx -l \frac{\partial}{\partial x'_1} (\quad) \quad (1.145)$$

式中, $l=v$ 为裂纹扩展速度。式 (1.145) 中最后一步简化仅在裂尖附近成立。类似地, 可将加速度表达为

$$\ddot{(\quad)} \approx v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} (\quad) \quad (1.146)$$

$$\text{令} \quad \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_1^2}}, \quad \alpha_3 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_3^2}} \quad (1.147)$$

在亚音速扩展的条件下 α_3 和 α_1 均为正实数, 这时可定义复变量

$$z_1 = x'_1 + i\alpha_1 x'_2, \quad z_3 = x'_1 + i\alpha_3 x'_2 \quad (1.148)$$

于是在裂尖附近方程(1.141)和(1.143)的通解可写为

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re}\{H(z_2)\} \\ \Phi &= \operatorname{Re}\{F(z_1)\} \\ \Psi_3 &= \operatorname{Re}\{G(z_2)\} \end{aligned} \right\} \quad (1.149)$$

式中, H, F, G 分别为对应于各自复自变量的解析函数。对较复杂的平面问题来说, 当 $v < C_1$ 时, 问题的解可由定义于两个复平面上的解析函数表示。

1.9.3 动态裂纹尖端场

Yoffe^[42]最早得到了平移运动中心裂纹的动态裂纹解。关于动态裂纹尖端场的严格推导可用多复变理论做出, 参见 Achenbach^[43], Freund^[44,40]。下面针对较重要的 I 型问题介绍一种简单的推导方法。

由 I 型问题的对称性质和位移表达式(1.142)可知: Φ 应为对称函数, Ψ_3 应为反对称函数。定义复变量 z_1 和 z_2 的极坐标为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (1.150)$$

这时可将 Φ 和 Ψ_3 按各自的变量以半径的幂级数展开, 其首项为

$$\Phi \approx A r_1^\lambda \cos(\lambda \theta_1), \quad \Psi_3 \approx -B r_2^\lambda \sin(\lambda \theta_2) \quad (1.151)$$

式中, A 与 B 为实待定常数; λ 为待定指数。式(1.151)中的 Φ 与 Ψ_3 满足各自对应极坐标下的 Laplace 方程且符合 I 型问题的对称性要求。

对平面问题, 面内应力的表达式可写为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \Phi_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu (2\Phi_{,\alpha\beta} + e_{\alpha\gamma\delta} \Psi_{3,\gamma\delta} + e_{\beta\gamma\delta} \Psi_{3,\gamma\delta}) \quad (1.152)$$

而裂纹上下岸的表面自由边界条件为

$$\sigma_{\alpha 2} |_{\theta=\pm\pi} = 0 \quad (1.153)$$

将式(1.151)、式(1.152)代入式(1.153)并求解特征值问题可得

$$\lambda = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1^2} A \quad (1.154)$$

将式(1.151)、式(1.154)再代入 $\sigma_{\alpha\beta}$ 的表达式(1.152), 可得动态裂纹的 I 型尖端奇异场为

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \frac{3\mu A}{4} \begin{cases} (1 + 2\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \frac{\cos(\frac{\theta_1}{2})}{\sqrt{r_1}} - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\cos(\frac{\theta_2}{2})}{\sqrt{r_2}} \\ - (1 + \alpha_2^2) \frac{\cos(\frac{\theta_1}{2})}{\sqrt{r_1}} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 + \alpha_1^2} \frac{\cos(\frac{\theta_2}{2})}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 \left(\frac{\sin(\frac{\theta_1}{2})}{\sqrt{r_1}} - \frac{\sin(\frac{\theta_2}{2})}{\sqrt{r_2}} \right) \end{cases} \quad (1.155)$$

而动态扩展裂纹的应力强度因子(记为 K_D)为

$$K_D = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0, t) = \frac{3 \sqrt{2\pi} \mu [4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2] A}{4(1 + \alpha_2^2)} \quad (1.156)$$

我们根据式(1.155)和式(1.156)来讨论动态裂纹尖端场的特点。

① 动态裂纹尖端场仍具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 奇异性,并可一般性地写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{ K_I(v) \Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta; v) + K_{II}(v) \Sigma_{\alpha\beta}^{II}(\theta; v) \} \\ \sigma_{3\alpha} &= \frac{K_{III}(v)}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{3\alpha}^{III}(\theta; v) \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

式中的诸角分布函数的归一化格式与式(1.89)相同

$$\Sigma_{22}^I(0; v) = \Sigma_{12}^{II}(0; v) = \Sigma_{32}^{III}(0; v) = 1 \quad (1.158)$$

② 与准静态裂尖场不同,角分布函数与裂纹扩展速度 v 有关,与泊桑比 ν 亦有关。当 $v \rightarrow 0$ 时, $\Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta; v)$ 等与式(1.88)所示的准静态解相重合。当 $v \neq 0$ 时,随裂纹扩展速度不同,裂纹尖端应力场分布发生变化。以 I 型问题为例,当 $v = 0.6C_s$ 时,环向应力 Σ_{22}^I 的最大值从裂纹延长线($\theta = 0$ 处)转到与裂纹延长线成 60° 角度处。这一现象是解释动态扩展裂纹分叉的一项重要依据。

③ 与准静态裂尖场不同,动态应力强度因子 K_D 与裂纹扩展

速度 v 有关(与泊桑比 ν 亦有关)。由式(1.156)可知,当

$$1 + \alpha_2^2 = 2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad (1.159)$$

时, K_D 消失为零。由固体应力波的知识,式(1.159)恰为瑞利波速(记为 C_R)的定义。于是,当 $v \rightarrow C_R$ 时 K_D 减少为零,裂纹不可能在均匀介质中以高于瑞利波速的速度运行,即

$$v < C_R < C_s < C_l \quad (1.160)$$

④ Freund 与 Clifton (1974)^[45] 严格地证明了上述表达式对非定常扩展裂纹亦适用,此时 $K_D = K_D(t)$, 可随时间 t 而变化。

对非定常扩展裂纹问题,动态应力强度因子既与裂纹几何随时间的变化规律有关,又与裂纹扩展速度与时间的变化规律有关

$$K_D(t) = K(l(t), v(t)) \quad (1.161)$$

若裂纹运动规律为沿延长线伸展,且自裂尖发射的应力波尚未由外边界反射回裂尖,则可证明有下述普适性分解公式存在(其详细证明参阅 Freund (1990)^[40])

$$K(l(t), v(t)) = k(v(t)) K(l(t), 0) \quad (1.162)$$

式中, $K(l, 0)$ 是裂纹长度为 l 的准静态应力强度因子,它与裂纹扩展速度无关,仅与即时构件几何有关; $k(v)$ 为普适的、与裂纹几何无关的速度影响系数, $k(0) = 1$, 当 v 加大时 k 递减,且 $k(C_R) = 0$ 。普适函数在 I、II、III 型问题中的表达式均可由 Freund 的著作^[40] 中找到。普适函数确定以后,式(1.162)将求解动态应力强度因子的问题简化为求解准静态应力强度因子的问题。

$k(v)$ 随 v 的递减特征决定了裂纹动态扩展的加速与止裂循环过程。若外加应力所引起的 K_I 值大于材料起裂韧性 K_{Ic} 时,裂纹起裂并加速扩展。随裂纹扩展速度 v 的增加, $k(v)$ 下降, K_D 也下降。当 K_D 低于 K_{Ic} 时,裂纹止裂,扩展速度 v 骤降至零。止裂后 K_I 值又会上升,导致裂纹再次起裂和扩展,由此循环往复,最后维持在 $K_D = K_{Ic}$ 状态下扩展。

动态裂纹扩展的能量释放率 G 与 I 型动态应力强度因子 K_D 之间的关系为

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \mathcal{F} K_{\text{I}}^2 \quad (1.163)$$

上式针对平面应变的情况。 \mathcal{F} 称为能量转换因子,其表达式为

$$\mathcal{F} = \frac{v^3 \alpha_1}{(1 - \nu) C_{\text{R}}^2 [4\alpha_1 \alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2]} \quad (1.164)$$

由多次运用洛必塔法则可得,当 $v \rightarrow 0$ 时, $\mathcal{F} \rightarrow 1$, 这时式(1.163)退化为准静态表达式(1.99)。 \mathcal{F} 随 v 增加而增加,并在 v 趋于瑞利波速时趋于无穷。也就是说,若保持裂尖应力强度因子为一非零值,则需对裂尖注入无限的能量才能使其扩展速度达到 C_{R} ; 当注入裂尖能量为有限且裂纹扩展速度趋近 C_{R} 时,裂尖奇异场的幅值衰减为零。这些论据常被用来说明在均匀材料中的断裂速度难于达到瑞利波速。

参 考 文 献

- 1 Galileo D G. Two New Sciences. 1594. English translation by Henry Crew and Alfonso de Salvio. New York; The MacMillan Company, 1993
- 2 Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. ,ser. A, 1920, 221: 163~198
- 3 Griffith A A. The theory of rupture. Proc. of the First Int. Congr. for Appl. Mech. Delft, 1924. 55~63
- 4 Inglis C E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Trans. Inst. Naval Arch. , 1913, 55: 219~241
- 5 Irwin G R. Fracture Dynamics. In: Fracturing of Metals. Cleveland; Am. Soc. Metals, 1948. 147~166
- 6 Orowan E. Fracture and Strength of Solids. In: Rep. on Progr. in Phys., V-III, 1948. 185
- 7 Irwin G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. J. Appl. Mech. , 1957, 24: 361~364
- 8 Tada H, Paris P C, Irwin G R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. 1973. 2nd ed. St. Louis; Paris Productions Inc. , 1985
- 9 Bilby B A, Cottrell A H, Swinden K H. The Spread of plastic yield from a notch. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1963, 272: 304~314
- 10 Cottrell A H. Mechanisms of fracture, the 1963 Tewksbury lecture. Tewksbury Sympo.

- on Fracture, 1963. 1~27
- 11 Cottrell A H. Fracture. In, Hirsch P B ed. *The Physics of Metals 2, Defects*. Cambridge; Cambridge Press, 1975. 247~280
 - 12 Dugdale D S. Yielding in steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8, 100~108
 - 13 Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, V. 7. New York; Academic Press, 1962. 55~129
 - 14 Wells A A. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding J.*, 1963, 10:563~570
 - 15 BSI PD6493, 1980. *Guidance on Some Methods for the Derivation of Acceptance Levels for Defects in Fusion Welded Joints*. London; British Standard Institution, 1980
 - 16 Harrison R P, Loosemore K, Milne L. Assessment of the integrity of structure containing defects. CEGB Report R/H/R6. London, CEGB, 1976
 - 17 Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 1968, 35:379~386
 - 18 Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16:13~31
 - 19 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near a crack tip in power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16:1~12
 - 20 Kumar V, German M D, Shih C F. An Engineering Approach for Elastic plastic Fracture Analysis. EPRI Report, NP-1931. New York; EPRI, 1981
 - 21 Zahoor A. *Ductile Fracture Handbook*, V. 1, 2, 3. New York; Novetech/EPRI, 1991
 - 22 Bueckner H F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Trans. ASME*, 1958, 80:1225~1230
 - 23 Hutchinson J W. *Nonlinear Fracture Mechanics*. Pub. of solid Mech., TU Denmark, 1979
 - 24 Yang W, Freund L B. Transverse shear effects for through cracks in an elastic plate. *Int. J. Solid and Structs*, 1985, 21:977~994
 - 25 Ghahremani F, Shih C F. Corner singularities of three dimensional planar interface cracks. *J. Appl. Mech.*, 1992, 59:61~68
 - 26 Muskhelishvili H N. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958
 - 27 Yang W, Yu S W. The analysis for the corner region and crack tip of plate with transverse shear deformation. *Proc. of ICF Int. Sympo. on Fracture Mechanics, Beijing*, 1983. 275~282
 - 28 Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, 24:109~114

- 29 Westergaard H M. Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.* ,1939,6,49~53
- 30 Sih G C. On the Westergaard method of crack analysis. *Int. J. Fract. Mech.* ,1966,2,628~631
- 31 Koiter W T. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. *Ing. Archiv* ,1959,28,168~172
- 32 Koiter W T. An infinite row of parallel cracks in an infinite elastic sheet. In: Radok J E M ed. *Prob. of Continuum Mechanics*. Philadelphia;SIAM,1961. 246~259
- 33 Bueckner H F. A novel principle for the computation of stress intensity factors. *ZAMM*,1970,46,529~545
- 34 Rice J R. Some remarks on elastic crack tip fields. *Int. J. Solids Structs.* ,1972,8,751~758
- 35 Freund L B, Rice J R. On the determination on the elastodynamic crack tip stress fields. *Int. J. Solids Structs.* ,1974,10,411~417
- 36 Wu X R, Carlsson A J. *Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions*. Oxford; Pergamon Press,1991
- 37 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 北京, 科学出版社, 1981
- 38 Murakami Y. *Stress Intensity Factor Handbook*. New York; Pergamon Press, 1987
- 39 切列帕诺夫 ИИ. 脆性断裂力学. 黄克智等译. 北京: 科学出版社, 1990
- 40 Freund L B. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge; Cambridge Press, 1990
- 41 Sternberg E. On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* ,1960,6,34~50
- 42 Yoffe E H. The moving Griffith crack. *Phil. Mag.* ,1951,42,739~750
- 43 Achenbach J D. Dynamic effects in brittle fracture. In: Nemat-Nasser S ed. *Mechanics Today*, V. 1. New York; Pergamon Press, 1974. 1~57
- 44 Freund L B. The analysis of elastodynamic crack tip fields. In: Nemat-Nasser S ed. *Mechanics Today*, V. 3. New York; Pergamon Press, 1976. 55~91
- 45 Freund L B, Clifton R J. On the uniqueness of elastodynamic solutions for running cracks. *J. Elasticity* ,1974,4,293~299

第 2 章 弹塑性断裂力学

2.1 小范围屈服理论

线弹性断裂的主要成果之一在于确定裂尖应力场具有 $r^{-1/2}$ 奇异性, 且该奇异场的幅值可用应力强度因子 K 来表征。但从物理学的角度来看, 真正奇异的应力是不可能的, 在裂尖附近的材料必定发生屈服。Irwin^[1] 研究了小范围屈服 (SSY) 的情况, 指出在该情况下应力强度因子 K 仍有意义。

2.1.1 小范围屈服概念

先考察图 2.1 左图所展示的理想线弹性介质的情况, 裂纹尖端处的 K 场由单参数 K 控制, K 主导区 (即 K 场占优区域) 的尺

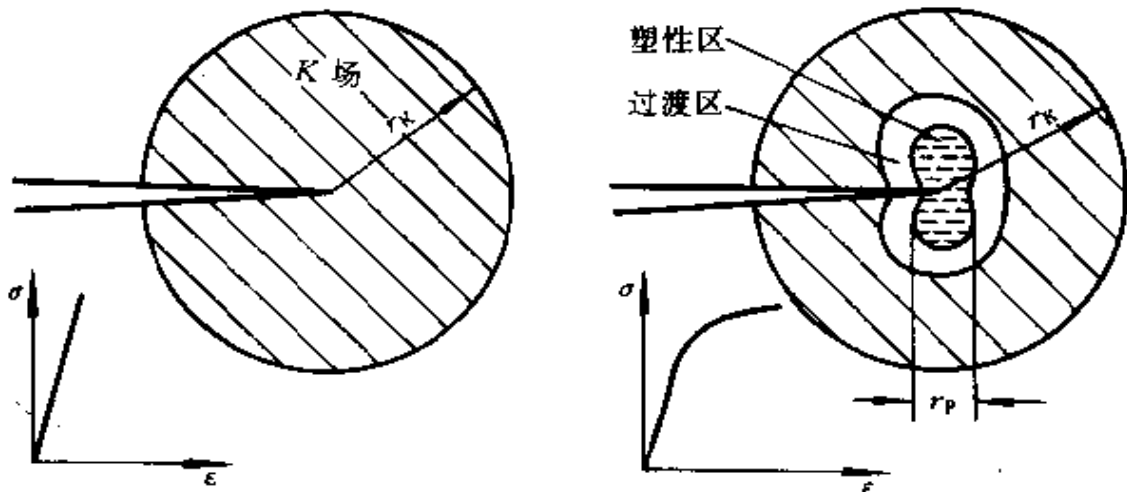


图 2.1 小范围屈服与 K 环域

度为 r_k 。由于问题的线性, r_k 与外加载荷的幅度无关, 仅取决于裂纹几何。若材料的响应为弹塑性(见图 2.1 右图), 则在裂尖高应力处形成一个塑性区, 其尺度为 r_p 。该塑性区通过一过渡区与 K 场相连接。小范围屈服指塑性区仍由环带形 K 场区所包围的情况, 即

$$r_p \ll r_k \approx 0.3 \sim 0.5a \quad (2.1)$$

注意, r_k 的大小不受载荷幅度的影响, 而塑性区尺寸 r_p 却是载荷幅度的增函数。随加载幅度的增加, 塑性区不断扩张, 并可能冲破 K 场的范围。一般来讲, SSY 仅在外载小于 $0.5P_0$ 时才适用。 P_0 是裂纹体达到全面屈服的载荷, 对理想弹塑性材料, P_0 就是极限载荷。因此, 若外载 P 满足条件

$$P < 0.5P_0 \quad (2.2)$$

则裂尖变形场仍由 K 环带所控制, 所有外载和几何信息仍可汇聚为单参数 K 传至裂尖区, 来决定裂尖区的塑性变形大小和塑性区尺寸。

2.1.2 塑性区形状估算

本小节在下述假设下估算裂尖塑性区的形状。

- ① K 场可一直延续到弹塑性边界(无过渡区);
- ② 忽略裂尖材料屈服后对塑性区外 K 场的影响;
- ③ 材料为理想弹塑性, 且遵循 Von-Mises 屈服条件。

我们将在下一小节中讨论放松假设②后所产生的修正。在 Tresca 屈服条件下的推演与本小节的叙述相近。

设 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为主应力, 则 Mises 屈服条件可写为

$$\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.3)$$

在 K 环域内, 对广义平面应力情况有 $\sigma_3 = 0$, 对平面应变情况有 $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ 。利用定义式(1.57)中关于等效偏斜应力的应力, 可将式(2.3)简化为

$$\sigma_s = \begin{cases} \sqrt{\sigma_m^2 + 3|\sigma_c|^2} & \text{平面应力} \\ \sqrt{(1-2\nu)^2\sigma_m^2 + 3|\sigma_c|^2} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2.4)$$

对 I 型问题, 在 K 环域中有

$$\sigma_m = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad |\sigma_c| = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

将式(2.5)代入式(2.4), 可解出满足 Mises 屈服条件的矢径 r_p 为

$$\left. \begin{aligned} r_p &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left(1 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) && \text{平面应力} \\ r_p &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left[(1-2\nu)^2 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] && \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

由式(2.6)估算的塑性区形状绘于图 2.2。由图可见, 平面应力塑性区大于平面应变塑性区。对平面应变情况, 泊桑比 ν 越大, 塑性区就越小。当 $\nu = \frac{1}{2}$ 时, 塑性区形状变为双纽线。

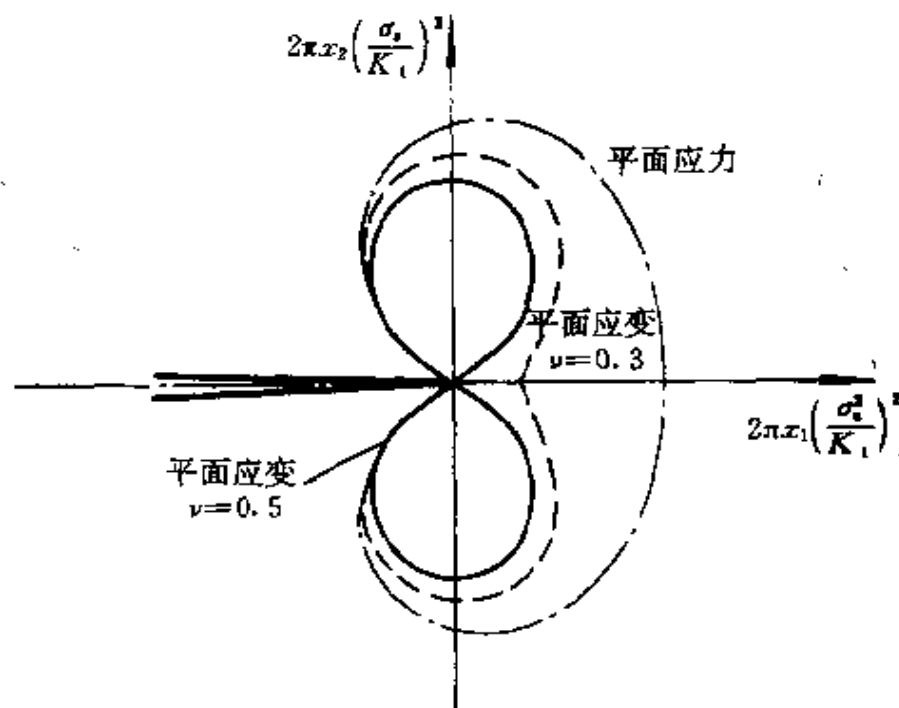


图 2.2 塑性区形状估算

在式(2.6)中取 $\theta = 0$, 可得沿裂纹延长线的塑性区长度(记为 r_0)

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 && \text{平面应力} \\ \tau_0 &= \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 && \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

当 $\nu=0.3$ 时, 平面应变的 τ_0 值仅为平面应力 τ_0 值的 16%。

2.1.3 应力松弛修正

上述推导所依据的假设②简单地将 K 场中 τ 小于 τ_r 处的 Mises 应力由 K 场解换为 σ_s , 于是总体静力平衡条件不能得到满足。Irwin^[1]认为, 可近似由图 2.3 来描述由引入塑性区所产生的应力松弛或应力再分布。

图 2.3 中的虚线为 K 场下应力 σ_{22} 沿裂纹延长线分布曲线, 在 B 点处的 σ_{22} 值恰为纵向屈服应力 σ_{ys} 。Irwin 假定经应力松弛后的

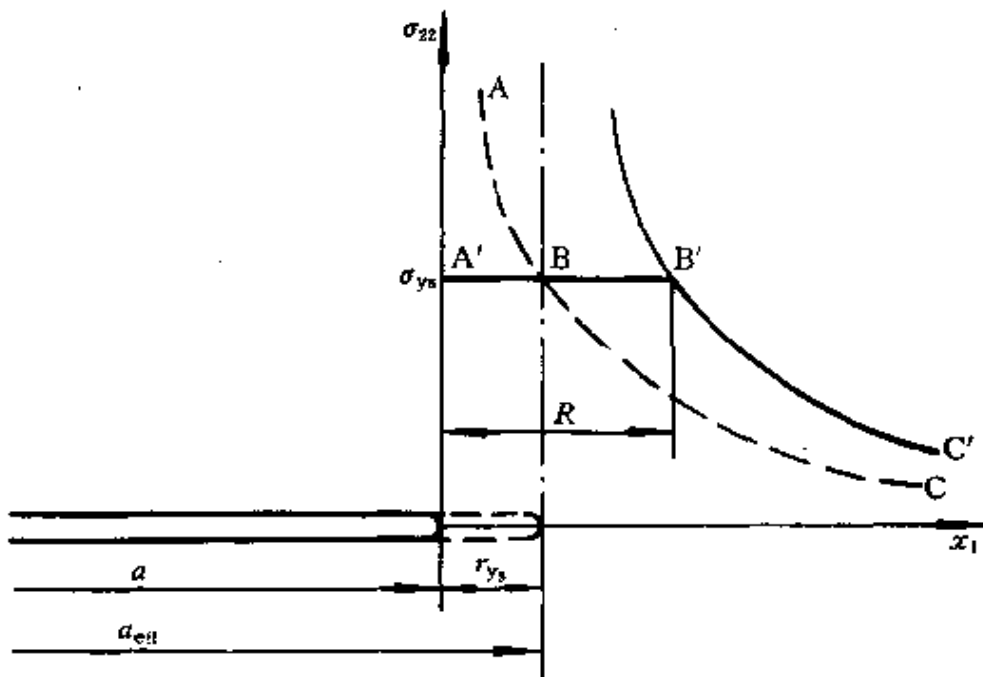


图 2.3 Irwin 应力松弛修正

σ_{22} 分布由实线 $A'B'C'$ 所示, 其中 $B'C'$ 段近似为 BC 段的平移。在塑性区尺寸远小于其他特征尺寸时 (见 SSY 假定式 (2.1)), 他假定 $B'C'$ 段下的面积与 BC 段下的面积相同。对理想弹性材料, 若取裂

纹延长线上方的构形作为受力分离体,则 K 场所表示的 σ_{22} 分布与外载相平衡。引入塑性区产生应力松弛后,总体应力平衡要求 A'B'C' 下的面积等于 K 场应力 ABC 下的面积

$$Ro_{y_s} = \int_0^{r_{ys}} \sigma_{22}(x_1, 0) dx_1 = \int_0^{r_{ys}} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x_1}} dx_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I \sqrt{r_{ys}} \quad (2.8)$$

r_{ys} 值可由 $\sigma_{22}(r_{ys}, 0) = \sigma_{ys}$ 来确定

$$r_{ys} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.9)$$

将式(2.9)代入式(2.8)并化简可得

$$R = 2r_{ys} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.10)$$

即 Irwin 的应力松弛修正使裂纹前方的塑性区尺寸扩大了一倍。

在 I 型加载的裂纹延长线上有 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{ys}$, $\sigma_{12} = 0$ 。于是,在平面应力时 $\sigma_{ys} = \sigma_s$, 在平面应变时 $\sigma_{ys} = \sigma_s / (1 - 2\nu)$ 。经 Irwin 修正后的塑性区尺寸为

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 && \text{平面应力} \\ R &= \frac{1}{\pi} \left((1 - 2\nu) \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 && \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

2.1.4 实际塑性区形状

图 2.4 上排绘出了按上述简单理论模型所得到的塑性区形状,并与用弹塑性有限元计算的实际塑性区形状(图 2.4 下排)进行对比。图 2.4 左方为平面应变情况,右方为平面应力情况。一般来讲,实际塑性区尺寸略大于按简单模型所估算的尺寸。

2.1.5 等效裂纹长度

从图 2.3 看,裂尖应力场的 B'C 段颇像长度为 $a + r_{ys}$ 裂纹的前缘应力场。因此 Irwin 建议采用等效裂纹长度

$$a_{eq} = a + r_{ys} \quad (2.12)$$

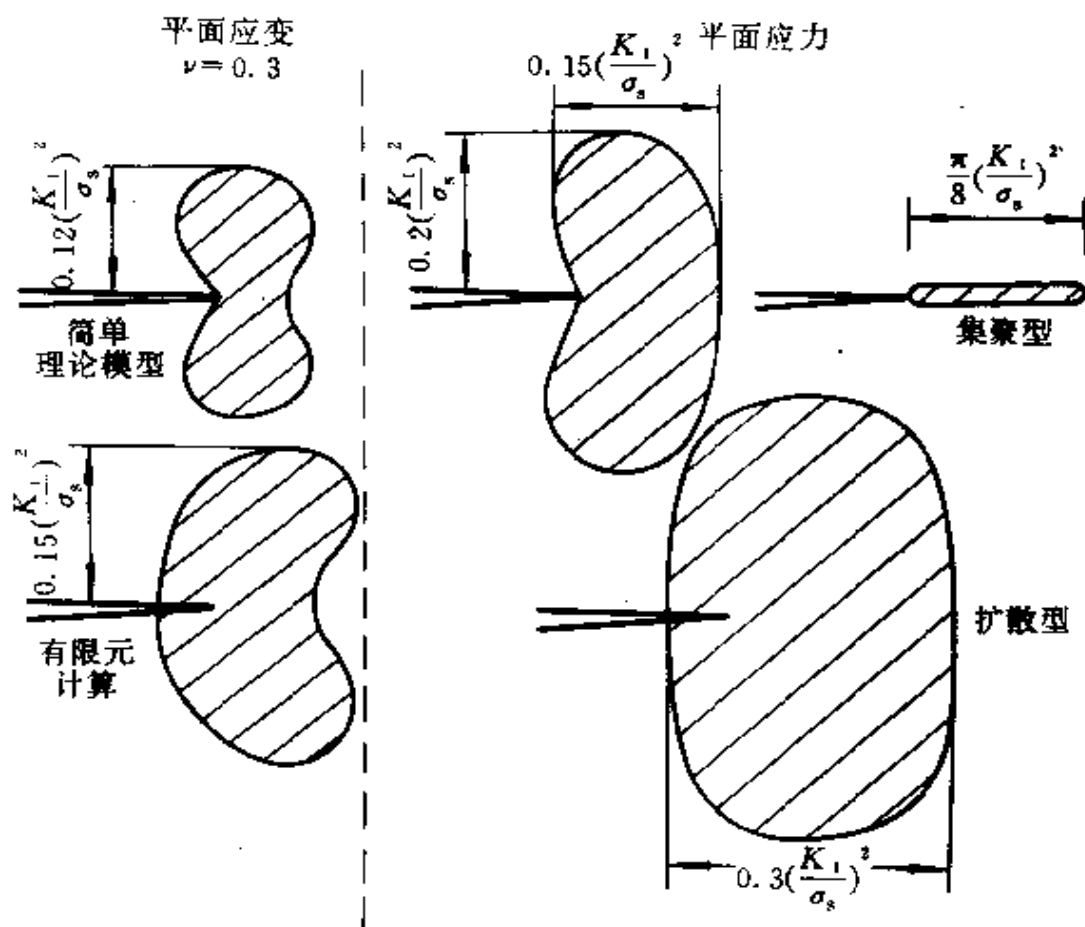


图 2.4 塑性区形状

来代替原裂纹长度。等效裂纹的尖端在屈服区的中点，它由修正裂尖的 K 场所包围。对含半长为 a 中心裂纹的无穷大板，若无穷远处 σ_{22} 值为 σ_∞ ，则可算出其修正的应力强度因子为

$$K_I = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (2.13)$$

对平面应力和平面应变情况， σ_{ys} 分别为 σ_s 和 $\sigma_s/(1-2\nu)$ 。取上式中的 K_I 等于 K_{Ic} 便得到破坏准则。式(2.13)表明：当 a 趋于零时，产生破坏的 σ_∞ 值趋于一确定的极值 $\sqrt{2} \sigma_{ys}$ 。这一极限应力的推断尽管牵强，但却改变了线弹性断裂力学中无缺陷固体不会破坏的预言。

综合上述讨论，可将 SSY 要求明确归纳为

$$a \gg R, \quad \sigma_{\infty} < 0.5\sigma_{ys} \quad (2.14)$$

2.1.6 K_{Ic} 测试

目前世界各国对 K_{Ic} 的测试的标准多参照 ASTM 标准^[2]加以适当修正而得。ASTM 标准的核心在于保证 SSY 条件。对图 2.5 所示紧凑拉伸 CCT 试件几何, ASTM 要求其裂纹长 a 、韧带长 c 和试件厚度 B 满足下述要求

$$a, c, B \geq 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.15)$$

对面内长度尺寸 a 和 c 的上述要求旨在确保它们大于 15~25 倍的最大塑性区尺寸, 以实现式 (2.14) 中第一式所表达的 SSY 要求。为了说明对试件厚度 B 的尺寸要求, 可参看图 2.5 所绘塑性区形状沿试件厚度的变化图。在试件厚度中部近似为平面应变状态, 其塑性区小, 容易实现脆断。在试件前后表面近似为平面应力状态, 其塑性区范围大, 容易实现延性剪切流动。 $B \geq 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2$ 这一条件保证了平面应变主导段在厚度方向上占优势。

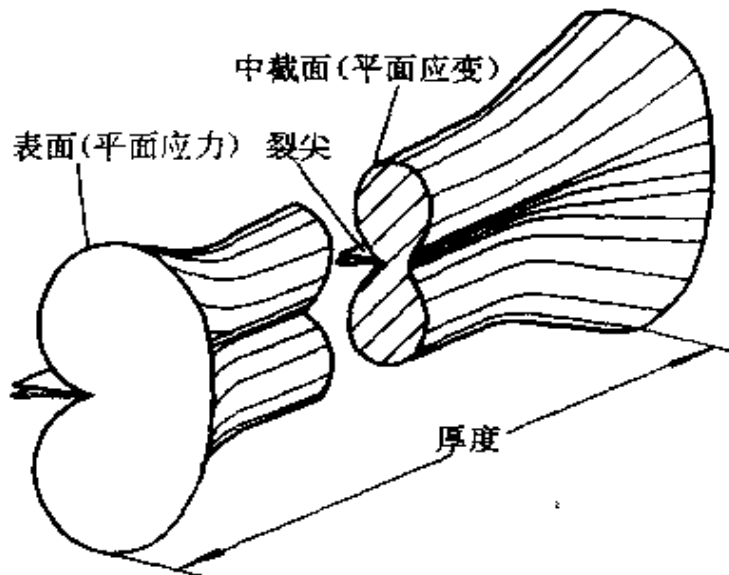


图 2.5 塑性区形状沿板厚的变化

尺寸要求式 (2.15) 往往对延性金属过于苛刻。以核容器用钢

A533B 为例,其 σ_c 值为 689MPa, K_{Ic} 值为 $187\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。将这些值代入式(2.15)可得 $a, c, B \geq 184\text{mm}$ 。这样大的试件无法在常规试验机上测试。对国产压力容器用钢(如 9Ni、16Mn、15MnVR 等),其试件尺寸要求将更大。因此,必须寻找其他测试方法和断裂参数来表达它们的断裂行为。

2.2 裂纹尖端张开位移

力学家们需要寻找 K 以外的弹塑性断裂参数来表述超出 SSY 的情况,并有效地测试延性材料的断裂行为。裂纹尖端张开位移便成为表征裂纹尖端塑性变形的一个自然选择。

2.2.1 Wells 的 COD 理论^[3]

Wells 对含裂纹的宽板试验进行了大量的试验。其测试的材料接近于理想弹塑性,近似为平面应力状态下的 I 型断裂。Wells 用含中心裂纹的无穷大板来近似表达含裂纹宽板构形。

在宽板试验的基础上,Wells 建议用“裂纹张开位移”(英文首字母缩写为 COD)的大小来表达材料抵抗延性断裂的能力。由于裂纹张开位移沿裂纹面变化,Wells 把原裂纹尖端处的张开位移 δ 定义为 COD。

关于“原裂纹尖端”的说法尚需给出确切的定义,应进一步阐明是原裂尖的物质质点还是原裂尖的空间坐标。原裂尖物质质点的说法比较适宜于 COD 的显微量测,此时可利用显微形貌标记来辨别出哪一点是原裂尖。对工程量测来说这一定义不具有良好的可操作性。原裂尖空间坐标处的张开位移定义科学性差,因为它随着含裂纹试件在加载时可能产生的横向漂移而改变。为消除这种不确定性,Rice 提出了图 2.6 中下图所示的 45°COD 定义,在文献中常记为 δ_1 ,参见 Tracey^[4]。

Wells 探讨了小范围屈服和全面屈服两种极端情况下的 COD 值。在小范围屈服的情况下,他建议平面应力状态下的 I 型裂尖张

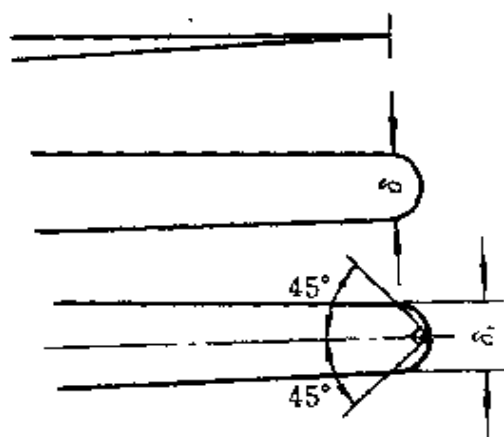


图 2.6 各种 COD 定义

开位移为①

$$\delta = \frac{G}{\sigma_s} \quad (2.16)$$

在全面屈服的条件下, Wells 提议可将 δ 表示为

$$\delta \approx 2\pi a \left(\frac{\varepsilon^\infty}{\varepsilon_s} \right) \quad (2.17)$$

式中, ε^∞ 为远场应变, ε_s 为屈服应变。式(2.17)在文献中称之为“Wells 公式”。Wells 的理论对弹塑性断裂力学的发展起了一定的作用。但目前中外学者对宽板构形在理论、数值和实验量测的结果均不支持 Wells 公式, 如图 2.7 所示。

从宽板裂纹构形的大量实验数据来看, 其 δ 值随远场应变的加大而依次呈小范围屈服、陡升、冻结和再度上升等四个特征阶段, 见图 2.7 左图, 无法由 Wells 公式所推测的直线或其修正来表征。Hutchinson 等^[6]关于含中心裂纹无穷大板的全塑性解表明在理想弹塑性模型下 δ 随 ε^∞ 的变化呈小范围屈服和陡升两个阶段, 见图 2.7 右图实线。在引入低度硬化和大变形几何学后, 郝苏^[6]数值模拟了宽板的拉伸过程, 所得的预测结果为图 2.7 右图中的虚

① 按上节所介绍的 Irwin 小范围屈服理论, 可推导出 $\delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_s}$, Wells 在他建议

的 COD 准则中略去了因子 $\frac{4}{\pi}$ 。

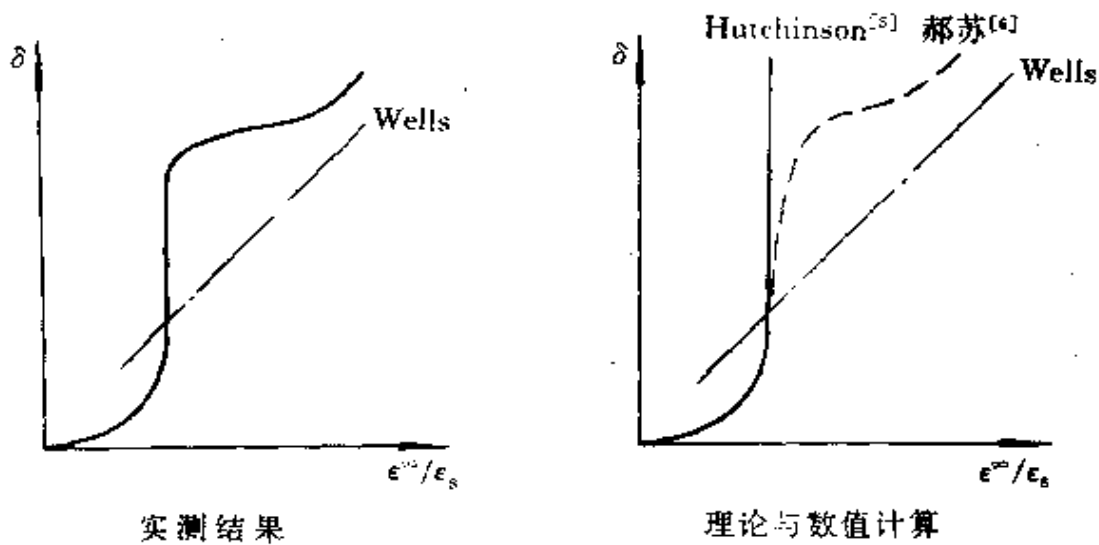


图 2.7 宽板构形的裂纹张开位移

线,与实测结果颇为符合。

2.2.2 Dugdale-Barenblatt 带状屈服区模型^[7,8]

对含裂纹薄板构形,加载时常在裂纹延长线上形成条状屈服区,而对条状屈服区处板厚剖面的实验观察表明在与板前后表面成 $\pm 45^\circ$ 的厚度斜面上形成十字交叉状剪切滑移。Dugdale^[7]和 Barenblatt^[8]各自独立地描述了这类带状断裂过程区的模型。这类集聚状的塑性屈服区是变形局部化理论的一个范例。Rice 和 Drucker^[9]曾经证明在 Tresca 屈服条件和平面应力状态下,屈服区确为带状。若更细致地求解这一问题,则颈缩区外的平板部分可近似由平面应力理论来处理,而颈缩带内需由三维理论(或 x_2-x_3 平面内的近似平面应变理论)来处理,并需考虑两区域解答的过渡。

本小节所介绍的简化模型如图 2.8 所示,把变形前的带状屈服区处理为一条没有宽度的线。在远场应力 σ_∞ 作用下,带状屈服区的张开变形导致分布联结力 $\sigma(\delta)$,它是张开位移 δ 的函数。Barenblatt^[8]称该联结力为内聚力,其变化规律见图 2.8 右图。当 $\delta = \delta^*$ 时,联结破坏,内聚力衰减为零。条状塑性区的长度记为 R 。上述条状塑性区模型与连续位错铤的 BCS 模型(Bilby, Cottrell 和

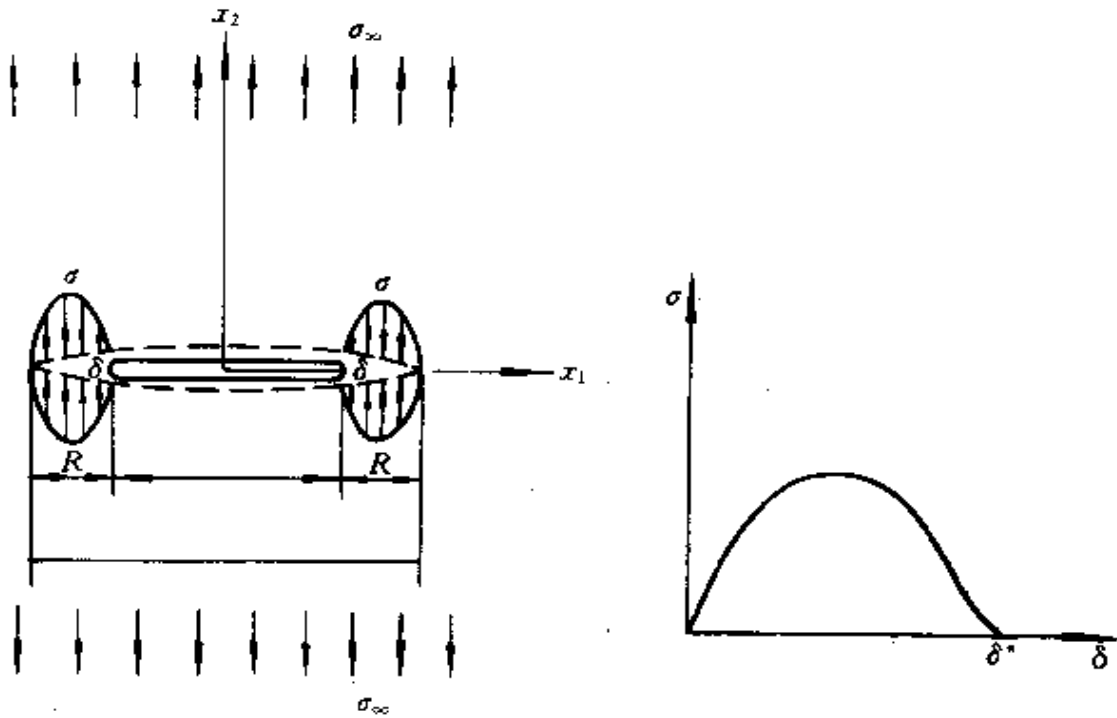


图 2.8 内聚力模型

Swinden^[10])有共同之处。

下面具体求解图 2.8 左图所示的力学问题。此时条状塑性区已被切开, 裂纹长度为 $2L = 2(a + R)$ 。在 $a < |x_1| < L$ 处作用有内聚力 $\sigma(\delta)$ 。除条状屈服区外的其他介质呈线弹性, 因此可运用叠加原理。先考虑半长为 L 的中心裂纹在远场应力 σ_∞ 下的解, 由式(1.114)和式(1.112)可得其对应的应力强度因子、裂纹面位移和原裂纹尖端张开位移为

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi L}$$

$$u_2(x_1, 0^+, L) = \frac{2\sigma_\infty}{E} \sqrt{L^2 - x_1^2}$$

$$\delta = \frac{4\sigma_\infty}{E} \sqrt{L^2 - a^2}$$

由此可按式(1.130)导出适用本构形的权函数为

$$h_2(x_1, 0^-, L) = \sqrt{\frac{L}{\pi(L^2 - x_1^2)}}$$

我们进而讨论在内聚力 $\sigma(\delta)$ 作用下的解。由上式和式 (1.131) 可得应力强度因子为

$$K_I = 2 \int_0^L \sigma(x_1) h_2(x_1, 0^+, L) dx_1 = 2 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{\sigma(x_1) dx_1}{\sqrt{L^2 - x_1^2}}$$

将上述两式代入式 (1.132) 并积分可得在内聚力作用下的裂纹面垂直位移为

$$u_2(x_1, 0^+, L) = \frac{4}{\pi E} \int_{x_1}^L \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_1^2}} \int_0^s \frac{\sigma(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds$$

在推导上式时利用了 $x_1 = L$ 处裂纹张开位移为零的条件。记 $\delta(x_1) = 2u_2(x_1, 0^+, L)$, 并综合利用上述关于 u_2 的两个表达式可得下述求解 $\delta(x_1)$ 的非线性积分方程 (Bilby, Cottrell 和 Swinden^[10])

$$\delta(x_1) = \frac{4\sigma_\infty}{E} \sqrt{L^2 - x_1^2} + \frac{8}{\pi E} \int_{x_1}^L \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_1^2}} \int_0^s \frac{\sigma(\delta(t))}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds \quad (2.18)$$

式中, 非线性函数 $\sigma(\delta)$ 由图 2.8 中右图给出。条状塑性区的长度 R 由延展裂纹顶点处 ($|x_1| = L$) 应力强度因子为零来确定, 即

$$\sigma_\infty \sqrt{\pi L} + 2 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{\sigma(x_1)}{\sqrt{L^2 - x_1^2}} dx_1 = 0 \quad (2.19)$$

Dugdale^[7] 考察了理想塑性条状屈服区的特例

$$\sigma(\delta) = -\sigma_s \quad (2.20)$$

将式 (2.20) 代入式 (2.19) 并化简可得条状屈服区长度为

$$\frac{R}{a} = \sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_s}\right) - 1 \quad (2.21)$$

将式 (2.20) 代入式 (2.18) 可得原裂尖处的 COD 值为

$$\delta(a) = \frac{8\sigma_s a}{\pi E} \ln \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_s}\right) \right] \quad (2.22)$$

在小范围屈服的条件下可取 $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_s}$ 为小量。取上述两式关于 $\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_s}\right)$ 渐近展开式的首项可得下述 SSY 解

$$\left. \begin{aligned} R_{SSY} &= \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_s} \right)^2 a = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \\ \delta_{SSY} &= \frac{\pi a}{E \sigma_s} \sigma_\infty^2 = \frac{G}{\sigma_s} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

式中, $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ 为不考虑条状塑性区的应力强度因子; G 为不考虑条状塑性区的能量释放率。对比式(2.23)中第二式与式(2.16), 可知在 SSY 情况下, Wells 的简化公式(2.16)与 Dugdale 模型的预测结果相同。对比式(2.22)与式(2.23)第二式可得

$$\frac{\delta}{\delta_{SSY}} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_\infty} \right)^2 \ln \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_s} \right) \right] \quad (2.24)$$

上式可用来鉴定小范围屈服解的精度。我们在图 2.9 中将 $\frac{\delta}{\delta_{SSY}}$ 相对于载荷 $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_s}$ 作图。结果表明: 当 $\sigma_\infty < 0.5\sigma_s$ 时, SSY 解的精度可保持在 10% 以内; 当 $\sigma_\infty \rightarrow \sigma_s$ 时, $\frac{\delta}{\delta_{SSY}}$ 趋于无穷。

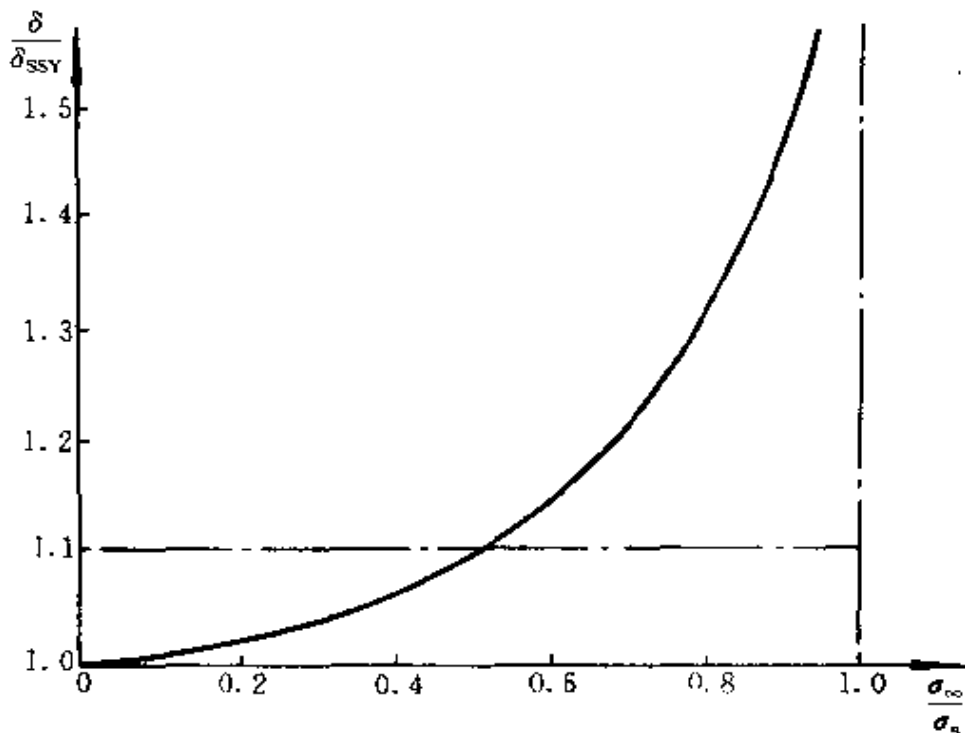


图 2.9 Dugdale 模型下 SSY 解的精度

2.3 J 积分

J 积分是弹塑性断裂力学的核心。Eshelby^[11]最先给出了制约固体缺陷运动的能动量积分,亦参见文献[12]。Günther 给出了能动量积分与 Noether 变分不变性原理的关系^[13]。这些能动量积分中的第一平移积分(即 J 积分)在 1968 年被 Cherepanov^[14]和 Rice^[15]应用于断裂力学,其中 Rice 对 J 积分各种性质和应用的阐述为断裂力学界广为接受。Knowles 和 Sternberg^[16]给出了有限变形条件下诸能动量积分与 Noether 变分不变性原理的一般联系。

2.3.1 与路径无关的守恒积分

考虑下述一类材料,其应变能密度 w 可表述为

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.25)$$

对该类材料, w 仅为应变终态 ε_{ij} 的函数,与在应变空间中如何达到 ε_{ij} 的路径无关。由上式可导出超弹性本构关系

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.26)$$

注意式(2.26)可描述非线性弹性本构关系,也可以描述位于单调加载区间的 Hencky-Nadai 塑性材料。考虑下述平移型积分

$$J_i = \int_{\Gamma} (w n_i - n_j \sigma_{jk} u_{k,i}) d\Gamma \quad (2.27)$$

式中, Γ 是三维体域 V 内的一个闭曲面或二维面域 A 内的一条闭曲线。我们将证明在下述假设下:

- ①材料描述式(2.26)成立,且材料沿 x_i 走向为均匀,
- ②无体力作用,
- ③准静态,
- ④ Γ 域内无奇点,
- ⑤小变形。

围道积分式(2.27)是守恒的,即

$$J_i = 0 \quad \forall \Gamma \quad (2.28)$$

其中假设⑤并不必要,如 Knowleds 和 Sternberg^[16]就导出了有限变形条件下的 J_i 表达式。当 Γ 域内有奇点时, J_i 不再为零,它表达作用于奇点的广义能量力。

我们现在证明式(2.28)。定义能动量张量(Eshelby^[11,12])为

$$P_{ij} = w\delta_{ij} - \sigma_{jk}u_{k,i} \quad (2.29)$$

于是可将式(2.27)改写为

$$J_i = \int_{\Gamma} P_{ij}n_j d\Gamma = \int_V P_{ij,j} dV \quad (2.30)$$

其中第二等式利用了 Gauss 定理。由于体域 V 可任意选择,所以式(2.28)等价于能动量张量 P_{ij} 的散度为零。现写出 P_{ij} 的散度为

$$P_{ij,j} = w_{,i} - \sigma_{jk,j}u_{k,i} - \sigma_{jk}u_{k,i,j} \quad (2.31)$$

易于证明:在假设②与③下应力的散度为零(即平衡方程),因此式(2.31)右端的第二项为零。若材料沿 x_i 为均匀且域内无奇点,则式(2.31)的第一与第三项可由假设①、④、⑤而互相抵消,因此得证式(2.28)。

准静态力学中常用的其他守恒积分有 L 积分和 M 积分。 L 积分

$$L_{ij} = \hat{L}_{i,j} - \hat{L}_{j,i} \quad \hat{L}_{ij} = \int_{\Gamma} (X_i P_{jk} + x_i \sigma_{kj}) n_k d\Gamma \quad (2.32)$$

是反对称的,只有三个独立分量。 M 积分为标量积分

$$M = \int_{\Gamma} (P_{ij} X_i - \frac{1}{2} \sigma_{ij} x_i) n_j d\Gamma \quad (2.33)$$

在前面两式中 X_i 为参考坐标, $x_i = X_i + u_i$ 为即时坐标。

上述守恒积分表示域内奇点进行某一特征运动时的不变性关系,其推导可由 Noether 变分不变性原理导出。 J_i 积分表示奇点在均匀材料中所具有的平动不变性(或物质空间中的“线动量”守恒方程), L_{ij} 积分表示缺陷在具有转动同性的材料中所具有的转动不变性(或物质空间中的“动量矩”守恒方程);而 M 积分对应于缺陷标尺的度量不变性(或物质空间中的“能量”守恒方程),仅当 w 是 ϵ_0 的齐次函数时才成立。

2.3.2 J 积分

我们按照 Rice^[15]的推导给出 J 积分。考虑如图 2.10 所示的二维情况, 裂纹与 x_1 的负半轴重合。这时式(2.27)所描述的平移守恒积分的第一个分量为

$$J_1 = \int_{\Gamma} (w n_1 - n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) d\Gamma \quad (2.34)$$

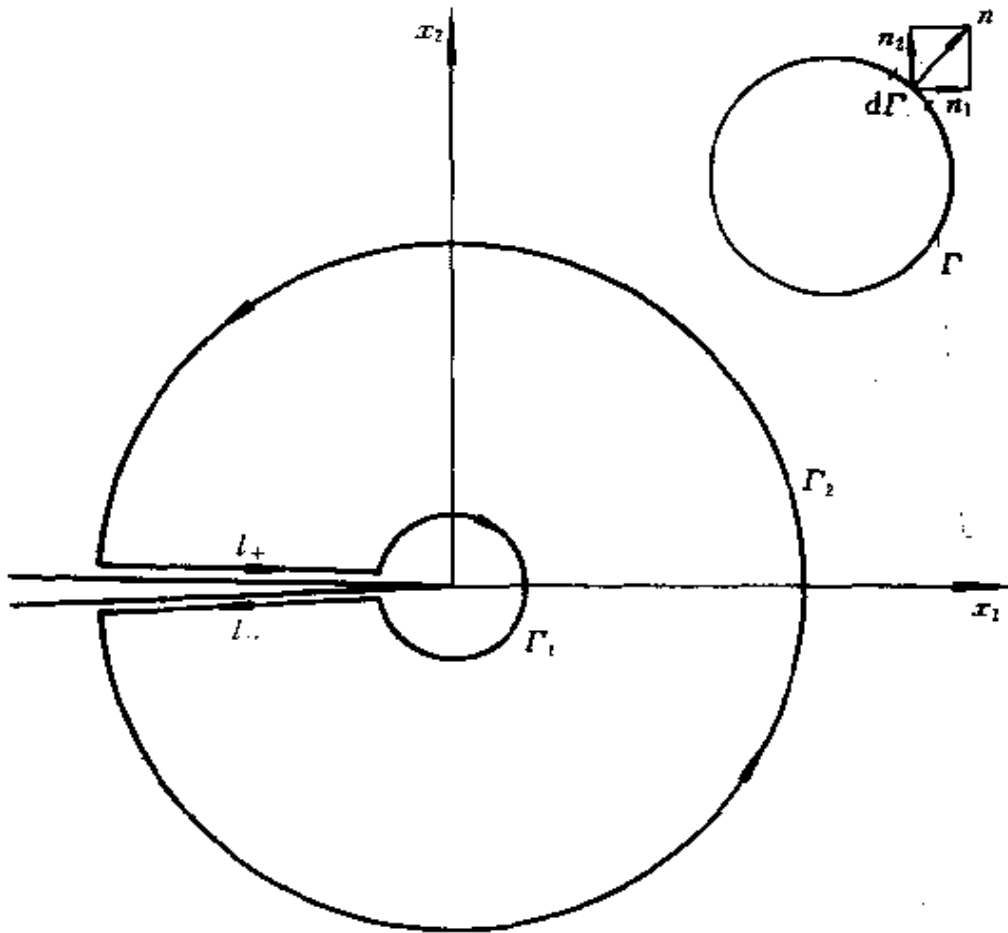


图 2.10 J 积分

并简记为 J 积分。 Γ 为 $x_1 - x_2$ 平面内的一围道。由于 J_i 是守恒的, 所以其特例 J 也必然是守恒的。考察在图 2.10 右上方的围道 Γ , 在该围道上的 J 积分必然为零。若将闭合围道 Γ 变形为图 2.10 中所示环绕裂纹的围道, 由 $\Gamma_1, \Gamma_2, l_-, l_+$ 等段构成。 Γ_1, Γ_2 以逆时针转动为正向; l_-, l_+ 以从左至右为正向。由于围道内无奇点, 所以有

$$\int_{-\Gamma_1 - l_- + \Gamma_2 + l_+} (un_1 - n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) d\Gamma = 0 \quad (2.35)$$

对沿上下裂纹岸的围道段 l_-, l_+ 有 $n_1 = 0$ 。若进一步假设裂纹面为自由(即在 l_+ 与 l_- 上 $\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha = 0$)，则 l_+, l_- 段对 J 积分没有贡献。于是可得

$$J = \int_{\Gamma_1} (un_1 - n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (un_1 - n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) d\Gamma \quad (2.36)$$

即 J 积分值与积分路径无关。因此, J 积分表征沿裂纹下岸任一点运行到裂纹上岸任一点的围道所得到的积分值, 它是一个与路径无关的断裂参量。

2.3.3 J 积分与能量释放率的关系

本小节针对二维线弹性介质。无论对平面问题还是对反平面剪切问题, 均有 $J_3 = 0$ 。定义复变 J 积分如下

$$\bar{J} = J_1 + iJ_2 \quad (2.37)$$

经过冗长的复变函数运算, 可得对反平面剪切问题有

$$d\bar{J} = d\left(-\frac{i\mu}{2} \overline{\phi'(z)^2}\right) \quad (2.38)$$

它为一个解析函数的全微分。对平面问题, 复变 J 积分的增量为

$$d\bar{J} = -i \frac{\kappa + 1}{4\mu} \left[(\phi')^2 dz - 2 \overline{\phi'(z) \psi'(z)} dz - d(z \overline{\phi'(z)^2}) \right] \quad (2.39)$$

式中, 第一项是 z 的解析函数; 第二项是 \bar{z} 的解析函数; 而第三项为全微分。如式(2.38)和式(2.39)所示的结构导致了 J 积分的路径无关性。对反平面 III 型情况, 将围道 Γ 选在 K 环域内可得

$$J_1 = \frac{K_{II}^2}{2\mu} = G, \quad J_2 = 0 \quad (2.40)$$

对平面 I 型情况, 将围道 Γ 选在 K 环域内可得

$$J_1 = \frac{K_I^2}{E'} = G, \quad J_2 = 0 \quad (2.41)$$

概括言之,对二维线性问题恒有

$$J = G \quad (2.42)$$

这时与路径无关的 J 积分具有能量释放率的物理意义。式(2.42)提供了一个计算能量释放率的公式。我们可在数值求解时避开数值精度差的裂纹尖端场,而由式(2.36)和精度较高的远场值来精确计算能量释放率。

2.3.4 流入裂纹尖端的能通量

我们在本小节中按 Cherepanov^[14]和 Rice^[17]的叙述来讨论流入裂纹尖端的能通量。这里仅考虑准静态问题,对动态问题的相应讨论可参阅 Freund^[18]的论述。

考虑在广义载荷 Q 下的一般二维试件,其面域为 A ,裂纹长为 a , Q 所对应的广义位移为 q 。储存在试件中的总变形能 U 为

$$U = \int_A w dA = U(q, a) \quad (2.43)$$

式中, w 由式(2.25)给出。 U 的变分为

$$\delta U = Q\delta q - G\delta a \quad (2.44)$$

式中, G 为裂纹扩展所对应的能量释放率,即广义的 Griffith $G = -\left.\frac{\partial U}{\partial a}\right|_q = -\left.\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right|_q$ 。取 t 为时间参量,可将式(2.44)和式(2.43)合并写为

$$G\dot{a} = Q\dot{q} - \frac{d}{dt} \int_A w dA \quad (2.45)$$

现取一包含裂纹尖端的围道 Γ ,该围道界定一个固定的物质质点集合 $A_{\text{固}}$,参见图 2.11。 $A_{\text{固}}$ 为在时刻 t 由 Γ 圈定且固化在物质上的面积。在我们所要研究的时刻(即时刻 t)有 $A = A_{\text{固}}$ 。由于能量的载体为确定物质质点的集合,于是对图 2.11 中围道 Γ 内所圈定的区域,可将式(2.45)写为

$$G\dot{a} = \int_A t_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} \Delta \Gamma - \frac{d}{dt} \int_{A_{\text{固}}} w dA \quad (2.46)$$

易于证明:上述等式的右端与图 2.11 中围道 Γ 的选取无关。

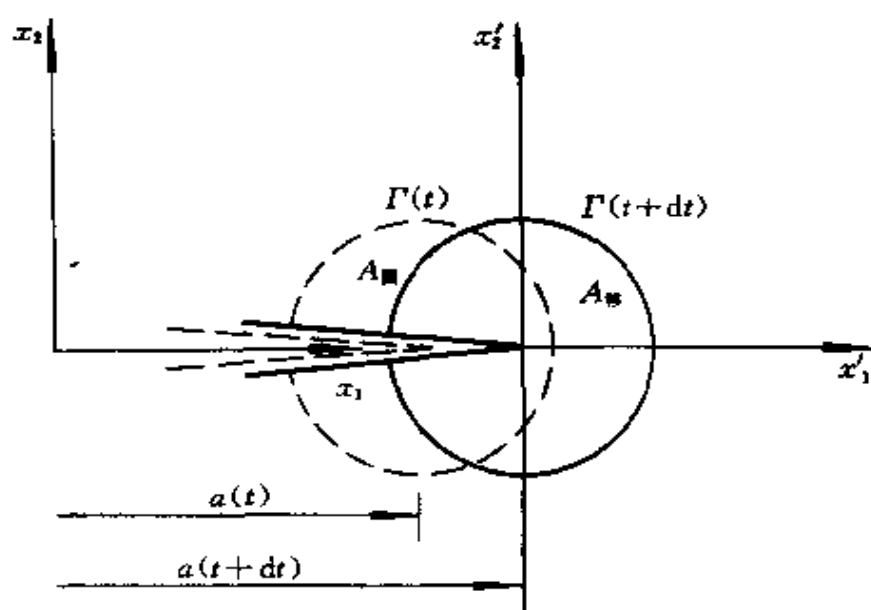


图 2.11 流入裂纹尖端的能通量

引入两套直角坐标系:固定的参照坐标系 x_1, x_2 和原点总在裂纹尖端的移动坐标系 x'_1, x'_2 。由图 2.11 显而易见

$$x'_1(t) = x_1 - a(t) \quad , \quad x'_2 = x_2 \quad (2.47)$$

由 Reynold 输运定理可得

$$\frac{d}{dt} \int_{A_{\#}} w dA = \frac{d}{dt} \int_{A_{\#}} w dA - \dot{a} \int_{\Gamma} w n_1 d\Gamma \quad (2.48)$$

式中, $A_{\#}$ 为 Γ 图形随裂纹尖端平移时所界定的面积。式(2.48)右端第二项表示 $\Gamma(t)$ 与 $\Gamma(t+dt)$ 所界定的(也就是 $A_{\#}$ 与 $A_{\#}$ 之间的)诸单元面积差 $dadx_2$ 所产生的通量项。另外,式(2.46)中位移场的物质导数可写为

$$\dot{u}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x_1, x_2, t) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \Big|_{x'_1, x'_2} - \dot{a} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x'_1} \Big|_{x'_2, t} \quad (2.49)$$

将上述两式代回式(2.46)并化简可得

$$G\dot{a} = J_{\Gamma} \dot{a} + \left\{ \int_{\Gamma} t_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} (x'_1, x'_2, t) d\Gamma - \frac{d}{dt} \int_{A_{\#}} w(x'_1, x'_2, t) dA \right\} \quad (2.50)$$

式中

$$J_r = \int_{\Gamma} (w m_1 - t_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1}) d\Gamma \quad (2.51)$$

是以 Γ 为围道的 J 积分, 亦称为流入围道 Γ 的能通量。

式(2.50)中大括号内的项在下述三种情况下为零。

(1) 超弹性材料, 且材料沿 x_1 方向均匀。这时由式(2.25)和虚功原理, 可证明式(2.50)中大括号内的量为零。上述结论对在单调加载区间内遵循 Hencky-Nadai 塑性形变理论的材料同样成立。

(2) 定常裂纹扩展。在定常裂纹扩展时, 一个随裂尖同步运动的观察者无法察觉其周围面积域 $A_{\#}$ 上场变量的变化。这时无论是 $\frac{\partial u_0}{\partial t}(x_1, x_2, t)$ 还是 $\frac{d}{dt} \int_{A_{\#}} w(x_1, x_2, t) dA$ 均等于零。因此, 对上述两种情况均有

$$J_r = J = G = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (2.52)$$

这就是 J 积分的物理解释, 它可作为 J 积分的实验量测依据。

(3) 无限小围道。当围道 Γ 收缩到裂尖时, 对绝大多数情况, 式(2.50)中大括号内诸项趋近于零。这时有

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_r = G = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (2.53)$$

该式对绝大多数材料描述均适用。 $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_r$ 称为流入裂纹尖端的能通量。

对上述第一种情况, 裂尖附近的能量全部流入裂尖, 并不耗散于裂尖周围的塑性变形。对第二种定常裂纹扩展的情况, 尽管能量并不耗散于裂尖附近的定常变形区, 但一般也不流入裂纹尖端, 即这时 $J = 0$ 。对第三种情况, 流入裂尖的能通量 $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_r$ 是一个确定值(包括零在内), 它并不排除在裂纹尖端附近由塑性变形来耗散能量的可能性。

2.3.5 J 积分的实验量测

考虑图 2.12(a) 所示的一般二维试件构形, 其应变能 U 和总势能 Π 分别为

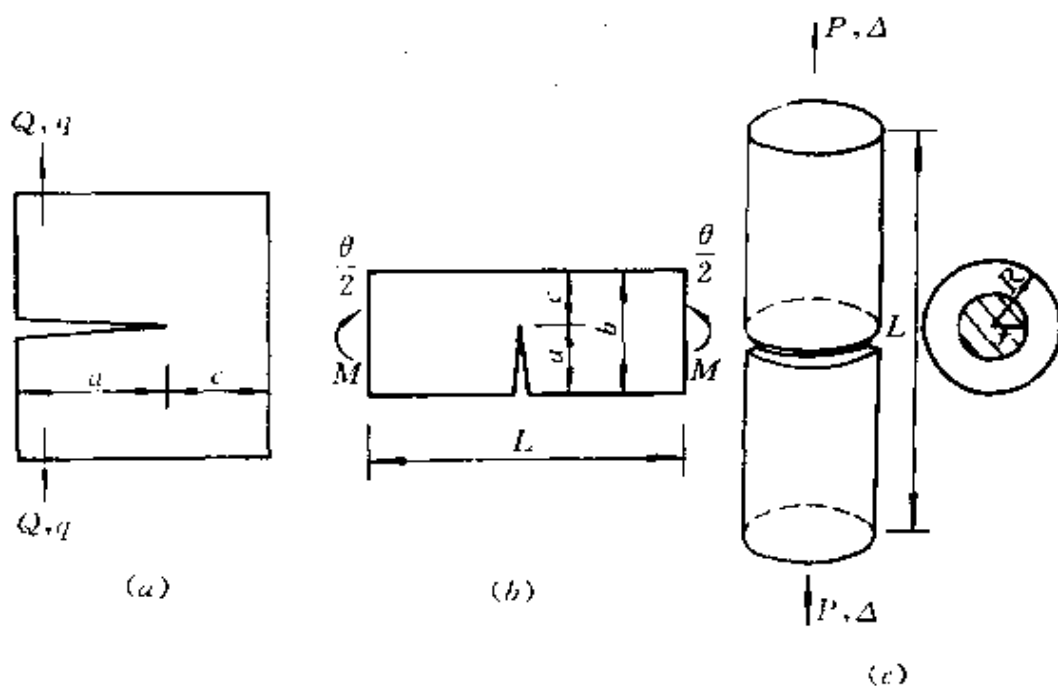


图 2.12 各种试件的 J 积分实验量测

(a) 深缺口紧凑拉伸试件; (b) 深缺口短梁;

(c) 深缺口圆柱形拉棒。

$$U = \int_0^q Qdq, \quad \Pi = U - Qq = - \int_0^q qdQ \quad (2.54)$$

式中, Q 与 q 互为功共轭, 分别代表广义力和广义位移。对确定的试件形式, 可实测 Q - q 曲线。由 J 积分的定义式(2.52), 可得到下述 J 积分实验量测公式

$$\left. \begin{aligned} J &= - \left[\frac{\partial U}{\partial a} \right]_q = - \int_0^q \frac{\partial Q}{\partial a} dq \\ J &= - \left[\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_Q = \int_0^Q \frac{\partial q}{\partial a} dQ \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

通过上述公式可由多个试件来测试 J 积分。

在深缺口的情况下(即 $a > c$ 或 $R > 2r$ 时), 可从式(2.55)出发, 导出适用于图 2.12 三种构件的深缺口简化公式, 见 Rice、Paris 与 Merkle^[19]。对图 2.12(a) 所示的深缺口紧凑拉伸试件有

$$J \approx \frac{2}{c} \int_0^q Q dq \quad (2.56)$$

式中, c 为韧带长度。对图 2.12(b) 所示的深缺口短梁有

$$J \approx \frac{2}{c} \int_0^\theta M d\theta \quad (2.57)$$

式中, M 与 θ 分别为作用于梁两端的弯矩和梁的转角。对图 2.12(c) 所示的深缺口圆柱形拉棒有

$$J \approx \frac{1}{2\pi r^2} \left[3 \int_0^\Delta P d\Delta - P\Delta \right] \quad (2.58)$$

式中, r 为缺口处半径; P 与 Δ 分别为轴力与伸长。由单个试件的载荷一位移曲线和公式(2.56)~公式(2.58), 可实验量测 J 积分。因此, 式(2.56)~式(2.58)又称为 J 积分实验量测的单试件公式。

2.3.6 J 积分与 COD 的关系

我们按 Dugdale-Barenblatt 模型^[7,8]来计算 J 积分与原裂纹尖端 COD 的关系。

如图 2.13, 取围绕条状塑性区(或内聚区)的围道 Γ_{c_2} , 并沿该围道计算 J 积分值。由于沿围道 Γ_{c_2} 有 $n_1 = 0$, 所以由式(2.36)或式

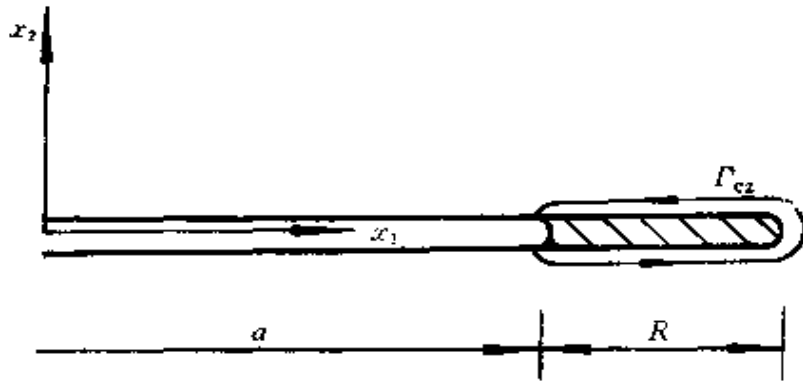


图 2.13 J 积分与 COD 的关系

(2.51)有

$$J = - \int_{\Gamma_{c_2}} t_n \frac{\partial u_n}{\partial x_1} d\Gamma = \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{a+R}^a \sigma(x_1) \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} dx_1$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_2^+ - u_2^-) dx_1 = - \int_a^{a+R} \sigma(x_1) \frac{\partial \delta(x_1)}{\partial x_1} dx_1 \\
 &= \int_{\delta(a+R)}^{\delta(a)} \sigma(\delta) d\delta = \int_0^{\delta_1} \sigma(\delta) d\delta \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

上式的系列推导中, σ 为作用在内聚区的法向内聚力; $\delta(x_1) = u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)$ 为裂纹张开位移。在最后一步推导中利用了 $\delta(a) = \delta_1$ (原裂纹尖端的张开位移), $\delta(a+R) = 0$ 。

在理想弹塑性模型下, $\sigma(\delta) = \sigma_s$, 这时有

$$J = \sigma_s \delta_1 \quad (2.60)$$

上式给出了理想弹塑性模型下 J 积分与原裂纹尖端位移之间的简单关系。在其他材料模型下, J 积分与 δ_1 的关系为

$$\delta_1 = d \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.61)$$

式中, d 是一个与材料无量纲参数组合有关的无量纲系数; σ_0 为参照应力。

我们下面继续按 Dugdale-Barenblatt 模型的思路来计算 J 积分。将式(2.22)和式(2.23)分别代入式(2.60)并将结果相除, 得到

$$\frac{J}{J_{SSY}} = \frac{\delta}{\delta_{SSY}} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_\infty} \right)^2 \ln \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_s} \right) \right] \quad (2.62)$$

式中, J_{SSY} 是小范围屈服理论下的 J 积分值。由式(2.62)及图 2.9 可知, 在 $\sigma_\infty < 0.5\sigma_s$ 时可用小范围屈服理论下的 J_{SSY} 值来近似取代 J 积分值。

2.3.7 弹塑性起裂准则

J 积分作为断裂参量具有下述优点:

- ① J 积分与路径无关, 便于计算;
- ② J 积分代表驱动裂纹平移延展的广义能量力;
- ③ 在线弹性情况下, J 积分等价于 Griffith 的能量释放率;
- ④ 在超弹性(或形变理论不卸载)的情况下, J 积分具有能量释放率的物理意义;
- ⑤ 可直接由裂纹试件(如紧凑拉伸试件、三点弯曲试件、缺口

拉棒试件)来实验测定 J 积分值;

⑥ J 积分与 COD 有简明的对应关系;

⑦ 对 J 积分进行量测的试件尺寸小于对 K_{Ic} 进行量测的试件尺寸;

⑧ J 积分表征裂纹尖端处的场强度,类似于线弹性断裂力学的 K 值。

我们将在本小节和下一节中阐述 J 积分的最后两条优点。

上述优点表明:可用 J 积分作为弹塑性起裂准则。即当

$$J = J_{Ic} \quad (2.63)$$

时,便发生弹塑性起裂。式中 J_{Ic} 为平面应变 J 积分,我国在 1980 年建立了量测 J_{Ic} 的标准^[20]。

由 J_{Ic} 值可推算 K_{Ic} 值为

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EJ_{Ic}}{1-\nu^2}} \quad (2.64)$$

Underwood^[21]对 NiCrMo 钢紧凑拉伸和 C-型试件的测试结果表明:若以 $\sqrt{EJ_{Ic}/(1-\nu^2)}$ 来代替 K_{Ic} 值,则对试件尺寸的要求可从小范围屈服条件式(2.15)降低为

$$a, c, B \geq \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.65)$$

此时试件的重量降低为原先的 6.25%。

2.4 HRR 场

我们在本节阐述由 Hutchinson^[22], Rice 和 Rosengren^[23]所建立的幂硬化材料平面问题的静止裂纹尖端场,文献中称为 HRR 场。HRR 场所对应的材料描述如下。

(1) 单向应力应变关系为塑性幂硬化型。包括下述三种关系:

① 纯幂硬化
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

$$\textcircled{2} \text{弹性接纯幂硬化} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_0} & \sigma < \sigma_0 \\ \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n & \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{Ramberg-Osgood 关系} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$$

在上述各式中, σ_0 与 ε_0 分别为参照应力与参照应变; α 与 n 分别为幂硬化系数与幂硬化指数。上述三种材料应力—应变关系在裂纹尖端附近均可以近似化为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \quad (2.66)$$

(2) 按 J_2 形变理论推广为多轴应力应变关系。在 J_2 形变理论下, 等效应力 σ_e 定义为

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \quad (2.67)$$

式中, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, 为应力偏量。易于验证: 在单向拉伸时等效应力 σ_e 等价于单拉应力 σ_0 。按 J_2 形变理论可将式(2.66)推广为下述多轴应力应变关系

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} \approx \frac{3}{2}\alpha \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (2.68)$$

按依留申理论, 上述本构关系下形变理论的结果等价于增量理论的结果。

下面讨论平面应变下的裂纹尖端场(平面应力下的求解与之类似, 由 Hutchinson^[24]给出)。记极坐标应力分量为 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$, 则上述两式可化简为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e^2 &= 3 \left[\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \right)^2 + \sigma_{r\theta}^2 \right] \\ \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{\varepsilon_0} &= \frac{3}{2}\alpha \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1} \frac{s_{\alpha\beta}}{\sigma_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

引入应力函数 Φ , 由它可导出极坐标应力分量为

$$\sigma_{rr} = \frac{\Phi'}{r} + \frac{\ddot{\Phi}}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \Phi'', \quad \sigma_{r\theta} = -\left(\frac{\Phi}{r^2}\right)' \quad (2.70)$$

式中, $(\)' = \frac{\partial}{\partial r}(\)$, $(\)'' = \frac{\partial}{\partial \theta}(\)$ 。应力函数的运用使平衡方程自动得到满足。极坐标下的协调方程可写为

$$r(r\varepsilon_{\theta\theta})'' + \dot{\varepsilon}_{rr} - r(\dot{\varepsilon}_{rr})' - 2(r\dot{\varepsilon}_{r\theta})' = 0 \quad (2.71)$$

由式(2.69)到式(2.71)可见, 所有应力与应变极坐标分量既是因变量应力函数 Φ 的齐次函数, 又是自变量 r 的齐次函数。综合上述三式所得的控制方程是一个对 Φ 和 r 的等规度(equal-dimensional)方程。这类方程容许下述分离变量形式解的存在

$$\Phi(r, \theta) = r^s \bar{\phi}_1(\theta) + r^t \bar{\phi}_2(\theta) + \dots \quad t > s \quad (2.72)$$

HRR 场指上述解在裂纹尖端附近的首项。该主导奇异项为

$$\Phi(r, \theta) \approx Kr^s \bar{\phi}(\theta) \quad (2.73)$$

式中, K 为奇异场强度幅值; $\bar{\phi}(\theta)$ 按 $\bar{\phi}(0) = 1$ 而归一化。式(2.72)中的第二项最先由李尧臣、王自强解出^[25], 其重要意义将在本章最后一节中讨论。

将式(2.73)代入式(2.69)至式(2.71)并经冗长的代数运算可得下述首项控制方程

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - n(s-2)[n(s-2)+2] \right\} \left\{ \bar{\sigma}_c^{-1} [s(2-s)\bar{\phi} + \ddot{\bar{\phi}}] \right\} \\ & + 4(s-1)[n(s-2)+1] \frac{d}{d\theta} (\bar{\sigma}_c^{-1} \dot{\bar{\phi}}) = 0 \\ & \bar{\sigma}_c^2 = \frac{3}{4} [s(2-s)\bar{\phi} + \ddot{\bar{\phi}}]^2 + 3(1-s)^2 \dot{\bar{\phi}}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

该方程是一个四阶齐次非线性常微分方程, 需要 5 个定解条件来求解该方程和特征指数 s 。方程的齐次性使得式(2.73)中的 K 无

法由渐近解确定,而代之以归一化条件 $\tilde{\phi}(0) = 1$ 。由裂纹表面应力自由条件可得其他 4 个定解条件

$$\tilde{\phi}(\pm\pi) = \dot{\tilde{\phi}}(\pm\pi) = 0 \quad (2.75)$$

由此可求解 I - I 混合型问题。对纯 I 型问题,可在上半平面进行求解。这时其全部定解条件包括裂纹上岸自由条件,裂纹延长线对称条件和归一化条件

$$\tilde{\phi}(\pi) = \dot{\tilde{\phi}}(\pi) = \dot{\tilde{\phi}}(0) = \ddot{\tilde{\phi}}(0) = 0, \quad \tilde{\phi}(0) = 1 \quad (2.76)$$

由式(2.74)、式(2.76)可求解四阶常微分方程及特征值 s 。

求解 s 有两种途径。一种途径是在式(2.74)和式(2.76)下求解特征值问题,见 Hutchinson^[22],其结果为 $s \approx \frac{2n+1}{n+1}$ 。另一种途径为借助 J 积分求解,见 Rice 和 Rosengren^[23]。取 J 积分围道 Γ 为以裂尖为中心、 r 为半径的圆,则有

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (w_{n1} - \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} u_{\alpha,1}) r d\theta \quad (2.77)$$

当 r 位于 K 环域时,可得 $J = \frac{1-\nu^2}{E} K_1^2$,为一有限大的常数。由于 J 积分的路径无关性,所以当 r 缩小至 HRR 场占优的区域时,其 J 积分亦应为一有限大常数。这样,在 r 趋于零时必有

$$\sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \propto O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.78)$$

将式(2.69)、式(2.70)、式(2.73)代入上述渐近关系可得

$$s = \frac{2n+1}{n+1} \quad (2.79)$$

当特征值 s 确定后,可由打靶法(shooting method)求解两点边值问题式(2.74)和式(2.76)。其求解格式为

- ①由初值 $\tilde{\phi}(0) = 1, \dot{\tilde{\phi}}(0) = 0, \ddot{\tilde{\phi}} = A, \ddot{\tilde{\phi}} = 0$ 出发求解;
- ②用 Ronge-Kutta 法按式(2.74)进行积分,得试探函数 $\psi(\theta)$;
- ③检查 $\psi(\pi)^2 + \dot{\psi}(\pi)^2$ 是否小于 ϵ^2 , ϵ 为控制求解精度的小量。

若答案为是,则取 $\tilde{\phi}(\theta) = \phi(\theta)$;若答案为否,则对 A 值修正后再退回第①步重新求解。

按上述求解步骤和 J 积分定义可得下述 HRR 场

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\epsilon_0 l_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta; n) \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \alpha\epsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\epsilon_0 l_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}(\theta; n) \\ u_a - \bar{u}_a &= \frac{J}{\sigma_0 l_n} \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\epsilon_0 l_n r} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \bar{u}_a(\theta; n) \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

式中, l_n 仅与 n 有关; \bar{u}_a 表示用渐近分析不能确定的裂尖刚体位移。在 I 型、II 型、混合型、平面应力和平面应变下 HRR 场的的数据(包括 l_n 与角分布函数 $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$, $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$, \bar{u}_a 等)由 Symington 等给出^[26]。式(2.80)表明:

① HRR 场中应力的奇异性为 $r^{-\frac{1}{n+1}}$, 应变的奇异性为 $r^{-\frac{1}{n+1}}$, 位移按 $r^{\frac{1}{n+1}}$ 的变化规律趋于零。当 $n=1$ 时, HRR 场的奇异性退化为 K 场奇异性; 当 $n>1$ 时, HRR 场的应力奇异性低于 K 场, 而 HRR 场的变形奇异性高于 K 场。

② 同弹性裂纹体的 K 一样, J 积分可度量裂纹尖端场的强度。

在小范围屈服的特例下, $J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$, 而式(2.73)中的 K 值为

$$K = \left[\frac{1-\nu^2}{\alpha l_n} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.81)$$

在理想弹塑性体(即 $n \rightarrow \infty$)的特例下, HRR 场在平面应变和平面应力下分别退化为图 2.14 中的 Prandtl 滑移线场和 Hutchinson 滑移线场^[24], 其中 Hutchinson 滑移线场在裂纹后方有一条应力间断线。靳志和和余寿文构造了一个平面应力条件下应力全连续的滑移线场^[27]。

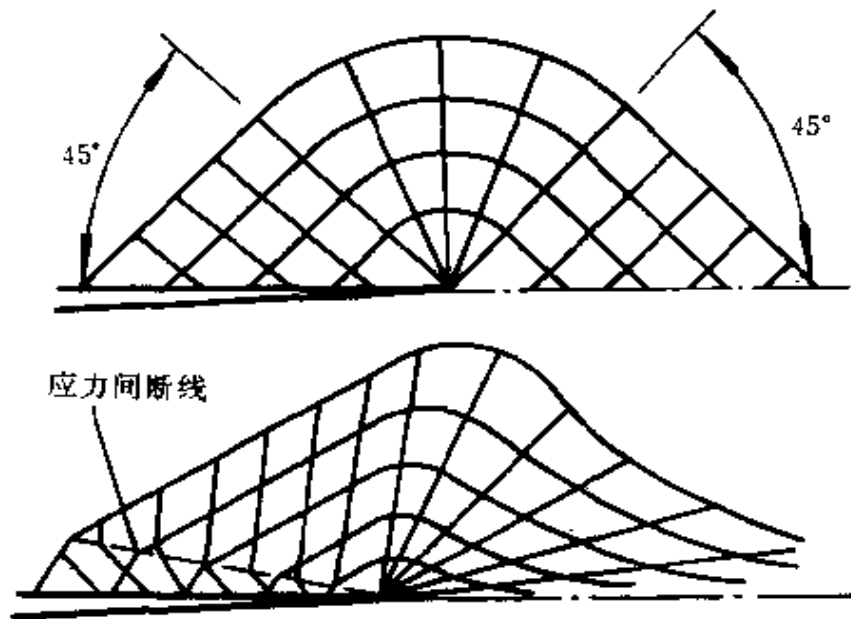


图 2.14 HRR 滑移线场

上图:平面应变 Prandtl 场;下图:平面应力 Hutchinson 场。

2.5 J 控制扩展

2.5.1 J 阻力曲线

我们在本节探讨起裂后的弹塑性断裂行为。材料的 J 积分值 (即 J_R) 随裂纹扩展量 Δa 的变化曲线称为 J 阻力曲线。典型的 J 阻力曲线如图 2.15 所示。

先讨论图 2.15 中上图所示的 J 阻力曲线:当外加 J 积分值小于 J_{Ic} 时,裂纹钝化却并不撕裂,图中虚斜线为刻画这一过程的钝化线;当 J 超过 J_{Ic} 时,裂纹钝化至一定程度后呈稳定撕裂。在不同 J 值下所得撕裂量 Δa 的曲线便是 J 阻力曲线,而钝化线与 J 阻力曲线起裂处切线交点的纵坐标为起裂韧性 J_{Ic} 。由 J 阻力曲线的初始段来测定 J_{Ic} 已有国家标准^[20]。在标准阻力曲线的绘制中,常将裂纹钝化的影响除去,于是阻力曲线如图 2.15 下图所示,且

$$J_{Ic} = J_R(0) \quad (2.82)$$

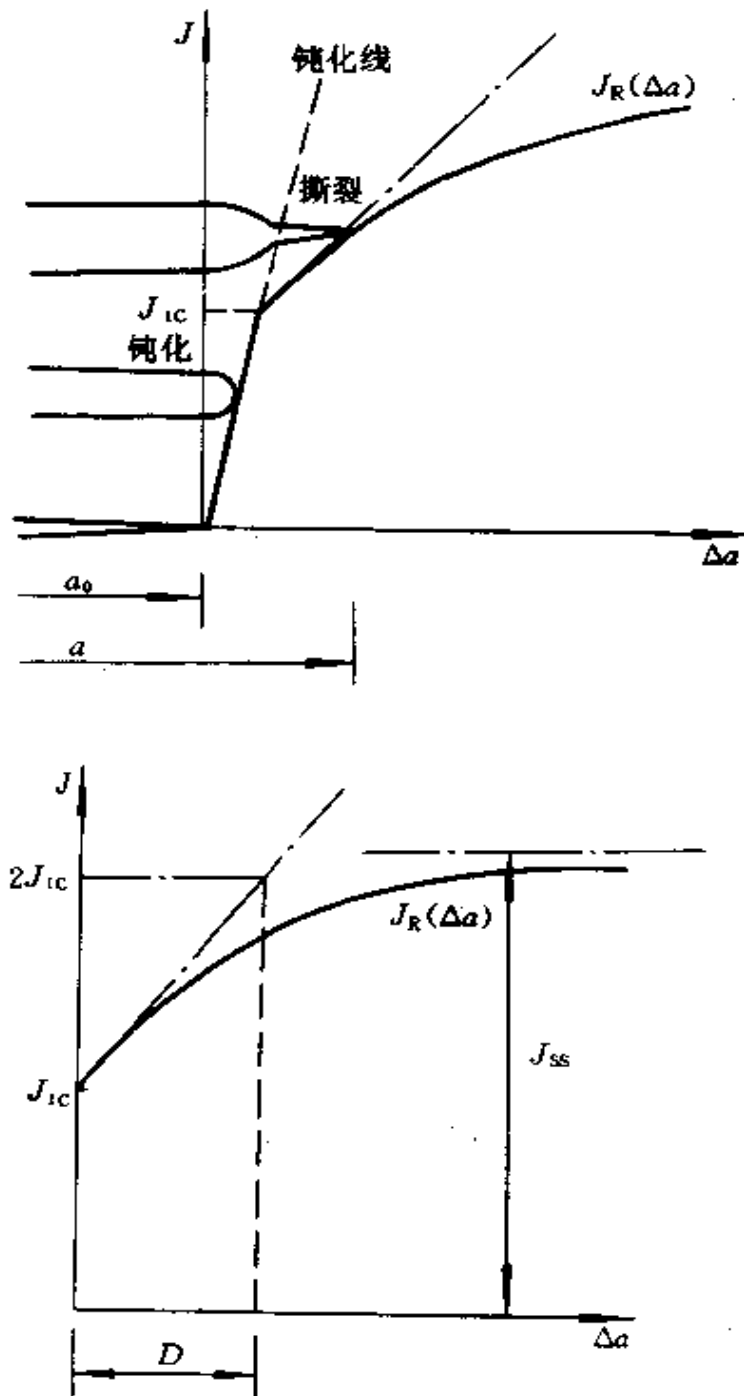


图 2.15 J 阻力曲线

对一般韧性材料, J 阻力曲线随 Δa 增加而迅速上升, J_R 曲线表示了韧性材料随裂纹扩展而发掘的材料抗裂潜力。 J 阻力曲线常具有上平台

$$J_{ss} = \lim_{\Delta a \rightarrow \infty} J_R(\Delta a) \quad (2.83)$$

它代表定常情况下的饱和 J 值。对不同材料 J_{ss} 可在 J_{Ic} 的几倍至几十倍的范围内变化。 J 阻力曲线的实验量测最先由 Hermann 与 Rice^[28] 作出,对 J 阻力曲线的理论预测将在第 3.2 节中给出。 J 阻力曲线的上升速度可由一材料长度 D 来度量,见图 2.15 下图所示。

$$D = \frac{J_{Ic}}{(dJ_R/d\Delta a)_c} \quad (2.84)$$

D 略小于 J_R 值自 J_{Ic} 加倍时裂纹所扩展的距离。 D 值较大,表明材料抗裂纹扩展能力较弱; D 值较小,表明材料抗裂纹扩展能力较强。

2.5.2 J 控制扩展

扩展裂纹与静止裂纹的不同之处在于:

- ① 塑性变形耗散于扩展裂纹上下两岸而不是集中于裂纹尖端区;
- ② 有弹性卸载区;
- ③ 不满足比例加载;
- ④ 具有较弱的奇异性,详见下节叙述。

对弹塑性扩展裂纹的力学描述是尚未完全解决的问题。本节讨论最简单的 J 控制扩展情况^[29],关于非 J 控制扩展的基本思路可参见文献[30]。

如图 2.16 所示, J 控制扩展指扩展裂纹的尖端区仍然被一个 HRR 场有效的 J 环境所包围的情况。 J 控制扩展需要满足两个条件:

(1) J 控制区远大于弹性卸载区。若记 R 为形变理论所计算的 J 场有效半径,并用裂纹扩展量 Δa 来度量弹性卸载区的尺寸,则要求

$$R \gg \Delta a \quad (2.85)$$

(2) J 控制区远大于非比例加载区。在后一区域内,塑性增量

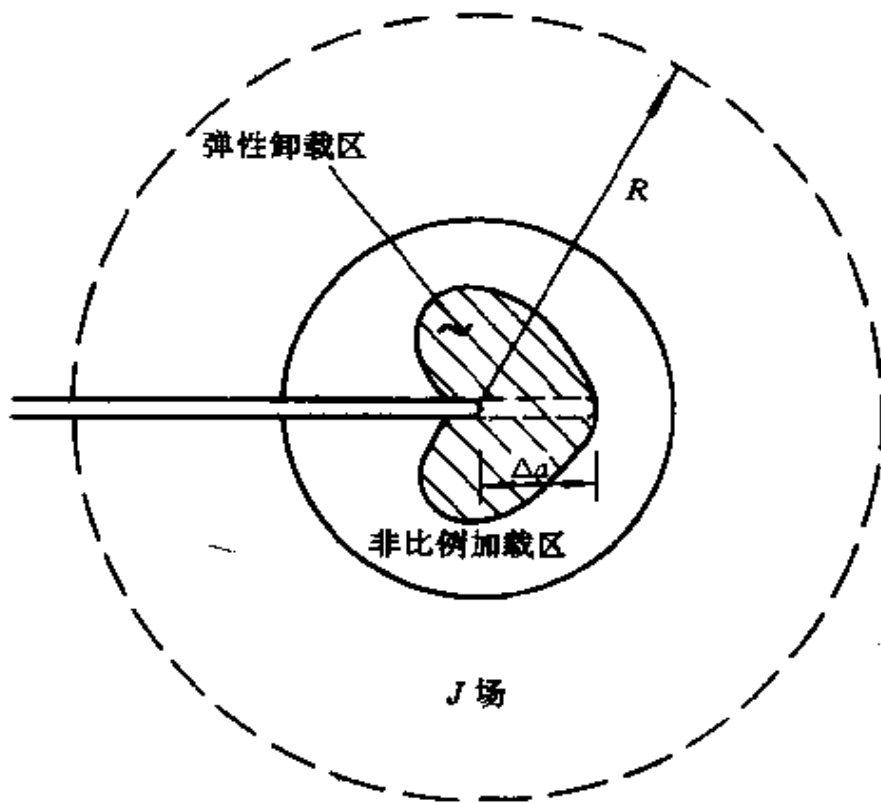


图 2.16 J 控制扩展

理论的预计与塑性形变理论的预计有显著不同。我们从 HRR 场 (式(2.80)) 出发来估算非比例加载区的尺寸。由于裂纹扩展(这时 J 与 a 均发生变化)所引起的应变增量为

$$\begin{aligned} d\epsilon_{\alpha\beta} &= \alpha\epsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\epsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left\{ J^{n/(n+1)} \frac{\partial}{\partial a} [r^{-n/(n+1)} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}(\theta; n)] \right. \\ &\quad \left. + r^{-1/(n+1)} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}(\theta; n) \frac{d}{dJ} (J^{n/(n+1)}) dJ \right\} \\ &= \alpha\epsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\epsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left[\frac{n}{n+1} \frac{dJ}{J} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \frac{da}{r} \tilde{\beta}_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

式中, 第一项正比于 $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$, 代表比例加载部分; 后一项正比于

$$\tilde{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{n}{n+1} \cos\theta \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \quad (2.87)$$

代表非比例加载部分。若前一项占优, 为典型的比例加载区; 若后一项占优, 为典型的非比例加载区。 $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$ 与 $\tilde{\beta}_{\alpha\beta}$ 的量级均在 1 左右, 因此近似比例加载要求 $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$ 前的系数远大于 $\tilde{\beta}_{\alpha\beta}$ 前的系数, 即

$$\frac{dJ}{J} \gg \frac{da}{r} \quad (2.88)$$

利用图 2.16 所确定的 R 的定义和式(2.84)所确定的材料长度 D ，我们可将上式改写为

$$R \gg D \quad (2.89)$$

对式(2.89)可评述如下：

①对不同材料，材料长度 D 可在 0.5mm 至 5mm 之间变化。 D 值较小时，易于实现 J 控制扩展； D 值较大时，难于实现 J 控制扩展。

② R 的大小与试件形状有关。对紧凑拉伸和三点弯曲试件， R 值可达到韧带长度的 5% ~ 7%；对中心裂纹板， R 值只有裂纹长度的 1%。前者易于实现 J 控制扩展，后者难于实现 J 控制扩展。

2.5.3 J 控制扩展的稳定性

我们推广第 1 章图 1.2 所示的柔度标定法来讨论 J 控制扩展的稳定性。如图 2.17 所示，可将加载系统的柔度定义为 C_M ， $C_M = 0$ 的极限表示位移加载； $C_M \rightarrow \infty$ 的极限表示力加载。我们讨论在试验机读出位移 Δ_T 恒定时 J 控制扩展的稳定性。

对图 2.17 所示的深缺口紧凑拉伸试件，Hutchinson 和 Paris^[29] 导出了下述扩展裂纹 J 积分表达式

$$J = 2 \int_0^{\Delta_{cr}} \frac{P}{c} d\Delta_{cr} - \int_{a_0}^a \frac{J}{c} da \quad (2.90)$$

式中， $\Delta_{cr} = \Delta - \Delta_{nc}$ 为仅由裂纹产生的伸长量； Δ_{nc} 为 $a = 0$ 时的试件端位移； c 为韧带长度。该表达式与加载方式（即 C_M 值）无关。由上式可计算当 Δ_T 给定时的推动力表达式

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = \frac{2P}{c} \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_{\Delta_T} - \frac{J}{c} \quad (2.91)$$

对深缺口试件， Δ_{cr} 是 a 与 P 的函数，其全微分为

$$d\Delta_{cr} = \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_P da + \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial P} \right)_a dP \quad (2.92)$$

若 Δ_T 保持恒定，则必需满足约束

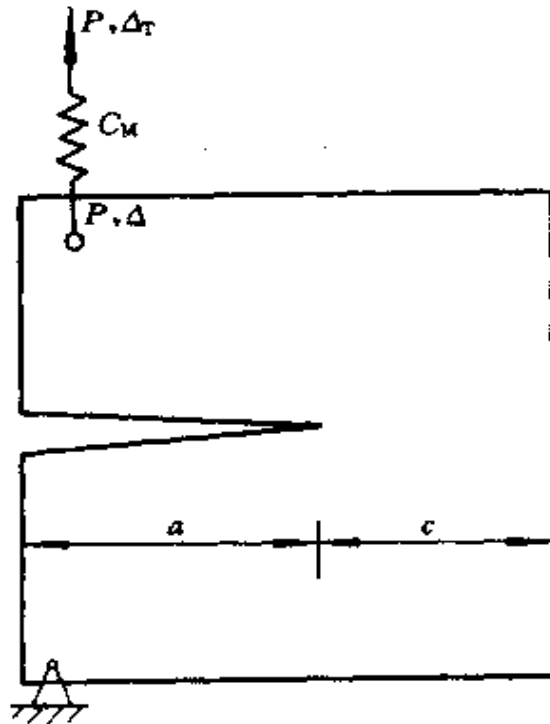


图 2.17 J 控制扩展的柔度标定

$$d\Delta_r = \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_r da + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_s dP + C_M dP = 0 \quad (2.93)$$

由上式可解出 dP , 将其代回式(2.92)后可得

$$\left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_{\Delta_r} = \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_r \frac{C}{C + \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial P} \right)_s} \quad (2.94)$$

式中, $C = C_M + \frac{\partial \Delta_{nc}}{\partial P}$ 为无裂纹试件在该加载系统下的总柔度, 可预先进行实验标定。此外, 对深缺口试件还存在下述关系

$$\left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial a} \right)_r = \frac{2P}{c} \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial P} \right)_s \quad (2.95)$$

将式(2.95)代入式(2.94)再代入式(2.91)可得

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_r} = \frac{4P^2}{c^2} \left\{ \frac{C}{1 + C \left(\frac{\partial P}{\partial \Delta_{cr}} \right)_s} \right\} - \frac{J}{c} \quad (2.96)$$

式中, $\left(\frac{\partial P}{\partial \Delta_{cr}}\right)_s$ 可由静止裂纹的柔度曲线测出。式(2.96)右端均为已知, 由该式可计算推动力的变化。在纯位移加载情况下, $C_M = 0$, C 值很小; 因此式(2.96)中第二项占优, 推动力随裂纹扩展而下降, 见图 2.18 中诸虚线。在纯力加载情况下, $C_M \rightarrow \infty$, 式(2.96)简化为

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_P = \frac{4P^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Delta_{cr}}{\partial P}\right)_s - \frac{J}{c} \quad (2.97)$$

这时第一项占优, 推动力随裂纹扩展而上升, 见图 2.18 中诸点划

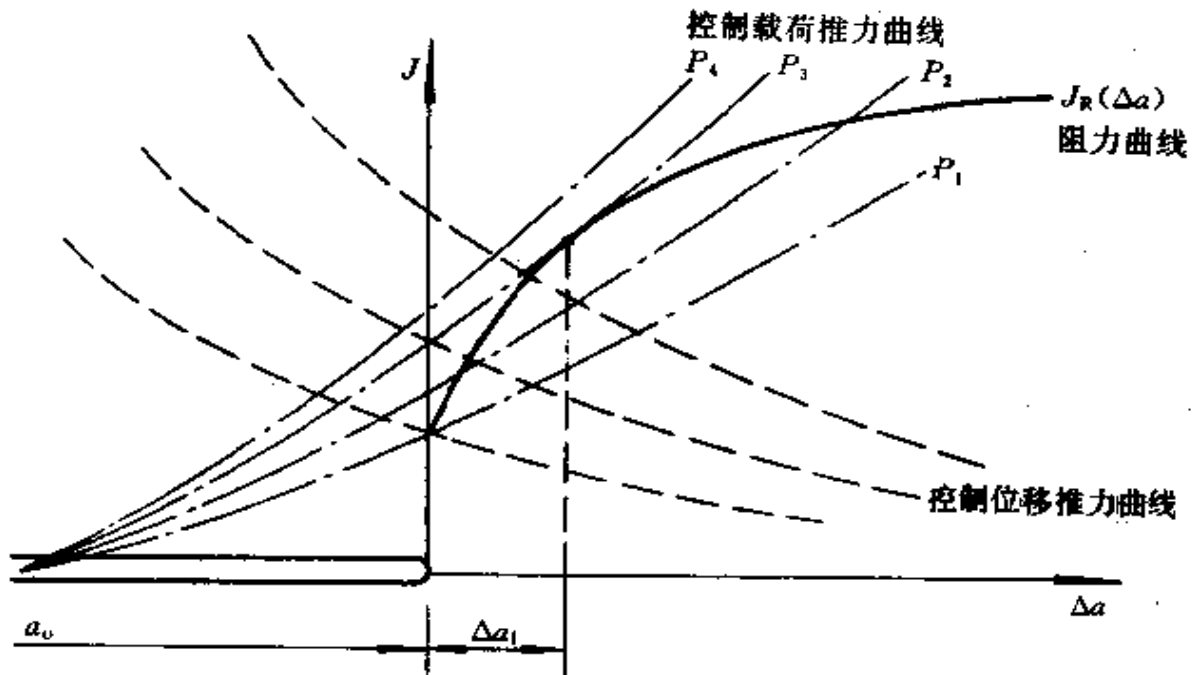


图 2.18 J 控制扩展的稳定性

线。对非硬化材料的全塑性情况, P 为极限载荷, 而 $\left(\frac{\partial P}{\partial \Delta_{cr}}\right)_s = 0$ 。式(2.96)简化为

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_{P_1} = \frac{4P^2}{c^2} C - \frac{J}{c} \quad (2.98)$$

由推力曲线与阻力曲线的比较可确定 J 控制扩展的稳定性。

由图 2.18 可见,在控制位移加载时裂纹扩展是稳定的。在控制力 P 的加载过程中,当 $P < P_1$ 时裂纹不会起裂; $P = P_1$ 为起裂载荷;当 P 上升至 P_2 时裂纹经少量稳定扩展后止裂;当 $P = P_3$ 时推力曲线与阻力曲线相切,裂纹扩展呈失稳趋势,切点所对应的 Δa_1 值为裂纹的最大稳定扩展量;在 $P = P_4 > P_3$ 时,裂纹呈失稳扩展。

综上所述,裂纹稳定扩展的条件为

$$J = J_R(\Delta a), \quad \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_A < \frac{dJ_R}{da} \quad (2.99)$$

2.5.4 撕裂模量

引入下述无量纲量

$$T = \frac{E}{\sigma_0^2} \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_A, \quad T_R = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ_R}{da} \quad (2.100)$$

式中, $T_R(\Delta a)$ 代表 J 阻力曲线的无量纲切线模量;而

$$T_c = T_R(0) \quad (2.101)$$

被 Paris 等^[31]命名为材料的撕裂模量。Paris 等^[31]列出了 40 余种常用材料的撕裂模量值,其范围在 0.15 至 200 之间。将式(2.100)代入式(2.99)第二式可得

$$T < T_R \quad (2.102)$$

Paris 等^[31]把上式近似表达为

$$T < T_c \quad (2.103)$$

也就是说:材料的撕裂模量愈高,就愈不易发生失稳扩展,韧性就愈好;反之亦然。应指出,与式(2.102)相比,近似式(2.103)是一个不安全的公式。Paris 等^[31]设计了一个巧妙的加载装置,由改变加载系统的柔度来产生不同的断裂推力,其实验结果支持了撕裂模量理论。

下面给出计算撕裂模量的几个例子。

①小范围屈服下含中心裂纹 $2a$ 的无穷大板

$$T = \pi(1 - \nu^2) \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.104)$$

②全塑性条件下含中心裂纹 $2a$ 的无穷大板

$$T = \bar{J}(n) \left(\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (2.105)$$

式中, $\bar{J}(n)$ 仅与幂硬化指数 n 有关。在上述两个例子中 T 均不随裂纹扩展量变化, 推力曲线为射线, 其斜率取决于应力比 $\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0}$ 。

2.6 扩展裂纹尖端场

本节简介扩展裂纹尖端场方面的研究成果, 中国学者在这一领域内的贡献曾在文献[32]中予以综述。关于这一问题更细致的讨论可参阅黄克智、余寿文^[33]的专著。

2.6.1 裂尖渐近展开

在裂纹尖端, 假设可将任一场变量 f 按下列渐近序列进行展开

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad (2.106)$$

式中, f_0 称为首项。取 (r, θ) 为原点随裂尖移动的极坐标, 上述渐近展开式要求

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_{i+1}}{f_i} = 0 \quad \forall i \quad (2.107)$$

渐近展开式(2.106)的具体形式有时可依赖于经验和艺术来选取; 有时可通过繁复的渐近论证逐项得出。例如, 可将式(2.106)取为 r 的幂级数

$$f = r^{s_0} F_0(\theta) + r^{s_1} F_1(\theta) + r^{s_2} F_2(\theta) + \dots$$

$$s_0 < s_1 < s_2 < \dots \quad (2.108)$$

第1章所描述的 K 场和第2.4节所描述的 HRR 场便是其代表例子。另一种可能的渐近展开式是对数函数系列

$$f = r^s \left[\ln \left(\frac{R}{r} \right) \right]^p \left\{ F_0(\theta) + g_1 \ln \left(\frac{R}{r} \right) F_1(\theta) + g_2 \ln \left(\frac{R}{r} \right) F_2(\theta) + \dots \right\}$$

$$(2.109)$$

式中, R 为塑性区特征尺度; g_1, g_2, \dots 等需满足式(2.107)所规定的渐近条件。扩展裂纹的尖端奇异场常可以写成这类形式, 在有些情况下表现为非完备系列^[34]。

2.6.2 扩展裂纹尖端场的基本特征

对足够靠近裂纹扩展路径的一质点来说, 它在裂纹扩展过程中经历了一个从加载到卸载的过程。因此需要在塑性增量理论下依据确定的应变历史求解。当扩展裂纹相距尚远时, 该物质点属于弹性变形; 当扩展裂纹临近时, 该物质点逐渐加载至塑性变形; 当扩展裂纹从上方或下方掠过时, 该点达到加载顶峰而出现卸载; 当裂纹扩展远去后该点的载荷卸至零。此外, 在裂纹表面的质点可能有一个反向加载区。在裂纹通过时, 该物质点也可能反复地承受加载卸载过程。由上述过程可总结出弹塑性扩展裂纹尖端场的基本特征为:

①扩展裂纹尖端场由塑性加载区、卸载区(瞬时响应为弹性但有塑性残余变形)和反向塑性加载区装配而成。其中每一种区域还可能有不同的渐近类型。

②在裂纹尾区所耗散的能量随裂纹扩展量的增加而增加。

③扩展裂纹尖端场一般具有比静止裂纹尖端场弱得多的奇异性。

④流入裂尖的能通量(即 $\lim_{r \rightarrow 0} J_r$) 等于零。外界能量全部耗散于尾区的塑性变形, 而无能量被分配至断裂过程。这一现象被称之为 Rice 反论。

裂纹扩展的方式按惯性效应的影响来分有准静态和动态两种。前者指裂纹扩展速度 \dot{a} 远小于应力波速的情况; 而后者指裂纹扩展马赫数 $M = \dot{a}/C$, 并不远小于 1 的情况。动态弹塑性扩展裂纹尖端解目前尚未达到理论上的共识, 且现存理论解与有限元详尽计算尚不一致, 因此在这里不拟讨论。若在裂纹扩展过程中 \dot{a} 为常数, 则称为定常扩展; 否则称为非定常扩展。定常扩展解包含裂纹尖端场的主导项, 因此它是研究非定常扩展的基础。对定常扩展,

任一场变量 f 的时间导数可转换为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\dot{a} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (2.110)$$

在随后各小节的讨论中均假设这一定常扩展条件成立。

2.6.3 理想弹塑性材料

对 III 型反平面问题, Chitaley 和 McClintock^[35] 最先构造了近尖端渐近场, 见图 2.19。图中 E、P、W、S 分别对应弹性区、主塑性区、卸载区和二次塑性区。沿裂纹延长线, 其非零塑性应变为

$$\epsilon_{32}^p = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}\mu} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{R}{r} \right)^2 + \ln \frac{R}{r} \right] \quad (2.111)$$

式中, R 为主塑性区尺寸。因此, 对理想弹塑性材料的扩展裂纹尖端场来说, 其应力有界, 而应变具有对数平方奇异性。

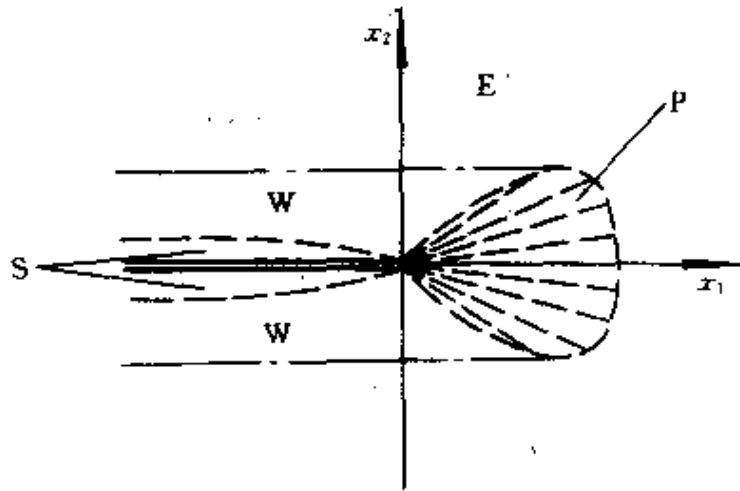


图 2.19 III 型准静态扩展裂纹的渐近场

对 I 型问题应区分不可压缩 ($\nu = \frac{1}{2}$) 和可压缩 ($\nu < \frac{1}{2}$) 情况。目前仅在平面应变问题上找到了渐近解。对不可压缩材料, 解在上半平面有四个区, 为修正的 Prandtl 场, 如图 2.20(a) 所示。图中①区为均匀应力场; ②区为扇形区; ③区为卸载区; ④区为反向加载区; Γ_1 为①区与②区的交界线; Γ_3 为卸载边界; Γ_0 为重新加

载边界。该场由 Slepyan^[36], 高玉臣^[37]和 Rice 等^[38]独立得到, 在扇形区应变具有对数奇异性。

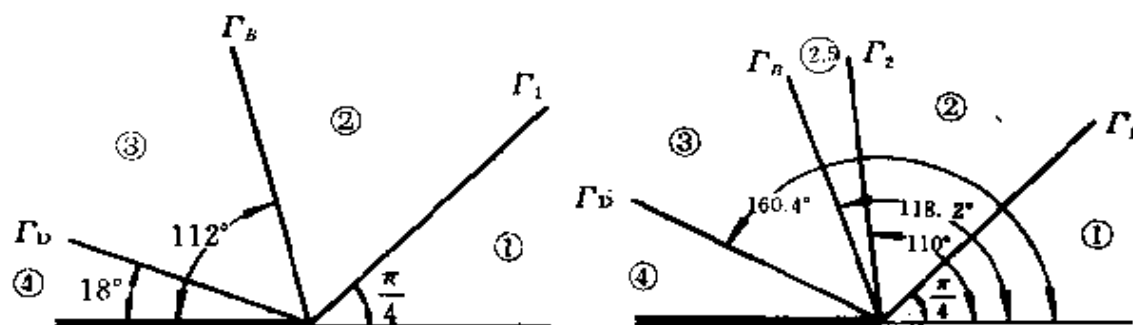


图 2.20 I 型准静态扩展裂纹渐近场

(a) 不可压缩材料; (b) 可压缩材料。

对可压缩材料, 解在上半平面有五个区。高玉臣^[39]和 Drugan, Rice 与 Sham^[40]提出了两个不同的五区解。图 2.20(b) 绘出了罗学富与黄克智对 Drugan 等解进行修正后的结果^[41]。该图在扇形区与卸载区之间插入一个(2.5)区, Γ_2 为(2)区与(2.5)区的交界。在渐近表达式(2.109)意义上的高阶渐近解由张林得到^[34], 在高阶渐近解下各区域的交线是曲线。

2.6.4 双线性硬化材料

双线性硬化材料亦称为分段线性材料。在弹性段的模量为 E , 在塑性段的模量为 E_s 。对 III 型反平面问题、平面应力和平面应变问题, Amazigo 与 Hutchinson^[42]得到扩展裂纹尖端奇异场的形式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &\approx r^{-s} \Sigma_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} &\approx r^{-s} E_{ij}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

而奇异性指数 s 取决于比值 E_s/E 。该解答忽略了二次塑性加载区的存在。杨卫^[43]用较严格的渐近分析证明在 III 型弱线性硬化 ($E_s/E \ll 1$) 的情况下, Amazigo 与 Hutchinson 的解^[42]可转化为 Chitaley 和 McClintock 的解^[35]。

2.6.5 幂硬化材料

I 型平面应变幂硬化材料的扩展裂纹渐近解形式由高玉臣、黄克智给出^[44]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{n-1}} \Sigma_{\alpha\beta}(\theta) \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{n-1}} E_{\alpha\beta}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

这一对数幂次型渐近解在文献中称为高一黄解。就目前的认识而言,高一黄解尚不完整^[32]。对 III 型反平面问题,对数幂次型渐近解取另一种形式^[45]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{3\alpha} &= \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n-1}} \Sigma_{3\alpha}(\theta) \\ \varepsilon_{3\alpha} &= \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}} E_{3\alpha}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

2.6.6 率相关材料

以上讨论均对应于率无关材料。适用于弹塑性率相关材料的简单本构关系为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + c \sigma_{ij}^{m-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (1.115)$$

式中,前两项为弹性各向同性变形率;后一项为蠕变率。 c 与 m 分别为率敏感系数和率敏感指数。Hui 和 Riedel 在这一材料描述下得到了一个幂次型渐近场^[46](平面及反平面问题)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &\propto r^{-\frac{1}{m-1}} \Sigma_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} &\propto r^{-\frac{1}{m-1}} E_{ij}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

该解答在文献中称为 HR 场。HR 场具有下述特征:

- ① 应力、应变、弹性应变、塑性应变均具有 $r^{-1/(m-1)}$ 奇异性;
- ② 该场仅适用于 $m > 3$ 的情况, $m \leq 3$ 时为弹性裂尖场;
- ③ HR 场是一个自治场,渐近解式(2.116)中不包含任何与外

载和裂纹几何有关的参数,无法依据式(2.116)来建立断裂准则;

④HR场求解中假设全部加卸载过程都可以用式(2.115)描述。

杨卫和 Freund^[47]对 HR 场进行了修正。他们考虑了由不同加卸载段构成的本构响应,其所得的裂尖场仍具有式(2.116)的形式但该场的强度与外载弱相关。杨卫和 Freund 还实现了上述解在弱率敏感情况下向率无关解的过渡。该过渡解所具有的裂尖边界层结构是非线性断裂力学的普遍现象^[48],各类边界层的特征尺寸在独立作用时为

$$\left. \begin{array}{l} \text{动态边界层} \quad r_M = R \exp\left(-\frac{l}{M}\right) \\ \text{硬化边界层} \quad r_h = R \exp\left[-\sqrt{E/E_t}\right] \\ \text{率敏感边界} \quad r_m = \frac{a}{2\mu c \sigma_0^{m-1}} \exp[1-m] \end{array} \right\} \quad (2.117)$$

式中 c 是式(2.115)中给出的率敏感系数。上述长度量纲在确定相应的断裂准则时至关重要。对动态、硬化和率敏感相互耦合的情况,将出现多重边界层嵌套结构。

2.7 J-Q 理论

2.7.1 J 积分理论的不足

在 2.3 节至 2.5 节所介绍的 J 积分理论固然能阐明弹塑性断裂力学的若干基本问题,但仍存在着下述两点不足:

(1)HRR 场主导区过小。HRR 场的主导区尺寸 R 见图 2.21。有限元计算的结果表明:对紧凑拉伸试件, R 约为 7%~10% c ;对单边拉伸板, R 降至 1%~3% a ;对中心裂纹板, R 值只有 1% a 。裂纹长度(或半长) a 和韧带长度 c 的定义均在图 2.21 中给出。图 2.21 中 HRR 场主导区尺寸从左至右的减小源于所对应几何构形三轴约束程度的降低。对三轴约束程度较弱的右图,若 $a = 10\text{mm}$,则 HRR 场有效区尺寸 R 只有 0.1mm,小于各种材料材料长度 D

$=0.5 \sim 5\text{mm}$, 无法实现 J 控制扩展。

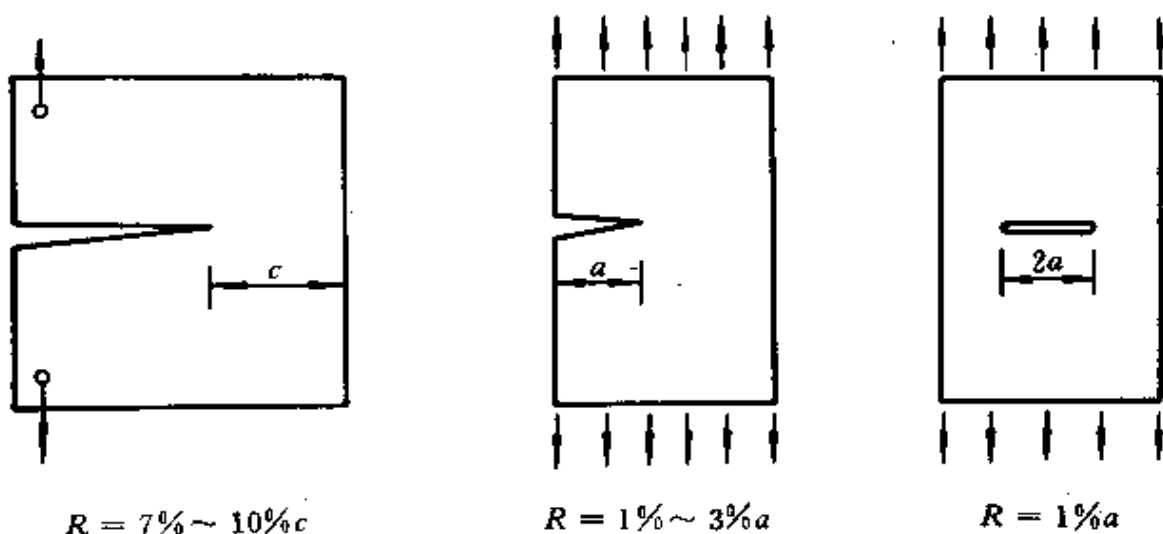


图 2.21 HRR 场的主导区

(2) J 阻力曲线与试件几何相关。顾名思义, J 阻力曲线应是材料性质, 与所采用测试 J 阻力曲线的试件几何形状无关。但大量实验结果表明, 用不同几何形状(如紧凑拉伸、三点弯曲、单边裂纹板、中心裂纹板)所测得的 J 阻力曲线并不相同, 其数值差异有时可达几倍以上。

上述两项不足使单参量的 J 积分理论蒙上阴影, 导致了 $J-Q$ 理论的产生。

2.7.2 裂纹尖端场的两项展开

回顾线弹性断裂力学, 对 I 型裂纹来说, 其裂尖渐近场的两项展开为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{\alpha\beta}^I(\theta) + \sigma_T \delta_{1\alpha} \delta_{1\beta} \quad (2.118)$$

式中, σ_T 表示平行于裂纹的横向应力, 或 T 应力。 σ_T 的值控制着屈服区的大小与方向。基于 K_I 和 σ_T 两个断裂参量而建立的断裂准则称为 $K-T$ 评价法。

对弹塑性硬化材料的静止裂纹场亦可做两项展开^[25,49,50]

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_0} = \left(\frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I, r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta; n) + Q \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right)^q \hat{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta; n) \quad (2.119)$$

式中, 第一项为小变形情况下的 HRR 场; $I,$ 与 $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta; n)$ 已有列表^[26]; 第二项为对 HRR 场的修正, 对它的数值拟合表明:

①对大多数材料组合, 奇异性指数 q 接近于零;

②在裂纹前方区(即 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 时), $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ 很小, 且近似有 $\hat{\sigma}_{rr} \approx \hat{\sigma}_{\theta\theta} \approx$ 常数。

有鉴于此, 可重新对式(2.119)中第二项进行规一化, 并将之简化为^[50]

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_0} = \left(\frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I, r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta; n) + Q \delta_{\alpha\beta} \quad (2.120)$$

上式明确无误地表达了 Q 修正第二项的物理意义; 它代表对 HRR 场的静水应力修正。当 $Q = \pm 1$ 时, 对静水应力的修正便为 $\pm \sigma_0$ 。 Q 是一个三轴约束因子, 其取值约在 -1.5 至 $+0.25$ 之间。图 2.21 中各图形的 Q 值自左至右依次降低。综合考虑 J 积分与 Q 值的理论称之为 J - Q 理论。在小范围屈服的情况下, 若采用边界层构形: 远场给定 K - T 场, 近场计算 J - Q 场, 则计算所得的 Q 值可近似关联为^[50]

$$Q \approx a_0 + a_1 \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} \right) + a_2 \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.121)$$

当 $n = 5$ 时, $a_0 = -0.1, a_1 = 0.72, a_2 = -0.42$; 当 $n = 10$ 时, $a_0 = -0.05, a_1 = 0.81, a_2 = -0.54$ 。

在大范围屈服(LSY)的情况下, 由式(2.120)所定义的 J - Q 环域的有效区大于 HRR 场的范围。对图 2.21 所示的三种构形, J - Q 环域的有效区尺寸均达到特征几何长度(裂纹长度 a 或韧带长度 c) 的 20%。对图 2.21 右面两种构形, J - Q 环域远大于 HRR 场的有效区, J - Q 控制扩展的条件可以得到满足^[50,51]。

2.7.3 弹塑性裂纹场的 Q 表征

有关裂纹尖端奇异场的有限变形计算^[52,50,51]表明: 裂纹尖端

的应力并无奇异性。若以 $\tau_{\theta\theta}/\sigma_0$ 为纵坐标 ($\tau_{\theta\theta}$ 为 Kirchhoff 应力的环向分量), $r/(J/\sigma_0)$ 为横坐标作图的话, 所有的 HRR 场均可由一条曲线来表达, 即图 2.22 的虚线。若对该 HRR 场进行大变形修正^[52], 则该条曲线应在 $r/(J/\sigma_0) = 1 \sim 2$ 处 (或 $r = \delta_t \sim 2\delta_t$ 处) 取峰值, 见图 2.22 中点划线。上述讨论表明: (J/σ_0) 仅度量剧烈变形区的尺度, 却并不能影响峰值应力的高低。当 J 积分增加时, 在裂尖附近产生大变形的区域增加, 而实际的峰值应力却并不会明显增加。

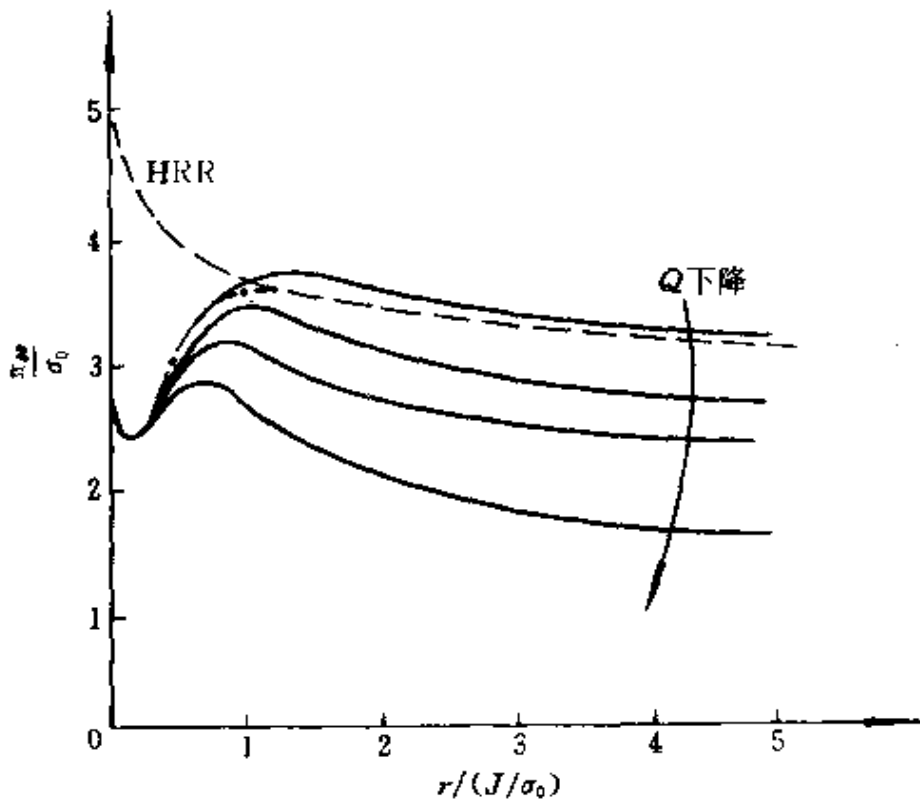


图 2.22 弹塑性裂纹应力场的 Q 表征

实际上, 裂尖场峰值应力的高低由 Q 值给定。 Q 值大, 峰值应力高; Q 值小, 峰值应力低, 如图 2.22 诸实曲线所示。 J - Q 理论的核心在于: J 积分度量大变形的区域的大小, Q 值标志裂尖峰值应力的高低。

2.7.4 Q 值的确定

若将裂纹尖端应力场视为 HRR 场 $\sigma_{\alpha\beta}^{\text{HRR}}$ 与另一补足应力场 $\sigma'_{\alpha\beta}$ 的叠加

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{\text{HRR}} + \sigma'_{\alpha\beta} \quad (2.122)$$

则可根据 $\sigma'_{\alpha\beta}$ 的值来确定 Q 值。O'Dowd 和 Shih^[51] 建议按下述条件确定 Q 值

$$Q\sigma_0 = \sigma'_{\theta\theta} |_{\theta=0, r=2J/\sigma_0} \quad (2.123)$$

即将 Q 定义为裂纹延长线上约 2 倍于 COD 处的无量纲环向补足应力。这样得到的 Q 值与裂纹几何、外载双轴性和塑性变形程度 (即 $J/a\sigma_0$) 有关。对单轴加载, O'Dowd 和 Shih^[51] 计算了受弯单边裂纹板和受拉中心裂纹板的 Q 值随 $J/a\sigma_0$ 值变化曲线, 如图 2.23 所示。由图可见: ① 受弯单边裂纹板 (如虚线所示) 的三轴约束高于受拉中心裂纹板 (如实线所示); ② 随塑性变形的加剧, 三轴约束不断下降。

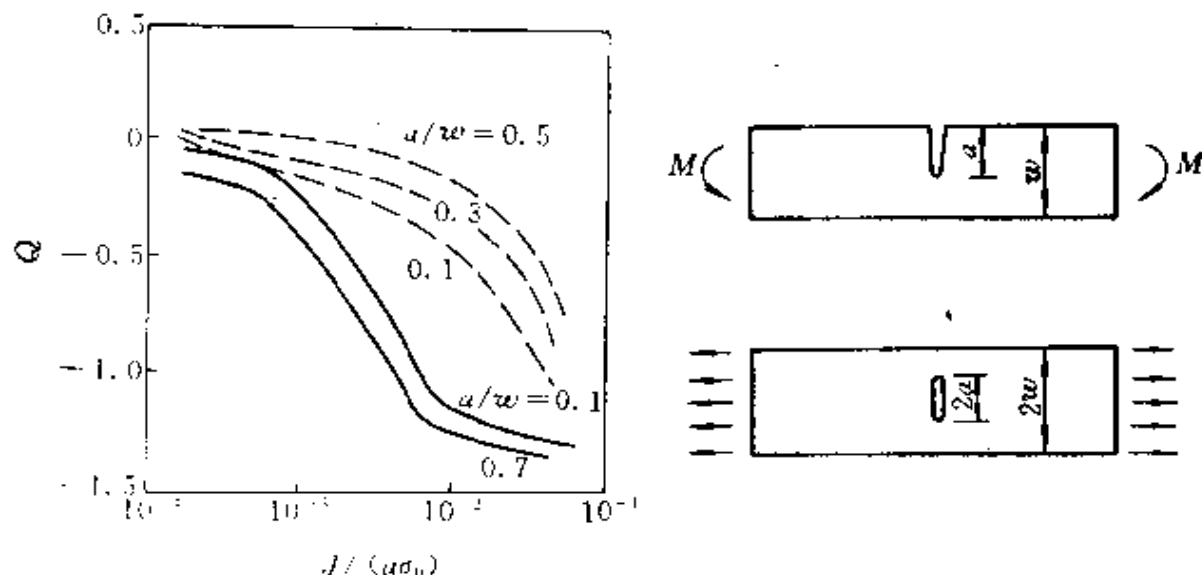


图 2.23 Q 值的变化

2.7.5 断裂准则

在 J - Q 理论中, 断裂韧性和阻力曲线均与含裂纹试件或含裂

纹结构的 Q 值有关

$$J_{1c} = J_{1c}(Q), \quad J_R = J_R(\Delta\alpha, Q) \quad (2.124)$$

而 45°COD 应为

$$\delta_c = d(\alpha\varepsilon_0, \pi, Q) \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.125)$$

由 Q 值还可以粗略地刻划含裂纹构件的韧脆转变问题, 详见文献 [53]。

参 考 文 献

- 1 Irwin G R. Fracture. In: Flugge S ed. *Encyclopedia of Physics*, Vol. VI. New York, Springer-Verlag, 1958. 551~590
- 2 ANSI/ASTM E399. *Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*. 1978
- 3 Wells A A. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding J.*, 1963, 10: 563~570
- 4 Tracey D M. Finite element solutions for crack-tip behavior in small scale yielding. *J. Eng. Mat. Tech.*, 1976, 98: 146~151
- 5 Hutchinson J W. *Nonlinear Fracture Mechanics*. Dept. of Solid Mech., TU Denmark, 1979
- 6 郝苏. 探索——裂尖有限变形分析及高应变断裂的工程评定方法; [工学博士学位论文], 浙江大学, 1986
- 7 Dugdale D S. Yielding in steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8: 100~108
- 8 Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, V. 7. New York, Academic Press, 1962. 55~129
- 9 Rice J R, Drucker D C. Energy changes in stresses bodies due to void and crack growth. *Int. J. Fracture Mech.*, 1967, 3(1): 19~27
- 10 Bilby B A, Cottrell A H, Swinden K H. The spread of plastic yield from a notch. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1963, 272: 304~314
- 11 Eshelby J D. The force of an elastic singularity. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1951, 244: 87~112
- 12 Eshelby J D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics. In: Kannien M F et al eds. *Inelastic Behavior of Solids*. New York, McGraw-Hill,

1970. 77~115
- 13 Günther W. Über einige randintegrale der elastomechanik. Adhandlungen der Bran-schweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, 1962, 14, 53~72
 - 14 Cherepanov G P. On crack propagation in solids. Int. J. Solids. Structs. ,1969, 5, 863~871
 - 15 Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentra-tion by notches and cracks. J. Appl. Mech. ,1968, 35, 379~386
 - 16 Knowleds J K, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elas-tostatics. Arch. Rat. Mech. Anal. ,1972, 44, 187~211
 - 17 Rice J R. Thermodynamics of quasi-static growth of Griffith cracks. J. Mech. Phys. Solids, 1978, 26, 61~78
 - 18 Freund L B. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. J. Elastici-ty, 1972, 2, 341~349
 - 19 Rice J R, Paris P C, Merkle J G. Some further results of J -integral analysis and esti-mates. ASTM STP 536. Philadelphia, Ame. Soc. Testing & Mater. ,1973, 231~245
 - 20 GB 2038-80. 利用 J_R 阻力曲线确定金属材料延性断裂韧度的试验方法. 1980.
 - 21 Underwood J H. The equivalence of K_{IC} and J_{IC} fracture toughness measurement in Ni-Cr-Mo steels. Exper. Mech. ,1978, 18, 350-355
 - 22 Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening mate-rial. J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16, 13~31
 - 23 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near a crack tip in power-law hard-ening material. J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16, 1~12
 - 24 Hutchinson J W. Plastic stress and strain field at a crack tip. J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16, 337~347
 - 25 李尧臣, 王自强. 平面应变 I 型非线性裂纹问题的高阶渐近解. 中国科学 A 辑, 1986, 29, 941~955
 - 26 Symington M, Shih C F, Ortiz M. Table of HRR Fields. Providence, Brown Reports, 1987. MRG/DMR-8714665/1
 - 27 靳志和, 余寿文. 理想弹塑性材料平面应力 I 型裂纹尖端的弹塑性场. 力学学报, 1987, 19, 483~487
 - 28 Hermann L, Rice J R. Comparison of theory and experiment elastic-plastic plane strain crack growth. Metal Sci. ,1980, 14, 285~291
 - 29 Hutchinson J W, Paris P C. Stability analysis of J -controlled crack growth. ASTM STP 668. Philadelphia, Ame. Soc. Testing & Mater. ,1979. 37~64
 - 30 王波, 杨卫, 黄克智. 基于非 J 控制扩展的安全评定方法. 力学学报, 1992, 24, 339~349

- 31 Paris P C, Tada H, Zahoor A, et al. Instability of the tearing model of elastic-plastic crack growth. ASTM STP 668. Philadelphia: Ame. Soc. Testing & Mater., 1979. 5~36
- 32 Hwang K C, Yu S W, Yang W. Theoretical investigation of crack-tip singularity fields in China. Appl. Mech. Rev., 1990, 43; 19~33
- 33 黄克智, 余寿文. 弹塑性断裂力学. 北京: 清华大学出版社, 1986
- 34 张林. 理想弹塑性介质裂纹尖端场的高阶渐近解: [工学博士论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1993
- 35 Chitaley A D, McClintock F A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear. J. Mech. Phys. Solids, 1971, 19; 147~163
- 36 Slepyan L I. Growing crack during plane deformation of an elastic plastic body. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Tverd Tela, 1974, 9; 51~67
- 37 高玉臣. 理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性场. 力学学报, 1980, 12(1); 48~56
- 38 Rice J R, Drugan W J, Sham T-L. Elastic-plastic analysis of growing cracks. ASTM STP 700. Philadelphia: Ame. Soc. Testing & Mater., 1980. 189~221
- 39 Gao Y C. The influence of compressibility on the elastic plastic field of a growing crack. In: ASTM 2nd Int. Symp. On Elastic-plastic Fracture Mech., Philadelphia, 1981. ASTM STP 803. Philadelphia: Ame. Soc. Testing & Mater., 1983. 176~190
- 40 Drugan W J, Rice J R, Sham T L. Asymptotic analysis of growing plane strain tensile crack in elastic ideally plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1982, 30; 447~473
- 41 罗学富, 黄克智. 可压缩弹塑性扩展裂纹尖端场问题的正确提法及其解. 中国科学A辑, 1988, 31; 1275~1282
- 42 Amazigo J C, Hutchinson J W. Crack tip fields in steady crack growth with linear strain hardening. J. Mech. Phys. Solids, 1977, 25; 81~97
- 43 Yang W. Non-uniform singularity field for mode III crack propagation in a slightly linear strain hardening material. In: Ouyang C ed. Proc. of Int. Conf. on Fracture and Fracture Mechanics. Shanghai: Fudan University Press, 1987. 270~275
- 44 Gao Y C, Hwang K C. Elastic plastic fields in steady crack growth in strain hardening materials. In: Francois D. ed. Advances in Fracture Research. Proc. of 5th Int. Conf. on Fracture, 1981, 2; 669~682
- 45 高玉臣, 张晓昶, 黄克智. 幂强化材料中III型扩展裂纹的奇异场. 力学学报, 1981, 12(5); 452~464
- 46 Hui C Y, Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep condition. Int. J. Fracture, 1981, 17; 409~425
- 47 Yang W, Freund L B. An analysis of antiplane shear crack growth in a rate sensitive

- material. *Int. J. Fracture*, 1986, 30: 157~174
- 48 Yang W, Freund L B. A class of boundary layer phenomena in nonlinear fracture mechanics. In: Chien W Z ed. *Proc. of Int. Conf. of Nonlinear Mechanics*. Shanghai: Science Press, 1985. 1348~1354
- 49 Sharma S M, Aravas N. Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solution. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39: 1043~1072
- 50 O'Dowd N P, Shih C F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter. I. Structure of fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39: 989~1015
- 51 O'Dowd N P, Shih C F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter. I. Fracture applications. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40: 939~963
- 52 McMeeking R M. finite deformation analysis of crack tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture initiation. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, 25: 357~381
- 53 O'Dowd N P, Shih C F, Dodds R H. The role of geometry and crack growth on constraint and implications for ductile/brittle fracture. *ASTM STP 1224*. Philadelphia: Ame. Soc. Testing & Mater. , 1994

第3章 结构缺陷评定

3.1 现有结构缺陷评定方法

结构缺陷评定是宏观断裂力学的主要应用领域。目前世界各主要工业化国家均根据自己的国情发展出一套结构缺陷评定方法^[1~3]。究其根源,这些结构缺陷评定方法可分为四大类:①ASME 基于应力强度因子 K 的线弹性断裂力学评价方法;②英国中央电力局(CEGB)和 Berkeley 核能研究所的 R6 失效评定图法;③COD 设计曲线法;④美国电力研究院(EPRI)基于弹塑性估算和裂纹扩展稳定性的方法。现逐项加以简介。

3.1.1 ASME 方法

ASME 锅炉与压力容器规范(参见文献[1])中有两个附录涉及断裂力学评价,即第Ⅲ篇附录 G 和第Ⅺ篇附录 A。前者讨论如何在核动力结构设计过程中由引入假想裂纹来评价设计方案的断裂安全性,后者讨论核电站在役检查中如何用断裂力学评价实际存在的裂纹。ASME 方法的核心是线弹性断裂力学,其优点在于理论上比较成熟,运作上比较简单;其缺点是过于保守,且不能描述实际发生的弹塑性断裂过程。该方法的断裂准则是:当

$$K = K_{Ic} \quad (3.1)$$

时,结构便发生断裂。ASME 规范中标定了中子辐照脆化对 K_{Ic} 影响的曲线。在式(3.1)左端 K 的计算中,需要给出裂纹几何信息和载荷信息。裂纹几何信息的探知过程包括:①用无损检测方法(如 X 射线方法,粉末法)探知实际裂纹形状;②按 IWT 规范保守地换

算成标准裂纹形状;③用等 K 原则换算为等效中心穿透裂纹长度。在整个过程中贯穿了 K 等效原理。载荷信息的探知过程包括:①用应变标定和规范加载谱等方法采集加载历史;②在该加载历史下计算危险截面处(或缺陷处)的一次应力(膜应力)、二次应力(弯曲应力)和峰值应力(安装应力和残余应力);③按 ASME 的分级应力折算法算出等效一次应力。

ASME 锅炉与压力容器规范 1987 年以后的版本中增加了如何用 J 积分来进行弹塑性缺陷评价的过程。

3.1.2 双判据法(R6 方法)

双判据法发表于英国中央电力局(CEGB)与 Berkerley 核能研究所的研究报告中(参见文献[1])。这种“含缺陷结构的完整性评定”方法综合考虑了脆性断裂和韧带屈服破坏的影响。该方法提出一个失效评定图(FAD),见图 3.1 所示。该图以相对应应力强度因子 $K_r = K_I/K_{Ic}$ 为纵坐标,相当载荷 $S_r = S/S_c$ 为横坐标。 S 和 S_c 分别为载荷和塑性极限载荷。FAD 的横、纵坐标表示了对脆性断裂和韧带塑性失稳的两个判据。图 3.1 中的失效评定曲线根据 BCS-Dugdale 连续位错铰模型求得,其方程为

$$K_r = S_r / \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \operatorname{Insec}\left(\frac{\pi}{2} S_r\right)} \quad (3.2)$$

图 3.1 中评定曲线以内是安全区,并可由射线长度比 OF/OA 来衡量含缺陷结构的安全裕度。大量实验数据验证了双判据法的安全性,但却不能确证其科学性。该方法已被用为英国一级核压力部件的安全评定标准,以衡量已检测到裂纹的部件是否需要返修或更换。

上述双判据法的早先版本代表了弹塑性断裂评定的初步尝试。它实用性强,但缺乏严格的理论基础。很多结构缺陷失效过程并不呈 BCS-Dugdale 模型所针对的平面应力情况,或未在裂纹延长线上发生集聚式的流动局部化。R6 方法的 1986 年版本^[4]细化和修改了原失效评定曲线,并初步考虑了材料真实应力应变曲线

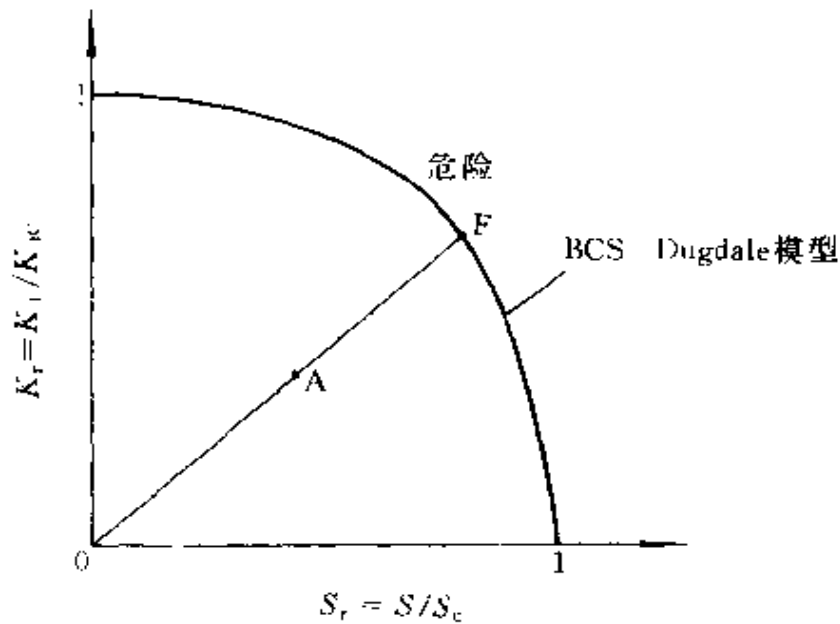


图 3.1 R6 失效评定图

和裂纹稳定扩展的影响。该方法的近期发展开始采纳 J 积分的学术思想,并将之应用于最后一级的评定方案中。

3.1.3 COD 设计曲线法

英国焊接学会的“焊接缺陷验收标准”(标准号 PD6493)和日本焊接学会的相应标准(标准号 JWES2805K)都采用 COD 设计曲线法^[1]。它们用无量纲应变 $e = \epsilon / \epsilon_s$ 作横坐标(ϵ 为无裂纹构件的应变, ϵ_s 为材料屈服应变),用无量纲参数 $\frac{\delta_c}{2\pi a e_s}$ 作纵坐标。后者综合反映起裂时的临界裂纹张开位移 δ_c 、裂纹尺寸 a 和屈服应变 ϵ_s ,体现了材料的抗断能力。将该曲线应用于假想缺陷下受力构件的设计时,称为设计曲线;将该曲线应用于实际缺陷构件的评定时,称为缺陷评定曲线。各种现行设计曲线见图 3.2。当实测数据点落在图中设计曲线的上方时,结构是安全的。我国压力容器学会和化工自动化学会总结了大量研究数据,于 1984 年联合提出一条更合理的经验修正曲线(亦见图 3.2),称为 CVDA 评定曲线^[5]。

设计曲线法的数学表达式为

$$\frac{\delta_c}{2\pi a \epsilon_s} = C(e) \quad (3.3)$$

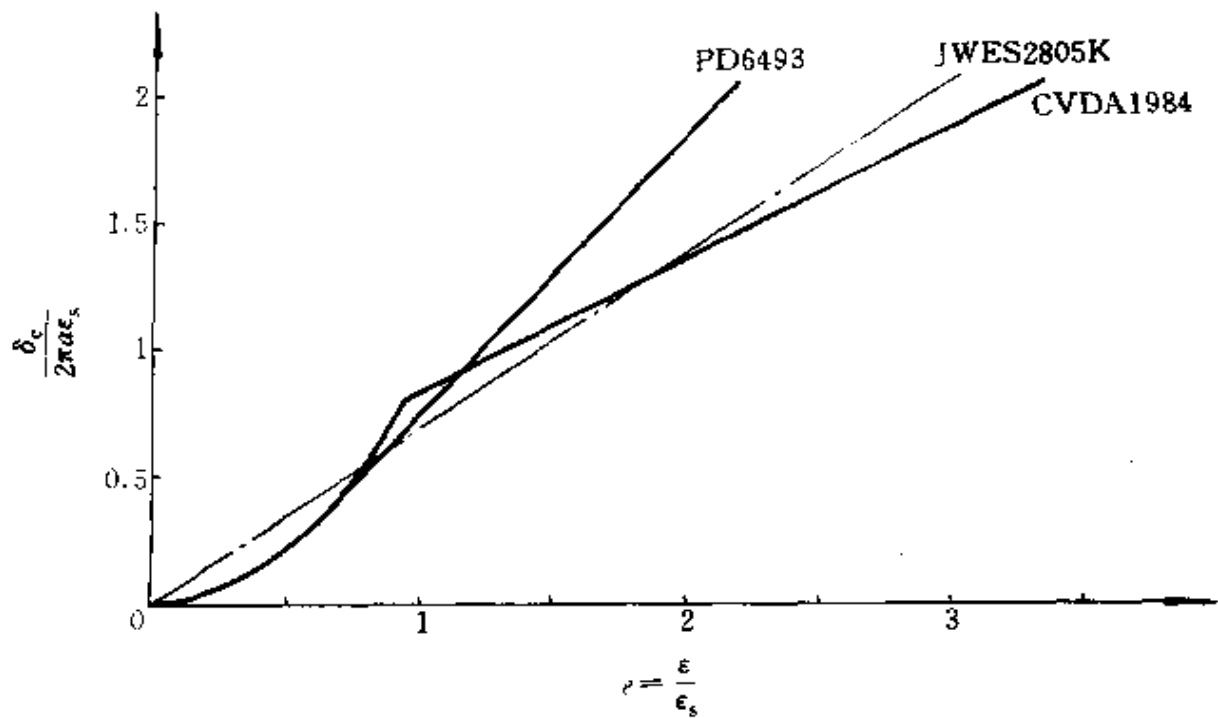


图 3.2 COD 设计曲线法

式中与外载有关的函数 C 为

$$\left. \begin{aligned}
 C &= e && \text{Wells} \\
 C &= \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2 \\ e - 0.25 \end{cases} && \text{若 } \frac{\sigma}{\sigma_s} < 0.5 \\
 &&& \text{若 } \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 0.5 \text{ Burdekin-Stone}^{[6]}, \text{PD6493} \\
 C &= \frac{3}{4}e && \text{JWES2805K} \\
 C &= \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2 \\ \frac{1}{2}(e + 1) \end{cases} && \text{CVDA1984}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

COD 设计曲线法是 70 年代末发展起来的弹塑性断裂评定方法。它虽然形式简单,易于实用,但存在下述问题:

- ①难于将该方法用于厚截面压力边界部件的缺陷评定问题；
- ②作为评定样板的宽板裂纹构形不适宜于弹塑性断裂力学分析和测试，如第 2.2.1 小节所述；
- ③在设计曲线中未能反映材料硬化、裂纹扩展和应变梯度分布的影响。

为进一步确证上述问题②，考虑如图 3.3 所示宽板试验。首先遇到的问题是板宽为多少时含裂纹板可等效为含中心裂纹的无限大板。按 COD 等效或 J 积分等效：任何有限板宽的中心裂纹板均不能近似为含中心裂纹的无限大板。另一个问题涉及到图 3.2 中横坐标 e 的定义，设计曲线的形式与 e 测值点距裂纹中心的标距 L 有关，见图 3.3 右图。当 L 远大于 a 时（与 e 的原始定义相等），设计曲线呈小范围屈服、陡升、冻结、再上升等特征阶段，见第 2.2.1 小节。现有的设计曲线是对应某一参照 L/a 值（如 $L/a = 4$ ）的经验曲线。

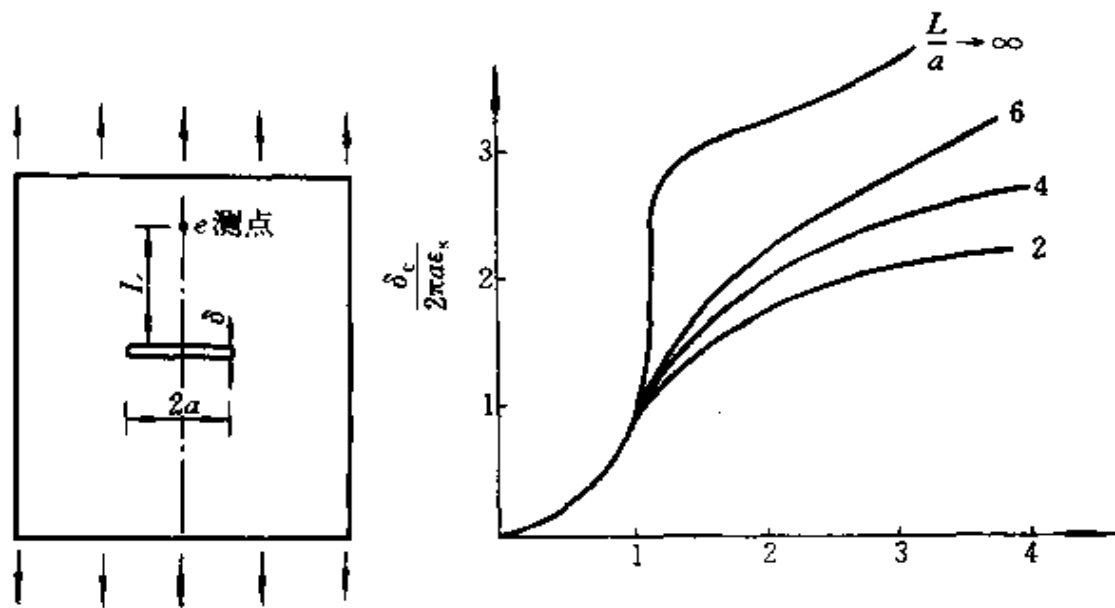


图 3.3 宽板实验和设计曲线的测距依赖性

Garwood 与 Gordon^[7]在 1987 年提出了 PD6493 的修正版本，使 COD 设计曲线法开始向下面介绍的 EPRI 方法靠拢。

3.1.4 EPRI 方法

在第 2.3 节至第 2.5 节中,我们讨论了以 J 积分为中心的弹塑性断裂力学体系。该理论被美国电力研究院(EPRI)推进至实用阶段,称为 EPRI 方法,其代表性工作见文献[8~10]。该方法基于 J 控制扩展情况,以弹塑性工程估算方法(详见下文第 3.2.2 小节)来近似计算推力,并由推力曲线与材料断裂阻力曲线的切点来判断失稳点,见第 2 章对应于图 2.18 的讨论。EPRI 方法吸取了弹塑性断裂力学中 J 积分理论和断裂扩展稳定性的核心思想,科学性强,但推动力计算、阻力数据量测和评价过程较为复杂。

3.2 三级缺陷评定体系

3.2.1 三级缺陷评定体系的构成

在对国际现有结构缺陷评定方法的评述基础上,可提出下述三级缺陷评定体系的构想^[11]。

①在工程结构与工程设备的设计安全评定、验收和在役缺陷评定初审时应采用简单且偏保守的线弹性结构完整性评定方案(以 ASME 方法为基础),这样可对工程结构和设备的制造与安装中的质量保证起严格的监督作用。

②对经济利益重大的安全决策问题,或对概率很小的超载荷事故工况,在上述第一道防线不能得到满足且返修或重新制造又耗资巨大时,可允许按基于弹塑性起裂原则的评定路线作出补充评定。从这两级不同的评定方法的综合结果来统筹作出安全决策。

③若上述两种评定方案均不能通过,且该部件的判废对某项重大设备(如核电站)起颠覆性作用,可按基于弹塑性裂纹扩展失稳原则的评定路线来作补充评定。该评定结果可作为劳动安全部门的内部掌握数据。在重大安全决策中可兼顾三级评定的综合结果。

对后两级评定,可采用 J 积分作为评定的中心准则。以科学依

据较强的 J 积分作为控制弹塑性断裂参数的作法已成为国际结构完整性评定的一致趋势。

3.2.2 弹塑性断裂工程估算方法

后两级缺陷评定的关键问题之一在于计算大范围屈服下的 J 积分值,由此产生了弹塑性断裂工程估算方法^[8~10]。

回顾 $\sigma_{\infty} < 0.5\sigma_s$ 的小范围屈服情况:这时可由应力强度因子 K 来计算 J 积分。而应力强度因子表达式中所不能确定的函数(见式(1.90))仅与无量纲几何尺寸有关。因此,可以方便地对不同的裂纹几何制成手册和表格,便于工程师应用。

然而,对 $\sigma_{\infty} > 0.5\sigma_s$ 的大范围屈服情况,需具体求解弹塑性边值问题。较有代表性的弹塑性本构关系是 Ramberg-Osgood 方程

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = (1 + \nu) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} - \nu \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_0} \delta_{ij} + \frac{3\alpha_0}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (3.5)$$

式中出现杨氏模量($E = \sigma_0/\varepsilon_0$)、泊桑比 ν 、参照应力、幂硬化系数、幂硬化指数共 5 个材料常数。等效应力 σ_e 按 J_2 的意义来定义。这类弹塑性边值问题的复杂性在于:

①计算呈非线性。

②参数众多,除由式(1.90)计算 K 时所涉及的无量纲几何参数集合 g 以外,还有裂纹长度 a 、载荷 P 、材料参数 E 、 ν 、 σ_0 、 α_0 、 n 共 7 个参数。若每个参数取 m 个数据,编制一本弹塑性断裂力学手册的数据量就是相应应力强度因子手册数据量的 m^7 倍,因此无法对 J 积分作出应力强度因子那样详尽的手册。

为解决后一问题,发展了弹塑性断裂工程估算方法。对任意断裂参数 y ,近似有

$$y \approx y_e + y_0 \quad (3.6)$$

式中, y 可以是 J 积分(J)、COD(δ)、加载端位移(Δ)等。左端的 y 表示在弹塑性本构关系式(3.5)下的断裂参数值;右端 y_e 为小范围屈服下的该断裂参数值, y_0 为纯幂硬化本构规律下(式(2.68))的断裂参数值。 y_e 值可借助现有应力强度因子手册得到(对裂纹

长度需进行考虑硬化影响的 Irwin 修正^[8]);而对 y_p 值需编制一本全塑性断裂手册^[10]。式(3.6)中的近似相等关系在两个极端(即小范围屈服与全面屈服)下是正确的。在中度屈服时也得到大量数值计算和实验结果的支持。

按式(2.68)而不是式(3.5)来计算断裂参数的优点在于:

①式(2.68)不包括弹性响应,所以其解不依赖于材料的弹性性质(如泊桑比 ν)。

②全部场方程均为齐次,可按量纲分析得到断裂参数对材料性质 σ_0 、 ε_0 、 α_0 的依赖性。

③依留申证明:在纯幂次本构律式(2.68)下所有的应力量均与外载幅值 P 成正比,所有应变变量均与外载幅值的 n 次方(即 P^n)成正比,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}/\sigma_0 &= \frac{P}{P_0} \hat{\sigma}_{ij}(x_k; n) \\ \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0 &= \alpha_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^n \hat{\varepsilon}_{ij}(x_k; n) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

式中, $\hat{\sigma}_{ij}$ 与 $\hat{\varepsilon}_{ij}$ 为无量纲量; P_0 为参考载荷,可取构件在参照屈服强度 σ_0 下的极限载荷。

④由式(3.7)可见,当外载荷 P 递增时,应力场与应变场严格符合比例加载条件,此时全量理论解等同于增量理论解。

Goldman 和 Hutchinson^[12]在总结了上述论证后得出:对纯幂次材料,其全塑性断裂参数应取下述形式

$$\left. \begin{aligned} J_p &= \alpha_0 \sigma_0 \varepsilon_0 a \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} \hat{J}_p(g; n) \\ \delta_p &= \alpha_0 \varepsilon_0 a \left(\frac{P}{P_0} \right)^n \hat{\delta}_p(g; n) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

上式已显式表达出 J_p 和 δ_p 对 P 、 a 、 ε_0 、 σ_0 、 α_0 的依赖性。这样只需算出不同无量纲几何尺寸 g 和硬化指数 n 值下的无量纲函数 \hat{J}_p 、 $\hat{\delta}_p$ 即可。

EPRI 汇编了上述断裂参量的计算结果手册,称之为延性断裂手册^[10]。该手册包括主要二维试件构形和典型三维裂纹构形。

EPRI 方法为把弹塑性断裂力学理论应用于工程实际架设了桥梁。

3.3 理论断裂阻力曲线

我们自本节起考虑三级缺陷评定体系的最高一级,即基于延性撕裂过程稳定性的缺陷评定。该缺陷评定过程的一个重要内容是材料裂纹扩展阻力的变化。EPRI 裂纹扩展稳定性评定图方法^[8]在实验量测技术上提出了较高的阻力曲线量测要求,并需要进行非解析的作图计算。本节介绍文献[13~20]中发展的理论断裂阻力曲线方法。该方法使我们得以由常规 J 积分测试规程中所测量的 J_{Ic} 和 T_c 值来解析地推演出 J_R 阻力曲线的全部信息。

3.3.1 理论断裂阻力曲线

考虑式(3.5)所表达的三维 Ramberg-Osgood 本构关系。若沿 x_2 轴为无穷长的平面应变板条在远方受到均匀拉应力 σ_{22} , 其响应可由下式描述

$$e = \sigma + \alpha \sigma^n \quad (3.9)$$

式中

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2(1-\nu^2)} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_0}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_{22}}{\sigma_0}, \quad \alpha = \frac{3\alpha_0}{4(1-\nu^2)} \quad (3.10)$$

通过对扩展裂纹尖端场的渐近分析,可由 J 积分及其对裂纹长度 a 的导数值来描述在 Ramberg-Osgood 材料中非定常扩展的裂纹张开形貌,见戴跃^[14]。该结果经罗学富、杨卫、黄克智^[15]以及杨卫^[16]的整理而具有下述形式

$$\delta = Br \left(\frac{EJ}{\sigma_0^2 r} \right)^{\frac{-1}{n+1}} \frac{1}{\sigma_0} \frac{dJ}{da} + \frac{\beta \sigma_0 r}{E} \ln \left(\frac{2.718 \lambda EJ}{\sigma_0^2 r} \right)^{\frac{-1}{n+1}} \quad (3.11)$$

表 3.1 中给出了典型 α 和 n 值下的 β 与 λ 值。式(3.11)中的钝化因子 B 由下式给出

$$B = \frac{2n}{(n+1)I_n} (\alpha I_n)^{\frac{1}{n+1}} \hat{U}_2(\pi, n) \quad (3.12)$$

式中, I_n 和 $\hat{U}_2(\pi, n)$ 是幂硬化指数 n 的已知函数, 由静止裂纹的 HRR 场给出。表 3.1 中给出了它们在不同 n 值下的值。

表 3.1 理论阻力曲线参数值

n	$\beta(\alpha = 0.1)$	$\beta(\alpha = 1)$	$\lambda(\alpha = 0.1)$	$\lambda(\alpha = 1)$	D_n	I_n	$\hat{U}_2(\pi, n)$
5	—	2.65	—	0.43	1.08	5.02	2.358
9	—	3.52	—	0.29	0.95	4.60	2.063
12	4.08	3.61	0.25	0.27	0.91	4.44	1.944
∞	—	5.30	—	0.16	0.79	37.72	1.480

按 Rice 与 Sorensen^[21] 的定义, 可由不变裂纹形貌准则来表达弹塑性材料的理论断裂阻力曲线

$$\text{在 } r = r_c = \eta \delta_{1c} = \eta d \frac{J_{1c}}{\sigma_0} \text{ 时 } \delta = \delta_c \quad (3.13)$$

式中, δ_c 与 r_c 是表征延性断裂的材料参数; 无量纲常数 η 在 0.5 与 2 之间取值^[21]。式(3.13)中的 d 值可由 HRR 解计算为

$$d \approx \left(\frac{\alpha \sigma_0}{E} \right)^{1/n} D_n \quad (3.14)$$

在不同 n 值下的 D_n 值亦在表 3.1 中列出。杨卫等^[16,17] 证明可将方程(3.11)与(3.13)写成下述双参量形式

$$\hat{T}_R = \frac{d\hat{J}_R}{d\hat{a}} = \left(\frac{\hat{J}_R}{\hat{J}_{1c}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \hat{T}_c - \hat{J}_R^{1/(n+1)} [(\ln \hat{J}_R)^{\frac{n}{n+1}} - (\ln \hat{J}_{1c})^{\frac{n}{n+1}}] \quad (3.15)$$

式中各无量纲量为

$$\begin{aligned} \hat{J}_R &= \hat{J}_{1c} \frac{J_R}{J_{1c}}, \quad \hat{J}_{1c} = \frac{2.718\lambda}{\eta \epsilon_0 d}, \quad \hat{T}_c = \frac{B}{\beta} (2.718\lambda)^{1/(n+1)} T_c, \\ \hat{a} &= \frac{\beta}{B\eta d} \frac{\sigma_0}{J_{1c}} (2.718\lambda)^{n/(n+1)} a \end{aligned} \quad (3.16)$$

下标“C”代表裂纹起裂。由式(3.15)可见,在无量纲 $\hat{J} - \hat{a}$ 坐标下,理论阻力曲线仅取决于 \hat{J}_{1c} 、 \hat{T}_c 和 n 三个无量纲材料参数。 n 为与断裂性质无关的幂硬化指数。而 \hat{J}_{1c} 、 \hat{T}_c 通过式(3.16)与起裂韧性 J_{1c} 和撕裂模量 T_c (定义见式(2.100)和式(2.101))相联系。 J_{1c} 和 T_c 分别刻划了材料对裂纹起裂和扩展的阻力,可简单地按国家标准 GB2038 - 80 测得。理论阻力曲线科学地预示了材料的延性撕裂过程,它为简单材料数据量测和后续的数据处理奠定了基础。

由式(3.15)还可得到下述 \hat{T}_r 与 \hat{J}_{ss} (无量纲定常扩展阻力)的关系

$$\hat{T}_r = \hat{J}_{1c}^{1/(n+1)} [(\ln \hat{J}_R)^{n/(n-1)} - (\ln \hat{J}_{1c})^{n/(n-1)}] \quad (3.17)$$

当 n 趋于无穷时,式(3.15)简化为 Rice 等^[13]对理想弹塑性材料导出的理论阻力曲线

$$\hat{T}_r = \hat{T}_c - \ln \frac{\hat{J}_R}{\hat{J}_{1c}} = \ln \frac{\hat{J}_{ss}}{\hat{J}_{1c}} \quad (3.18)$$

3.3.2 高韧性材料的钝化修正^[20]

关于裂纹张开位移 δ 的基本关系式(3.11)可视为静止裂纹解(式中第一项)和定常扩展裂纹解(式中第二项)的简单相加。而理论断裂阻力曲线式(3.15)仅在下列限制得到满足时才能应用^[19]

$$\hat{T}_c < \tilde{T}_c = \frac{n(n+1)}{n-1} \hat{J}_{1c}^{1/(n+1)} (\ln \hat{J}_{1c})^{1/(n-1)} \quad (3.19)$$

该式保证理论阻力曲线呈上凸形。一些结构钢(如 18CrNiWA)满足上述限制,因此其实测阻力曲线与式(3.15)的预测相符合^[18]。然而,高韧性钢(如 A553B-1)不能满足限制式(3.19),其实验阻力曲线与理论阻力曲线式(3.15)不能符合。其主要原因在于:对于韧性高而屈服强度低的材料(如 A553B-1 和 18MnNiMoNb), δ 表达式的第一项过强,而该项所表达的初始钝化影响应随裂纹扩展而逐渐减弱。

有鉴于此,我们通过修正式(3.11)第一项中的钝化因子 B 来减弱裂纹扩展过程中的钝化影响^[20]。也就是说,对满足限制式

(3.19)的中、低韧性材料,其 B 值仍由式(3.12)给出;对不满足限制式(3.19)的高韧性材料,将其 B 值减弱以满足式(3.19)。

为实现上述目标,将式(3.16)中的 \hat{T}_c 表达式改写为

$$\hat{T}_c^{\text{mod}} = \frac{fB}{\beta} (2.718\lambda)^{1/(n+1)} T_c \quad (3.20)$$

式中, f 为缩减因子,对超低韧性钢($\tilde{T}_c \gg \hat{T}_c$)其值为1,对超高韧性钢($\tilde{T}_c \ll \hat{T}_c$)其值近似为 q ($q < 1$)。在这两个极端情况下的 f 值可由下述插值公式得到

$$f = \frac{1-q}{2} \left\{ \frac{1+q}{1-q} + \tanh \left[\hat{A} \left(\frac{\tilde{T}_c}{\hat{T}_c} - \hat{B} \right) \right] \right\} \quad (3.21)$$

参数 \hat{A} 和 \hat{B} 分别表征随 \tilde{T}_c/\hat{T}_c 加大时 f 值从 q 改变为1的速度与转折点。从我们所测试的结构钢数据可关联出

$$\hat{A} = 2, \quad \hat{B} = 1.2 \quad (3.22)$$

式(3.21)中的 q 值依赖于韧性材料的性质。这里给出一个简单的 q 估算公式。对高韧性材料,阻力曲线式(3.15)中右端第一项起重要作用,而该项表示静止裂纹解对 δ 的钝化效应。实测 J_R 阻力曲线时(参阅第2章图2.15),却在数据处理中减去了这一钝化效应。为纠正存在于理论模型和测量标准之间的这一差别,应将式(3.21)中的 q 值定义为 J 阻力曲线实测斜率和钝化线斜率($J_{1c}/\Delta a_c$)之比

$$q = \frac{\Delta a_c}{J_{1c}} \left(\frac{dJ_R}{da} \right)_c \quad (3.23)$$

Schwalbe, Neale 和 Ingham^[22]给出了完全钝化裂纹所对应的表观裂纹扩展量

$$\Delta a_c = 0.4d \frac{J_{1c}}{\sigma_0} \quad (3.24)$$

综合上述两表达式可得

$$q = 0.4e_0 d T_c \quad (3.25)$$

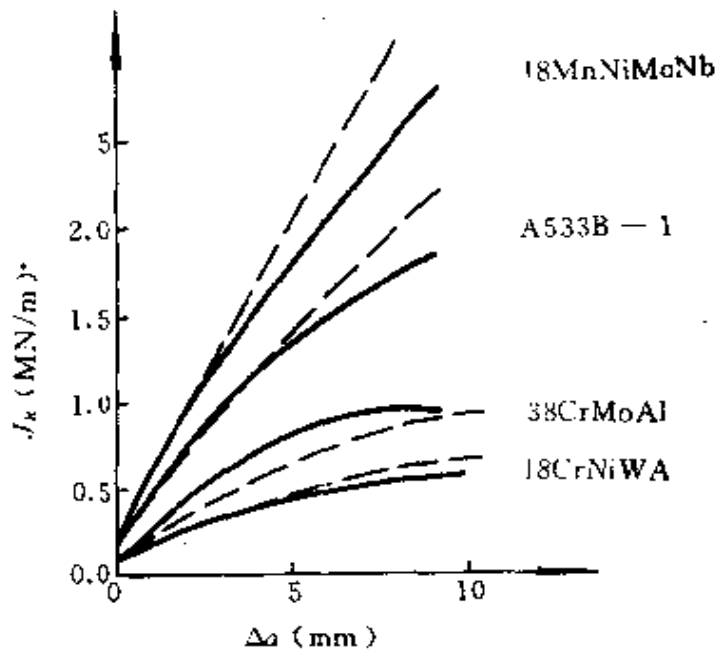
式(3.20)、式(3.21)、式(3.22)和式(3.25)给出了对高韧性材料的完整钝化修正。表3.2列出了对A553B-1、18MnNiMoNb、18CrNiWA和38CrMoAl这4种结构钢的材料与钝化修正参量。

表 3.2 4 种结构钢的材料与钝化修正参量

钢 种	n	σ_0 (MPa)	J_{IC} (MN/m ²)	T_c	\hat{T}_c	\hat{T}_c/T_c	q	f	\hat{T}_c^{mod}
A553B-1	10	425	0.2	54.1	78.74	0.35	0.136	0.164	12.90
18MnNiMoNb	17	572	0.2	42.6	52.10	0.57	0.186	0.247	12.87
18CrNiWA	22.2	1030	0.1	3.5	3.94	8.34	0.030	1.000	3.94
38CrMoAl	6.33	850	0.093	8.34	26.50	1.18	0.035	0.493	13.10

3.3.3 理论阻力曲线的实验测证

表 3.2 中最后一栏给出了对 4 种结构钢钝化修正后的 \hat{T}_c^{mod} 值, 其中 18CrNiWA 的修正值与原 \hat{T}_c 值相同。将这些修正值代入理论阻力曲线公式的 \hat{T}_c 处便可绘出这 4 种结构钢的理论断裂阻力曲线, 见图 3.4 中诸虚线。上述预测结果在远超出 J 控制扩展的裂纹扩展量范围内均符合这些材料的实测阻力曲线^[18](图 3.4 中的诸实线)。表 3.2 给出了绘制该 4 种结构钢理论阻力曲线的全部

图 3.4 理论 J 阻力曲线(虚线)与实验量测(实线)的比较

数据。综上所述,经钝化修正的理论阻力曲线能可靠地用于构件的延性撕裂评定。

3.4 J - T 双参量评定

3.4.1 基本参照构形^[16]

取含中心裂纹 $2a_\infty$ 的无穷大平板作为基本参照构形。所有与基本参照构形有关的特征量均标注有下标“ ∞ ”。其他裂纹几何可按下一小节的作法换算为基本参照构形的情况。定义函数 Φ_∞ 和 T_∞ 为

$$\Phi_\infty = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{J_\infty}{a_\infty} \quad T_\infty = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ_\infty}{da_\infty} \quad (3.26)$$

式中, Φ_∞ 和 T_∞ 共同表达由外载在基本参照构形上引起(对起裂和裂纹扩展)的撕裂推力。

当采用基本参照构形时, Φ_∞ 和 T_∞ 不再与裂纹几何有关,且有下述标定参照曲线

$$\Phi_\infty = T_\infty = F_\infty(e) \quad (3.27)$$

因此仅需讨论 $F_\infty(e)$ 的变化。由本构关系式(3.9)和弹塑性断裂工程估算方法(见第3.2.2小节),可将 F_∞ 写为

$$F_\infty \approx F_e + F_p \quad (3.28)$$

式中, F_e 和 F_p 分别为按小范围屈服和全塑性两个极端情况所计算的结果。对基本参照构形, F_e 和 F_p 可写为下述形式

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} C_e \sigma^2 \left(1 + \frac{n-1}{n+1} \omega \right) \\ F_p &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{n} C_p \sigma^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

式中, σ 与 e 按隐式(3.9)相联系。表3.3中对平面应变、平面应力和反平面剪切等基本情况列出了 C_e 、 C_p 和 ω 的计算表达式。关于 C_e 和 ω 的计算由考虑硬化的 Irwin 小范围屈服理论给出^[9]。 C_p 在平面应变、平面应力和反平面剪切下的表达式分别基于何明元和 Hutchinson^[23], Shih 和 Hutchinson^[24] 以及 Amazigo^[25] 的结果。综合

式(3.9)、式(3.28)、式(3.29)和表3.3可绘出标定参照曲线 $\Phi_{\infty}(e)$,如图3.5所示。它既可以作为基本参照构形起裂控制的评定线,又为下述各小节所介绍的 J - T 双参量评定法提供了基本数据。

表 3.3 基本应力状态下的特征参量表

符号 应力状态	e	σ	α	ω	C_e	C_p
平面应变	$\frac{\sqrt{3}}{2(1-\nu^2)} \frac{\epsilon_{22}^{\infty}}{\epsilon_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_0}$	$\frac{3}{4(1-\nu^2)} \alpha_0$	$\frac{2}{9} \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}$	$1-\nu^2$	1^*
平面应力	$\frac{\epsilon_{22}^{\infty}}{\epsilon_0}$	$\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_0}$	α_0	$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}$	1	$\frac{3.85}{\pi} (1 - \frac{1}{n}) + n^{-\frac{3}{2}}$
II型	$\frac{\sqrt{3}}{1+\nu} \frac{\epsilon_{22}^{\infty}}{\epsilon_0}$	$\sqrt{3} \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_0}$	$\frac{3}{2(1+\nu)} \alpha_0$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}^{**}$

* 只验证了 $n \leq 10$ 的情况, ** 适用于 n 较大的情况。

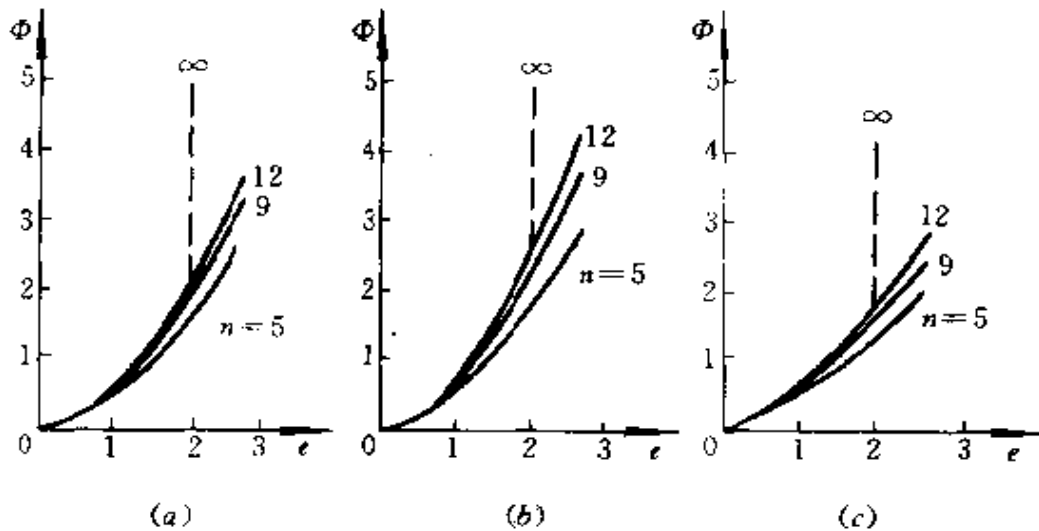


图 3.5 标定参照曲线($n=1, n=5, 9, 12, \infty$)

(a)平面应变;(b)平面应力;(c)II型。

3.4.2 扩展裂纹的 J 等效原理^[16,19]

含裂纹真实构件的无量纲 J 积分和推力 T 可表达为

$$\Phi = \frac{J}{\sigma_0 \varepsilon_0 a} = F(e, g) \quad , \quad T = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ}{da} \quad (3.30)$$

式中, 无下标 ∞ 的量 Φ 、 J 、 T 、 a 等代表含裂纹构件的真实物理量; g 仍代表无量纲裂纹几何参数的集合。函数 F 可从 EPRI 方法列表的大量计算结果中得到^[8~10]。

对比式(3.26)和式(3.30)的第一式, 不难看出在同一载荷水平 e 下, 可按 J 等效原理

$$J_\infty = J \quad (3.31)$$

来换算出对应于真实缺陷构形的等效基本参照构形。后一构形的等效裂纹半长为

$$a_\infty = \frac{F(e, g)}{F_\infty(e)} a \quad (3.32)$$

在弹塑性起裂评定中, 可根据上述公式来将真实缺陷折算为等效裂纹半长 a_∞ 。

由式(3.26)、式(3.30)、式(3.31)和式(3.32)可知: Φ 与 Φ_∞ 、 T 与 T_∞ 一般各不相同。由式(3.27)可得

$$T = \frac{1}{\sigma_0 \varepsilon_0} \frac{dJ}{da} = \frac{1}{\sigma_0 \varepsilon_0} \frac{dJ_\infty}{da} = T_\infty \left(\frac{da_\infty}{da} \right) \quad (3.33)$$

式(3.33)称之为扩展裂纹的 J 等效原理^[16,19], 式中 a_∞ 由式(3.32)给出。文献[19]中给出了一个迭代计算 $\left(\frac{da_\infty}{da} \right)$ 的方法。

3.4.3 J - T 双参量交点评定法——基本参照构形^[16]

本小节讨论基本参照构形(含中心 $2a_\infty$ 裂纹无穷大板)在均匀远方应变场 e 下的延性撕裂行为。这时其标定参照曲线 $\Phi_\infty = T_\infty = F_\infty(e)$ 重合为一条推力曲线, 如图 3.6 所示。定义

$$\Phi_R = \frac{J_R}{\varepsilon_0 \sigma_0 a_\infty}, \quad T_R = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ_R}{da_\infty} \quad (3.34)$$

为裂纹体抗撕裂曲线, 可由理论 J 阻力曲线式(3.15)加以解析计

算,并绘于图 3.6。 Φ_R 与 T_R 的初始值分别记为 Φ_c 与 T_c 。

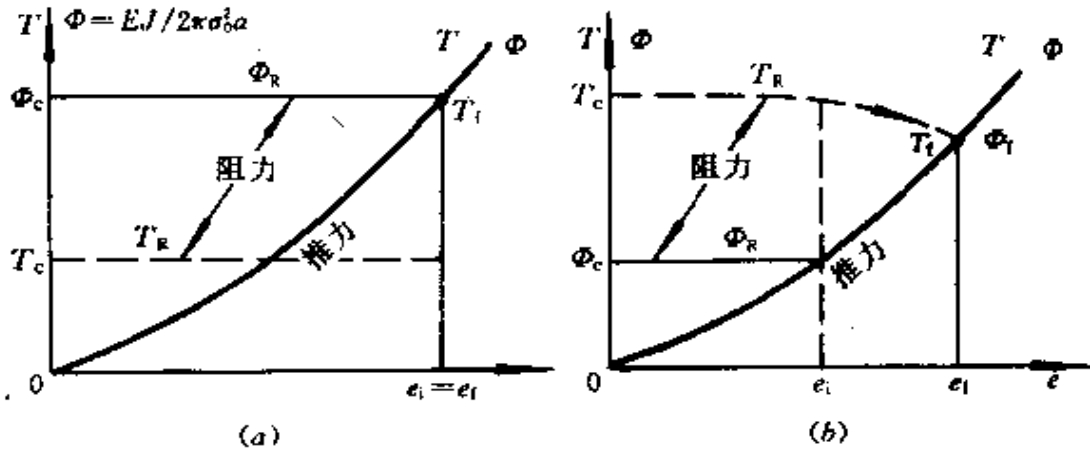


图 3.6 $J-T$ 双参量交点评定法

(a) $Y \leq 1$; (b) $Y > 1$ 。

定义

$$Y = T_c / \Phi_c \quad (3.35)$$

为与初始裂纹长度有关的初始撕裂比。于是可将延性撕裂问题按参数 Y 的值域区分为图 3.6(a), (b) 中所描绘的两类过程。

① $Y \leq 1$ 。当 $e = e_1$ 时 $\Phi_\infty = \Phi_c = \Phi_l$ (下标 l 表示破坏)。此时 $T_\infty > T_R$, 因此裂纹一俟起裂便呈失稳扩展, 对应于灾难性的破坏过程。

② $Y > 1$ 。大多数延性撕裂问题均属于此范畴。当 $e = e_1$ 时 $\Phi_\infty = \Phi_c$, $T_\infty < T_c$, 裂纹起裂但无力继续扩展。当外加应变 e 继续增加时, Φ_R 沿 Φ_∞ 线上升而 T_R 由于裂纹稳态扩展而按式(3.15)的规律下降。当 e 达到失稳扩展应变 e_l 时, T_R 曲线与 Φ_R 曲线汇交于一点

$$\Phi_l = T_l \quad (3.36)$$

此后裂纹呈失稳扩展。基于这一相交原则的评定方法称之为 $J-T$ 双参量交点评定法。交点评定法与 EPRI 基于裂纹扩展稳定性图的切点法渊源与共, 但实用操作更为精确。定义

$$y = \Phi_l / \Phi_c \quad (3.37)$$

为裂纹扩展增韧因子, 则由式(3.15)和式(3.36)可导出小扩展量

下 y 的控制方程

$$Y - y^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \frac{\beta}{B(\eta\varepsilon_0 d)^{1/(\alpha+1)}\Phi_c} [(\ln \hat{J}_{Ic} y)^{\alpha/(\alpha-1)} - (\ln \hat{J}_{Ic})^{\alpha/(\alpha-1)}] \quad (3.38)$$

易于验证,方程(3.38)仅在 $Y \geq 1$ 时才有不小于 1 的正实根。图 3.7 绘出了扩展增韧因子 y 与初始撕裂韧性比 Y 的关系曲线。作图时将 Φ_c 和 $\eta\varepsilon_0(\alpha\varepsilon_0)^{1/\alpha}$ 分别取为 2π 和 0.001。从图 3.7 易于看出:裂纹扩展所造成的增韧效果主要取决于 Y 值。后者代表了阻力曲线在起裂处切线斜率与割线斜率之比。材料的硬化使增韧效果下降,但下降量并不明显。

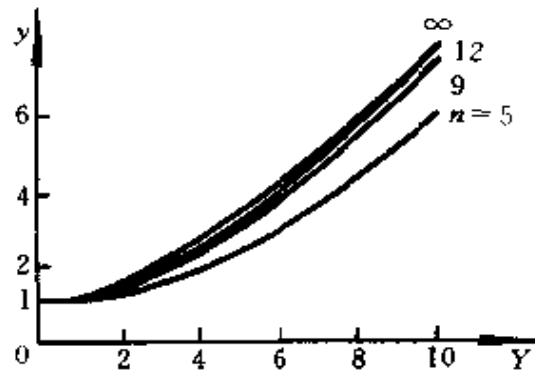


图 3.7 y 随 Y 的变化曲线 ($\Phi_c = 2\pi, \eta\varepsilon_0(\alpha\varepsilon_0)^{1/\alpha} = 0.001$)

一旦 y 值确定,裂纹稳定扩展过程的总扩展量可估算为

$$\Delta a_t = a_0 \Phi_c \int_1^y \left\{ \frac{1}{j^{1/(\alpha-1)}} \cdot \frac{1}{\left\{ T_0 - \frac{\beta}{B(\eta\varepsilon_0 d)^{1/(\alpha+1)}} [(\ln \hat{J}_{Ic} j)^{\alpha/(\alpha-1)} - (\ln \hat{J}_{Ic})^{\alpha/(\alpha-1)}] \right\}} \right\} dj \quad (3.39)$$

该式仅在 $\Delta a_t \ll a_0$ 下适用。

3.4.4 J-T 双参量交点评定法——一般情况^[18,17,19,20]

本小节将上节针对基本参照构形的 J-T 双参量交点评定法近

似推广至一般情况,与基本参照构形有下述两点区别:

①由扩展裂纹的 J 等效原理(见式(3.31)至式(3.33)),图3.6和式(3.36)对一般裂纹构形不再成立。

②由于焊接残余应力这类峰值应力的存在(如焊缝、接管相贯线处、错边及角变形区),致使大多数工况下的实测外加应变场呈非均匀的梯度分布特征。显然尖端分布的高应变梯度加载对起裂和裂纹扩展所产生的推动力并不相同。若用 e 来标记尖峰分布应变对起裂的推动力,则促进裂纹扩展的等效载荷可记为 $r_e e$ 。 $r_e < 1$, 可据一定的应变梯度分布特征(如平均应变、峰高系数和比峰宽的三参数模型^[17])来加以估算。这时 Φ 曲线与 T 曲线分开,如图3.8所示。

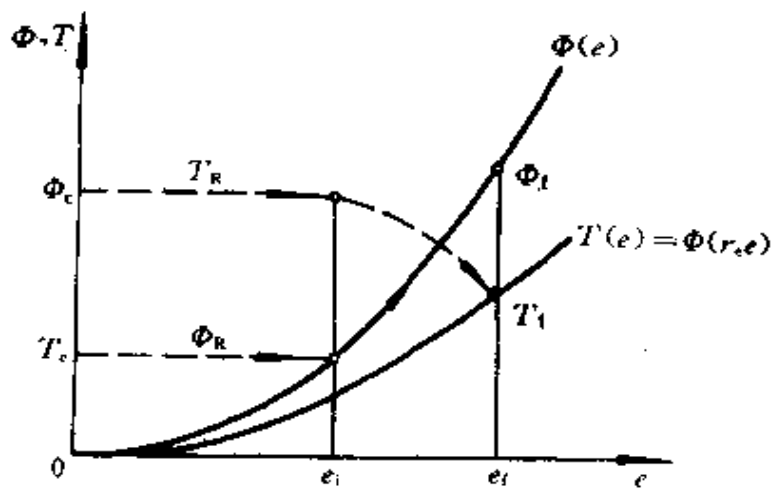


图 3.8 高应变梯度区的裂纹扩展稳定性图

综合上述讨论,对可能具有应变梯度分布加载的一般裂纹构形, J - T 双参量的交点评定法则应由式(3.36)换为

$$\Phi_t = RT_1 \quad (3.40)$$

式中,修正因子 R 应为裂纹扩展效应因子 r_e 与应变梯度分布因子 r_a 的乘积

$$R = r_a r_e \quad (3.41)$$

r_s 与 r_d 可针对失稳时刻估算为

$$r_s = \frac{F(e_t, g_t)}{F_\infty(e_t)} \left(\frac{da_\infty}{da} \right)_{a=a_t, e=e_t} \quad (3.42)$$

$$r_d = \frac{F_\infty(e_t)}{F_\infty(r_t e_t)} \quad (3.43)$$

引入修正因子 R 后,对具有应变梯度加载的一般构形的 J - T 双参量交点评定法便与上一小节的讨论相类似。如关于图 3.6 的讨论可针对 $Y \leq R$ 和 $Y \geq R$ 进行,而式(3.38)应换为

$$Y - Ry^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\beta}{B(\eta \varepsilon_0 d)^{1/(n+1)} \Phi_c} [(\ln \hat{J}_{1cy})^{n/(n-1)} - (\ln \hat{J}_{1c})^{n/(n-1)}] \quad (3.44)$$

该方程仅当 $Y > R$ 时有正实根。

3.5 J - T 评定的表现形式

除上述交点法外, J - T 双参数评定具有多种表现形式,如理论设计曲线法、等效“双判据”法和相容应力曲线峰值法,现逐一加以介绍。

3.5.1 理论设计曲线法^[16,17]

在理论设计曲线法中,可由

$$\tilde{\Phi} \equiv \Phi(e_t)/y \leq \Phi_c \quad (3.45)$$

来给出缺陷评定曲线(或设计曲线)。设计曲线的具体绘制过程可介绍如下:若 $Y \leq R$,设计曲线即为参照评定曲线 $\Phi(e)$ 本身。若 $Y > R$,则对任意给定 $y > 1$,可由方程(3.44)形式上定出设计曲线的纵坐标 $\tilde{\Phi}$ 为

$$\tilde{\Phi} = \frac{\beta}{B(\eta \varepsilon_0 d)^{1/(n+1)}} \frac{(\ln \hat{J}_{1cy})^{n/(n-1)} - (\ln \hat{J}_{1c})^{n/(n-1)}}{Y - Ry^{\frac{1}{n+1}}} \quad (3.46)$$

求出 $\tilde{\Phi}$ 后,可按下述隐式方程求解设计曲线的横坐标 e

$$\Phi(e) = y\tilde{\Phi} \quad (3.47)$$

该方程的右端为已知,而左端的函数形式亦为已知。

为了从图象上显示 Y 和 R 对设计曲线(或缺陷评定曲线)的影响,图 3.9 绘出了两族设计曲线。图中的材料参数选取为: $\alpha = 1, n = 12, \eta \epsilon_0 (\alpha \epsilon_0)^{1/n} = 0.003$ 。易于看出: Y 和 R 对设计曲线有非常显著的影响。图中亦用虚线绘制了现有的设计曲线,包括 PD6493, JWES2805K 和 CVDA1984 文本中所规定的缺陷评定曲线。按目前的理解,这些虚线基于起裂,是对实验表观点的安全包络线(对裂纹尺寸有 2 倍左右的安全系数)。它没有准确计及材料硬化、裂纹稳定扩展和高应变梯度的影响。

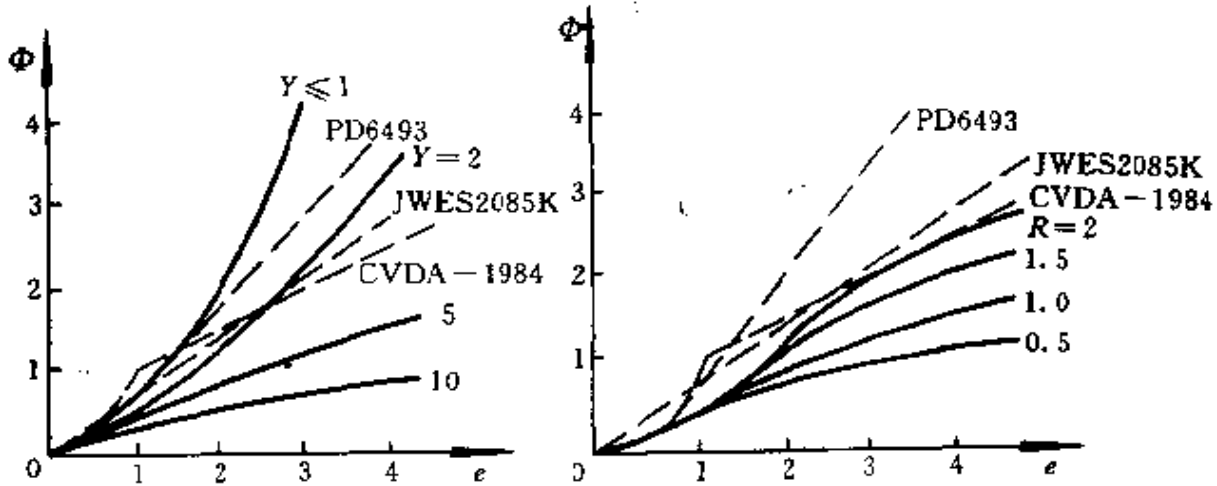


图 3.9 理论设计曲线(实线未含安全系数)

左图: $R = 1$; 右图: $Y = 5$ 。

3.5.2 等效“双判据”法^[17,19]

基于把 EPRI 方法与 CEGB 失效评定图(FAD)相联系的途径^[9],可将现有 J - T 双参数评定法写为双判据法的形式^[17,19]。由裂纹扩展失稳条件 $J(\sigma_f) = J_f$ 可知

$$F(\sigma_f, g) = \frac{y E J_{1c}}{\sigma_0^2 a} \quad (3.48)$$

在推导上式时用到了式(3.30)、式(3.37)和裂纹扩展量不大的假定,而扩展增韧系数 y 仍由图 3.7 和式(3.44)所表达。上述方程可整理为双判据法的 FAD 形式(假设平面应变条件成立)

$$\frac{\sigma_f^2}{H_e \sigma_f^2 + H_s \sigma_f^{2+1}} = J_r = K_r^2 \quad (3.49)$$

式中

$$J_r = \frac{\sigma_0^2 a_K}{y E J_{IC}} \sigma_f^2, \quad H_e = \left(1 + \frac{2}{9} \frac{\sigma_f^2}{1 + \sigma_f^2}\right) \frac{a_\infty}{a_K},$$

$$H_s = \frac{3 a_0 \sqrt{\pi}}{4(1 - \nu^2)} \frac{a_\infty}{a_K} \quad (3.50)$$

而 a_K 和 a_∞ 分别为按 K -等效和 J -等效原理将实际裂纹长 a 换算为基本参照构形(含中心裂纹的无穷大板)的裂纹半长。对含中心裂纹无穷大板的特例(此时 $a_\infty = a_K$),其典型失效评定图在图 3.10 中绘出。绘制该图时材料参数选为 $\nu = 0.3, a_0 = 1$ 。

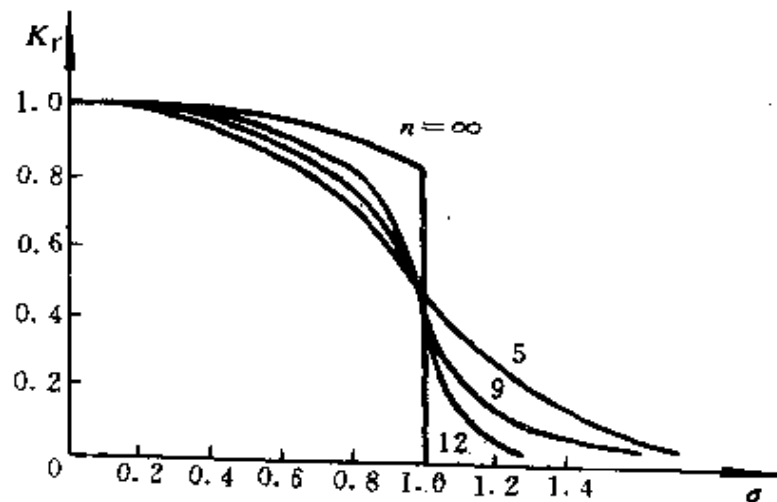


图 3.10 含中心裂纹的平面应变无穷大板的缺陷评定图

3.5.3 相容应力曲线峰值法^[19]

相容应力曲线指一类 $\sigma(a)$ 曲线,其外载应力 σ 与裂纹扩展长

度 a 之间的函数关系 $\sigma(a)$ 与材料的 J 阻力曲线相容。在相容的条件下, 函数

$$\Delta(\sigma, a) \equiv J(a, \sigma(a)) - J_R(a - a_0) \quad (3.51)$$

在稳定裂纹扩展时应恒等于零。将式(3.51)对裂纹长度 a 求导, 其导数亦应等于零^[13]

$$\frac{d\Delta(\sigma, a)}{da} = \frac{\partial J}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{da} + \frac{\partial J}{\partial a} - \frac{dJ_R}{da} = 0 \quad (3.52)$$

由上式可见, 只有在

$$\frac{d}{da}\sigma(a) = 0 \quad (3.53)$$

时, 才会发出撕裂失稳 ($T|_c = T_R$)。式(3.53)表明, 相容应力曲线 $\sigma(a)$ 的峰值点坐标刻划了撕裂失稳应力和最大稳定裂纹扩展长度。我们把基于式(3.53)的缺陷评定方法称为相容应力曲线峰值法^[19]。

董亚民等^[19]用低碳钢无缝钢管所制成的压力容器的测试数据验证了上述评定方法, 在压力容器外壁开有轴向裂纹。该容器材料的特征参数为^[26]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= 256 \text{MPa} \\ E &= 2.08 \times 10^5 \text{MPa} \\ \alpha_c &= 1.00 \\ n &= 6.582 \\ J_R &= 1.903 \left(\frac{a - a_0}{1\text{m}} \right)^{0.414} \text{MN/m} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

表 3.4 前两行列出了 6 台含外轴向裂纹压力容器的几何尺寸。表中 R_0 为外半径, 而 6 台容器的内半径均为 59.5mm; a_0 为初始外轴向裂纹的径向深度, b 为容器壁厚。表 3.4 中第 3 行给出了文献 [26] 所报导的实测爆破压力, 而对应的相容应力曲线由图 3.11 绘出, 其峰值点的理论预测见表中第 4 行。由表 3.4 可见理论预测与实验结果非常接近, 6 台容器的爆破压力的均方根误差只有 6.16%, 说明了相容应力曲线峰值法用于评价延性撕裂过程的有效性。表 3.4 的最后一行给出了预测的裂纹稳定扩展量。

表 3.4 由应力曲线峰值法对 6 台外侧轴向开裂压力容器
进行结构缺陷评定($R_0=59.5\text{mm}$)

容器序号	1	2	3	4	5	6
$R_0(\text{mm})$	68.65	68.40	68.65	71.4	71.4	71.4
a_0/b	0.595	0.663	0.524	0.597	0.609	0.489
实测爆破压(MPa) ^[26]	23.6	20.1	31.0	34.8	33.7	37.9
预测爆破压(MPa)	25.6	22.0	28.0	33.5	32.8	39.9
误差	8.8%	9.4%	-6.8%	-3.7%	-2.7%	5.3%
预测稳定扩展量(mm)	0.30	0.30	0.35	0.40	0.40	0.50

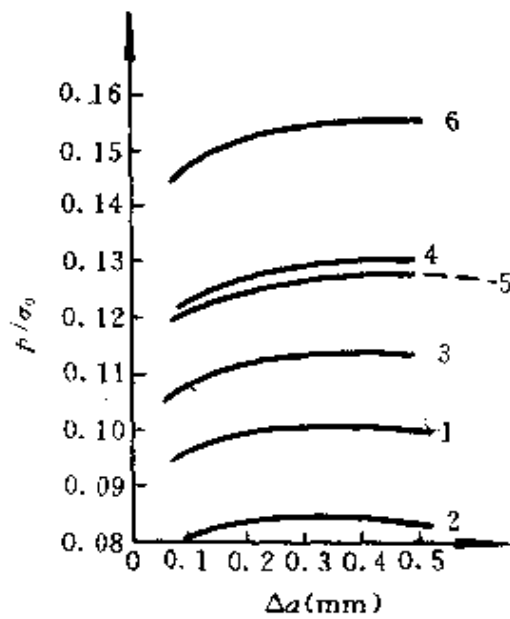


图 3.11 6 台压力容器模型的相容压力曲线

参 考 文 献

- 1 荆树峰, 曾广欣. 各国压力容器缺陷评定标准. 北京: 劳动出版社, 1979
- 2 陆明万, 杨卫. 基于应力分析的压力容器规范的进一步研究. 压力容器, 1987, (3): 56~61
- 3 黄克智, 董亚民, 杨卫. 核压力容器弹塑性断裂评价方法研究. 核安全专题报告,

- NNSA-0019, 1990
- 4 Milne I, Ainsworth R A, Stewart A T. Assessment of the Integrity of Structures Containing Defects. CEGB Report R/H/R6-Revision 3. London; CEGB, 1986
 - 5 压力容器缺陷评定方法—CVDA1984. 压力容器, 1985, (2): 2
 - 6 Burdekin F M, Stone D E W. The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. *J. Strain Analysis*, 1966, 1: 145~153
 - 7 Garwood S J, Gordon J T. Crack tip opening displacement (CTOD) methods for fracture mechanics assessment. Proposal for Revision to PD6493. ACFM, 1987
 - 8 Kumar V, German M D, Shih C F. An Engineering Approach for Elastic Plastic Fracture Analysis. EPRI Report, NP-1931. New York; EPRI, 1981
 - 9 Kumar V et al. Advances of elastic-plastic fracture analysis. EPRI Report, NP-3607. New York; EPRI, 1984
 - 10 Zahoor A. Ductile Fracture Handbook, V. 1, 2, 3. New York; Novetech/EPRI, 1991
 - 11 清华大学工程力学研究所. 关于八五期间开展核动力结构完整性评定研究的建议. 1989
 - 12 Goldman N L, Hutchinson J W. Fully plastic crack Problems; The center-cracked strip under plane strain. *Int. J. Solids Struct.*, 1975, 11: 575~591
 - 13 Rice J R, Drugan W J, Sham T-L. Elastic-plastic analysis of growing cracks. ASTM STP 700. Philadelphia; Ame. Soc. Testing & Mater., 1980. 189~221
 - 14 戴跃. 裂纹非定常扩展及断裂准则: [工学博士论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1984
 - 15 Luo X F, Yang W, Hwang K C. Theoretical J resistance curve and its applications in structural integrity assessment. In: Guyang C ed. Proc. of Int. Conf. on Fracture and Fracture Mechanics. Shanghai; Fudan University Press, 1987, 277~281
 - 16 杨卫. 基于延性断裂过程的缺陷评定方法. 力学学报, 1987, 19: 516~523
 - 17 Yang W, Hao S, Dong Y M et al. Structure integrity assessment based on theoretical resistance curve. In: Liu C D, Nichols R W eds. Pressure Vessel Technology, Proc. of ICPVT6, Beijing. Oxford; Pergamon Press, 1988. 819~826
 - 18 Hwang K C, Luo X F, Liu X H et al. Experiment computation and theory of stable crack growth. Proc. of SMiRT 10, 1989. Paper G03/2
 - 19 Dong Y M, Yang W, Hwang K C. New approach to structure integrity assessment for ductile fracture. *Fat. Fract. Eng. Mats. Structs.* 1990, 13: 399~410
 - 20 Dong Y M, Yang W, Hwang K C. Elastic-plastic defect assessment based on ductile fracture process. *Nucl. Eng. Design*, 1993, 142: 27~41
 - 21 Rice J R, Sorensen E P. Continuing crack-tip deformation for plane strain crack growth in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1978, 26: 163~186

- 22 Schwalbe K-H, Neale B K, Ingham T. Draft EGF recommendations for determining the fracture resistance of ductile materials, EGF Procedure EGF P1-87D. *Fat. Fract. Eng. Mat. Structs.* , 1988, 11: 409~420
- 23 He M Y, Hutchinson, J W. The penny-shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of power-law material. *J. Appl. Mech.* , 1981, 48: 830~840
- 24 Shih C F, Hutchinson J W. Fully plastic solutions and large scale yielding estimates for plane stress problems. *J. Eng. Mat. Tech.* , 1976, 98: 289~295
- 25 Amazigo J C. Fully plastic crack in an infinite body under anti-plane shear. *Int. J. Solids Structs.* , 1974, 10: 1003~1015
- 26 Zhang K D, Wang W. Failure prediction of low-carbon steel pressure vessel and cylinder models. *Int. J. Pres. Vessel Piping*, 1987, 27: 223~234

中篇 细观断裂力学

第4章 细观断裂力学引论

4.1 宏观断裂力学的局限性

宏观断裂力学 40 余年的发展有其辉煌的成就,也有着不可逾越的局限性。本书中篇与下篇探索打开断裂过程区的黑匣子之更深层次——细观断裂力学与纳观断裂力学——的研究。这类研究的开展将可能使控制宏观氛围的力学参量与断裂物理机制和损伤几何图象实现定量的结合。

4.1.1 裂纹尖端奇异场与断裂参数

宏观断裂力学的主要成就之一在于:对若干类典型材料模型和裂纹运动规律,建立了控制裂纹尖端附近某一环带域的特征奇异场。如弹性介质裂尖区的 K 场(准静态、动态;均匀材料、界面;各向同性,各向异性),幂硬化介质静止裂纹的 HRR 场,幂硬化介质扩展裂纹的高一黄场,率敏感材料静止裂纹的 RR 场,扩展裂纹的 HR 场,等等。中国学者在这一领域研究的成就可参见文献[1]的综述。这些裂尖奇异场的共同特征是:①它们在裂尖附近某一环带区占优,从而提供了一个控制裂尖断裂过程的力学场氛围;②对大多数裂尖场来说,该力学氛围的强弱受单参数控制,该参数概括性地录入了载荷信息、裂纹几何信息及部分材料信息;③往往可用渐近分析的方法来一劳永逸地揭示这类奇异场的空间构造。上述

特征使裂纹尖端奇异场的研究成为宏观断裂力学的核心命题,并得以建立具有良好操作性的宏观断裂准则。

然而,裂纹尖端奇异场的确立并不总是成功的,下述典型问题说明了某些在奇异场研究方面不可逾越的困难。

(1)有效域问题。在很多情况下奇异场得以占优的有效域出现残缺。对弹塑性双材料界面裂纹问题和准静态弹塑性扩展裂纹问题,大规模有限元的详尽计算表明:裂尖奇异场的有效域即便存在,也是很小的。这种微弱残缺的氛围能否控制裂尖的断裂过程是令人怀疑的。

(2)自治场问题。在若干典型情况下(如以率敏感扩展裂纹的HR解为代表的一大类弹塑性扩展裂纹场),渐近场正则条件的引入使裂尖奇异场出现自治(autonomous)特征。这时裂尖断裂过程的力学控制氛围与外载条件和几何因素无关,无法根据裂尖奇异场来建立断裂准则。

(3)非裂纹型尖端。裂纹顶端所出现的塑性大变形与损伤可能根本改变裂尖形貌^[2],从而破坏了推导裂纹尖端奇异场的前题。

4.1.2 断裂判据

现有的宏观断裂准则可分为三类:①具有热力学意义,基于流入裂纹尖端过程区能量的准则,如能量释放率 G 准则;②具有力学意义,基于裂尖过程区氛围强度的准则,如应力强度因子 K 准则;③具有变形几何学意义,基于裂尖形貌的经验性、半经验性准则,如COD、CTOD、CTOA等准则。 J 积分准则兼具上述三重意义。

4.1.3 断裂过程区

在宏观断裂力学中,断裂过程区是一个不可捉摸的黑匣子。根据对断裂过程的某种预计:如大变形、损伤、细观结构等,宏观力学家们可大致估算出断裂过程区的尺寸。更重要的是:在若干成功的例子里,可由宏观断裂力学的方法确定出该断裂过程区的力学氛围。然而,黑匣子内所发生的断裂事件却无法用宏观断裂的理论加

以描述。

断裂过程区研究的第一个基本问题在于建立过程区内的本构关系。首先,过程区内的损伤过程可能严重地影响到其平均本构关系,因此考虑软化的本构方程和损伤演化方程便成为必需。此外,在更靠近裂尖的尺度上无法将损伤现象视为连续分布场,而需赋予它们真实的离散几何图象。最后,当非常靠近裂尖时,连塑性行为也不应视为连续的,而应看做离散的位错在弹性基体中的运动。

断裂过程区研究的第二个基本问题在于确定裂纹顶端的轮廓。该轮廓是材料裂尖处塑性大变形和损伤的共同产物,其几何形状带着材料细微结构的印记。

断裂过程区研究的第三个基本问题在于阐明过程区根部的分离条件。这一分离条件需以应力作用下的价键分离为基础,兼顾裂纹顶端轮廓、细观损伤几何和细观韧带失稳。

综上所述,宏观断裂力学 40 余年的发展有其辉煌的成就,也有着不可逾越的局限性,本书的中、下两篇探索打开断裂过程区的黑匣子之更深层次的研究——细观断裂力学与纳观断裂力学。

4.2 细观损伤理论——4 类损伤基元

4.2.1 细观损伤理论

科学文献中常见的术语“微观”包含着若干具有不同力学分析特征的层次。从最粗糙的意义来说,可将力学中的微观划分为“细观”与“纳观”两类范畴。细观力学这一提法源于钱学森先生的倡导,它旨在用连续介质力学的方法去研究具有细观结构固体之变形及破坏行为^[3,4]。细观力学的应用尺度一般在微米上下,这时英文微米(micron)与细观力学(micromechanics)有很好的关联。而纳观力学(nanomechanics)则深入到更微细的纳米层次(nanosopic)。纳观力学的研究对象可能是纳米晶体、纳米材料,但更通常是对一般固体材料在纳观尺度下力学行为的研究。而这一研究将是 90 年代乃至 21 世纪固体力学横跨材料科学而与固体物理相结合的学

科前缘。

宏观断裂力学的局限性促成了损伤力学自 70 年代末的兴起。连续介质损伤力学(CDM)力图唯象地表达断裂过程区内的材料损伤行为,因缺少损伤物理与损伤几何内涵而发展缓慢。但它在实际问题上较易应用,且造成了力学家们扬弃完整连续介质模型的观念性突破。与此同时,细观损伤力学飞速发展^[4],成为细观力学领域中跃动最迅速的前沿。关于细观损伤理论的最新进展可见文献[4,5,6]中的叙述。细观损伤力学的主要学科优点在于对“损伤”赋予了真实的几何形象和具有力学意义的演化方程。作为宏观断裂先兆的 4 类细观损伤基元是:①微孔洞损伤与汇合;②微裂纹损伤与临界串接;③界面损伤(含滑错、空穴化与断裂);④变形局部化带与沿带损伤。

细观损伤理论的建模方法可概括为^[3,5]:

- ①选择一个能最佳描述待研究损伤现象的尺度;
- ②抽离出一类基本损伤结构,并将嵌含该损伤结构的背景材料按一定力学规律统计平均为等效连续介质;
- ③将更细尺度得到的本构关系用于这一背景连续介质;
- ④进而从该尺度下含损伤结构的连续介质力学计算来阐明材料损伤模型。

表 4.1 对照了宏观、细观和微观损伤理论在损伤几何、材料描述和方法论等方面的主要特点。本节主要限于阐述细观损伤理论,对微观损伤的行为将在下篇中讨论。

表 4.1 微观、细观、宏观损伤理论表征

	微观	细观	宏观
损伤几何	空位、断键、位错	孔洞、微裂纹、界面、局部化带	宏观裂纹 试件尺寸
材料	物理方程	基体本构与界面模型	本构方程与损伤演化方程
方法	固体物理	连续介质力学与材料科学	连续介质力学

细观损伤理论由冶金学家在研究金属高温蠕变损伤时所开创。在蠕变条件下的孔洞长大机制由 Robinson 与 Schenectady^[7]予以讨论,而 Hull 与 Rimmer^[8]研究了晶界扩展控制的蠕变损伤。在 60 年代初,开始用自洽方法 (SCM) 来研究复合材料的刚度,该方法导致著名的 Hashin-Shtrikman^[9]界限。在 60 年代后期固体力学家开始涉足这一研究领域,其开创性工作包括 McClintock^[10]对长柱孔洞和 Rice 与 Tracey^[11]对球形孔洞的解。Budiansky 与 O'Connell^[12]在 70 年代中期另辟研究前沿,对脆性损伤地质材料中的弥散分布微裂纹群进行了自洽细观力学分析。上述工作勾勒出延性和脆性材料细观损伤分析的雏形。随后,Gurson^[13]完整地阐述了孔洞演化机制下率无关延性损伤的列式。该微孔洞细观损伤架构随后被 Tvergaard 与 Needieman 等人拓展,在文献[14,15]中列出了对该理论种种细节和应用的描述。这一工作的进展导致了计算微结构力学^[15]和计算材料力学^[16]这两门新分支学科的诞生。与此同时,冶金学家们提出了更多的简明细观损伤模型,如 Cocks 与 Ashby^[17]、Ashby 与 Dyson^[18],来覆盖各种蠕变损伤现象。这些简单模型为更具力学特色的 Hutchinson^[19]-Tvergaard^[20]晶界空穴化控制蠕变损伤理论做了先导。进入 80 年代中后期,细观损伤理论的应用介质从金属材料拓展至非金属材料。作为对 Budiansky 与 O'Connell^[12]开拓性工作的发展,对混凝土、陶瓷、岩石等脆性损伤材料微裂纹群的研究不断取得突破,如 Kachanov^[21,22]关于有序分布微裂纹的工作,Nemat-Nasser 等^[23,24]关于接触裂纹表面摩擦、裂纹群稳定性和加载引致各向异性的工作,及 Bazant^[25]和 Kracjinovic^[26]关于脆性损伤表征的工作。在 80~90 年代之交,关于高分子的损伤与增韧(参见 Argon^[27]),以及特别是关于复合材料细观损伤的理论(见 Hashin^[28]、Dvorak 等^[29])有了重要的进展。细观损伤理论在过去 12 年中逐渐成熟,其方法渗入到多个相关学科之中。本节介绍细观损伤理论的概貌,按孔洞损伤、微裂纹损伤、界面损伤和局部化带状损伤这四种典型细观损伤构元的次序来展开介绍。

4.2.2 孔洞损伤

典型的孔洞损伤结构有^[5]：

- ①大致同一尺寸的弥散分布孔洞；
- ②多种特征尺度的孔洞群；
- ③在宏观剪切带中的嵌含孔洞；
- ④由局部化剪切所连接的孔洞群。

孔洞的演化过程由三个阶段组成：①第二相边界处的形核；②孔洞长大与第二相颗粒脱离；③孔洞片状汇合。

对孔洞损伤的力学建模应包括下列要素：

- ①孔洞几何描述(密度及形状)；
- ②孔洞长大律；
- ③基体材料的本构模型；
- ④均匀化方法(如胞体模型、SCM、孔洞间的近程强交互作用、等等)；
- ⑤宏观力学行为预测(体膨胀、压力敏感性、非正交性等)。

关于孔洞损伤方面的综述已有多种，如 Tvergaard^[14]，Needleman^[15]等。我国学者也对这一领域进行过系统阐述，见文献[5, 30]。本节仅讨论3个有关的问题：①孔洞聚集形态的识别；②孔洞演化率；③孔洞损伤引致裂尖形貌。

1. 孔洞聚集形态的识别

孔洞聚集形态的识别可借助断层扫描法(Computerized Tomography, 即 CT 法)进行。常规 CT 可分辨孔径在毫米量级的孔洞之细节,并能“模糊”地鉴别细小孔洞群的平均特征。而显微 CT 方法可大幅度改进上述分辨率。虞洪辉与杨正^[31]最近探讨了 CT 数据的数学识别。对单峰状直方图,其孔洞平均体积的 V_0 和孔洞密度 λ 可由密度(用 ρ 表示)直方图的均值 $E(\rho)$ 和方差 $D(\rho)$ 表达为

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= D(\rho)V / \{ \rho_0 [\rho_0 - E(\rho)] \} \\ \lambda &= [\rho_0 - E(\rho)]^2 / [D(\rho)V] \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中, V 为样品元体积; ρ_0 为基体密度。显然 ρ_0 大于孔洞体密度。

在金属材料孔洞损伤破坏的后期往往出现多峰状直方图^[31],这一多峰特征起源于在孔洞汇合或再形核机制下所产生的多种特征尺寸孔洞类。文献[31]用聚类分析法(Hierarchical Clustering Method)对这类复杂情况进行了分析。该法所计算模拟的直方图(图 4.1 右)与文献[32]的实测曲线(图 4.1 左)相当一致。

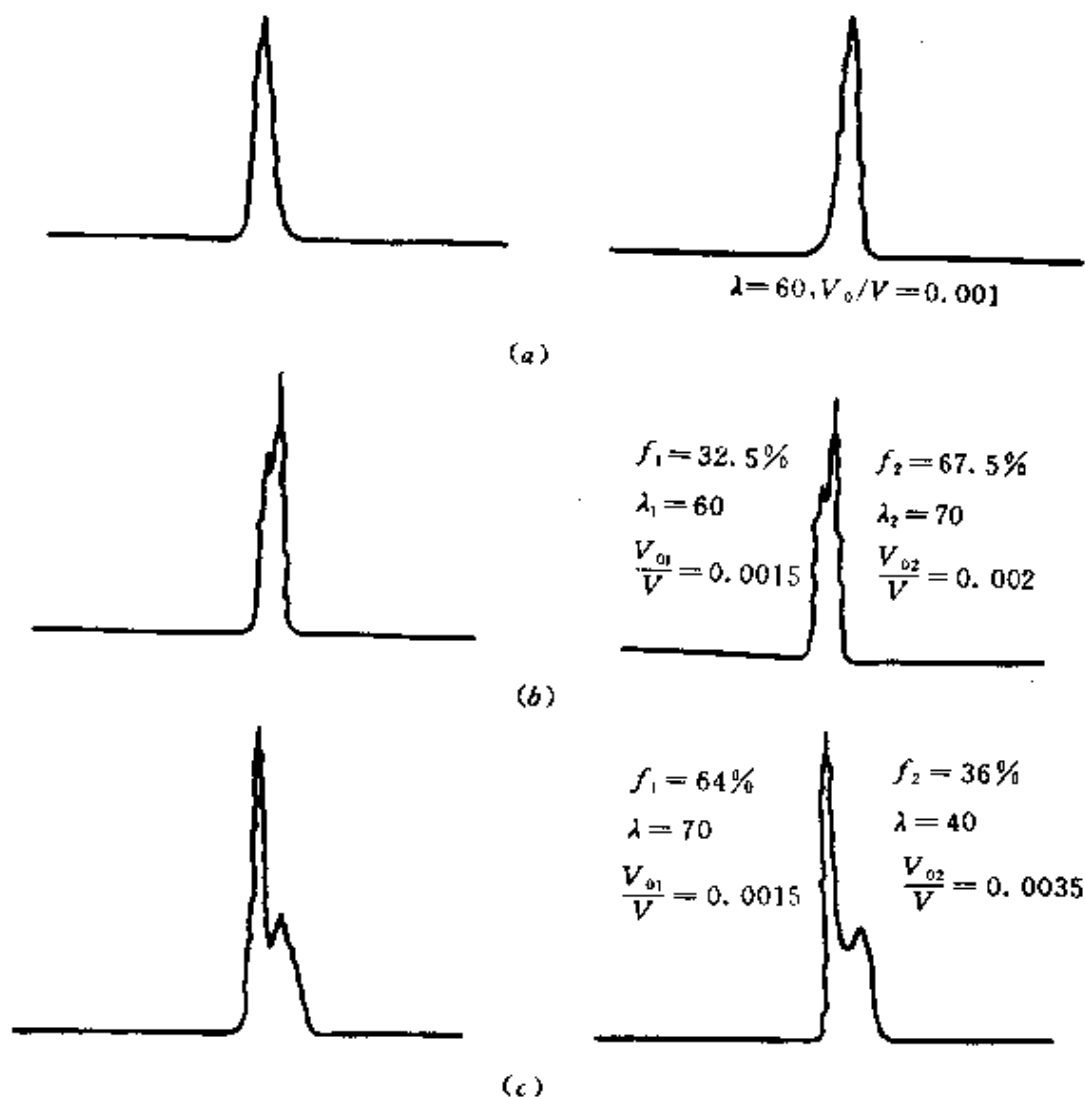


图 4.1 实测密度直方图与计算模拟的比较^[31]

(a)对应文献[32]中图 10; (b)对应文献[32]中图 25;

(c)对应文献[32]中图 46(9)。

孔洞损伤各向异性的非破坏式量测方法是一个迄今未能解决的关键问题。虞洪辉、杨卫、郝天护^[33]建立了适用于这一问题的多方位层析识别数字模型。该模型可严格地证明从不同方位截取单

位孔洞体元的物质面积 S_{mi} (下标“m”代表物质, 下标 $l=1, 2, 3$ 代表不同的方位) 分布的平均数即为其孔洞百分比 f

$$E(S_{mi}) = f \quad \forall l = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

而该分布的方差则可用来识别孔洞群的形状各向异性。以椭球状孔洞为例, 椭球群的三特征半轴长 $a_l (l=1, 2, 3)$ 为

$$a_l = \sqrt{\frac{5}{4\pi(1-f)}} \frac{1}{D(S_{mi})} \sqrt{\prod_{i=1}^3 D(S_{mi})} \quad l = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

于是, 若能从三个互相垂直方位测出断层物质面积分布, 便可由其平均数及方差来求得孔洞密度和形状各向异性。

2. 孔洞演化律

按 McClintock^[10]、Rice 与 Tracey^[11]所做的力学计算, 孔洞体积百分比 f 的变化率可写为下述形式

$$\dot{f} = A \dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) \quad (4.4)$$

式中, σ_m 为平均应力; $\bar{\sigma}$ 为基体 Mises 应力; $\dot{\varepsilon}$ 为等效应变率; A 为幅值因子, 可由一维加载试验用最终破断伸长 λ_f 所确定。式(4.4)是率无关的, 它描述损伤演变 f 与形变累积之间的关系。McClintock 等的工作^[10, 11], 说明了这一演化律与静水应力的三轴度 $\exp\left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right)$ 有关。杨卫与郭田福^[34]、郭田福与杨卫^[35]对式(4.4)进行了修正, 使之可反映材料对损伤响应的各向异性, 详见本书第 7.2 节。

3. 孔洞损伤引致裂尖形貌

由不同的各向异性损伤演化律, 可模拟出不同的裂尖形貌。郭田福与杨卫^[35]数值模拟了 6 类裂尖形貌几何, 即: ①尖劈、②钝劈、③超钝化、④矛头、⑤双分叉、⑥三分叉。这些不同的裂尖形貌确实在裂尖细观观察中有过记录, 由控制裂尖形貌而增韧的力学理论将在第 8.5 节中介绍。

4.2.3 微裂纹损伤

脆性损伤发生在结构陶瓷、金属间化合物、岩石、混凝土、玻

璃、非金属基复合材料和热固性树脂之中。其主要表现形式是单重或多重弥散分布的微裂纹。目前关于微裂纹群的研究主要集中于宏观刚度预测,借助于自洽理论^[9,12]和差分格式等方法。关于微裂纹的演化和近程作用是一个更复杂的问题,目前尚未建立揭示这一过程本质的简明理论。因此未来的主要研究方向在于用脆性损伤理论来预测强度。复合材料中的多重裂纹和界面裂纹涉及更多的力学问题。由微裂纹引起的细观损伤有时加剧主裂纹的扩展速度,有时却对这一扩展起屏蔽作用^[21,22],如何控制这一过程而达到增韧效果是一个有意义的课题。

本书将在第 6 章中详细介绍微裂纹损伤理论。

4.2.4 界面损伤

1. 近程与远程孔洞损伤

界面孔洞损伤有近程与远程两类模式。常见的损伤机制为界面处多源发展的孔洞损伤,其演化造成由韧带颈缩失稳而依次汇入钝化界面裂纹尖端的高延性断裂机制,该损伤区具有近程特征,见图 4.2 中左图,力学建模可参见 Needleman^[36,37]。然而,对硬脆约束厚层间插入一高延性界面镀层的情况,则可能产生由裂尖前高三轴应力区外移而造成的远程孔洞损伤机制,见图 4.2 中右图。基于强约束塑性的数值模拟已得以再现这类损伤结构^[38],其孔洞形核机制为高静水应力下的自发形核机制^[39]。

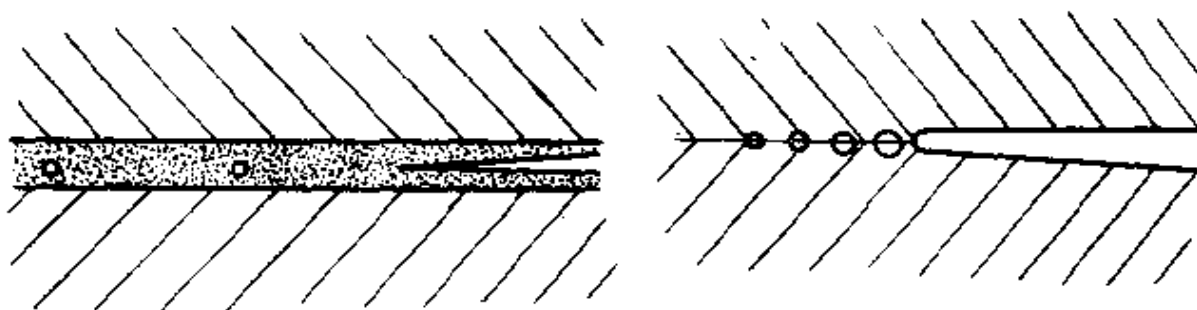


图 4.2 多层介质中的孔洞损伤

左:近程孔洞汇入机制;右:远程损伤机制。

2. 高温界面损伤

界面损伤包括高温下的晶界空穴化过程和常温下的界面损伤过程。前一过程前面已经提及,这里主要讨论晶界空穴化过程。对幂次律蠕变基体控制的晶界空穴化过程可由 Hutchinson-Tvergaard 理论^[19,20]来描述,更详细的研究需考虑 3 维滑移的影响。如何将上述理论与现有的孔洞损伤理论相结合而评价高温强度仍是一个未解决的问题。

4.2.5 局部化带状损伤

1. 剪切带与带内损伤

变形局部化与带状损伤往往相辅相成。变形局部化可能是带状损伤的前兆,变形局部化也可能由带状损伤所激发。剪切带是变形局部化的一种重要形式,白以龙与 Dodd^[40]详细地总结了绝热剪切带所导致的变形局部化。力学家常在连续介质的模型下研究变形局部化问题,采用经验准则、稳定性分析方法、定态波和分叉分析、奇异面方法等^[41]。杨卫^[42]曾用小扰动分析方法来处理损伤局部化问题。这些分析还未能清晰地勾勒出材料的微细观特征对局部化行为的重要影响,而这种微细观影响在诸如相变局部化等问题中往往起决定作用。例如,在具有双重微结构设计的相变陶瓷中利用垂直于局部化传播方向的阻滞层或疏导层可使局部化相变转变为弥漫式相变,从而使这类陶瓷材料的 K_{IC} 值大幅度提高。

变形局部化与损伤局部化的耦合作用,或由变形—损伤耦合而产生的局部化行为,也是当前重点研究的一个课题。

2. 细观屈曲折带及沿带损伤

层状多层介质(亦称为多层介质)在强压载荷下所发展的细观屈曲折带及沿带损伤是一个细观变形局部化的新问题。杨卫与魏悦广^[43]用弹塑性细观分叉理论求解了屈曲折带的形成条件。在分叉前变形上扰动速度势 Φ 的特征方程为

$$\left[\mu + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2(\mu^* - \mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$$

$$+ \left(\mu - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} = 0 \quad (4.5)$$

式中, σ_1 与 σ_2 分别为平行和垂直于层状介质的应力; μ 为 0° 与 90° 方向的失稳剪切模量; μ^* 为 45° 方向的失稳剪切模量。方程(4.5)的折带形式解的数学特征可见图 4.3。这里我们主要讨论绘有影线的压缩区。图中 P 区为抛物型方程区, 变形特征为扩散型折带。 H 区为双曲型方程区, 此时出现贯穿型折带, 在该模式下临界压应力的理论预测值与典型复合材料的实测值定量符合较好^[44]。图中 EI 区与 EC 区均对应于椭圆型方程制约下的自表面向内逐步衰减的折带, 其中 EI 区对应于水平失稳带, EC 对应于倾斜失稳带。后者情况与实测结果最为符合, 其临界失稳应力略低于贯穿型折带的对应值^[43]。

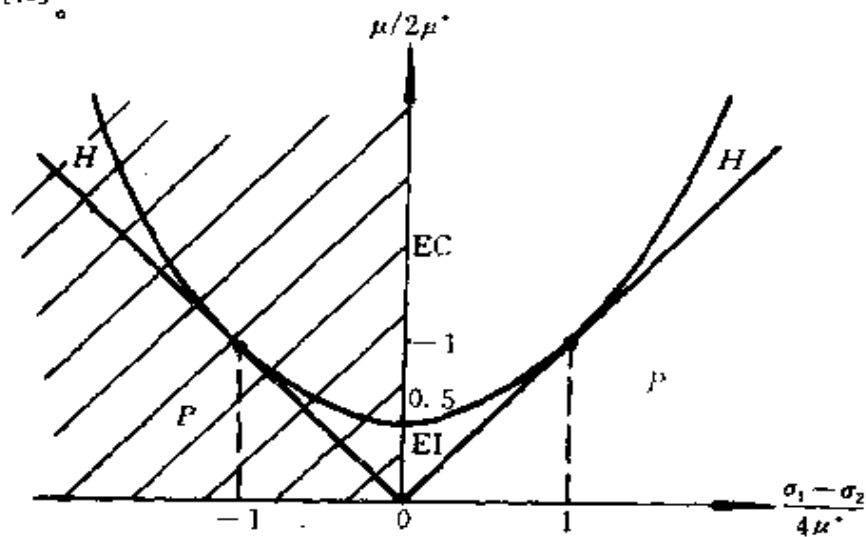


图 4.3 细观强压失稳折带解的数学特征

表面失稳带在分叉形核后的过屈曲过程表现为屈曲桥联纤维屏蔽下的折带扩展, 这时可借用柱体过屈曲理论和 J 积分学说来刻画这一过程^[45]。由折带扩展推动力和材料强压失稳阻力相平衡的观点还可理论预测出多层介质的宏观压缩应力应变曲线。由于材料细观参数的不同, 该曲线可发生分叉引致应力跌落、后屈曲强化和后屈曲弱化等现象^[45]。

上述折带失稳模型已得到实验证实^[46]。层裂与折带失稳的耦合图象见图 4.4。



图 4.4 预裂纹的变形及其尖端的折带

本节的论证说明:由于引入材料微结构、变形物理机制和损伤构形几何,细观损伤理论得以达到连续介质损伤力学所不能企及的深度。在细观损伤理论框架下能够定量地阐述微孔洞、微裂纹、

界面失效与局部化带这四种损伤基元与材料物理的联系,并在均匀化的方法下将其与宏观力学氛围相联系。

4.3 损伤与断裂的交互作用

宏观裂纹的断裂过程区中嵌含着一个细观损伤区,在该区内的损伤发展和物质分离过程分别受损伤演化方程和临界损伤条件控制。细观损伤力学用连续介质力学的方法研究具有细观损伤结构的固体材料,并运用均匀化的方法提炼出含损伤宏观本构方程与损伤演化方程^[5]。计及损伤的断裂理论可实现下述成果。

(1)模拟断裂方式。在 Gurson 类模型下已成功地模拟出各种光滑与缺口试样的断裂方式,参见文献[5]中第 8 章对这类问题的综述。如光滑单拉圆试棒的断口可模拟为剪锥杯状,而光滑平面应变拉伸试件的断口为斜坡面,成功地解释了大量实测结果。

(2)模拟断裂路径。力学家们可利用损伤致裂理论定量表达二相粒子、界面等材料微细结构对断裂路径的控制,并进而阐述与此相关的材料增韧力学。

(3)模拟断裂形貌。损伤引致的裂尖形貌千姿百态。据郭田福与杨卫^[35]所进行的大变形超弹性/粘塑性/各向异性损伤有限元详尽计算,由改变 Bauschinger 型各向异性损伤参数,可模拟出尖劈、钝劈、超钝化、矛头、双分叉、三分叉等 6 种裂尖形貌。

(4)微裂纹屏蔽。脆性材料的裂尖常演化出一个密布微裂纹的过程区。若方位适宜,该微裂纹区可对主裂尖产生屏蔽效应。其主要机制为:①微裂纹的存在产生裂尖区域的增柔;从而降低了裂尖区的应力集中;②微裂纹对主裂纹起弯折作用;③在复合材料中产生垂直于主裂尖的层间裂纹,并进而由再形核机制产生枝须状微裂纹系。

(5)微裂纹的统计演化。对无序微裂纹演化的研究还可以借助于统计演化率的办法,见白以龙等^[47]。重整化群方法在这一模拟过程中十分有效^[48]。白以龙等还通过用计算机随机投放微裂纹的

方法,得到了从准均匀微裂纹损伤突变至串接式灾难性破坏的过程。

(6)损伤本构律下的裂纹尖端场。在损伤本构律下可计算裂纹尖端渐近场。但由于损伤引起裂纹尖端形貌的变化,求解裂尖渐近奇异场的基本假设受到动摇。郭田福总结了在 Kachanov-Robatnov 蠕变损伤模型下的裂尖损伤场^[49]。关于损伤与断裂交互作用的进一步论述将在第 7 章中给出。

参 考 文 献

- 1 Hwang K C, Yu S W, Yang W. Theoretical investigation of crack-tip singularity fields in China. *Appl. Mech. Rev.*, 1990, 43: 19~33
- 2 Yang W, Tan H L, Guo T F. Evolution of crack tip process zones. *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering*, 1994, 2(3a): 767~782
- 3 杨卫,孙庆平,黄克智等.固体的宏细观本构理论与断裂. *自然科学进展*, 1993, 3(6): 515~524
- 4 杨卫.细观力学与细观损伤力学. *力学进展*, 1992, 22(1): 1~9
- 5 Yang W, Lee W B. *Mesoplasticity and Its Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 6 杨卫,细观损伤理论进展.见:黄克智等编. *固体力学发展趋势*.北京:北京理工大学出版社, 1995
- 7 Robinson E L, Schenectady N Y. Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 1952, 74: 777~781
- 8 Hull D, Rimmer D E. The growth of grain-boundary voids under stress. *Phil. Mag.*, 1959, 4: 673~687
- 9 Hashin Z, Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and inhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, 10: 335~342
- 10 McClintock F A. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *J. Appl. Mech.*, 1968, 35: 363~371
- 11 Rice J R, Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 1969, 17: 201
- 12 Budiansky B, O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Struct.*, 1976, 12: 81~97
- 13 Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth; Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng. Mater. Tech.*, 1977,

- 99, 2~15
- 14 Tvergaard V. Material failure from void growth to coalescence. The Danish Center for appl. Math & Mech. ,Rep. No. S45, 1988
 - 15 Needleman A. Computational micromechanics. Keynote Lecture in ICTAM VIII, Grenoble (France), 1988
 - 16 Ortiz M, Shih C F, et al. IUTAM Symp. on Computational Mech. of Materials. In: Modeling Simul. Mat. Struct. Eng. ,1994. 2(3a)
 - 17 Cocks A C F, Ashby M F. On creep fracture by void growth. *Progr. in Mater. Sci.* , 1982, 27; 189~244
 - 18 Ashby M F, Dyson B F. Creep damage mechanics and micromechanisms. *Proc. of 6th Int. Conf. Fracture, New Dehli, V. 1. 1984. 3~27*
 - 19 Hutchinson J W. Constitutive behavior and crack tip fields for materials undergoing creep constrained grain boundary cavitation. *Acta Metall.* 1983, 31; 1079~1088
 - 20 Tvergaard V. Constitutive relations for creep in polycrystals with grain boundary cavitation. *Acta metall.* , 1984, 32; 1977~1990
 - 21 Kachanov M L. A microcrack model of rock inelasticity, part I : frictional sliding on microcracks. *Mech. Mater.* , 1982, 1; 19~27
 - 22 Kachanov M L. A microcrack model of rock inelasticity, part I ; Propagation of microcracks. *Mech. Mater.* , 1982, 1; 29~41
 - 23 Nemat-Nasser S, Sumi Y, Keer L M. Unstable growth of tension cracks in brittle solids; stable and unstable bifurcations, snap-through, and imperfection sensitivity. *Int. J. Solids Structs.* , 1980, 16; 1017~1035
 - 24 Nemat-Nasser S. On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials. *J. Appl. Mech.* , 1983, 50; 1114
 - 25 Bazant Z P. Mechanics of distributed cracking. *Appl. Mech. Rev.* , 1986, 39; 675~705
 - 26 Kracjinovic D. Constitutive equations for damage materials. *J. Appl. Mech.* , 1983, 50; 335~360
 - 27 Argon A S. Sources of toughness in polymers. In; Salama K et al eds. *Advances in Fracture Research, V. 4. Oxford; Pergamon Press, 1989. 2661~2681*
 - 28 Hashin Z. Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *J. Appl. Mech.* , 1987, 54; 872~879
 - 29 Dvorak G J, Laws N, Hejazi M. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates; I. Thermoelastic properties of a ply with cracks. *J. Composite Mater.* , 1985, 19; 216~234
 - 30 王自强, 杨卫, 夏霖编著. 细观力学基础. 1992
 - 31 虞洪辉, 杨卫. 孔洞损伤的 CT 识别. *力学与实践*, 1993, 15(6); 41~45

- 32 Latiere H J, Mazerolle F. The X-ray scanner, a tool for the examination of the intravoluminal crystalline state of aluminum. *Eng. Fract. Mech.*, 1987, 27: 413~463
- 33 虞洪辉, 杨卫, 郝天护. 各向异性损伤的多方位层析识别. *清华大学学报*, 1994, 34(5): 1~6
- 34 杨卫, 郭田福, 傅增力. 裂尖超钝化: 实验、理论与数值模拟. *力学学报*, 1993, 25(4): 468~478
- 35 Guo T F, Yang W. Crack tip profiles generated by anisotropic damage. *Int. J. Damage Mech.*, 1993, 2: 364~384
- 36 Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 1987, 54: 525~531
- 37 Needleman A. An analysis of decohesion along an imperfect interface. *Int. J. Fracture*, 1990, 42: 21~40
- 38 Varias A G, Suo Z, Shih C F. Ductile failure of a constrained metal foil. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39: 963~986
- 39 Huang Y, Hutchinson J W, Tvergaard V. Cavitation instabilities in elastic plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39: 223~241
- 40 Bai Y, Dodd B. *Adiabatic Shear Localization*. Oxford: Pergamon Press, 1992
- 41 Needleman A, Tvergaard V. Analyses of flow localization in metals. *Appl. Mech. Rev.*, 1992, 45(3), Part 2: S3~S18
- 42 Yang W. On spatial characterization of damage evolution in a tensile bar. *J. Mech. Phys. Solids*, 1990, 38: 725~740
- 43 Yang W, Wei Y G. Progressive damage along kink bands in fibre-reinforced composite blocks under compression. *Int. J. Damage Mech.*, 1992, 1: 80~101
- 44 魏悦广, 杨卫. 单向纤维增强复合材料的压缩弹塑性微屈曲. *航空学报 A 辑*, 1992, 13: 388~393
- 45 Wei Y G, Yang W. Post-microbuckling of fibre bridging kink bands under compression. *Acta Mech. Sinica*, 1993, 9: 33-43
- 46 魏悦广, 杨卫, 黄克智. 纤维复合材料后微屈曲的理论和实验. *中国科学 A 辑*, 1994, 24(7): 768~776
- 47 Bai Y et al. Formulation of statistical evolution of microcracks in solids. *Acta Mech. Sinica*, 1991, 7: 59~66
- 48 Bai Y et al. Coalescence of microcracks as a cascade to critical failure. *ICTAM IV*, Haifa (Israel), 1992
- 49 郭田福. 裂纹尖端损伤过程区研究: [工学博士学位论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1992

第5章 界面断裂力学与多层介质断裂

5.1 界面与多层介质力学

5.1.1 界面与界面断裂

界面到处存在。不同材料的宏观结构之间存在着界面：如水库坝体与地基之间的界面，不同或相同金属材料间的焊缝，火箭外壳与药柱之间的界面，等等。材料的细观结构之间也存在界面：如复合材料、多相材料中的异质界面，多晶体材料中的同质界面，等等。纳米材料的界面域“体积”往往占总材料体积的一半左右。

界面是发生断裂的源泉。多相材料的大多数断裂现象源于硬软相的界面；沿晶断裂是多晶体断裂的基本形式之一；复合材料中常见的分层和纤维拔出也是界面断裂的典型例子。细观断裂力学研究具有内禀微结构的材料之断裂行为。因此，界面断裂力学研究是细观断裂力学的一项中心内容。

无论裂纹源于何处，其扩展过程中往往与界面遭遇。这时裂纹与界面在相遇处形成某一侵入角度。裂纹垂直于界面者称之为垂直侵入，裂纹倾斜于界面者称之为倾斜侵入。不同的界面/基体性能比对侵入裂纹产生不同的偏折作用。若界面强度较低，裂纹侵入界面后常发生沿界面的断裂。由于力学控制条件的变化，原先沿界面的断裂也可以拐出界面，而切入基体内部。复合材料的设计思想，以及界面工程中很多指导思想，均人为地利用了界面对断裂行为的影响。本章主要研究沿界面延伸的裂纹行为，仅在最后一节概述界面对断裂路径的影响。

5.1.2 多层介质力学

多层介质是国民经济和国防建设现代化所必需依赖的先进材料(含微细结构)之构成方式。其典型例子包括层状复合材料和高密度多层封装微电子厚膜。多层介质的力学研究是90年代固体力学的主要发展方向之一,见 Hutchinson 和 Suo^[1]。从均匀介质发展到多层介质,体现了力学研究层次的深入和研究难度的增加。多层介质力学必然具有细观力学的要素和研究层次,这时构层力学设计和界面力学成为起制约作用的学科因素,典型多层介质的示意图见图 5.1,其细观特点为:

- ①层厚远小于其他特征尺寸。
- ②层数多,或层厚远小于总厚度。
- ③在诸层间存在界面(或界面层),该处材料性质发生突变(或渐变)。
- ④在某些应用场合,层厚降至微米量级。这时连续介质弹性理论仍可应用,但连续介质塑性理论应由离散位错模型代替,见 Suo, Shih 与 Varias^[2]。

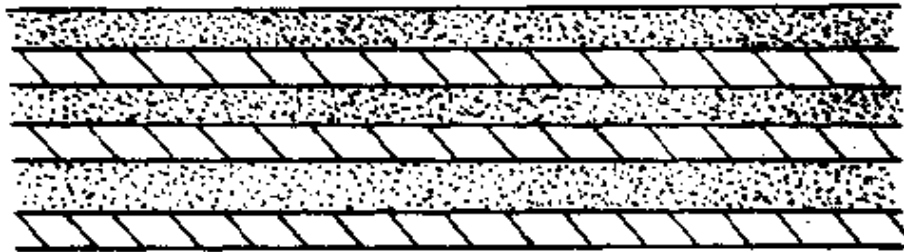


图 5.1 典型多层介质示意图

上述细观特征对多层介质不同类别的宏观力学响应有不同的作用。对刚度响应来说,起主导作用的是多层介质的平均构成,而其具体细观结构的影响是第二位的。但对强度和破坏行为来说,多层介质的具体细观特征便产生举足轻重的影响。

多层介质在国民经济和国防现代化中起着重要作用。作为多层介质家族中的一员,层合复合材料已成为现代航空航天器的主要结构材料,其损伤力学和塑性力学行为是多层介质力学的主要

研究和应用对象之一。另一个重要的应用例子是高密度多层封装的微电子厚膜。多层膜的出现标志着微电子元件的集成化已实现了从“平面型”到“空间型”的发展,且由于层厚的增加和多界面的出现而使破坏力学跨入了微电子科学的殿堂。

多层介质的主要力学失效模式有位错发射、断裂、损伤和塑性失稳等 4 种。现分别概述如下:

(1)位错发射模式。在多层超晶格(multilayer superlattice)外延微电子元件中,各层膜中均保持有交替拉压变化的外延应变(epitaxial strain)。该应变可造成有利的电子学能带结构,从而赋予多层超晶格元件优异的微电子学性能。然而在高额外延应变(常为 1%~8%量级)所造成的残余应力(可达理论强度的 10%~80%左右)作用下,可能出现图 5.2 所示的旋出位错(threading dislocation)和错配位错(misfit dislocation)而影响元件的微电子学功能(Mathews 与 Blakeslee^[3~5])。Freund^[6~9]对旋出位错的能量平衡和动力学进行了详细的讨论。杨卫与张宏^[10]阐述了位错在缺陷处的非均匀形核。

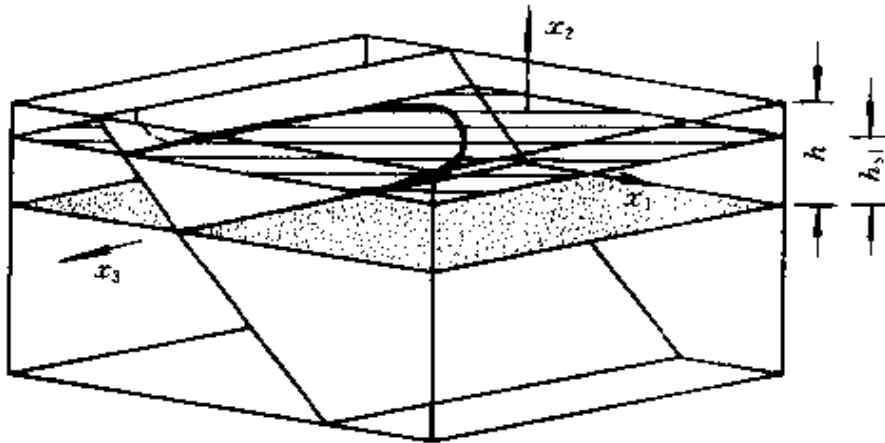


图 5.2 多层超晶格元件中的旋出与错配位错^[9]

(2)微裂纹损伤模式。多层介质在远场拉伸和/或剪切作用下常产生微裂纹损伤,如复合材料中的穿层断裂和穿层/层间组合断裂便是常见的微裂纹损伤现象,参见 Yang 与 Boehler^[11,12]。层间或

多重断裂时还可能伴有层间的滑错^[12],关于这方面的研究思想将在第 5.8 节中加以介绍。图 5.3 显示了微电子多层厚膜中所可能出现的种种断裂行为^[13],包括层间裂纹、角点萌生裂纹、界面下平行裂纹、裂纹分叉、裂纹拐折、塑性区屏蔽等等。这些断裂行为均可能导致微电子元件失效或可靠性丧失。此外,裂纹的隧道穿入现象^[14]和界面透越能力^[15]也是多层介质细观断裂行为的重要研究课题。

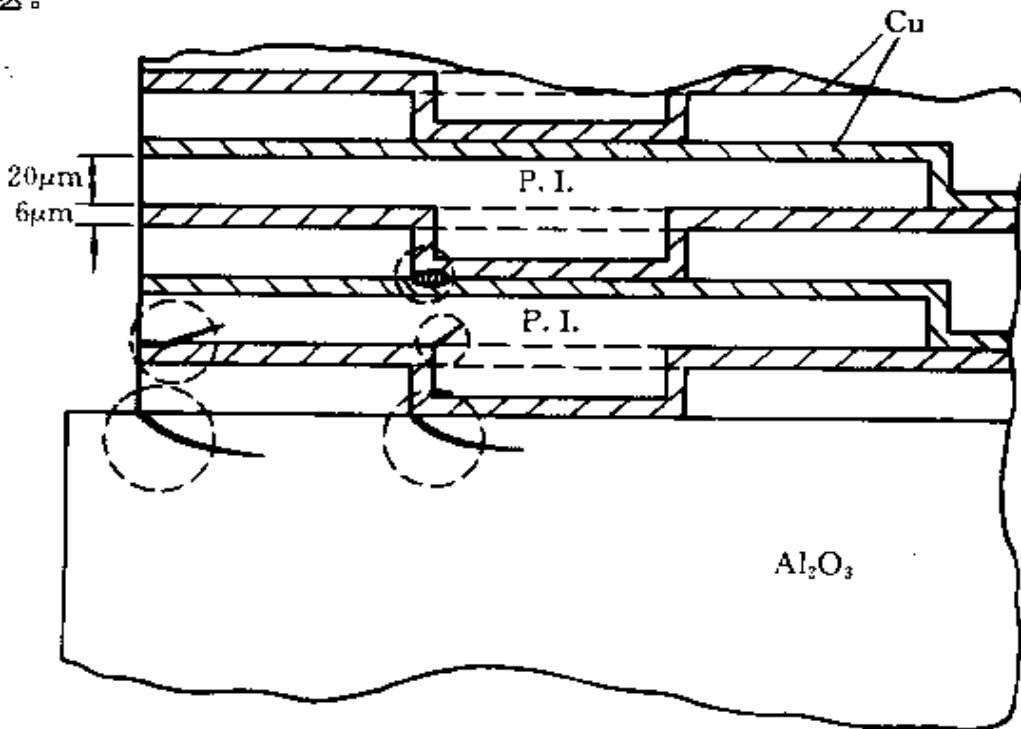


图 5.3 基底上微电子多层膜的种种细观断裂行为^[13]

关于多层介质强约束孔洞损伤和多层介质细观塑性失稳的问题已在第 4.2.4 小节和第 4.2.5 小节中进行了介绍,此处不再赘述。

5.2 界面断裂奇异场——各向同性双材料

本节及下述各节的分析均限于弹性双材料的界面断裂分析。关于弹塑性双材料的界面断裂奇异场分析虽有一定的进展^[16~18],但奇异场的有效域却非常小。

5.2.1 各向同性双材料

考虑图 5.4 所示的准静态界面断裂过程。材料 1 与材料 2 分别占据界面以上和界面以下的半平面。上标“(1)”和“(2)”分别标注对应于材料 1 和 2 的物理量,并在不致引起混淆的情况下略去上标(1)和(2)。不失一般性,本章规定材料 1 的柔度大于材料 2 的柔度。本节考虑各向同性双材料的特例。对平面问题,材料的弹性性质可由剪切模量 μ 和与泊桑比 ν 有关的无量纲数 κ 来表示(平面应力: $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; 平面应变: $\kappa = 3 - 4\nu$)。

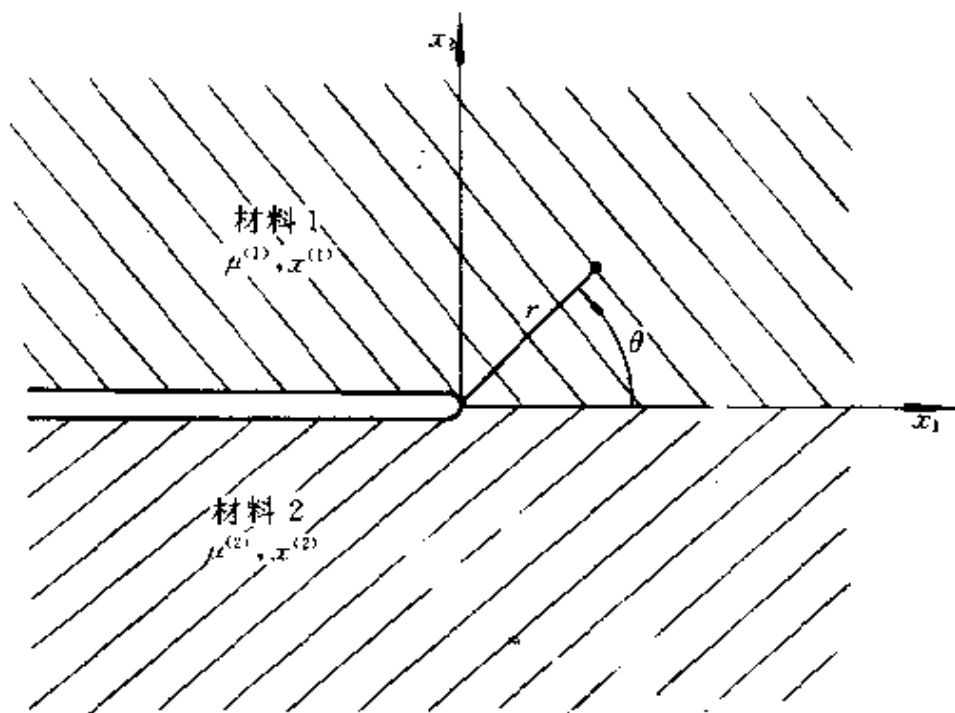


图 5.4 弹性各向同性双材料的界面断裂

Dundurs 曾经证明^[19]:对各向同性双材料的平面弹性力学问题,上述 4 个弹性常数 $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}$ 的影响可归纳为下述两个无量纲参数组合的影响

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu^{(1)}(\kappa^{(2)} + 1) - \mu^{(2)}(\kappa^{(1)} + 1)}{\mu^{(1)}(\kappa^{(2)} + 1) + \mu^{(2)}(\kappa^{(1)} + 1)} \\ \beta &= \frac{\mu^{(1)}(\kappa^{(2)} - 1) - \mu^{(2)}(\kappa^{(1)} - 1)}{\mu^{(1)}(\kappa^{(2)} + 1) + \mu^{(2)}(\kappa^{(1)} + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

式中, α 对应于垂直于界面的拉伸性能在界面上下的错配; β 对应于平行于界面的面内性能在界面上下的错配。 α 与 β 在文献中称为 Dundurs 参数。由 Dundurs 第二参数 β , 可构成振荡指数 ε

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (5.2)$$

它是界面断裂中一个关键无量纲量。

由 Dundurs 参数的定义(5.1), 不难证明 α 与 β 的取值范围限于由

$$\alpha = \pm 1, \quad \alpha - 4\beta = \pm 1 \quad (5.3)$$

所界定的平行四边形中。Suga, Elssner 和 Schmauder^[20] 曾收集了大量双材料的数据, 表明各种双材料的 Dundurs 参数集中于该平行四边形的中线($\alpha = 4\beta$)附近, 见图 5.5 所示。

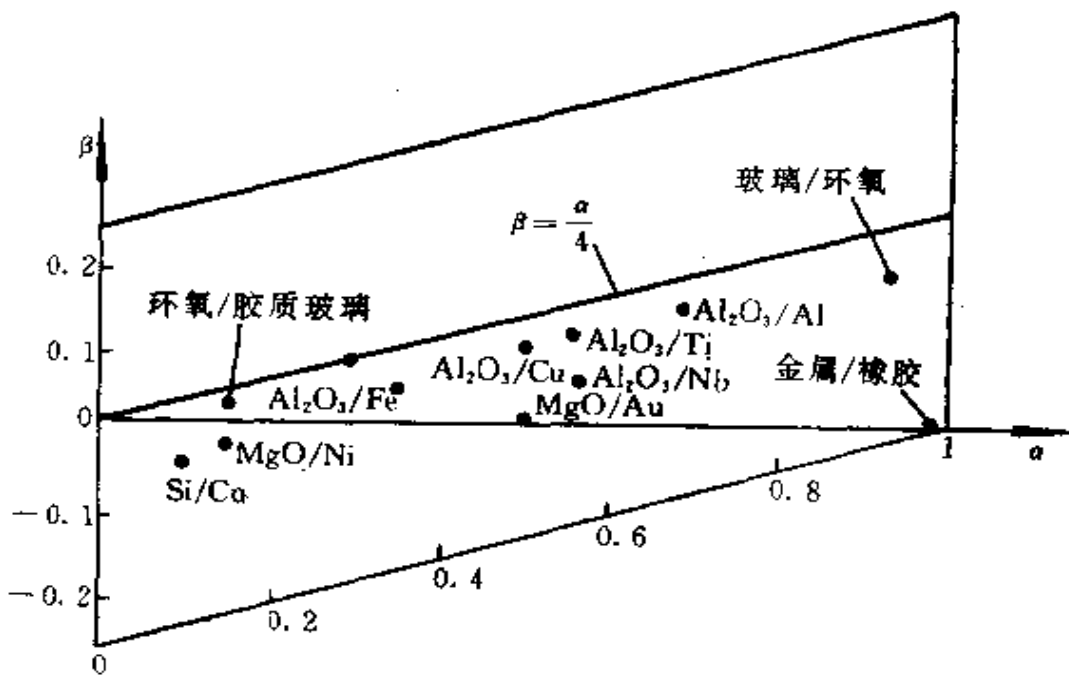


图 5.5 Dundurs 参数的允许区域和多种双材料 Dundurs 参数值的分布

不同双材料组合的振荡指数值列于表 5.1。如果把材料 1 与材料 2 互换, 则 $\alpha, \beta, \varepsilon$ 的值均变号。

表 5.1 典型双材料的振荡指数值

	Al ₂ O ₃	硼	碳	E-玻璃	SiC
铝	-0.047	-0.049	-0.062	0.017	-0.049
铬	-0.025	-0.031	-0.064	0.061	-0.028
铜	-0.029	-0.032	-0.049	0.040	-0.030
铅	-0.034	-0.035	-0.039	0.006	-0.035
锆	-0.042	-0.046	-0.062	0.030	-0.045

5.2.2 裂纹尖端场:早期的困域

可按传统的特征值分析方法来求解裂纹尖端奇异场。从 1959 年到 1965 年,许多力学家在理想平直数学界面的模型下分析了图 5.4 所示的问题,如 Williams^[21], Cherepanov^[22], England^[23], Erdogan^[24], Rice 与 Sih^[25]等。其一致结论是:裂纹尖端的应力具有 $r^{-\frac{1}{2}+\nu}$ 的奇异性。当 r 趋于零时,应力呈振荡无界特征,于是将式 (5.2) 所定义的 ε 称为振荡指数。若将面内复应力强度因子 K 和 III 型应力强度因子 K_{I} 定义为

$$(\sigma_{22} + i\sigma_{12})|_{\theta=0} = \frac{Kr^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \quad \sigma_{32}|_{\theta=0} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.4)$$

则裂纹尖端的应力奇异场具有下述形式

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{\operatorname{Re}\{Kr^{i\varepsilon}\}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{\text{I}}(\theta, \varepsilon) + \frac{\operatorname{Im}\{Kr^{i\varepsilon}\}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{\text{II}}(\theta, \varepsilon) \\ & + \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{\text{III}}(\theta) \end{aligned} \quad (5.5)$$

对上式需做如下说明:

① K 的量纲为 $\text{MPa}(\text{m})^{\frac{1}{2}-\nu}$, 是一个复数, 而 K_{I} 的量纲为 $\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$, K 与 K_{I} 的量纲不同, 与均匀材料面内应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 的量纲也不同。本书第 1.4 节中关于平面与反平面问题在裂尖区解耦的论证对界面裂纹仍旧成立。但由于界面两侧材料的不对称性, 面内问题再不能解耦为 I 型与 II 型。平面界面断裂从本质上为混合型。 K 一般可表述为下述形式

$$K = Y\sigma \sqrt{L} L^{-\nu} e^{i\psi} \quad (5.6)$$

式中, Y 为无量纲几何形状因子; σ 为反映外载大小的应力幅度; L 为裂纹特征长度; 而 $\psi = \arg[KL^{\psi}]$ 为外载混合度, Y, σ, L, ψ 均为实值。

② $\Sigma_{ij}^I, \Sigma_{ij}^{II}$ 和 Σ_{ij}^{III} 均为随 θ 变化的实型角分布函数。 Σ_{ij}^I 与 Σ_{ij}^{II} 还与 ε 有关, 当 $\varepsilon=0$ 时 (此时 $\beta=0$ 但 α 不一定为零) 它们趋于均匀材料的 I 型与 II 型角分布函数。面内角分布函数的形式已在文献中给出^[25,26], 并按 $\Sigma_{22}^I(0) = \Sigma_{12}^I(0) = 1$ 来归一化。其极坐标分量为

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{rr}^I &= -\frac{\sinh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin\theta \right) \\ \Sigma_{\theta\theta}^I &= \frac{\sinh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin\theta \right) \\ \Sigma_{r\theta}^I &= \frac{\sinh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{3}{2}\theta + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin\theta \right) \\ \Sigma_{rr}^{II} &= \frac{\cosh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin\theta \right) \\ \Sigma_{\theta\theta}^{II} &= -\frac{\cosh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin\theta \right) \\ \Sigma_{r\theta}^{II} &= \frac{\cosh\varepsilon(\pi-\theta)}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh\pi\varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

而 III 型角分布函数与均匀材料相同。 Σ_{ij}^I 与 Σ_{ij}^{II} 的离面剪应力分量均为零。对平面应变问题, $\Sigma_{33}^{I,II} = \nu(\Sigma_{rr}^{I,II} + \Sigma_{\theta\theta}^{I,II})$; 对平面应力问题, 离面正应力为零。

③若考察沿界面的正应力分布, 则由式(5.4)中第一式可得

$$\begin{aligned} \sigma_{22} |_{\theta=0} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{Kr^{\psi}}{\sqrt{2\pi r}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [\operatorname{Re}[K] \cos(\varepsilon \ln r) - \operatorname{Im}[K] \sin(\varepsilon \ln r)] \quad (5.8) \end{aligned}$$

式(5.8)中方括号外面的因子当 r 趋于零时为奇异, 而方括号内部的因子当 r 趋于零时呈振荡无定, 因此应力在裂纹尖端具有振荡奇异性。

④裂纹表面的张开位移可写为

$$\delta = \delta_2 + i\delta_1 = \frac{1}{(1 + 2i\varepsilon)\cosh \pi\varepsilon} \frac{4K\tau^{\mu^*}}{E^*} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (5.9)$$

$$\delta_3 = \frac{2K_I}{\mu^*} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}$$

式中

$$\frac{2}{E^*} = \frac{1}{E^{(1)}} + \frac{1}{E^{(2)}} \quad , \quad \frac{2}{\mu^*} = \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \quad (5.10)$$

而 E' 的含意同式(1.7)后的解释。由于因子 $r^{\nu} = \cos(\varepsilon \ln r) + i \sin(\varepsilon \ln r)$ 的存在, δ_2 和 δ_1 当 r 趋于零时正负无定, 裂纹上下两岸的位移呈部分相互贯穿。

应力振荡性和位移相互贯穿均是病态解的象征。这些病态行为的出现使界面裂纹尖端奇异场成为从 1959 至 1988 年间长达 30 年的一个疑题, 极大地阻碍了界面断裂研究的进展。

有趣的是: 尽管裂尖应力场和裂纹张开位移都具有病态特征, 其能量释放率却是适定的, 并可以表达为

$$G = \frac{1}{\cosh^2 \pi\varepsilon} \frac{|K|^2}{E^*} + \frac{K_I^2}{2\mu^*} \quad (5.11)$$

5.2.3 小范围接触理论

为消除界面裂纹尖端场的病态, 曾提出许多修正方案。其中较著名的是 Comninou^[27] 接触区模型, 该模型认为界面裂纹顶端总存在一个接触区(远场为拉应力时亦为如此), 并由接触应力来消除裂纹前方的应力振荡与裂纹顶端的位移相互贯穿。

该模型尽管消除了解的病态, 却存在着下述概念和应用上的缺陷:

① 裂纹尖端场恒为 I 型, 既与实验情况不符, 又不能反映断裂混合度的影响。

② 在远场受拉应力的界面断裂实验中未能证实裂尖处有接触。

③ 应力不连续。在裂尖后方的闭合正应力当趋于裂尖时为奇

异,而裂尖前方的正应力的奇异性却被人为地消除。因此,从两个方向趋向裂尖时正应力不连续。

Rice^[28]在1988年提出了小范围接触(small scale contact)理论来绕过裂尖病态场这一误区。他首先由式(5.9)及 $KL^{\epsilon} = |K|e^{\epsilon}$ 来得到下述法向张开位移的表达式

$$\delta_2 = |\delta| \cos \left(\phi - \tan^{-1} 2\epsilon - \epsilon \ln \frac{L}{r} \right) \quad (5.12)$$

由上述未加接触修正的法向张开位移可估算出第一次接触的尺度 $r_{\text{接}}$

$$\delta_2|_{r=r_{\text{接}}} = 0 \quad (5.13)$$

若 $\epsilon > 0$, 可由式(5.12)和式(5.13)确定出 $r_{\text{接}}$ 为

$$r_{\text{接}} = L \exp \left[- \frac{\frac{\pi}{2} + \phi - \tan^{-1} 2\epsilon}{\epsilon} \right] \quad (5.14)$$

若 $\epsilon < 0$, 只需将上式中的 $\frac{\pi}{2}$ 换为 $-\frac{\pi}{2}$ 即可。由表 5.1 和图 5.5 可知, 对准静态裂纹 ϵ 只有百分之几。因此, 式(5.14)中指数函数所作用的方括号内的量为一个大负数, 导致 $r_{\text{接}}$ 远小于 L 。举例说明: 若 $L = 10\text{mm}$, $|\phi| < 45^\circ$, $|\epsilon| < 0.03$, 则 $r_{\text{接}}$ 小于 1\AA ! 大多数双材料受低外载混合度加载时 $r_{\text{接}}$ 均很小, 它们的界面断裂行为均可由“小范围接触”来表征。类似于小范围屈服理论, 我们可以绕过接触区, 而研究其外域 K 环带应力场的行为。

小范围接触这一概念上的突破引起近年来界面断裂研究的飞速发展, 其优点在于避开了裂尖顶部的细节, 且 K 环带应力场的控制参数基本准确。但该理论仍无法解释下述问题:

①若 ϵ 值较大会出现什么情况? 在第 5.5 节中我们将证明当裂纹沿界面按下瑞利波速分层时, ϵ 值在理论上趋于无穷, 见 Yang, Suo 与 Shih^[29]。这时显然不能简单地使用小范围接触的概念。

②究竟在裂纹尖端有没有接触? 大变形理论给出没有应力振荡性和位移相互贯穿的解, 但应用较复杂。第 5.7 节所介绍的界面

层断裂理论(参见 Delale 与 Erdogan^[30], Yang 与 Shih^[31])给出具有正常 $r^{-\frac{1}{2}}$ 奇异性的解。

5.3 各向异性双材料——Stroh 列式

本节进一步讨论弹性各向异性双材料的情况。各向异性材料的本构关系可写为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.15)$$

式中四阶弹性张量 C_{ijkl} 具有 Voigt 对称性。对具有平直裂纹前缘的问题,可采用 Lekhnitskii-Eshelby-Stroh 列式来方便地进行求解(参见 Suo^[32])。Stroh^[33]将这一方法升华为数学上完美的形式。引入多个复变量

$$z_q = x_1 + p_q x_2 \quad q = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

p_1, p_2, p_3 为虚部大于等于零的非重特征根。于是,位移场 u_i 和任一弧线上的合力 T_i 均可由三个解析函数 $f_j (j=1, 2, 3)$ 的线性组合表示

$$u_i = 2\text{Re} \sum_{q=1}^3 A_{iq} f_q(z_q), \quad T_i = 2\text{Re} \sum_{q=1}^3 L_{iq} f_q(z_q) \quad (5.17)$$

而应力张量与 T_i 的关系为 $\sigma_{11} = -T_{1,2}$, $\sigma_{21} = T_{1,1}$ 。在准静态扩展的裂纹尖端区域,各向异性材料的 Navier 方程为

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.18)$$

将式(5.17)的第一式代入式(5.18),可得下述特征根问题

$$\sum_{q=1}^3 [C_{11q1} + p_q(C_{11q2} + C_{21q1}) + p_q^2 C_{21q2}] A_{iq} = 0 \quad (5.19)$$

为得到 A_{iq} 的非平凡解,上式中的系数行列式必需为零,由此得到确定特征根 p_q 的二次多项式

$$\det \{ C_{11q1} + p_q(C_{11q2} + C_{21q1}) + p_q^2 C_{21q2} \} = 0 \quad (5.20)$$

对应变能为正定的情况, p_q 为 3 对共轭复数,可取虚部为正的 3 个。由式(5.19)还可得到 A 矩阵的比例结构,但其归一化方式却是任意的。

Stroh^[33]证明:下述矩阵

$$B = iAL^{-1} \quad (5.21)$$

是正定的赫米特矩阵,且不随 A 阵的归一化方式不同而变化。由界面两侧材料的矩阵 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$,可构造界面矩阵 H 为

$$H = B^{(1)} + \bar{B}^{(2)} \quad (5.22)$$

这里上方加杠表示复共轭。 H 是正定的赫米特矩阵,它确定沿界面的断裂行为。

若材料性质对 $x-y$ 平面具有镜面反射对称性,则方程(5.18)可解耦为反平面剪切问题和平面应变问题。利用复变函数的解析延拓性质、界面连续条件和裂纹面自由条件,可得下述边界特征根问题^[32,34]

$$\bar{H}\omega_q = e^{2\alpha}\omega_q, \quad q = 1, 2, 3 \quad (5.23)$$

式中,3个特征对可由 (ε, ω) , $(-\varepsilon, \bar{\omega})$, $(0, \omega_3)$ 表示。在双各向异性条件下,振荡指数 ε 的表达式仍具有式(5.2)的形式,但 β 为广义 Dundurs 参数,其表达式为

$$\beta = -\sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}\{[\text{Im}H(\text{Re}H)^{-1}]^2\}} \quad (5.24)$$

双各向异性材料的裂纹尖端场仍具有式(5.5)的形式,但角分布函数的表达式较为复杂。特征向量 ω 为复向量,而 ω_3 为实向量。界面力 $t_i = \sigma_{2i}|_{\theta=0}$ 沿特征向量的分解式为

$$t = t\omega + \bar{t}\bar{\omega} + t_3\omega_3 \quad (5.25)$$

式中, t 为复值而 t_3 为实值,其定义分别为

$$t(r) = \frac{K_I r^{3/2}}{\sqrt{2\pi r}} \quad t_3(r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.26)$$

注意对双各向异性材料,一般来讲 t 不等于 $\sigma_{22} + i\sigma_{21}$, t_3 也不等于 σ_{32} 。式(5.25)和式(5.26)给出了特征向量 ω 和 ω_3 的归一化。

考虑以下两种基本情况。

① H 为实矩阵。均匀材料和对称倾侧晶界均属于这种特殊情况。此时有

$$\bar{H} = H \Rightarrow \varepsilon = 0 \quad (5.27)$$

式(5.5)退化为均匀各向异性材料的裂纹解。

② H 为复矩阵。此时 ε 不为零,由式(5.2)和式(5.24)给出,对共排正交各向异性双材料(aligned orthotropic bimaterials)的特例,可得更进一步的结果。此时与平面问题有关的弹性常数为

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

上式沿用了文献中常用的弹性张量的 6×6 矩阵记法。将式(5.28)代入式(5.19)、式(5.17)、式(5.21)和式(5.22)可得到矩阵 A 、 L 、 B 和 H 的表达式,详细过程可参见 Suo^[32]。其面内赫米特矩阵具有下述形式

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & -iH_{12} & 0 \\ iH_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

式中, $H_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) 和 H_{33} 均为实数。将式(5.29)代入式(5.24)可得广义 Dundurs 参数 β 为

$$\beta = \frac{H_{12}}{\sqrt{H_{11}H_{22}}} \quad (5.30)$$

将式(5.29)代入特征方程(5.23)可得特征向量为

$$\omega^1 = \frac{1}{2} \{-i\eta, 1, 0\} \quad \omega^2 = \{0, 0, 1\} \quad (5.31)$$

式中

$$\eta = \sqrt{H_{22}/H_{11}} \quad (5.32)$$

为界面力分解因子。由式(5.31)和式(5.25)可得

$$t = \sigma_{22} + i\sigma_{12}/\eta, \quad t_3 = \sigma_{32} \quad (5.33)$$

在材料各向异性的影响下,投影于面内特征向量上的广义界面力向量 t 与实际界面力向量的水平分量相差因子 η 。对共排正交各向异性双材料,还可以算出其裂纹张开位移的表达式为

$$\delta_2 + i\eta\delta_1 = \frac{2H_{22}K\tau^0}{(1 + 2i\varepsilon)\cosh \pi\varepsilon} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \quad \delta_3 = H_{33} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (5.34)$$

而能量释放率为

$$G = \frac{H_{22}}{4\cosh^2\pi\varepsilon} |K|^2 + \frac{H_{33}}{4} K_3^2 \quad (5.35)$$

对各向同性的特例,有

$$H_{11} = H_{22} = \frac{4}{E^*}, \quad H_{33} = \frac{2}{\mu^*} \quad (5.36)$$

这时 $\eta=1$, 而式(5.34)与式(5.35)退化为式(5.9)与式(5.11)。

5.4 断裂混合度与界面断裂曲线

5.4.1 断裂混合度

界面断裂奇异场的病态特征妨碍了力学家们对断裂混合度(fracture mode mixity)的认识。Rice^[28]在提出小范围接触概念的同时重新阐述了混合度的观念。下面以共排正交各向异性双材料为例来加以说明,这时界面力向量的表达式见式(5.33)。若将广义界面力向量写为

$$t = |t|e^{i\psi} = \frac{Kr^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.37)$$

则将式(5.6)代入后可得

$$\psi_r = \psi - \varepsilon \ln \frac{L}{r} \quad (5.38)$$

由此可见,界面力向量的幅角 ψ_r 随裂尖距离 r 的变化而变化。对平面问题,若 $\varepsilon \neq 0$, 只可能有混合型断裂而无法造成纯 I 型或纯 II 型断裂。常取

$$\varepsilon^* = \frac{180}{\pi} \varepsilon \ln 10 \quad (5.39)$$

来衡量幅角变化的速度。 ε^* 为距裂尖距离变化 10 倍时以角度计量的幅角变化。例如:当 $\varepsilon=0.05$ 时,有 $\varepsilon^* \approx 6.6^\circ$ 。

$\varepsilon=0$ 时的混合度可由界面力向量 $\sigma_{2i}|_{\theta=0}$ 在界面应力空间的两个夹角 ψ 和 ϕ 来确定

$$\tan \psi = \left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \right)_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}}, \quad \cos \phi = \left(\frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2}} \right)_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \quad (5.40)$$

由 $\varepsilon=0$ 时的裂尖渐近场表达式, 上式可等价地表示为

$$\tan \psi = \frac{K_{II}}{K_I}, \quad \cos \phi = \frac{K_{III}}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2}} \quad (5.41)$$

上述断裂混合度的定义见图 5.6(a), 该定义与均匀材料的断裂混合度定义相同。

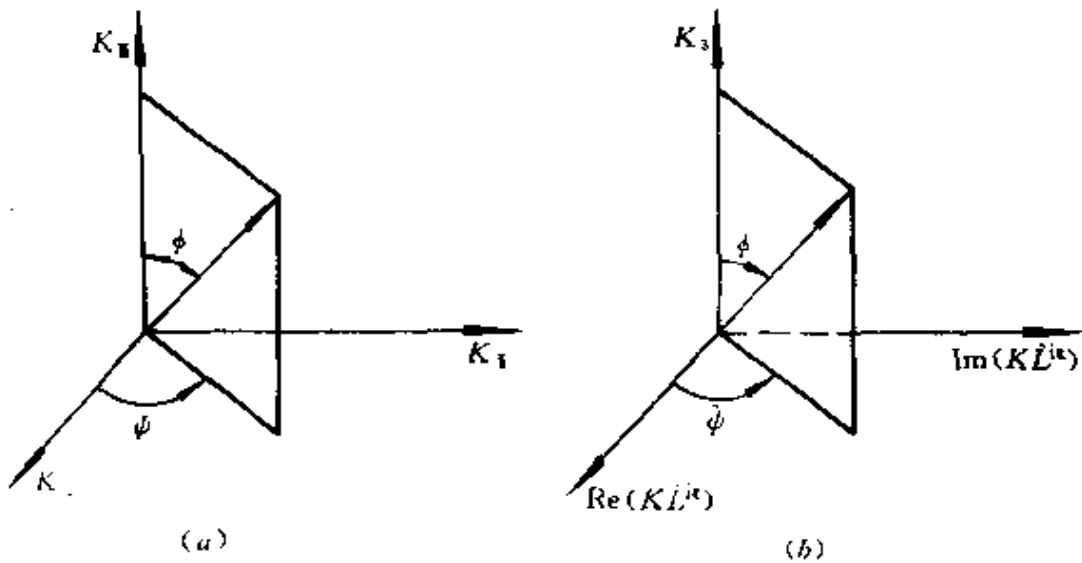


图 5.6 断裂混合度的 K 空间夹角定义

(a) $\varepsilon=0$; (b) $\varepsilon \neq 0$ 。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 可利用某一特征长度 \hat{L} 来定义断裂混合度

$$\left. \begin{aligned} \tan \hat{\psi} &= \left(\frac{\sigma_{21}}{\eta \sigma_{22}} \right)_{\substack{r \rightarrow \hat{L} \\ \theta = 0}} \\ \cos \phi &= \left(\frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2}} \right)_{\substack{r \rightarrow \hat{L} \\ \theta = 0}} \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

将式(5.33)与式(5.37)代入上式可得

$$\left. \begin{aligned} \tan \hat{\psi} &= \arg(K\hat{L}^{i*}) \\ \cos \phi &= \frac{K_{III}}{\sqrt{|K|^2 + K_{III}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

该定义在 K 空间的表示可参见图 5.6(b)。由式(5.43)还可以进一步导出

$$\hat{\psi} = \phi - \varepsilon \ln \frac{L}{\hat{L}} \quad (5.44)$$

\hat{L} 可为任意长度,但在应用时一经选定,便要对该双材料保持定值。对脆性界面,常取 $\hat{L}=0.1\text{mm}$ 。在不同参照长度 \hat{L}_1 与 \hat{L}_2 下的断裂混合度 $\hat{\psi}_1$ 与 $\hat{\psi}_2$ 可按下述平移法则进行换算

$$\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1 = \varepsilon \ln \frac{\hat{L}_2}{\hat{L}_1} \quad (5.45)$$

5.4.2 界面断裂曲线

由能量释放率的表达式(5.35)可建立下述断裂准则

$$G = \frac{H_{22}}{4\cosh^2 \pi \varepsilon} |K|^2 + \frac{H_{33}}{4} K_{\perp}^2 = \Gamma(\hat{\psi}, \phi) \quad (5.46)$$

上式右端的 Γ 又称为界面断裂韧性。对确定的材料对, Γ 与混合度 $\hat{\psi}, \phi$ 有关。对平面问题,式(5.46)简化为

$$G = \frac{H_{22}}{4\cosh^2 \pi \varepsilon} |K|^2 = \Gamma(\hat{\psi}(\hat{L})) \quad (5.47)$$

上式中显式表达了断裂混合度 $\hat{\psi}$ 对参照长度 \hat{L} 的依赖关系。

$\Gamma(\hat{\psi}(\hat{L}))$ 称之为界面断裂曲线。 Γ 对混合度的依赖极大,对某些材料可高达一个量级。图 5.7 绘出了 Liechti 与 Chai^[35] 对环氧/玻璃界面所测的界面韧性曲线。由图可见,由改变加载的混合度可大幅度地改变界面断裂韧性。

5.4.3 界面断裂试件

用来测量界面断裂韧性曲线的试件有两类:①可改变断裂混合度的试件;②固定断裂混合度的试件。

前者的例子包括图 5.8(a)所示的巴西盘试件和图 5.8(b)所示的非对称四点弯曲梁试件。改变巴西盘试件的倾角 θ ,或改变非对称四点弯曲梁试件的载荷偏置可改变断裂混合度。其详细关系已由 Hutchinson 与 Suo^[1] 做出标定曲线。

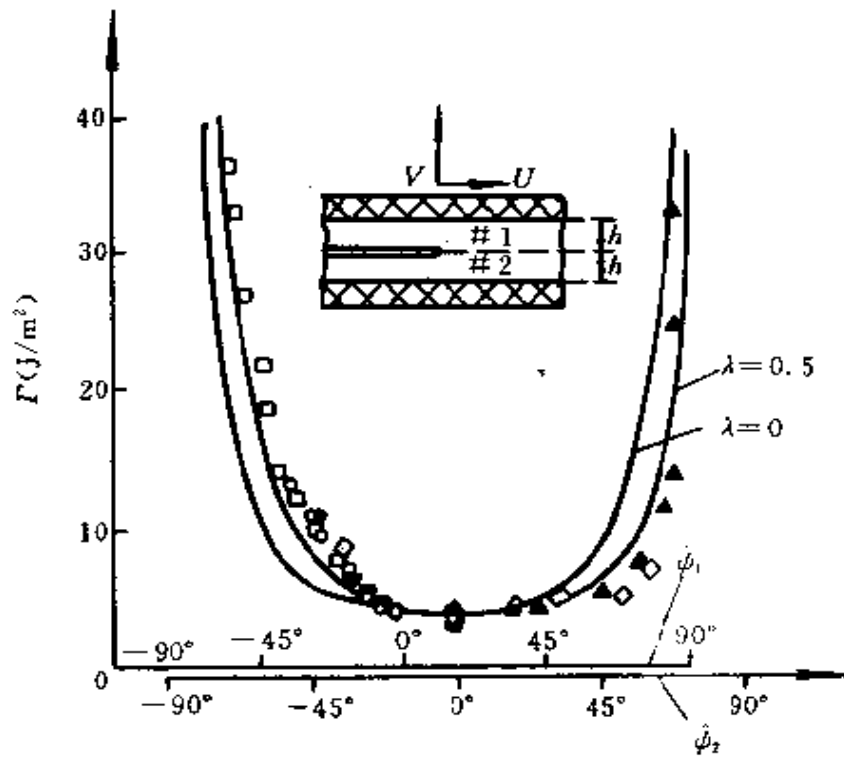


图 5.7 环氧/玻璃双材料的界面断裂韧性曲线

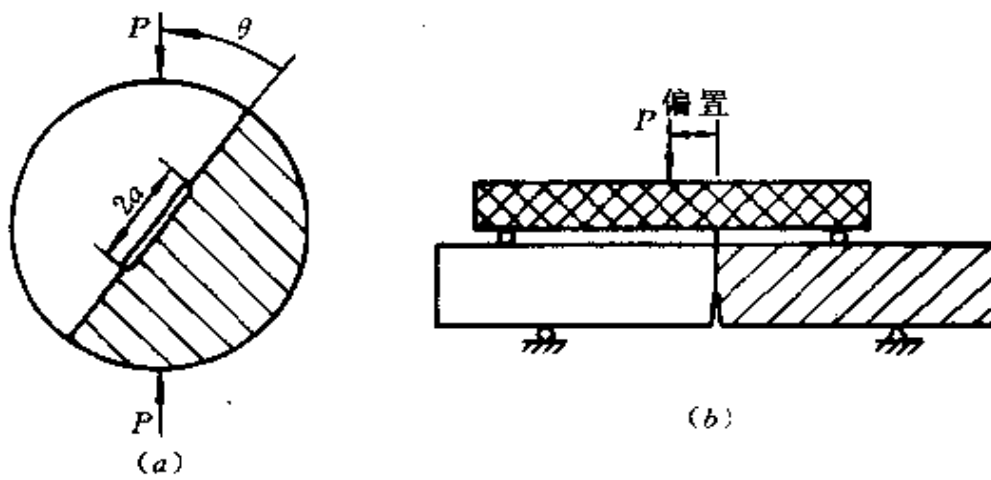


图 5.8 变混合度界面断裂试件
(a)巴西盘；(b)非对称四点弯曲梁。

图 5.9 中给出复合材料层板的三种定混合度界面断裂韧性试件。在 \hat{L} 为 0.1mm 时,其混合度分别为 $\hat{\psi} \approx 0^\circ, 40^\circ, 90^\circ$ 。

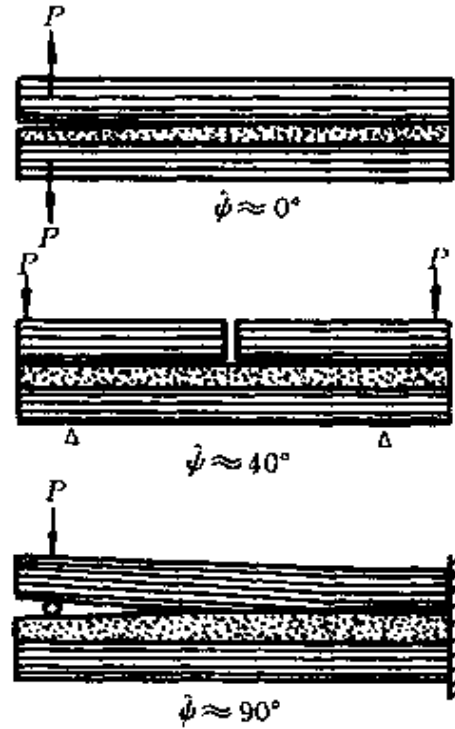


图 5.9 复合材料层合板定混合度界面断裂试件

5.5 亚音速分层力学

我们进而讨论动态界面断裂过程。本节针对于亚音速分层,即界面断裂速度低于下瑞利波速。对该问题的完整阐述参见 Yang, Suo, Shih^[29]的论文。

5.5.1 局部稳态解

如图 5.10 所示,动态扩展裂纹尖端局部场近似为定常态(亦参见第 1.9 节的论述)。这时 Navier 方程(5.18)仍形式上成立,仅需将材料“弹性”张量修改为

$$\hat{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \rho v^2 \delta_{\beta\gamma} \delta_{1\alpha} \delta_{1\delta} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.48)$$

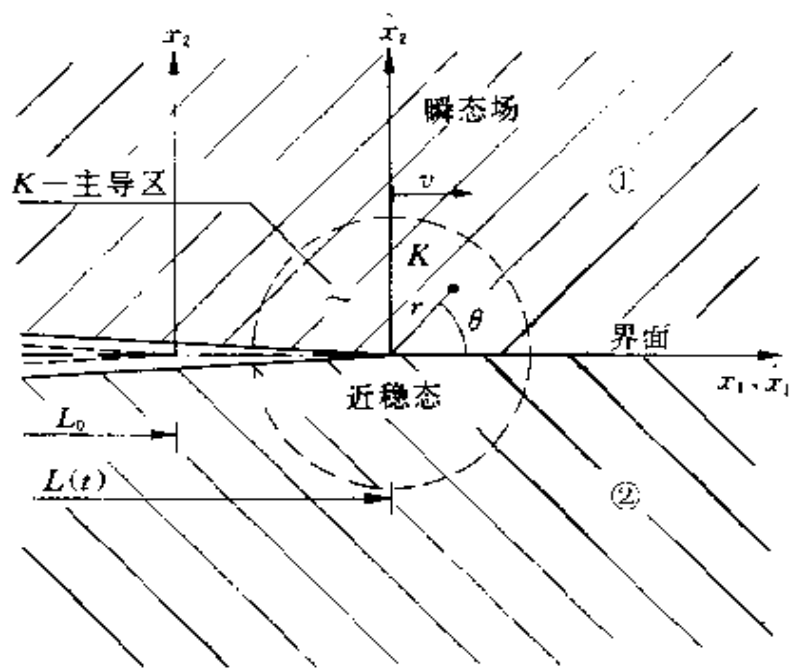


图 5.10 动态分层裂纹尖端局部场

式中, ρ 为材料密度; v 为界面断裂速度。将 \hat{c} 替代 c 代入式 (5.19) 和式 (5.20), 可得矩阵 A 与特征根 p 的值。对由式 (5.28) 所描述的共排正交各向异性双材料, 经较长代数运算可得面内问题的特征根为

$$p_1, p_2 = \begin{cases} i \sqrt{\xi} \left[\sqrt{\frac{s+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{s-1}{2}} \right] & \text{若 } s \geq 1 \\ \sqrt{\xi} \left[\pm \sqrt{\frac{1-s}{2}} + i \sqrt{\frac{1+s}{s}} \right] & -1 < s < 1 \end{cases} \quad (5.49)$$

式中

$$\xi = \alpha_1 \alpha_2 \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}, \quad s = \frac{C_{66}^2 \alpha_2^2 + C_{11} C_{22} \alpha_1^2 - (C_{55} + C_{12})^2}{\sqrt{C_{11} C_{22} C_{66} \alpha_1 \alpha_2}} \quad (5.50)$$

而 α_1, α_2 的定义与式 (1.147) 相同。这时矩阵 A 可简单表达为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{C_{12} + C_{66}}{p_2(C_{11}\alpha_1^2 + C_{66}p_1^2)} \\ -\frac{C_{11}\alpha_1^2 + C_{66}p_1^2}{C_{12} + C_{66}}p_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

在定常扩展的条件下,应力与 T_i 的关系为

$$\sigma_{1i} = -T_{i,2} + \rho v^2 u_{i,1}, \quad \sigma_{2i} = T_{i,1} \quad (5.52)$$

综合式(5.15)、式(5.17)和式(5.52)可得到矩阵 L 的表达式。再将其代入式(5.21)可得

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} C_{22}\alpha_s^2 \sqrt{\frac{2(1+s)}{\xi}} & i\left(C_{22} - C_{12} \frac{\alpha_s^2}{\xi}\right) \\ -i\left(C_{22} - C_{12} \frac{\alpha_s^2}{\xi}\right) & C_{22} \sqrt{2\xi(1+s)} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

式中, R 为广义瑞利波函数

$$R = C_{22}[C_{22}\xi - C_{66}(1 - \alpha_s^2)] - C_{12}^2 \frac{\alpha_s^2}{\xi} \quad (5.54)$$

瑞利波速 C_R 可由 $R=0$ 解出。由式(5.53)显而易见, \mathbf{B} 是一个赫米特阵。

将式(5.53)代入式(5.22),可得界面赫米特阵 \mathbf{H} 。在该赫米特阵下,第 5.3 节和第 5.4 节的全部结果均可以用于亚音速分层。此外,裂纹尖端应力奇异场式(5.5)亦适用于亚音速分层,但应力角分布函数 Σ_{ij}^I , Σ_{ij}^{II} 与 Σ_{ij}^{III} 依赖于分层速度。对各向异性双材料, Yang 等^[29]给出了应力角分布函数的闭式表达。

5.5.2 断裂参数的速度依赖性

对亚音速动态分层,所有界面断裂参数均与分层速度 v 有关。当 v 趋于下瑞利波速度 $C_R^{(1)}$ 时, $\mathbf{B}^{(1)}$ 远大于 $\mathbf{B}^{(2)}$, 因此有

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{B}^{(1)} \quad (5.55)$$

将式(5.53)和式(5.55)代入式(5.30)可得^[29]

$$\beta|_{v=C_R^{(1)}} = -1 \quad (5.56)$$

于是进一步由式(5.2)可知:振荡指数 ε 在 $v=c_R^{(1)}$ 时趋于无穷。这一结果说明:在接近下瑞利波时,Rice 的小范围接触理论不再适用。

此外,将式(5.53)和式(5.55)代入式(5.32)可得下瑞利波下的界面力分解因子为

$$\eta \Big|_{v=c_R^{(1)}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^{(1)} C_{11}^{(1)}}{\alpha_2^{(1)} C_{22}^{(1)}}} \quad (5.57)$$

另外一个使人感兴趣的物理量是能量因子 \mathcal{S} , 定义为

$$G = \frac{\mathcal{S}}{4C_{66}^{(1)}} |K|^2 \quad (5.58)$$

式中 \mathcal{S} 表征裂纹尖端奇异场强度转化为流入裂纹尖端能通量的比值。对比式(5.58)与式(5.47)可得

$$\mathcal{S} = C_{66}^{(1)} \left(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}} \right) \quad (5.59)$$

由第 1.9 节的讨论可知:对均匀材料来说,其断裂速度达到瑞利波速时 \mathcal{S} 趋于无穷;表明若在裂尖维持有限大应力强度因子,则需在裂尖流入无限大能量才能达到瑞利波速度。然而,界面断裂的 \mathcal{S} 因子在下瑞利波时却是有限的。文献[29]给出对具有不同对称性的动态分层问题的 $\mathcal{S} \Big|_{v=c_R^{(1)}}$ 值。对双各向同性的特例有

$$\mathcal{S} \Big|_{v=c_R^{(1)}} = \frac{1 - \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(1)} (1 - \alpha_2^{(1)2})} \quad (5.60)$$

这一事实说明动态分层可能超过下瑞利波速度。

为了全面揭示断裂参数的速度依赖性,图 5.11、图 5.12 和图 5.13 中分别展示了 ε , η 和 \mathcal{S} 随 $v/c_R^{(1)}$ 的变化曲线。计算中取各向同性双材料的特例,并将界面上下材料的泊桑比均取为 0.3。双材料的刚度错配比 λ 定义为

$$\lambda = C_{66}^{(2)} / C_{66}^{(1)} \geq 1 \quad (5.61)$$

式中, $\lambda=1$ 相当于均匀材料的特例。图 5.11 从数值上证实了 ε 在下瑞利波时趋于无穷。图 5.13 表明:当 λ 不等于 1 时, \mathcal{S} 在下瑞利波速时有界。

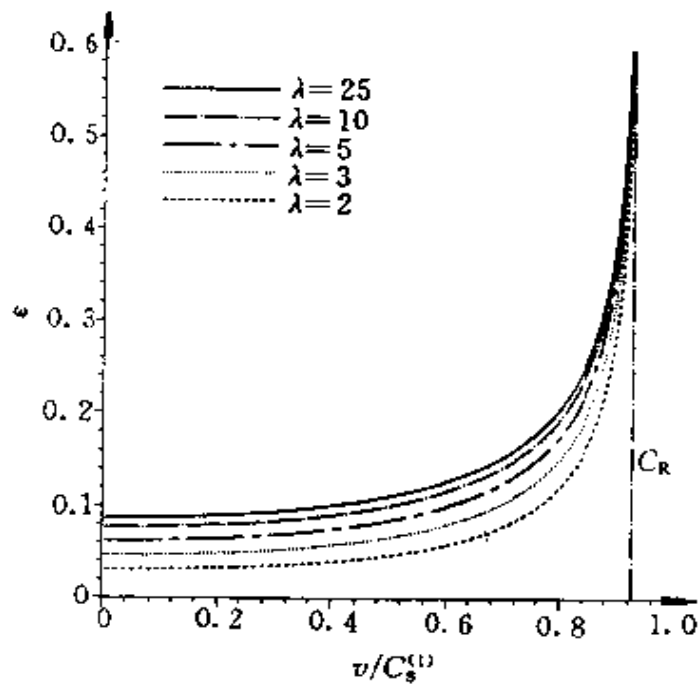


图 5.11 双各向同性材料振荡指数的速度依赖性
 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ 。

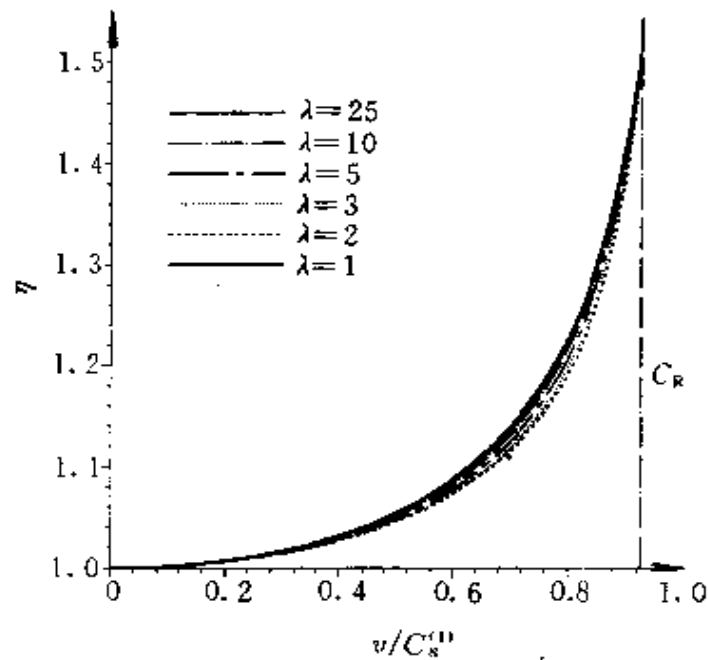


图 5.12 双各向同性材料面力分解因子的速度依赖性
 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ 。

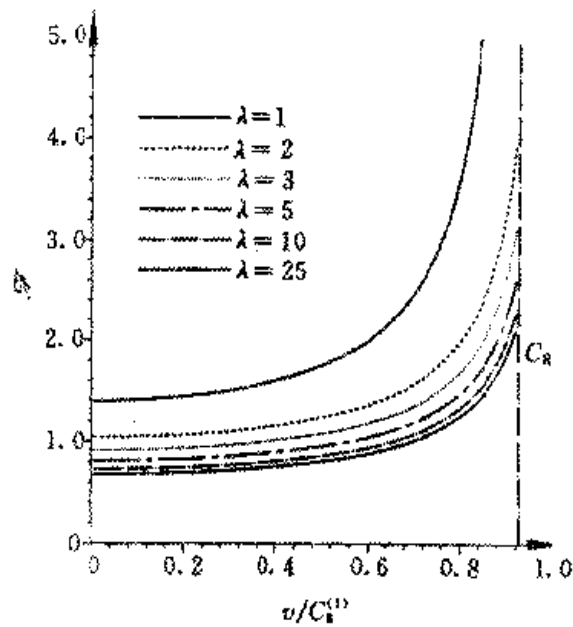


图 5.13 双各向同性材料能量因子的速度依赖性

$$\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3.$$

5.5.3 应力强度因子

在定常分层的条件下,可按下述公式计算平面与反平面问题的应力强度因子^[29]。对半无穷长裂纹有

$$\left. \begin{aligned} K &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cosh \pi \epsilon \int_{-\infty}^0 (-x)^{-\frac{1}{2}-\nu} t(x) dx \\ K_3 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{t_3(x)}{\sqrt{-x}} dx \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

对长度为 $2a$ 的 Yoffe 型裂纹,有

$$\left. \begin{aligned} K &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cosh \pi \epsilon (2a)^{-\frac{1}{2}-\nu} \int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\frac{1}{2}+\nu} t(x) dx \\ K_3 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} t_3(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

作为特例,可运用上述公式去求解动态分层所对应的 Yoffe 问题, Gol'dshtein 问题和 Dugdale 问题,详见文献[29]。在裂尖散射波由

外边界折回裂尖之前,对率无关加载下的动态分层可得到类似于均匀材料 Freund 公式(式(1.162))的结果。对平面问题有^[29]

$$K(l, v) = (vt)^{-\nu_0} [(vt)^{\nu_0} K(l, 0) k_1(v) + (vt)^{-\nu_0} \bar{K}(l, 0) k_2(v)] \quad (5.64)$$

式中, $K(l, 0)$ 是同样裂纹几何在对应静态问题下的应力强度因子; ν_0 是同样双材料在静态问题下的振荡指数; t 为时间。 k_1 与 k_2 为与速度有关, 但与裂纹几何无关的普适函数, 目前尚未能将其解出。对反平面剪切问题, 有

$$K_{\text{II}}(l, v) = k_3(v) K_{\text{II}}(l, 0) \quad (5.65)$$

而反平面普适速度函数 k_3 为^[36]

$$k_3 = \sqrt{1 - \frac{v}{C_s^{(2)}}} \exp \int_{c_s^{(1)}/c_s^{(2)}}^1 \tan^{-1} \left[\frac{\mu^{(2)} C_s^{(1)}}{\mu^{(1)} C_s^{(2)}} \sqrt{\frac{1-s^2}{s^2 - (C_s^{(1)}/C_s^{(2)})^2}} \right] \frac{ds}{s \left(1 - \frac{C_s^{(2)}}{v} s \right)} \quad (5.66)$$

5.6 跨音速分层力学

在 1.9 节中我们曾指出: 若要在裂尖维持有限大应力强度因子且流入裂尖的能通量又为有限时, 则在均匀材料中的裂纹扩展速度应低于瑞利波速度。对分层断裂而言; Yang 等^[29]证明能量因子在下瑞利波速度时为有限量。因此, 从能量角度上无法排除超过下瑞利波速的分层断裂。在 Yang 等^[29]的论文发表后不久, 加州理工学院航空研究实验室就发表了长篇论文^[37] (Liu, Lambros 与 Rosakis, 1993), 通过轻气炮撞击 PMMA/AISI-4340 钢双材料断裂试件而实现了跨音速分层断裂。他们的结果见图 5.14 所示, 分层断裂速度不仅超过了 PMMA 的瑞利波速度, 也超过了 PMMA 的剪切波速度, 而达到其纵波速度的 80% 左右。当分层速度超过下剪切波速度后, 裂纹尖端的动光测变形场出现激波特征。

针对这一实验发现, Yu 和 Yang^[38,39]首次分析了跨音速弹性

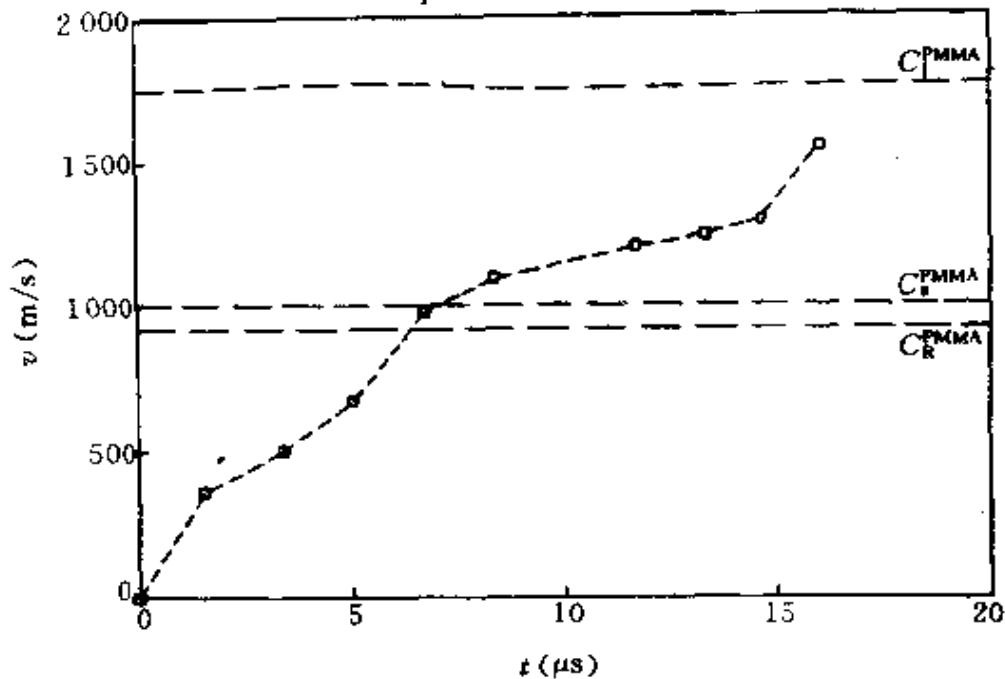


图 5.14 PMMA/AISI-4340 界面裂纹试件在
轻气炮撞击下的分层断裂速度
(引自 Liu, Lambros 与 Rosakis^[37])

分层断裂问题。他们把跨音速分层定义为超过下瑞利波速度,但低于上纵波速度的分层断裂。跨音速断裂涉及到混合型数学方程,即控制方程在不同材料构元内呈不同的椭圆—双曲特征。为了概念上的循环渐进,第 5.6.1 小节介绍反平面剪切问题,第 5.6.2 小节介绍平面问题。为简单起见,以下讨论均针对双各向同性材料,且只分析裂尖附近的定常解。

5.6.1 反平面剪切问题^[38]

考虑如图 5.15 所示反平面剪切问题。材料 1 与 2 的剪切模量和剪切波速分别记为 $\mu^{(1)}, C_s^{(1)}$ 和 $\mu^{(2)}, C_s^{(2)}$ 。不失一般性,假定 $C_s^{(1)} < C_s^{(2)}$ 。对跨音速分层来说,分层速度 v 大于 $C_s^{(1)}$ 但小于 $C_s^{(2)}$ 。这时上半平面的控制方程为双曲型而下半平面的控制方程为椭圆型,分别为

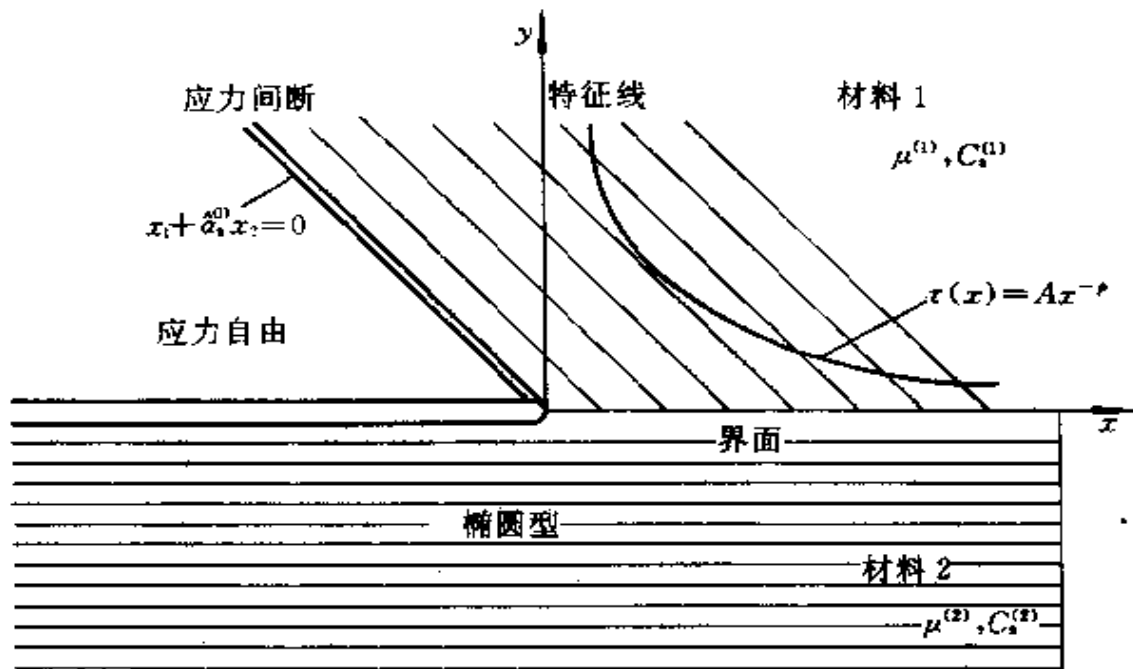


图 5.15 反平面剪切下跨音速断裂场特征

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_s^{(1)} u_{3,11} - u_{3,22} &= 0 & x_2 > 0 \\ \alpha_s^{(2)} u_{3,11} + u_{3,22} &= 0 & x_2 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s &= \sqrt{1 - (v/C_s)^2} \\ \hat{\alpha}_s &= \sqrt{(v/C_s)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

式(5.67)中第一个方程具有特征线解。对跨音速分层断裂,可以证明只存在图 5.15 所示的一族后掠特征线。图中射线 $x_1 + \hat{\alpha}_s^{(1)} x_2$ 为应力间断线,在该间断线与裂纹面之间的楔形区域内的应力为零。

联立求解混合型控制方程(5.67),并利用界面连结及裂纹面自由条件可得下述关于界面剪应力 $\tau = \sigma_{32}(x_1, 0)$ 的积分方程

$$\frac{\mu^{(1)} \hat{\alpha}_s^{(1)}}{\pi \mu^{(2)} \alpha_s^{(2)}} \int_0^\infty \frac{\tau(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = \tau(x_1) \quad x_1 > 0 \quad (5.69)$$

该方程是具有柯西型奇异核的 Winer-Hopf 方程。利用 Hilbert 投影法可解得

$$\tau(x_1) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi}} x_1^{-p}, \quad p = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{\mu^{(1)} \hat{\alpha}_s^{(1)}}{\mu^{(2)} \alpha_s^{(2)}} \quad (5.70)$$

式中, K_3 为反平面剪切问题的应力强度系数。对作用于裂纹面距裂尖恒为 b 的一对反向剪切集中力 T_3 的特例(反平面剪切的 Gol'dstein 问题), 有

$$K_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p\pi}{b^{1-p}} T_3 \quad (5.71)$$

应力场式(5.70)的特征是: 应力奇异性指数 p 取决于材料常数和分层扩展速度。当 v 接近于 $C_s^{(1)}$ 时, 应力奇异性消失; 当 v 超过 $C_s^{(2)}$ 时, 应力奇异性指数 p 约为 $\frac{1}{2}$ 。

下面我们讨论能量传递情况, 如图 5.16 所示。考虑 Freund 和 Hutchinson^[40] 所定义的动力学断裂能流积分

$$F = v \int_{\Gamma} \{ (U + T)n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} \} d\Gamma \quad (5.72)$$

式中, T 为动能; 而积分 F 表示流入围道 Γ 的能通量。当围道 Γ 取包围裂尖的小圆时, 由于应力奇异性 p 一般小于 $\frac{1}{2}$, 可得 $F=0$, 即跨音速分层时裂尖无能量流入。能量从界面下方的椭圆区汇入, 穿过界面, 沿软材料的特征线流向远方。

通过界面从裂尖至 $x_1=x_p$ 点的能量可写为

$$F_p = v \frac{K_3^2}{2\pi(1-2p)\mu^{(1)}\alpha_s^{(1)}} x_p^{1-2p} = F_p(v) \quad (5.73)$$

当 v 刚超过 $C_s^{(1)}$ 时有

$$F_p(C_s^{(1)}) = \frac{x_p}{\sqrt{2\pi}} \frac{C_s^{(1)}}{\mu^{(1)}} \lim_{v \rightarrow C_s^{(1)}} \frac{K_3^2}{\alpha_s^{(1)}} \quad (5.74)$$

当 v 逼近于 $C_s^{(2)}$ 时有

$$F_p(C_s^{(2)}) = \frac{C_s^{(2)}}{4\mu^{(2)}} \lim_{v \rightarrow C_s^{(2)}} \frac{K_3^2}{\alpha_s^{(2)}} \quad (5.75)$$

将式(5.71)中的 K_3 值代入可得 $F_p(C_s^{(1)})$ 趋于零, 而 $F_p(C_s^{(2)})$ 趋于无穷。由此可知, 若流过界面的能量为有界时, 反平面剪切的分层速度不能达到上剪切波速。

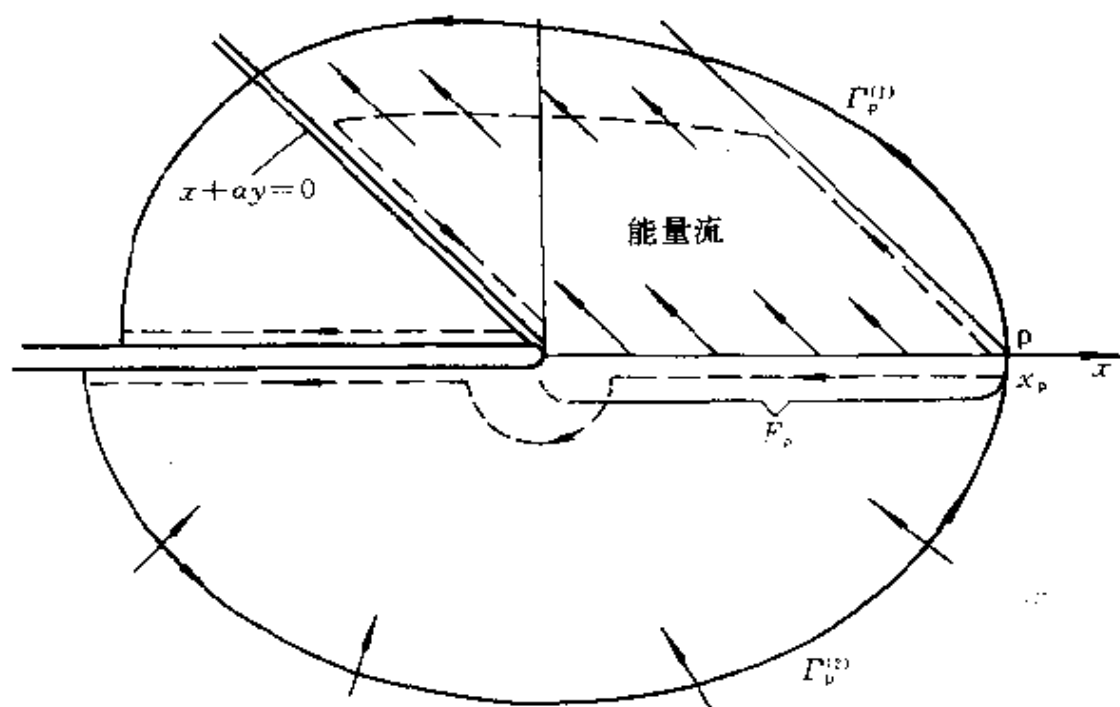


图 5.16 反平面剪切跨音速分层时的能量流通图

5.6.2 平面问题^[39]

平面跨音速分层问题远比反平面剪切问题复杂。按分层速度 v 的范围,可分为如图 5.17 所示的 5 种情况(设 $C_s^{(1)} < C_s^{(2)}$, $C_1^{(1)} < C_1^{(2)}$)。

(1) 振荡分层 $C_R^{(1)} < v < C_s^{(1)}$ 。界面上的控制方程均为椭圆型,其分析由 Liu 等^[37]给出。其应力场具有振荡奇异性。

(2) 剪切跨音速分层 $C_s^{(1)} < v < C_1^{(1)}, C_s^{(2)}$ 。这时材料 1 中的剪切波控制方程为双曲型,而其他控制方程为椭圆型。

(3) 单边跨音速分层, $C_s^{(1)}, C_1^{(1)} < v < C_s^{(2)}$ 。这时材料 1 的控制方程全为双曲型,而材料 2 的控制方程全为椭圆型。

(4) 双侧剪切跨音速分层, $C_s^{(1)}, C_s^{(2)} < v < C_1^{(1)}$ 。这时上下材料的剪切波控制方程均为双曲型,而纵波控制方程均为椭圆型。

(5) 辐射跨音速分层, $C_s^{(1)}, C_1^{(1)}, C_s^{(2)} < v < C_1^{(2)}$ 。这时除材料 2 的

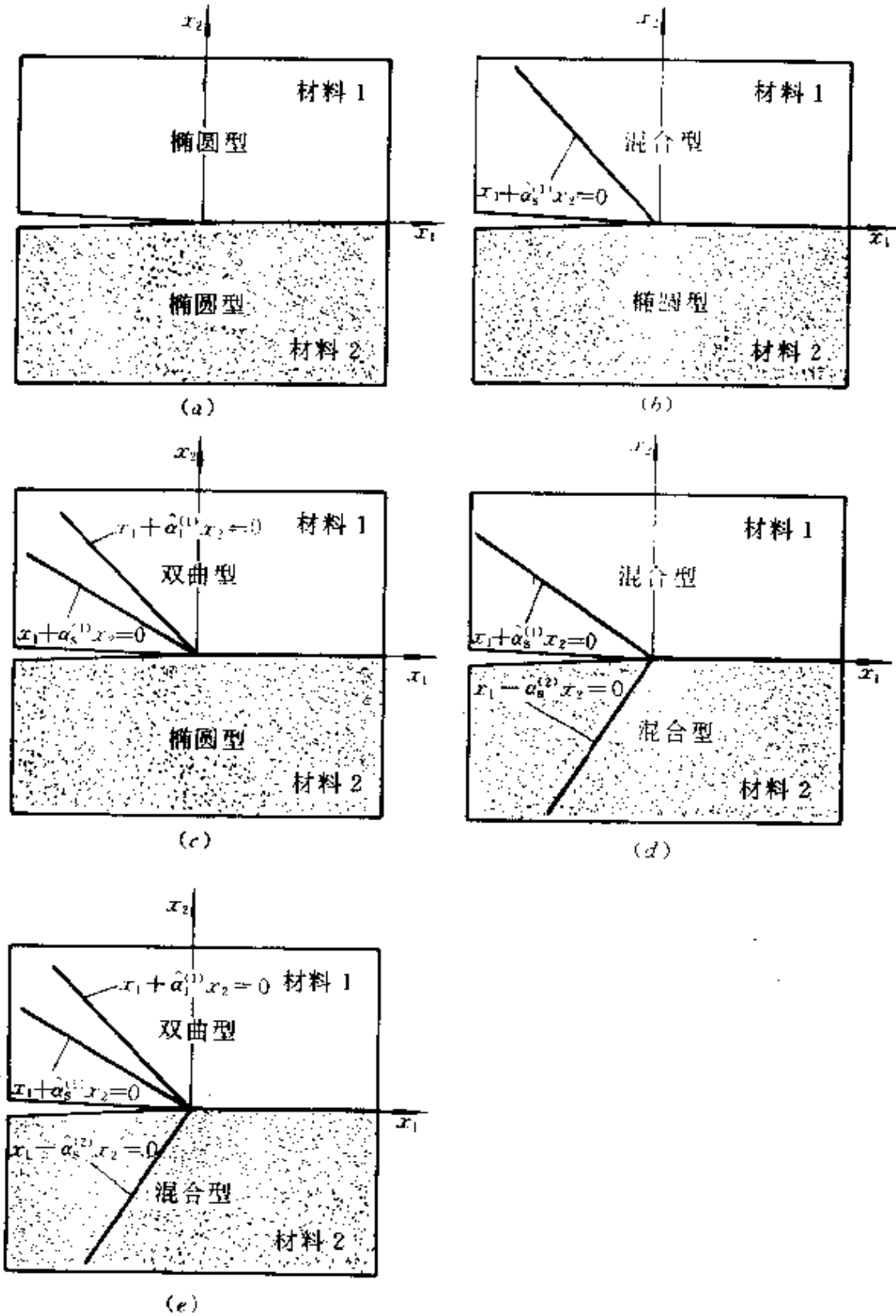


图 5.17 平面跨音速分层特征图

(a) 振荡分层; (b) 剪切跨音速分层; (c) 单边跨音速分层;
 (d) 双侧剪切跨音速分层; (e) 辐射跨音速分层.

纵波方程外,其他的控制方程均为双曲型。

Yu 和 Yang^[39]求解了上述全部 5 种情况。其主要结果可概述如下:

①界面应力 $t_\alpha(x_1) = \sigma_{2\alpha}(x_1, 0)$ ($\alpha = 1, 2$) 可由下述积分方程组求解

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathbf{A}}{\xi - x_1} \begin{bmatrix} t_1(\xi) \\ t_2(\xi) \end{bmatrix} d\xi + \mathbf{B} \begin{bmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.76)$$

式中, 2×2 矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 对不同的分层情况有不同的表达式, 详见文献[39]。

②由界面综合矩阵

$$P = \frac{1}{2\pi i} \ln[(\mathbf{B} + i\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B} - i\mathbf{A})] \quad (5.77)$$

的两个特征根 p_1, p_2 , 以及它们所关联的两个归一化特征向量 ω_1, ω_2 , 可得下述界面力 t 的解

$$t = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} x_1^{-p_1} \omega_1 + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi}} x_1^{-p_2} \omega_2 \quad (5.78)$$

当 p_1 为复数时, K_1 亦为复数, 且这时有 $p_2 = \bar{p}_1, K_2 = \bar{K}_1$ 。 p_1 与 p_2 为界面力的应力指数, K_1, K_2 为应力强度系数。

③对 Liu 等所测试的 PMMA/AISI-4340 钢双材料, 其应力指数 p_1 与 p_2 随分层速度的变化如图 5.18 所示。 p_1 与 p_2 的实部称为奇异性指数, 在图中为实线, p_1 与 p_2 的虚部(记为 ε)称为振荡性指数, 在图中为虚线。该图下方的三幅小图表明了应力指数精微变化的局部放大图。由图中虚线可见应力振荡仅在三个区域内发生: 下瑞利波附近的强振荡, 且在 $v = C_R^{(1)}$ 时 ε 趋于无穷; 下纵波附近的弱振荡; 上瑞利波附近的中强振荡。应力奇异性在亚音速分层时为最高, 以后随分层速度的增加总体呈下降趋势, 但局部有升有降。文献[39]还讨论了应力指数随速度和材料常数的复实转化规律。

④当 p_1, p_2 为实数时, 裂纹尖端的面内应力场可表达为

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_1} \Sigma_{ij}^1(\theta, \nu) + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_2} \Sigma_{ij}^2(\theta, \nu) \quad (5.79)$$

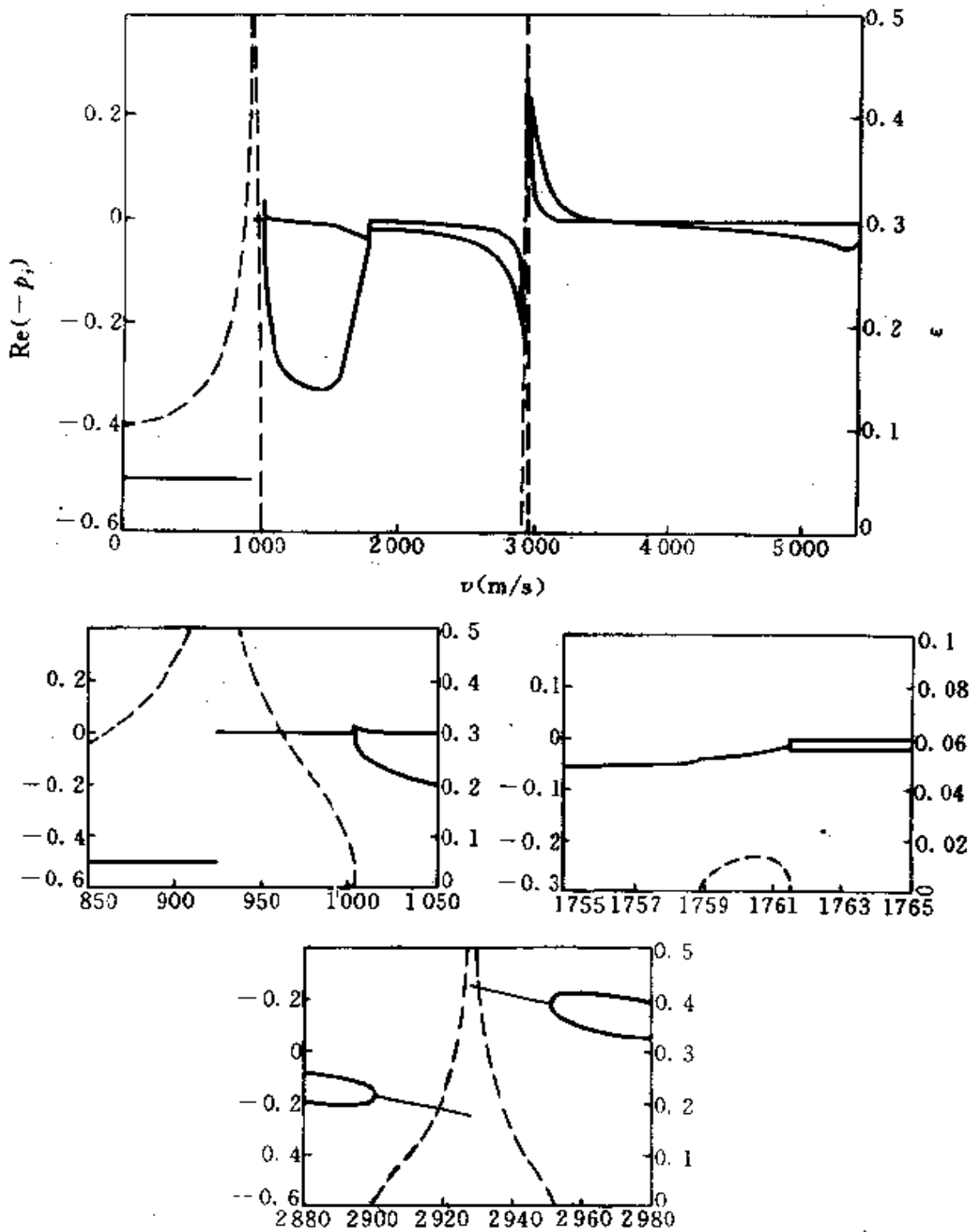


图 5.18 PMMA/AISI-4340 钢双材料平面跨音速分层时
应力指数随分层速度的变化

当 p_1, p_2 为共轭复数 $p \pm iz$ 时, 裂纹尖端的面内应力场可表达为

$$\sigma_{ij} = \frac{r^{\nu}}{\sqrt{2\pi}} \{ \operatorname{Re}(K_1 r^{-\nu}) \Sigma_{ij}^1(\theta, \nu) + \operatorname{Im}(K_1 r^{-\nu}) \Sigma_{ij}^2(\theta, \nu) \} \quad (5.80)$$

上两式中的 $\Sigma_{ij}^{1,2}(\theta, \nu)$ 均为实角分布函数, 其在各个速度区间的表达式在文献[39]中给出。

⑤对含(占据负 x_1 轴)半无穷裂纹的无穷大板构形, 若裂纹表面作用有随裂尖定常移动的面力 t_α ($\alpha=1, 2$), 则对应的应力强度系数可计算为

$$K_\alpha = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(p_\alpha \pi) \int_{-\infty}^0 (-\xi)^{p_\alpha-1} [\omega_1, \omega_2]^{-1} \begin{pmatrix} t_1(\xi) \\ t_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.81)$$

对图 5.19 所示的面内跨音速分层 Gol'dstein 问题, 上式简化为

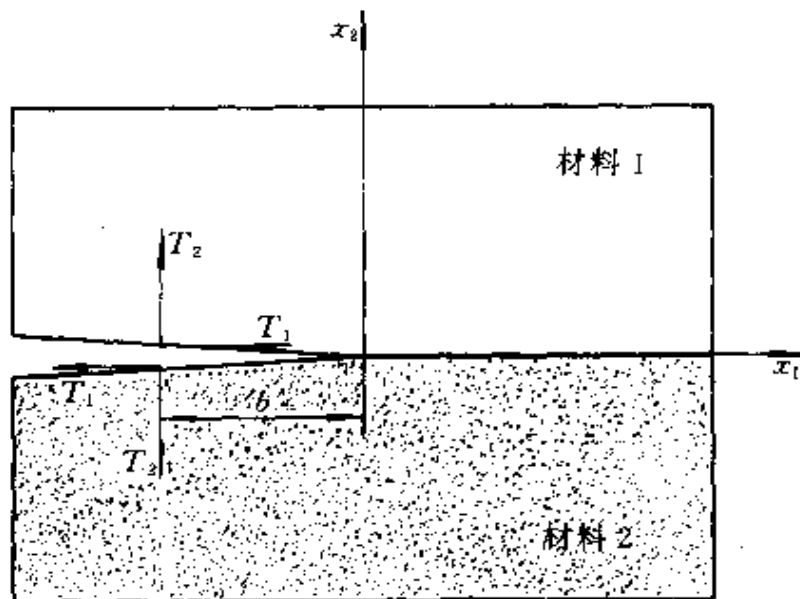


图 5.19 平面跨音速分层的 Gol'dstein 问题

$$K_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(p_\alpha \pi)}{b^{1-p_\alpha}} [\omega_1, \omega_2]^{-1} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

T_1 和 T_2 分别为作用于裂纹面的集中力沿 x_1 与 x_2 方向的分量值。

⑥由分析界面传递的能量可得下述结论:在上瑞利波速度时流过一有限长界面段的能量为无穷。因此,若从物理的原因可排除界面上无穷能量的传递,则平面跨音速分层不可能超过上瑞利波速。作为一项推论,图 5.17 所示的双侧剪切跨音速分层和辐射跨音速分层均不可能发生。

5.7 界面层断裂理论

界面层断裂理论是细观断裂力学取得成功的一个例子。传统的数学界面模型导致近尖端处解的病态,即应力的振荡与位移的相互贯穿。Rice 所提的“小范围接触”模型尽管绕过这一问题,但其断裂混合度的定义(乃至界面断裂准则的建立)却依赖于一个无明确定义的长度量。界面层断裂理论假定从一相至另一相的界面结构呈连续过渡,或界面呈曲折状。于是可用一个物理界面层(或界面相)来代替数学界面。该模型不仅能避免应力振荡、位移相互贯穿等病态行为,还可以唯一确定近尖端断裂混合度,从而为界面层设计,近尖端断裂混合度调控和材料增韧提供了用武之地。

界面层断裂模型曾由 Atkinson^[41], Delale 与 Erdogan^[30] 等人先后提出。Yang^[42], Yang 与 Shih^[31] 将其发展到平面边界层构型,其力学模型见图 5.20 所示。

对具有相同取向的正交各向异性双材料,在界面层内扩展裂纹的尖端场可通过 J 积分来与界面裂纹远场 K 相联系

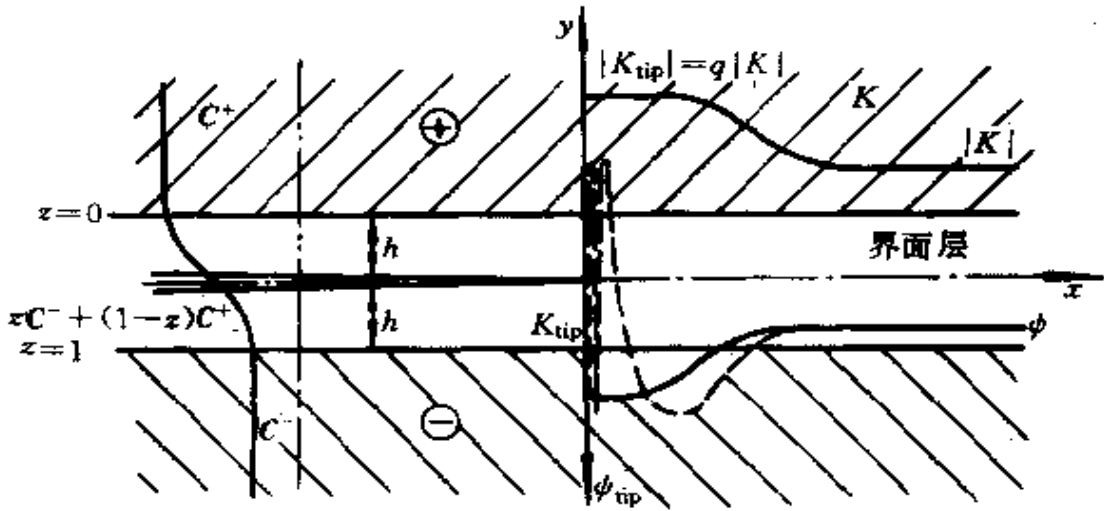
$$K_{\text{tip}} = q e^{i\alpha h} K \quad (5.83)$$

式中, q 为与材料常数有关的能量转换系数,可算出为

$$q = \frac{1}{\cosh \pi \epsilon} \sqrt{\frac{H_{22}}{H_{22}^{\text{up}}}} \quad (5.84)$$

式中, H_{22} 为不考虑界面层过渡时双材料界面赫米特矩阵的“22”分量; H_{22}^{up} 为

$$H_{22}^{\text{up}} = 2 \left[(E_1 E_2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_1}{\mu_{12}} - 2\nu_{12}}} \right]^{\text{up}} \quad (5.85)$$

图 5.20 界面层断裂模型及 K 场的匹配

式中, E_1, E_2 为材料沿 x_1, x_2 方向的拉伸模量; μ_{12} 为 x_1-x_2 平面的剪切模量; $\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_1}{E_2}$ 为泊桑比。式 (5.85) 方括弧处的上标“tip”表示取裂尖处的材料常数。对各向同性双材料的界面层断裂问题, H_{II}^* 简化为 $4/E^{*II}$ 。

式 (5.83) 中的相移位 ω 可由图 5.21 的片层模型按积分平均法加以估算^[31], 图中 $z(y)$ 表示材料性质从上方材料相性质过渡为下方材料相性质的过渡函数。对各向同性界面层断裂问题, 可写出相移位公式为

$$2\omega = \arg \left[-\frac{1+\alpha}{1-\alpha} e^{2i\omega^+} \int_{-1}^0 y^{2ie} z'(y) dy - e^{2i\omega^-} \int_0^1 y^{2ie} z'(y) dy \right] \quad (5.86)$$

式中, α 为双材料的第 1 Dundurs 参数; e 为振荡指数。函数 ω^+ 与 ω^- 为图 5.22 所示两个辅助问题的相移位函数, 由 Hutchinson, Mear 和 Rice^[43] 给出。 ω^+ 与 ω^- 与 Dundurs 参数有关, 其近似表达式为^[43]

$$\omega^+ \approx \omega^- \approx 0.1584\alpha + 0.0630\beta \quad (5.87)$$

有限元的详细计算^[31]表明式 (5.86) 的精度在 5%~10% 以内。

若取材料过渡函数为

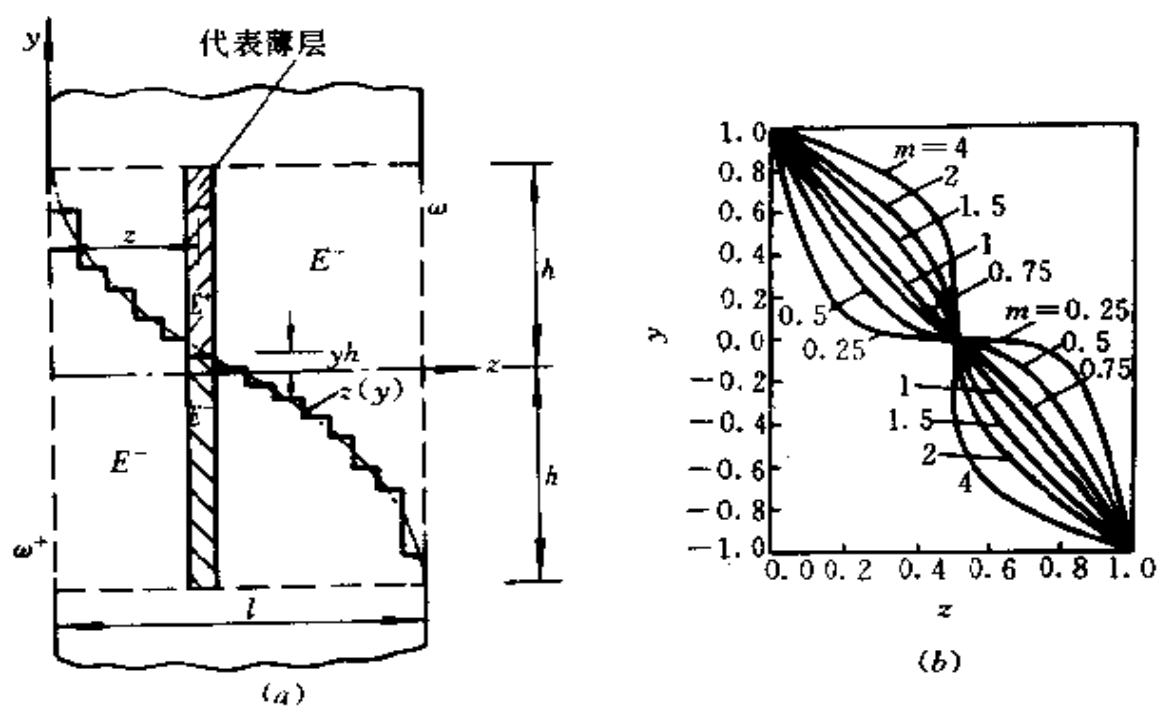


图 5.21 积分平均法求解相移位

(a) 片层模型; (b) 材料过渡函数。

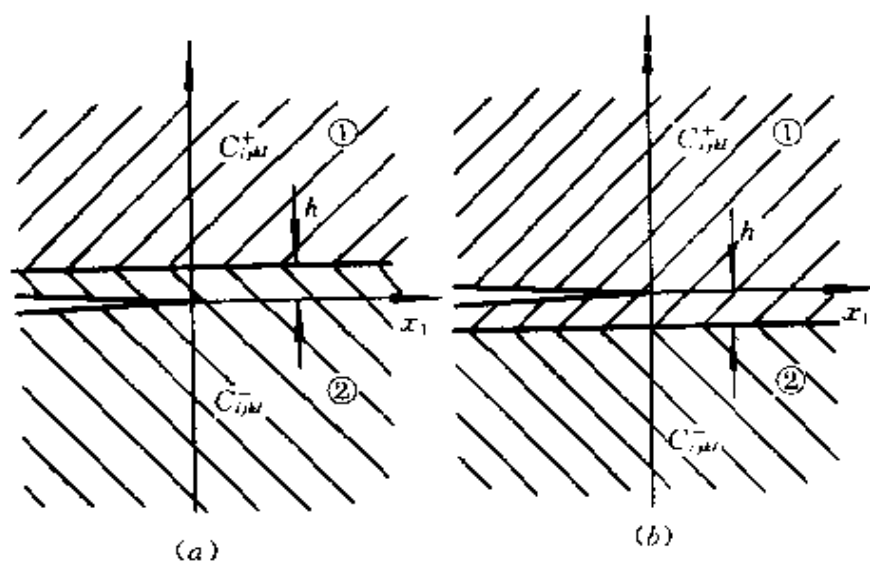


图 5.22 相移位角的两个辅助解

(a) ω^- 情况; (b) ω^+ 情况。

$$z = [1 - \operatorname{sgn}(y)|y|^m]/2 \quad (5.88)$$

则将式(5.87)与式(5.88)代入式(5.86)后可得

$$\omega \approx 0.1584\alpha + 0.0630\beta - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\varepsilon}{m} \quad (5.89)$$

式中,参数 m 代表材料过渡函数的形状,如图 5.21 所示。

上述界面层模型使人们得以唯一确定裂尖的混合度

$$\psi_{\text{tip}} = \arg(K^{\text{tip}}) = \arg(Kh^{\text{tip}}) + \omega \quad (5.90)$$

对 Griffith 裂纹,上式可近似表达为

$$\psi_{\text{tip}} = \phi + 0.1584\alpha - \varepsilon \ln \frac{L}{2.2h} \quad (5.91)$$

式中, ϕ 为外载混合度; L 为裂纹长度,在推导上式时假定材料过渡函数呈线性变化(即 $m=1$)。界面层断裂模型的优点在于:①裂尖无病态;②裂尖混合度可唯一确定,不需式(5.44)、式(5.46)中概念模糊的特征长度 \tilde{L} 。利用 ψ_{tip} 可将断裂准则写为

$$G(\psi_{\text{tip}}) = \Gamma(\psi_{\text{tip}}) \quad (5.92)$$

式(5.92)右端的界面断裂曲线代表材料的本征断裂阻力,它的形状不受振荡指数的干扰。

在上述的概念下可以更确切地表述在界面层裂纹尖端的开闭特征。界面层模型说明当

$$\exp \left[-\frac{\frac{\pi}{2} - \phi - 0.1584\alpha}{\varepsilon} \right] < 2.2 \frac{h}{L} < \exp \left[\frac{\frac{\pi}{2} + \phi + 0.1584\alpha}{\varepsilon} \right] \quad (5.93)$$

时,裂尖确实保持张开,且无任何病态解行为。Rice 的小范围接触理论所要求的条件(5.14)与上式有类似之处,但在界面层断裂模型下裂纹尖端实际并不发生接触。

上述模型最近被王惠军^[14]推广到下述两种情况:①裂纹平行于材料不均匀带的扩展;②裂纹垂直于界面层的情况。

5.8 材料的界面与界面层设计

5.8.1 界面对断裂路径的影响

考虑如图 5.23 所示裂纹与界面垂直遭遇的情况。裂纹在界面折射下有两种进一步扩展的可能：①沿原路径侵入第二相材料；②沿界面上行或下行。后一种情况称为界面对裂纹的偏转。He 和 Hutchinson^[15]研究了这一问题。他们比较了裂纹沿原路径或沿界面延伸同一增量长度 a 后能量释放率的变化, $G_{\text{平}}$ 与 $G_{\text{折}}$ 。并由判断式

$$G_{\text{平}} / \Gamma^{(2)} \begin{cases} > \\ < \end{cases} G_{\text{折}} / \Gamma_{\text{界}} \Rightarrow \begin{matrix} \text{水平延伸} \\ \text{拐折} \end{matrix} \quad (5.94)$$

来确定裂纹是水平向前延伸, 还是出现拐折。式 (5.94) 中 $\Gamma^{(2)}$ 为材料 2 的基体断裂韧性, $\Gamma_{\text{界}}$ 为材料 1 与材料 2 的界面断裂韧性。后者与界面断裂混合度有关。于是可由控制材料 1 与 2 之间的界面断裂韧性来使裂纹拐折或水平延伸。

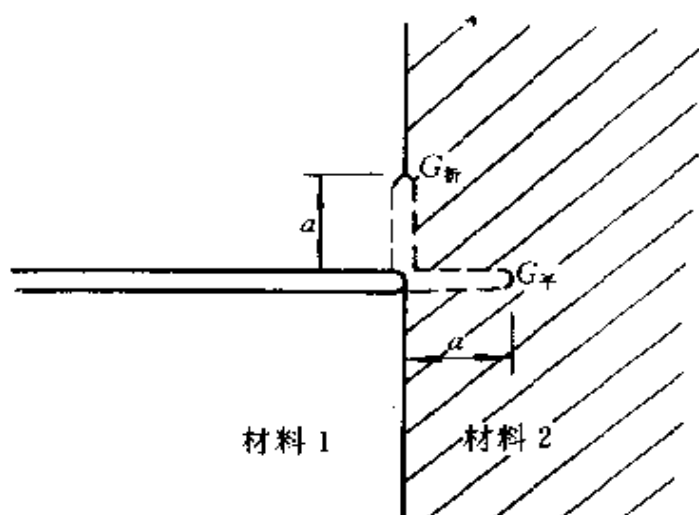


图 5.23 界面对垂直侵入裂纹的偏转

另一个相关联的问题是原先沿界面扩展裂纹的偏转 (kinking), 如图 5.24 所示。记沿界面断裂的能量释放率为 G , 而偏

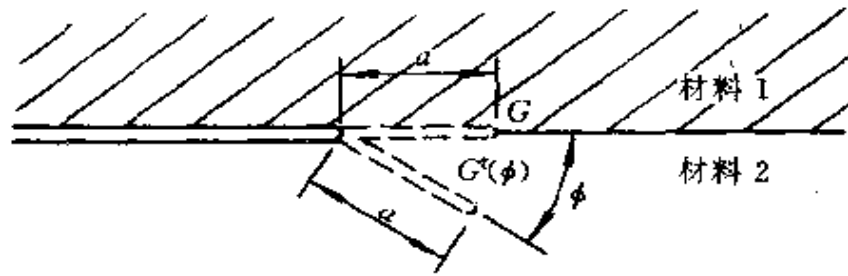


图 5.24 界面裂纹的偏转

转后裂尖处的能量释放率为 $G(\phi)$, ϕ 为偏转角。在不同 ϕ 值下 $G(\phi)$ 的最大值记为 G_{\max} , 其对应的 ϕ 角为裂纹可能偏转角。Hutchinson 与 He^[15] 给出了 G/G_{\max} 的变化曲线, 当横向 T 应力为零, 且第 2 Dundurs 常数为零时, 该曲线如图 5.25 所示^[1]。

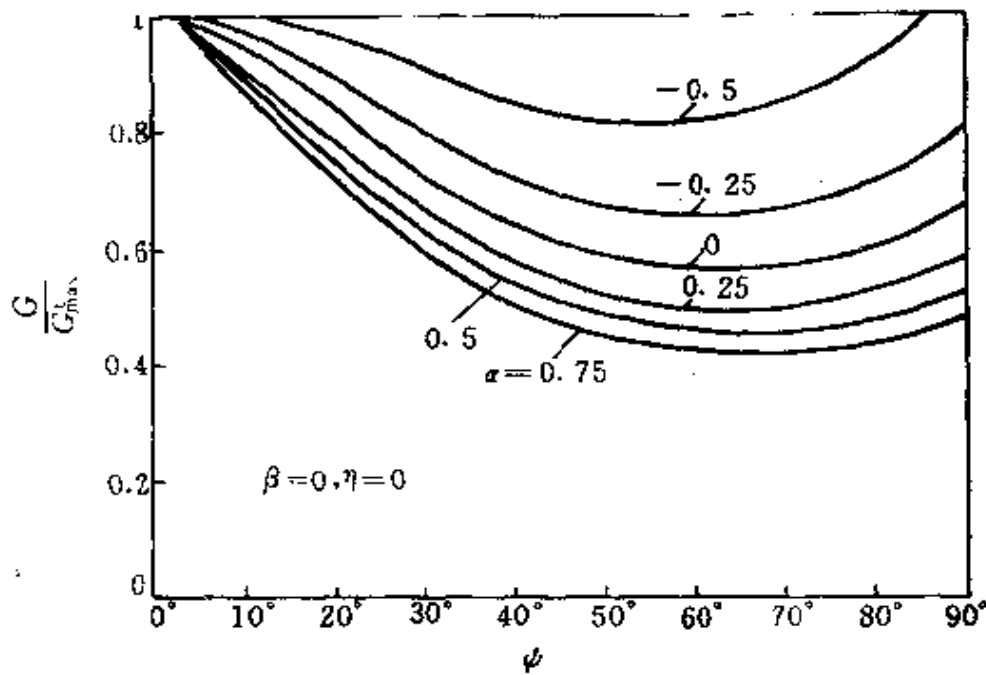


图 5.25 界面与偏转裂纹的能量释放率之比随外载混合度 ψ 的变化(引自 Hutchinson 与 Suo^[11])

当条件

$$G/G_{\max} < \Gamma(\psi)/\Gamma_0 \quad (5.95)$$

满足时(Γ_c 为均相材料的断裂韧性), 界面裂纹会发生偏转; 若条件式(5.95)不能得到满足, 则裂纹沿界面延伸。由式(5.95)可知: 控制界面断裂的混合度便可以改变裂纹的偏转属性。

5.8.2 多层介质的裂纹再形核机制

考虑图 5.26 所示裂纹垂直于多层介质界面的情况, 假定材料 1 为弱相(如陶瓷), 材料 2 为强相(如纤维)。主裂纹与强相遭遇后

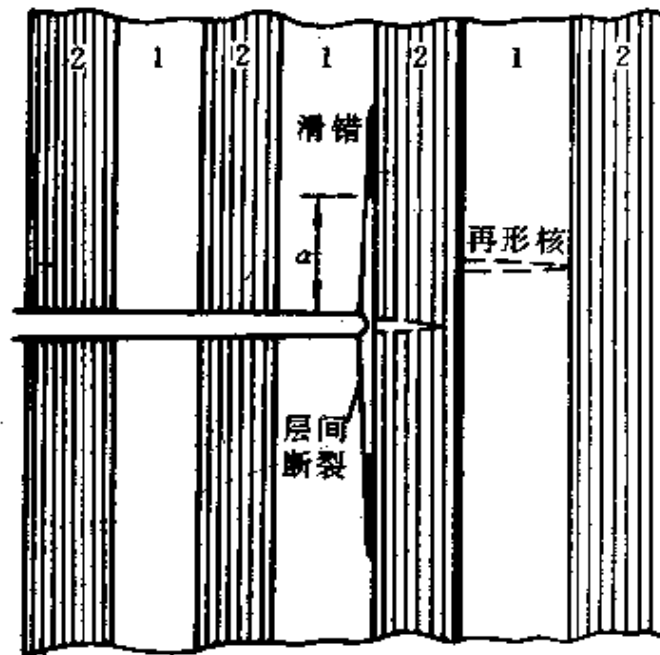


图 5.26 多层介质的裂纹再形核机制

可能发生下述三种情况^[45]:

①若材料 1 与 2 的界面很强, 裂纹无法拐折, 只能切开强相而继续向前延伸。此时断口平整, 且多层介质的整体断裂韧性较差。

②若材料 1 与 2 的界面断裂韧性很差, 则裂纹发生拐折, 拐折裂纹溯界面上下而行, 造成大范围分层。此时断口为散丝状, 多层介质的强度较差。

③若材料 1 与 2 的界面断裂韧性适中, 则裂纹仍发生拐折, 且拐折裂纹顶端可能出现层间滑错区。由力学分析, 拐折后形成的“T”形裂纹前方最大拉应力区不在“T”字顶端, 而在前方某一处。

这一拉应力最大点距离裂尖的尺寸与拐折长度 a 成正比。当拐折长度 a 不断加大时,该最大拉应力点逐渐由较强的材料 2 移至较弱的材料 1,最后在相邻的材料 1 层内形成裂纹的再形核。这类机制可重复发生,造成桥联、层间断裂和层间滑错联合作用的破坏带,消耗较大的断裂能量。此时断口为短程拔丝状,多层介质的断裂韧性最高。

通过适当的界面断裂韧性设计,可促成第(3)种情况的发生。这类机制已成为对脆性基体复合材料(如陶瓷基复合材料)进行增韧的主要机制。

5.8.3 界面与界面层设计

材料界面设计的三个要素是:①外载混合度;②界面韧度曲线;③最佳断裂路径。对以强韧性为主要性能指标的先进结构材料,需选择可使破坏过程耗能最大的断裂路径。在外载给定的情况下(此时 ψ 为定值),可通过对界面韧度曲线的设计来实现最佳断裂路径。界面韧度曲线的设计包括材料对的匹配选择,界面结合工艺和界面涂层技术。在材料对和界面结合工艺给定的情况下,应通过界面取向配置来改变外载混合度,以实现最佳断裂路径。

界面层设计指通过界面过渡层的结构特征设计(如界面层宽度 h 和界面层材料过渡函数 $z(y)$)来达到不同的裂尖混合度 ψ_{up} ,以实现所需的界面断裂韧性 $\Gamma(\psi_{up})$,见第 5.7 节。对确定的双材料对,由于混合度的不同,断裂韧性可能相差一个量级,见图 5.7。对确定的外载状态,可由变化材料界面层结构特征来达到高混合度的目的,从而实现界面强韧化。

参 考 文 献

- 1 Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. In: Hutchinson J W, Wu T Y eds. *Adv. Appl. Mech.*, V. 29. Boston: Academic Press, 1992. 63~191
- 2 Suo Z, Varias A G, Shih C P. A theory for cleavage cracking in the presence of plastic

- flow. *Acta Metall. Mater.* ,1993, 41;1551-1557
- 3 Mathews J W, Blakeslee A E. Defects in epitaxial multilayers I . Misfit dislocations. *J. Crys. Growth*, 1974, 27;118~125
 - 4 Mathews J W, Blakeslee A E. Defects in epitaxial multilayers I . Dislocation pile-ups, threading dislocations, slip lines and cracks. *J. Crys. Growth*, 1975, 29;273~280
 - 5 Mathews J W, Blakeslee A E. Defects in epitaxial multilayers II . Preparation of almost perfect multilayers. *J. Crys. Growth*, 1976, 32;265~273
 - 6 Freund L B. The stability of a dislocation threading a strained layer on a substrate. *J. Appl. Mech.* ,1987, 54;553~557
 - 7 Freund L B. The driving force for glide of a threading dislocation in a strained epitaxial layer on a substrate. *J. Mech. Phys. Solids*, 1990, 38;657~679
 - 8 Freund L B. A criterion for arrest of a threading dislocation in a strained epitaxial layer due to an interface misfit dislocation in its path. *J. Appl. Phys.* , 1990, 68;2073~2080
 - 9 Freund L B. The mechanics of dislocations in strained-layer semiconductor materials. In; Hutchinson J W, Wu T Y eds. *Adv. Appl. Mech.* , V. 30. San Diego; Academic Press, 1994. 1~66
 - 10 Yang W, Zhang H. Heterogeneous nucleation of dislocation loops under epitaxial strain. *Acta Mech. Solida Sinica*, 1993, 6;243~259
 - 11 Yang W, Boehler J P. On description of anisotropic damage in composite laminates. *Acta Mech. Sinica*, 1991, 7;335~343
 - 12 Yang W, Boehler J P. Micromechanics modelling of anisotropic damage in cross-ply laminates. *Int. J. Solids Structs.* ,1992, 29;1303~1328
 - 13 Kim K S, Shih C F. Computational modeling of electronic packaging of multi-layer structures. *Research Proposal to IBM*, 1991
 - 14 Ho S, Suo Z. Microcracks tunneling in brittle matrix composites driven by thermal expansion mismatch. *Acta Metall. Mater.* ,1992, 40;1685~1690
 - 15 He M-Y, Hutchinson J W. Kinking of a crack out of an interface. *J. Appl. Mech.* , 1989, 56;270~273
 - 16 Wang T C. Elastic-plastic asymptotic fields for cracks on bimaterial interfaces. *Eng. Fract. Mech.* , 1990, 37;527~538
 - 17 Yu S W, Zhou Z G. Singular fields for a mode III interface crack in a power-law hardening bimaterial. *Int. J. Fracture*, 1992, 57;325~347
 - 18 Sharma S M, Aravas N. Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solution. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39;1043~1072
 - 19 Dundurs J. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges. *J. Appl. Mech.* 1969, 36; 650~652

- 20 Suga T, Elssner E, Schmauder S. Composite parameters and mechanical compatibility of material joints. *J. Compo. Mater.*, 1988, 22: 917~934
- 21 Williams M L. The Stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1959, 49: 199~204
- 22 Cherepanov G P. The stress state in a heterogeneous plate with slits. *Lzvestia AN SSSR, OTN, Mekhan. i Mashin*, 1962, 1: 131~137
- 23 England A H. A crack between dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 1965, 32: 400~402
- 24 Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *J. Appl. Mech.*, 1965, 32: 403~410
- 25 Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 1965, 32: 418~423
- 26 Rice J R, Suo Z, Wang J-S. Mechanics and thermodynamic of brittle interfacial failure in bimaterial systems. In: Ruhle M et al eds. *Metal-Ceramic Interface*. New York: Pergamon Press, 1990. 269~294
- 27 Comninou M. The interface crack. *J. Appl. Mech.*, 1977, 44: 631-636
- 28 Rice J R. Elastic fracture concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.*, 1988, 55: 98~103
- 29 Yang W, Suo Z, Shih C F. Mechanics of dynamic debonding. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1991, 433: 679~697
- 30 Delale F, Erdogan F. On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes. *J. Appl. Mech.*, 1988, 55: 317~324
- 31 Yang W, Shih C F. Fracture along an interlayer. *Int. J. Solids Structs.*, 1994, 31: 985~1002
- 32 Suo Z. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media. *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 1990, 427: 331~356
- 33 Stroh A N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Phil. Mag.*, 1958, 3: 625~646
- 34 Ting T C T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites. *Int. J. Solids Structs*, 1986, 22: 965~983
- 35 Liechti K M, Chai Y-S. Biaxial loading experiments for determining interfacial toughness. *J. Appl. Mech.*, 1992, 59: 295~304
- 36 杨卫. 动静态界面断裂应力强度因子间的普适关系. *固体力学学报*, 1993, 14 (1): 59~62
- 37 Liu C, Lambros J, Rosakis A J. Highly transient elastodynamic crack growth in a bimaterial interface: Higher order asymptotic analysis and optical experiments. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, 41: 1887~1954

- 38 Yu H, Yang W. Mechanics of transonic debonding of a bimaterial interface; The anti-plane shear case. *J. Mech. Phys. Solids*, 1994, 42: 1789~1802
- 39 Yu H, Yang W. Mechanics of transonic debonding of a bimaterial interface; The in-plane case. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, 43: 207~232
- 40 Freund L B, Hutchinson J W. High strain-rate crack growth in rate-dependent plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1985, 33: 169~191
- 41 Atkinson C. On quasistatic problems of cracks in a non-homogeneous elastic layer. *Acta Mechanica*, 1977, 26: 103~113
- 42 Yang W. New insights of interfacial fracture mechanics. In: Teoh C H, Lee K H eds. *Fracture of Engineering Materials and Structures, Proc. of ICF/FEFG Symposium*, Singapore. London: Elsevier Pub. , 1991. 51~56
- 43 Hutchinson J W, Mear M E, Rice J R. Crack paralleling an interface between dissimilar materials. *J. Appl. Mech.* , 1987, 54: 828~832
- 44 王惠军. 界面层断裂力学的若干问题; [工学硕士论文]. 北京, 清华大学工程力学系, 1994
- 45 Evans A G. The mechanical properties of brittle matrix composites. In: Teoh C H, Lee K H eds. *Fracture of Engineering Materials and Structures, Proc. of ICF/FEFG Symposium*, Singapore. London: Elsevier Pub. , 1991. 13-22

第6章 微裂纹的细观损伤理论

6.1 微裂纹损伤构形

弥散分布的微裂纹是一种主要的细观损伤机制,微裂纹常出现在诸如岩石、混凝土、陶瓷这类脆性材料中,或出现在诸如结构陶瓷、结构高分子材料和复合材料等增韧结构材料的脆性基体或相界面中。图 6.1 示意性地给出了各种材料体系中的微裂纹构形。

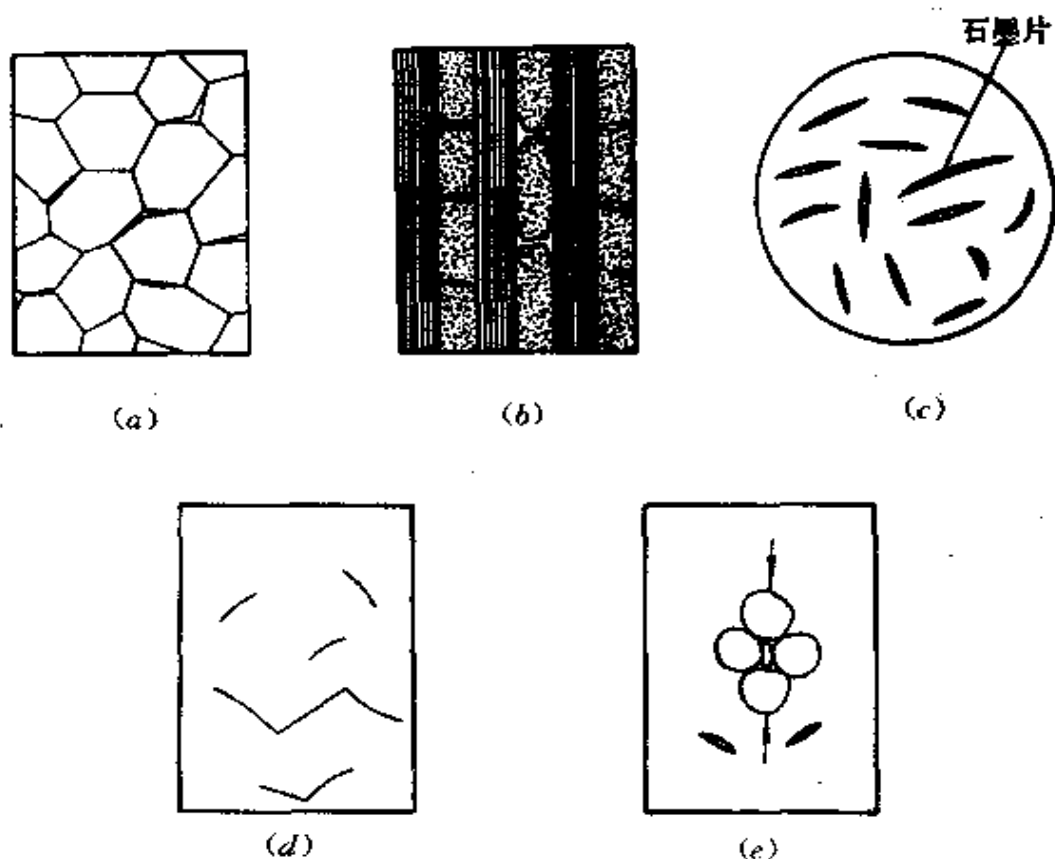


图 6.1 各种材料体系中的微裂纹损伤构形
(a)陶瓷;(b)复合材料;(c)铸铁;(d)岩石;(e)混凝土。

对它们可做如下分类:

(1) 简单断裂

- ① 随机分布裂纹群;
- ② 部分取向裂纹群;
- ③ 取向排列裂纹群。

(2) 多重断裂

- ① 随机多重断裂;
- ② 取向多重断裂。

囿于本章的篇幅,这里我们仅讨论随机分布裂纹群和完全取向裂纹群。

6.2 单裂纹解

作为研究裂纹群问题的基础,本节先讨论在线弹性各向异性基体中嵌含单个裂纹的问题。这一结果可推广到非线性基体的率形式定解方程中,即用增量法和切线刚度法求解,再将结果沿加载历程进行积分。线弹性本构方程可表达为下述张量形式

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (6.1)$$

式中 M_{ijkl} 是具有 Voigt 对称性的 4 阶柔度张量。作为另一种表达方式,我们可把式 (6.1) 写成矩阵形式。这时将应力 σ_{ij} 和应变 ε_{ij} 均视为 6 维向量,而将 M_{ijkl} 视为 6 乘 6 的矩阵。张量法与矩阵法的指标对应关系如下

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ & 22 & 23 \\ & & 33 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 5 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{array}$$

在本章中,我们认为柔度矩阵 $[M_{ij}]$ ($i, j=1, \dots, 6$) 最起码是正交各向异性的。在这一假设下矩阵 $[M_{ij}]$ 的最一般形式为

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & M_{33} & 0 & 0 & \\ & & & M_{44} & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & M_{55} & 0 \\ & & & & & M_{66} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

易于观察其柔度矩阵中有 9 个独立的柔度系数。若材料在 x_1-x_2 平面为横观各向同性, 则有

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= M_{22} & M_{13} &= M_{23} \\ M_{44} &= M_{55} & M_{66} &= 2(M_{11} - M_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

这时柔度矩阵中仅有 5 个独立的柔度系数。对完全各向同性材料, $[M_{ij}]$ 中的独立柔度系数减少为 2 个。

若在柔度矩阵为 $[M_{ij}]$ 的基体中含有一单裂纹, 其裂纹形成所释放的能量(即在同样外载下无裂纹体与有裂纹体的势能差)可表达为远方应力张量 σ_{ij} 的二次型(参见 Laws 与 Brockenbrough^[1])

$$U = \frac{1}{2} V_{\text{crack}} \sigma_{ij} \Omega_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} V_{\text{crack}} \sum_{i,j=1}^6 \{\sigma_i\} [\Omega_{ij}] \{\sigma_j\} \quad (6.4)$$

式中, V_{crack} 表示裂纹影响域的体积; Ω_{ijkl} 为四阶释放能张量。若采用矩阵记法, 可将 $\{\sigma_i\}$ 看成一个 6 维向量, 而将 $[\Omega_{ij}]$ 视为一个 6×6 矩阵。后面的讨论将集中在图 6.2 所示的三种典型裂纹构形, 即平面应变割缝(半长为 a), 平面椭圆形裂纹(长、短半轴各为 a 与 b) 和币状裂纹(半径为 a)。后者是椭圆裂纹在 $a=b$ 下的特例。对这三种单裂纹构形, 其裂纹影响域的体积 V_{crack} 可定义为(参见 Laws 与 Brockenbough^[1])

$$\begin{aligned} \pi a^2 & \quad \text{平面应变割缝(单位厚)} \\ V_{\text{crack}} &= \frac{4\pi}{3} ab^2 & \quad \text{椭圆裂纹} \\ \frac{4\pi}{3} a^3 & \quad \text{币状裂纹} \end{aligned} \quad (6.5)$$

一旦定义了 V_{crack} , 便可对图 6.2 中的三种情况逐一求出其释放能

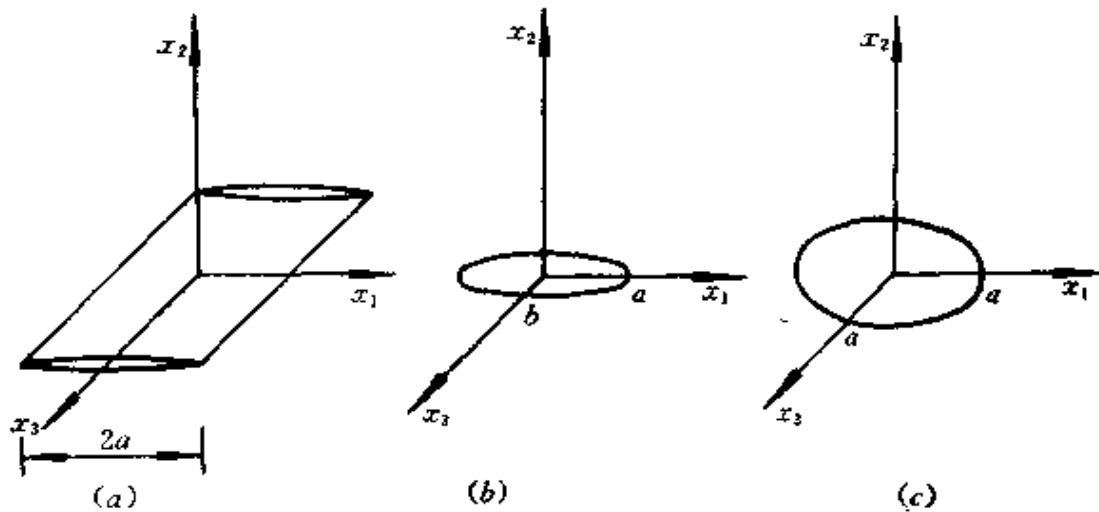


图 6.2 典型裂纹构形

(a)平面应变割缝; (b)椭圆裂纹; (c)币状裂纹。

矩阵(6×6)。对平面应变割缝的情况,矩阵 $[\Omega_{ij}]$ 的非零分量可按正交各向异性介质的现有二维断裂分析方法(如 Stroh formalism)确定为

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{22} &= \left[M_{22} - \frac{M_{23}^2}{M_{33}} \right] (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}) \\ \Omega_{44} &= \sqrt{M_{44}M_{55}} \\ \Omega_{66} &= \frac{1}{M_{33}} \sqrt{M_{22}M_{33} - M_{23}^2} \sqrt{M_{11}M_{33} - M_{13}^2} (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}) \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

式中,特征根 α_1 和 α_2 是下述二次代数方程的两个根

$$\begin{aligned} (M_{22}M_{33} - M_{23}^2)\alpha^2 - [M_{33}M_{66} + 2(M_{12}M_{33} - M_{13}M_{23})]\alpha \\ + M_{11}M_{33} - M_{13}^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

上述解建立在裂纹面法线平行于 x_2 轴的假定之上。对任意取向的平面应变单割缝,可对上述结果进行张量坐标转换而得到相应的解。

对图 6.2(b)所示的平面椭圆裂纹(仍取裂纹面法线平行于 x_2 轴),其在一般正交各向异性介质中的释放能张量的计算较为复杂。Hoenig^[2]发展了一种数值计算格式来处理这一问题。然而,对各向同性介质的特例,可利用著名的 Budiansky 与 O'Connell 解^[3]

来确定释放能矩阵的非零分量

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{22} &= \frac{2}{E}(1 - \nu^2)/E(k) \\ \Omega_{44} &= \frac{2}{E}(1 - \nu^2)Q(k, \nu) \\ \Omega_{66} &= \frac{2}{E}(1 - \nu^2)R(k, \nu) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

式中, ν 为泊松比; $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$; 函数 Q 和 R 定义为

$$\left. \begin{aligned} R(k, \nu) &= k^2 \{ (k^2 - \nu)E(k) + \nu(1 - k^2)K(k) \}^{-1} \\ Q(k, \nu) &= k^2 \{ k^2 + (1 - k^2)E(k) - \nu(1 - k^2)K(k) \}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

上两式中 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

对币状裂纹的特例, 可得到横观各向同性介质 (x_1-x_3 平面为横观各向同性面) 的下述释放能矩阵表达式, 见 Laws^[4]

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{22} &= \frac{2\eta_1\eta_2}{\pi}(\eta_1 + \eta_2) \left(M_{11} - \frac{M_{13}^2}{M_{11}} \right) \\ \Omega_{44} = \Omega_{66} &= \frac{4}{\pi}(\eta_1 + \eta_2) \\ &\cdot \frac{(M_{11}^2 - M_{13}^2) \sqrt{2M_{44}}}{M_{11} \sqrt{2M_{44}} + (\eta_1 + \eta_2)(M_{11} + M_{13}) \sqrt{M_{11} - M_{13}}} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

而 $[\Omega_{ij}]$ 的其他分量为零。式 (6.10) 中的特征值 η_1 和 η_2 为下述二次代数方程的两个根

$$\begin{aligned} (M_{11}^2 - M_{13}^2)\eta^2 - [M_{11}M_{44} + 2M_{12}(M_{11} - M_{13})]\eta \\ + M_{11}M_{22} - M_{12}^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

至此单裂纹的解已完全给出。

6.3 随机分布裂纹群

6.3.1 基本假设与势能表达式

本节在下列假定下讨论随机分布裂纹群的情况:

①假定每一裂纹均是张开的,并因此不考虑裂纹闭合和裂纹表面摩擦。

②裂纹群中诸裂纹的取向是随机的,没有占优的裂纹取向。

③相邻裂纹仅有弱相互作用,因此可用自洽方法来估算总体响应。

在上述假设上,我们可对一体积为 V 的参照体域用自洽方法来估算总体响应,见图 6.3。图 6.3(a)代表一个裂纹密度为零的体

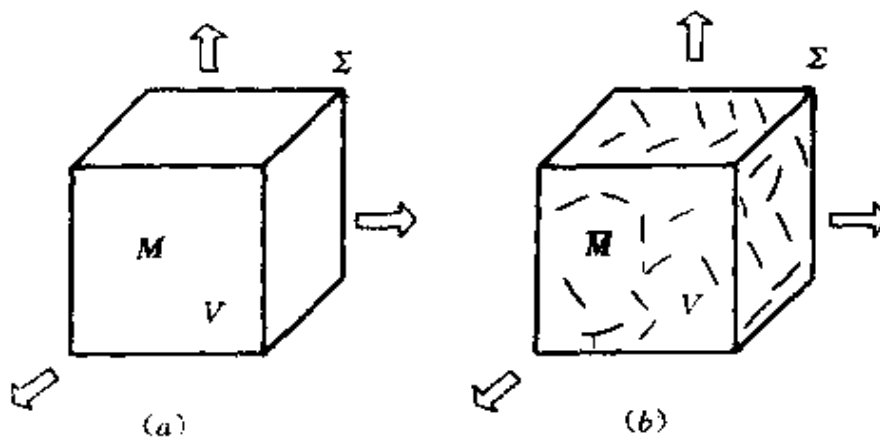


图 6.3 某一材料体域元的响应

(a)无裂纹;(b)含裂纹群。

积域。其柔度张量为 $M_{ij\mu}$, 在远方受到宏观应力 Σ_{ij} 的作用。储存于该体域内的总势能为

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_S t_i u_i dS = -\frac{1}{2} V \Sigma_{ij} M_{ij\mu} \Sigma_{\mu} \quad (6.12)$$

我们下面再考虑图 6.3(b)所示的情况,该图在同样基体材料的体积域 V 中含有 N 个互不相交的裂纹。可以想像,这些分布微裂纹的存在将使柔度增至 $\bar{M}_{ij\mu}$ 。在含裂纹群体域内所储存的总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_S t_i u_i dS = -\frac{1}{2} V \Sigma_{ij} \bar{M}_{ij\mu} \Sigma_{\mu} \quad (6.13)$$

由能量平衡可得到 N 个裂纹所释放的总势能为

$$U_{\text{tot}} = \Pi_0 - \Pi = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} (\bar{M}_{ijkl} - M_{ijkl}) \Sigma_{kl} \quad (6.14)$$

这一公式将作为下一小节中自洽分析的基础。

6.3.2 自洽方法

我们现在用自洽方法来估算柔度增值 $\bar{M}_{ijkl} - M_{ijkl}$ 。自洽方法的核心在于把裂纹群中的任一条微裂纹处理为嵌含在具有自洽等效柔度 \bar{M}_{ijkl} 基体中的单裂纹。有鉴于此,我们便可以使用式(6.4)来得到由 N 条裂纹所释放的总能量为

$$U_{\text{tot}} = \frac{N}{2} \Sigma_{ij} \langle V_{\text{crack}} \Omega_{ijkl}(\bar{M}) \rangle \Sigma_{kl} \quad (6.15)$$

式中记号

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int_V \cdot dV \quad (6.16)$$

代表在体域 V 内的平均。我们将式(6.14)中的释放能张量记为 $\Omega_{ijkl}(\bar{M})$ 是为了强调该张量应对应于自洽柔度 \bar{M}_{ijkl} 定义。也就是说,当根据裂纹几何类型而用式(6.6)、式(6.8)或式(6.10)来计算 Ω_{ijkl} 时,应用 \bar{M}_{ijkl} 来取代原公式中的 M_{ijkl} 。因为方程(6.14)与方程(6.15)对任意宏观应力 Σ_{ij} 均成立,所以两式的相等导致下述柔度增量的估算公式

$$\bar{M}_{ijkl} - M_{ijkl} = \langle f \Omega_{ijkl}(\bar{M}) \rangle \quad (6.17)$$

也就是说,由微裂纹所引起的增柔可表达为释放能张量与裂纹密度

$$f = N \frac{V_{\text{crack}}}{V} \quad (6.18)$$

之乘积的体积平均。此外,若裂纹尺寸的统计分布规律与裂纹取向的统计分布规律无关,则式(6.17)可简化为

$$\bar{M}_{ijkl} - M_{ijkl} = \langle f \rangle \langle \Omega_{ijkl}(\bar{M}) \rangle \quad (6.19)$$

式中

$$\langle f \rangle = N \langle V_{\text{crack}} \rangle / V \quad (6.20)$$

是平均裂纹密度,而 $\langle V_{\text{crack}} \rangle$ 为平均裂纹体积。在给定平均裂纹密

度下,式(6.19)代表确定微裂纹体等效柔度 $\bar{M}_{i,\mu}$ 的非线性张量积分方程,可用与多晶体模量估算中相类似的方法,借助于微裂纹法线的取向分配函数(ODF)来求解这一方程。

对完全随机分布的微裂纹群(即 ODF 恒为 1),积分方程(6.19)可大为简化。例如,对各向同性弹性基体中随机分布的椭圆形裂纹,可计算得出,见 Budiansky 和 O'Connell^[3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{E}}{E} &= 1 - f \frac{2(1 - \bar{\nu}^2)}{15E(k)} \{3 + [Q(k, \bar{\nu}) + R(k, \bar{\nu})]E(k)\} \\ \frac{\bar{\mu}}{\mu} &= 1 - f \frac{8(1 - \bar{\nu})}{15E(k)} \{4 + 3[Q(k, \bar{\nu}) + R(k, \bar{\nu})]E(k)\} \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

式中, $\bar{\nu}$ 为等泊松比。通常 $\bar{\nu}$ 的值与基体的泊松比相差不大。

对币状裂纹, a 等于 b , 方程(6.21)可进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{E}}{E} &= 1 - f \frac{4(1 - \bar{\nu}^2)(10 - 3\bar{\nu})}{15\pi(2 - \bar{\nu})} \\ \frac{\bar{\mu}}{\mu} &= 1 - f \frac{8(1 - \bar{\nu})(5 - \bar{\nu})}{15\pi(2 - \bar{\nu})} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

无论是方程(6.21)还是方程(6.22),自洽方法都近似地预言等效模量 \bar{E} (或 $\bar{\mu}$)与裂纹密度 f 成正比线性下降,如图 6.4 中的虚线所



图 6.4 归一化刚度随裂纹密度的变化曲线

虚线表示自洽理论的预测,实线表示合理的微裂纹减刚曲线。

示。这一自洽理论预测在 f 较小时与真实情况相差不大,但当 f 超

出图 6.4 所标的 f_c 时, 则可能给出过小或甚至为负值的模量。因此自治理论在这种情况下不适用。合理的 \bar{E}/E 随 f 变化曲线应在 f 增大时渐近地趋向于零, 如图 6.4 的实线所示。由最近发展的广义自治理论可实现这一预测。

6.4 织构张量

我们下面讨论更一般的裂纹群, 其裂纹尺寸(由参数 a 表示)和裂纹方位(由裂纹面单位外法线向量 n_i 表示)具有确定的统计分布规律, 类似于多晶体塑性中定义取向分布函数(ODF)的作法, 我们引入描述裂纹尺寸和方位的裂纹分布密度标量函数 $D(n_i, a)$, 它表示具有外法线 n_i 和尺寸 a 的裂纹之密度。显而易见, 裂纹的上下表面应具有相同密度

$$D(n_i, a) = D(-n_i, a) \quad (6.23)$$

于是我们仅需要考虑方位球中的上半球面。可按下述规定来对分布密度函数 $D(n_i, a)$ 进行归一化

$$\int_0^\infty \int_{\Omega} D(n_i, a) d\Omega da = 2 \int_0^\infty \int_{\Omega/2} D(n_i, a) d\Omega da = 1 \quad (6.24)$$

式中, $d\Omega$ 表示固体角增量; Ω 表示表面积为 4π 的整个方位球面。若微裂纹的取向分布与裂纹尺寸 a 的分布统计无关, 则 D 可写为下述分离变量形式

$$D(n_i, a) = D(n_i)A(a) \quad (6.25)$$

式中, $D(n_i)$ 和 $A(a)$ 需满足各自的归一化条件

$$\int_0^\infty A(a) da = 1, \quad \int_{\Omega/2} D(n_i) d\Omega = \frac{1}{2} \quad (6.26)$$

织构张量 F_{ij} 可定义为(Oda^[5])

$$F_{ij} = \frac{\pi N}{V} \int_0^\infty \int_{\Omega} a^3 D(n_i, a) n_i n_j d\Omega da \quad (6.27)$$

上式中的被积函数由四部分组成, 分别是 $a n_i$, $\pi a^2 n_j$, $\frac{N}{V}$ 和 $D(n_i, a)$, 各自代表统计权重, 单裂纹的面积向量, 单位体积内的裂纹数和裂

纹分布密度。因此,式(6.27)中的织构张量 F_0 代表用 an 加权的裂纹面积分布,以达到构成裂纹体积分布的目的。Oda 论证了由各向异性微裂纹所造成的增柔可近似由织构张量 F_1 表达为^[5]

$$\bar{M}_{ijkl} - M_{ijkl} = \frac{\Delta}{4} (\delta_{ij} F_{kl} + \delta_{ji} F_{lk} + \delta_{jk} F_{il} + \delta_{kj} F_{li}) \quad (6.28)$$

式中, δ_{ij} 为 Kronecker delta; Δ 与变形程度相联系。

关于织构张量的研究在过去若干年中取得了可观的进展。已经提出了各种织构张量的形式,见 Kachanov^[6], Kanatani^[7], 并可由张量表现定理来确定织构张量的最一般形式,见 Cowin^[8]。织构张量的测试原理和量测技术也得到了发展,见 Oda^[5]。

6.5 有序排列裂纹群

本节讨论有序排列裂纹群,这类裂纹群几何是复合材料层合板中常见的细观损伤模式。复合材料层合板往往由纤维取向不同的两族铺层进行交替层合制成。在沿板平面的加载下,常发生双重的穿层 (intralaminar) 断裂和层间 (interlaminar) 断裂,如图 6.5 所示。穿层断裂在两族板层中均可能发生,其取向分别平行于两族板层各自的纤维取向。

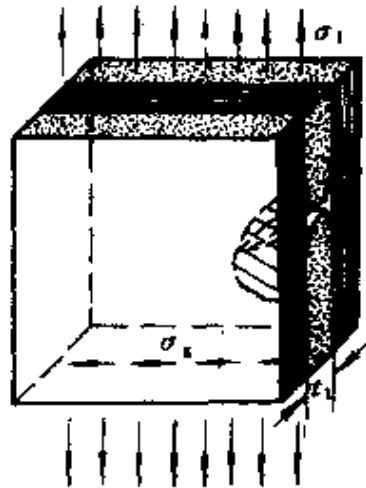


图 6.5 复合材料层合板在面内载荷下由有序排列裂纹群所产生的损伤

在这一情况下,可以方便地将损伤张量定义为由于微裂纹所产生的附加非弹性应变(本节假设除微裂纹影响外,层合板内处处均可由弹性应力应变关系所模拟)

$$\varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e \quad (6.29)$$

式中

$$\varepsilon_{ij}^e = M_{ij\mu} \sigma_{\mu} \quad (6.30)$$

其中 $M_{ij\mu}$ 是无裂纹层合板的柔度张量。可以建立损伤应变 ε^D 的下述表达式,见 Yang 与 Boehler^[9](黑体字符表示向量与张量的实体形式)

$$\varepsilon^D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (U_i \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i U_i) \quad (6.31a)$$

式中

$$U_i = \frac{1}{V} \int_{S_i^c} [[\mathbf{u}]] dS \quad (6.31b)$$

是跨越第 i 类缺陷表面(其集合用 S_i^c 表示)的位移间断量 $[[\mathbf{u}]]$ 的体积平均;下标 $i=1$ 或 2 时表示两族穿层裂纹; $i=3$ 时表示层间裂纹;向量 \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 和 \mathbf{n}_3 分别表示两族穿层裂纹和一族层间裂纹面的单位外法线。经过一定的运算,可将式(6.31)改写为

$$\varepsilon^D = \sum_{i=1}^3 f_i \left[p_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i + \frac{1}{2} q_i (\mathbf{n}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i \mathbf{n}_i) \right] \quad (6.32)$$

式中,第一项表示由微裂纹损伤而造成的体膨胀,其系数 p_i 非负;而第二项表示由沿裂纹面滑错而造成的(体积不变)偏斜损伤变形。上式中裂纹分类密度 f_i 的定义由 Horii 和 Nemat-Nasser^[10] 给出

$$f_i = \frac{2}{V} \sum_{k=1}^{N_i} a_i^{(k)} A_i^{(k)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.33)$$

式中, N_i 表示第 i 类裂纹的数目;而 $a_i^{(k)}$ 和 $A_i^{(k)}$ 分别定义第 i 类裂纹中第 k 个裂纹的尺寸和裂纹面面积。若存在层间滑移,复合材料层合板的损伤演化就变得异常复杂。该演化过程将与加载历史有关,且含损伤的应力应变本构关系可能具有非正交结构(见下一节)。然而,若下述假定成立:

- ① 可忽略局部滑移;

② 损伤仅由微裂纹造成；

③ 忽略穿层-层间交互作用；

便可以证明(Yang 与 Boehler^[9])：损伤演化的历史依赖性可由三个记忆函数

$$g_i^{cr}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} g_i(s) \quad (6.34)$$

的即时值所表征。式(6.34)中所定义的记忆函数 $g_i^{cr}(t)$ 表示第 i 类裂纹迄今为止的最大能量释放。在式(6.34)中，能量释放函数 g_i 定义为

$$g_i = t_i \cdot \Lambda_i \cdot t_i \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \quad (6.35)$$

式中， t_i 为在面族 S_i^c 上的面力向量；而 Λ_i 为一与弹性常数有关的二阶张量。它与第 6.3 节中的 4 阶释放能张量之间有下列关系

$$\Omega_i = n_i \Lambda_i n_i \quad i = 1, 2, 3 (\text{对 } i \text{ 不求和}) \quad (6.36)$$

式中， Ω_i 与 Λ_i 写为以 n_i 为 x_2 方向的正则形式。若在第 i 类裂纹面上的面力向量可分解为

$$t_i = \sigma_i n_i + \tau_i^I s_i^I + \tau_i^II s_i^{II} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \quad (6.37)$$

式中， n_i 、 s_i^I 和 s_i^{II} 构成一组正交基，且 s_i^I 和 s_i^{II} 分别取 I 型裂纹滑开和 II 型裂纹撕开的方向。于是对平面和反平面问题，式(6.35)所示的一般二次型可对角化为

$$g_i = \lambda_i^I \sigma_i^2 + \lambda_i^{II} \tau_i^{I^2} + \lambda_i^{III} \tau_i^{II^2} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \quad (6.38)$$

上式中 σ_i 必须大于零，否则便应去掉第一项，因为沿微裂纹面的压缩不致引起损伤。上式中的系数 $\lambda_i^{I, II, III}$ 仅与弹性常数有关，其具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i^I &= \sqrt{\frac{1}{2} M_{11} M_{22} \left[\sqrt{M_{22}/M_{11}} + \frac{2M_{12} + M_{66}}{2M_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_i^{II} &= \frac{M_{11}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{M_{22}/M_{11}} + \frac{2M_{12} + M_{66}}{2M_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_i^{III} &= \frac{1}{2} \sqrt{M_{44}/M_{55}} \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

运用式(6.34)中所定义的 $g_i^c (i=1, 2, 3)$ 作为内变量, 便可将复合材料层合板的损伤演化方程写为下列伪弹性形式

$$\varepsilon^D(t) = D(g_i^c(t), \sigma(t)) \quad (6.40)$$

这样, 我们可以把所有可能的损伤状态划分为下列 4 种不同类型:

(1) 完全损伤形态。这时 $g_i (i=1, 2, 3)$ 的即时值均等于其最大值。三个裂纹系上的损伤均处于临界状态。

(2) 部分损伤状态。这时部分 $g_i (i=1, 2, 3)$ 的即时值等于其最大值。该部分裂纹系上的损伤处于临界状态, 而其他裂纹系上的损伤处于停滞状态。

(3) 伪弹性状态。这时 $g_i (i=1, 2, 3)$ 的即时值均低于其最大值。然而, 至少有一个 $g_i^c(t)$ 值大于其初始起裂时的值。这时所有裂纹系上的损伤均处于停滞状态, 微裂纹体的应力应变关系表观上呈线性, 但其模量与初始弹性模量不同。

(4) 完全弹性状态。这时无任何微裂纹产生。

Laws 与 Brockenbrough^[1], Hashin^[11]的工作表明: 对任何完全损伤状态, 有

$$g_i = g_i^c \text{ 及 } \dot{g}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.41)$$

这时复合材料层合板的应力应变关系与加载历史无关, 且正交性流动法则成立。然而, 这一结论与大多数实验观察有抵触之处。这一矛盾的存在促使我们在下一节中讨论穿层和层间断裂的交互作用, 以及层间滑移所产生的影响, 见 Yang 与 Boehler^[12]。作为本节的结束, 我们仍认为前面的 3 条假设成立, 并据此导出复合材料层合板的伪弹性本构关系

$$\varepsilon = M^S : \sigma \quad (6.42)$$

式中, 割线柔度张量的表达式为

$$M^S = M + \sum_{i=1}^3 \{ P_i(g_i^c) n_i n_i n_i n_i + \frac{1}{4} R_i(g_i^c) (n_i s_i) (n_i s_i + s_i n_i) \} \quad (6.43)$$

式中, M 为未损伤复合材料层合板的柔度模量; 函数 P_i 和 $R_i (i=$

1, 2, 3) 需从微裂纹细观计算中得到。

6.6 复合材料层合板多重断裂损伤的细观力学分析

6.6.1 细观力学分析模型

复合材料层合板的多重断裂损伤行为是一个具有强烈工程背景,但迄今为止在理论上尚未完全得到阐明的课题。考虑如图 6.6 所示正交铺设的层合板受面内载荷作用的例子,其典型裂纹损伤构形见图 6.5。为了表述简单,图 6.5 中只绘出了一个穿层/层间双重裂纹组合。对该裂纹组合沿板厚和板高方向进行周期性延拓可得到本文所讨论的一般情况。

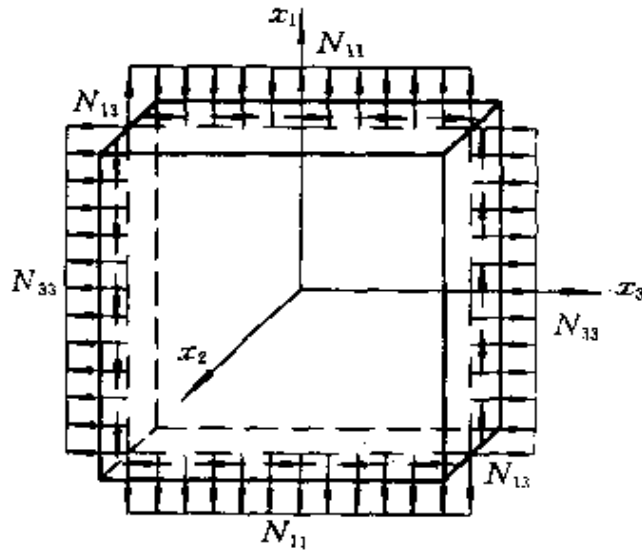


图 6.6 承受面内载荷的复合材料层合板

N_{11} 、 N_{13} 、 N_{33} 为面力合力。

图 6.6 所示的问题可分解为两个差不多等价的二维问题,如图 6.7 所示。每一问题又可以进一步分解为 I 型和 II 型断裂问题。即在该模型下一般面内载荷可分解为 I 型分量 σ_I ($\bar{\sigma}_{11}$ 或 $\bar{\sigma}_{33}$) 与 II 型分量 σ_{II} ($\bar{\sigma}_{13}$)。在考虑理想粘接界面时可证明 I 型与 II 型问题是解耦的。在多层(层数 $> 10 \sim 20$)与薄层($a, b \gg t_i/2$)的两项层合假设下,对于初始穿层裂纹和穿层/层间裂纹的细观力学分析模型见

图 6.8(a)与(b)。它们均为一个柔度为 M , 具有等距分布裂纹系的薄板嵌含在具有自相似等效模量 \bar{M} 的约束基体中, 且两侧的约束基体均视为无穷大。注意这里中心薄板的柔度 M 为横观各向同性, 而约束基体的柔度 \bar{M} 为正交各向异性。

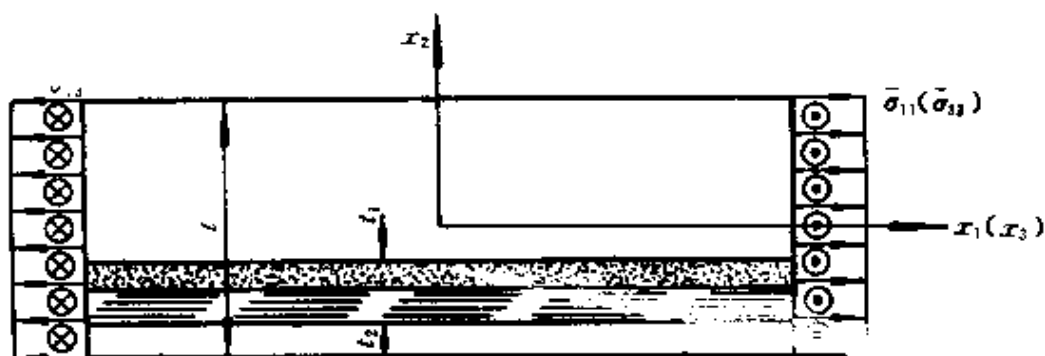


图 6.7 简化为两个二维问题

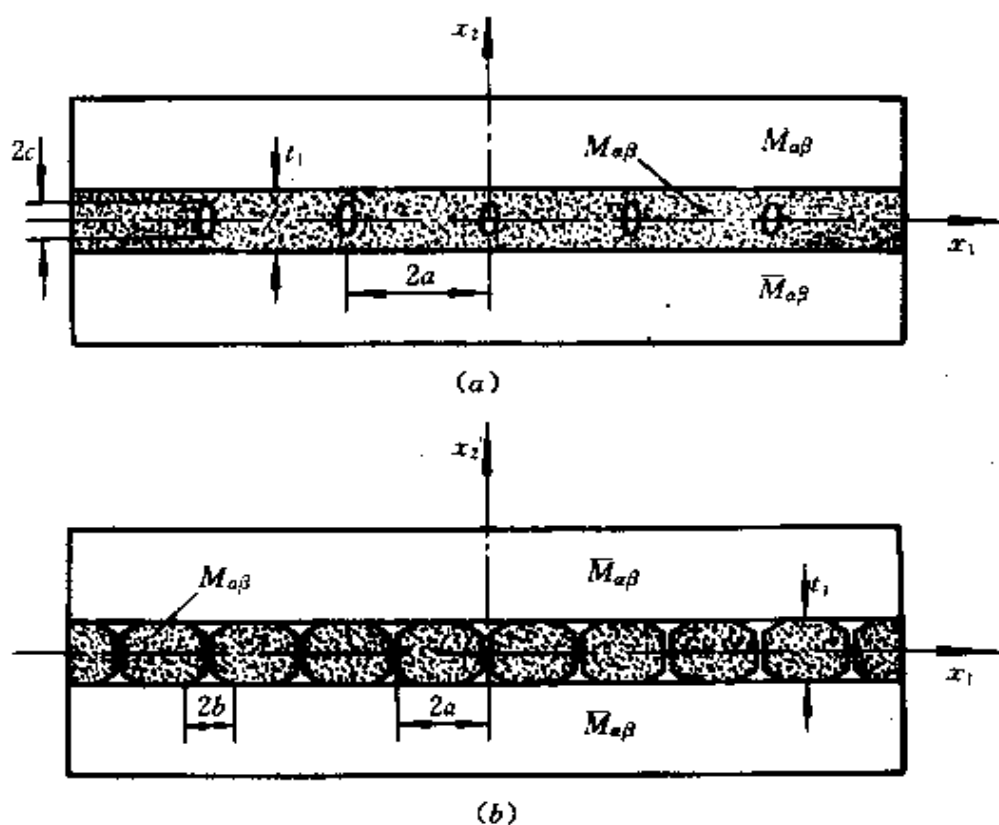


图 6.8 Sandwich 假设

(a) 初始穿层断裂; (b) 穿层/层间断裂交互作用。

6.6.2 初始穿层断裂

先讨论初始穿层断裂的影响,见图 6.8(a)。微裂纹的长度为 $2c$,其间距为 $2a$ 。当 $2c$ 比层厚 t_1 较小时,可利用 Delameter 等人^[13] 的双周期裂纹的列式来求解。Yang 和 Boehler^[12] 将上述求解方案推广到横观各向同性材料的情况,并运用了更为有效的高斯-契比雪夫积分方程解法(Erdogan^[14])。穿层裂纹尖端的应力强度因子表达式为

$$K_{I1} = \sigma_1 \sqrt{\pi c} B_1(1), \quad K_{II1} = \sigma_1 \sqrt{\pi c} B_{II1}(1) \quad (6.44)$$

而 $B_1(1)$ 与 $B_{II1}(1)$ 随微裂纹参数 a/c 和 $t_1/2c$ 的变化规律见图 6.9。

这一结果可用来估算正交层合板由于裂纹而造成的总体刚度变化。若记任一单层板(横观各向同性)在不含微裂纹时的柔度矩阵为

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_z}{E} & & & \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_z}{E} & & & \\ & & \frac{1}{E_z} & & & \\ & & & \frac{1}{G_z} & & \\ & & & & \frac{1}{G_x} & \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \dots \dots \quad (6.45)$$

对 称

式中, z 为沿纤维的方向,则含微裂纹层板模量 \bar{E}_z, \bar{E} 与无裂纹层板模量 \bar{E}_{z0}, \bar{E}_0 之间可建立下述关系

$$\frac{\bar{E}_z}{\bar{E}_{z0}} = \frac{\bar{E}}{\bar{E}_0} = 1 - \frac{1 - c_x}{1 + \beta c_x} \cdot \frac{1}{1 + \alpha/g_i(p, q)} \quad (6.46)$$

式中, c_x 为 0° 层板的厚度百分比; 参数

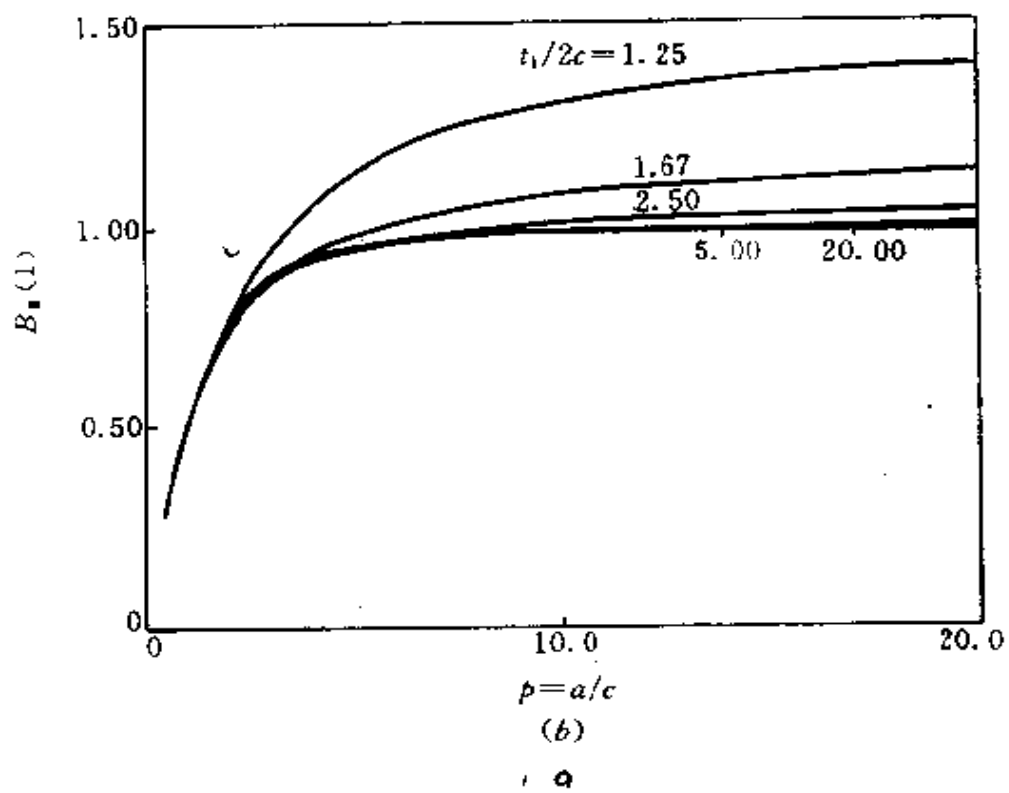
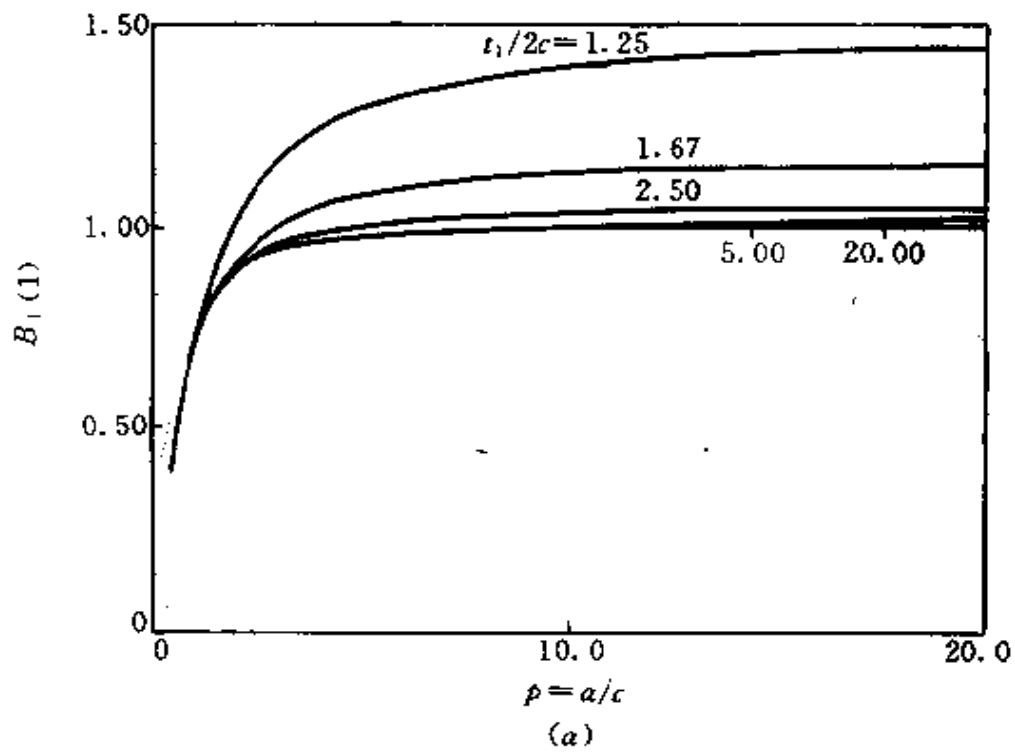


图 6.9 初始穿层断裂的无量纲应力强度因子
(a) I 型断裂; (b) II 型断裂。

$$\alpha = \frac{1}{4\pi(\lambda - \nu_2^2)}, \quad \beta = \frac{E_2}{E} - 1, \quad p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{t_1}{2c} \quad (6.47)$$

函数 $g_1(p, q)$ 由下式给出

$$g_1(p, q) = \frac{\pi}{pq(4m+1)} \sum_{k=1}^m s_k B_1(s_k) \quad (6.48)$$

式中, m 为进行高斯—契比雪夫积分时所划分的区间数, 常为一个较大的整数值; 分点 s_k 为

$$s_k = \cos\left(\frac{2k-1}{4m}\pi\right) \quad k = 1, \dots, m \quad (6.49)$$

式(6.46)的估计与 Grove 等^[15]关于 Hercules AS4/3502 层合板的测试数据符合很好, 见图 6.10。参数确定的细节请参阅 Yang 与 Boehler^[12]。

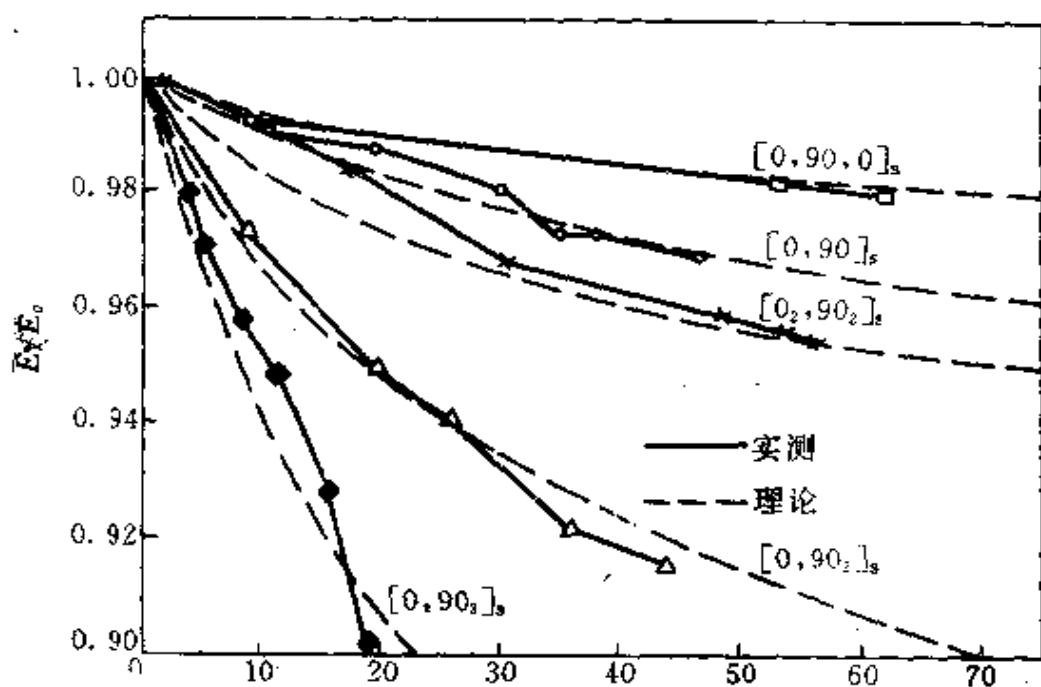


图 6.10 正交铺设层合板中由于穿层断裂所造成的刚度下降

横坐标为每 in 薄层中的裂纹数; 实线为 Grove 等^[15]

的实测数据; 虚线为理论预测, $q = 1.15$ 。

层合板由于穿层微裂纹而造成的泊松比变化为

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu_0} = \frac{\bar{\nu}_2}{\nu_{20}} = \frac{\bar{E}}{E_0} \quad (6.50)$$

即随微裂纹密度增加, 等效泊松比下降, 这一预测与实验数据定性

符合。

6.6.3 穿层/层间组合断裂

我们继而讨论图 6.8(b) 中所示的穿层/层间组合断裂的情况。鉴于对称性, 在分析中可只考虑图 6.8(b) 所示纵剖面图形的一半。若中心薄板遵循考虑横向剪切效应的平板理论、约束基体的厚度远大于单层铺板的厚度、且界面粘接为理想时, 可由下述界面协调方程 (Yang^[16], Yang 和 Boehler^[12])

$$f_s(u) - \varepsilon^2 f_s''(u) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \eta \cot[\eta(s-u)] df_s(s) - 1 \quad (6.51)$$

来求解含裂纹中心薄层的无量纲膜力 f_s 。在上式中

$$u = \frac{x_1}{a-b}, \quad \eta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{b}{a} \right), \quad \gamma = \frac{\lambda t_1}{a-b} \quad (6.52)$$

式中, a 与 b 的意义已经在图 6.8(a) 中定义; f_s , ε 和 λ 的表达式随平面应变与反平面剪切问题有不同的表达式。对平面应变问题

$$\left. \begin{aligned} f_s(u) &= \frac{2}{E \varepsilon t_1} \frac{1 + \hat{\nu}^2}{1 - \nu \nu_2} \int_{b-a}^{x_1} \tau_1(x_1') dx_1' \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{2(1+\nu)(1-\nu \nu_2)}{3(1+\hat{\nu}^2)}} \frac{t_1}{2(a-b)} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{U_1}{E} - \hat{\nu}^2 \bar{\varepsilon}^{(1)} \\ \lambda &= \hat{S} \frac{E}{E} \frac{1 - \nu \nu_2}{1 + \hat{\nu}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

对反平面剪切问题

$$\left. \begin{aligned} f_s(u) &= \frac{2}{G_z \varepsilon t_1} \int_{b-a}^{x_1} \tau_3(x_1') dx_1' \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t_1}{2(a-b)} \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{M}_{55} \sigma_{11} \\ \lambda &= \frac{1}{2} G_z \sqrt{\bar{M}_{44} \bar{M}_{55}} \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

式中, τ_1 与 τ_2 为界面剪应力; $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ 是沿薄层界面的平均正应变; 而

$$\hat{\nu} = \frac{\nu(1 + \nu_2)}{1 - \nu\nu_2}, \quad \hat{S} = \text{Im} \left\{ \frac{S_1 + S_2}{2} \right\} \quad (6.55)$$

式中, S_1 与 S_2 为正交各向异性材料的特征根, 见 Yang 和 Boehler^[12]。

式(6.51)中的 $\varepsilon^2 f''(u)$ 项代表横向剪切效应的影响, 而 ε 为正比于 $t_1/2(a-b)$ 的小参数。在 ε 为无限小时, 膜力 f (简记为 f) 所遵循的退化方程为

$$\frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \eta \cot(\eta(s-u)) df(s) - f(u) = 1 \quad f(\pm 1) = 0 \quad (6.56)$$

它是具有 Hilbert 核的微分-积分方程。在 $a \gg b$ 时上式进一步简化为 Prandtl 机翼方程。方程(6.56)可由高斯-契比雪夫积分技术求解。该解答显示界面剪应力在层间裂纹尖端具有 $-\frac{1}{2}$ 次奇异性, 而层间应力强度因子可写为

$$K_{I,II} = \sigma_{I,II} \sqrt{t_1} k \quad (6.57)$$

从上式可以明显看出 K_I 和 K_{II} 对层厚 t_1 的平方根依赖性。I 型与 II 型的公共无量纲应力强度因子 k 是 a/t_1 与 b/t_1 的函数。在 a 固定(层间断裂)与 b 固定(穿层断裂)时 k 的变化如图 6.11 所示。

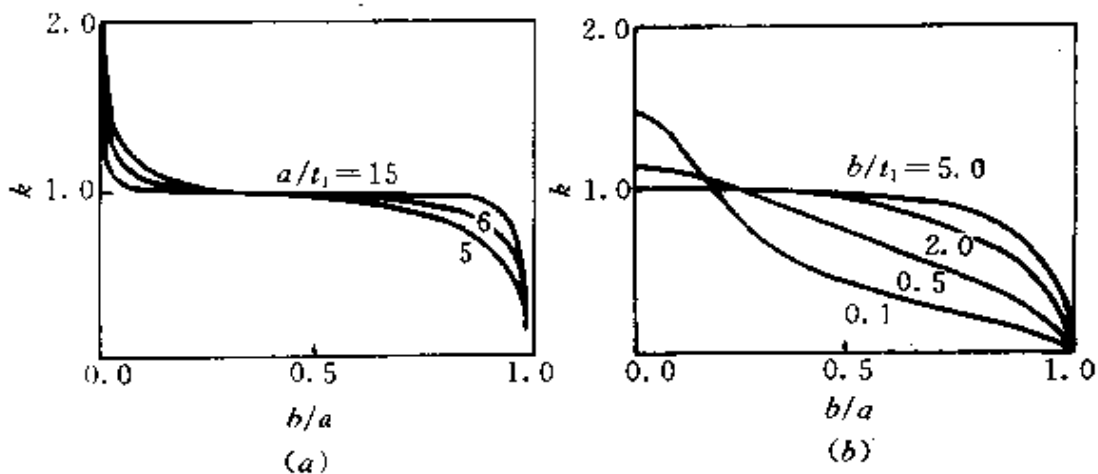


图 6.11 双重断裂时层间 SIF 随裂纹几何的变化

(a) a 固定; (b) b 固定。

由图 6.11 所绘的无量纲层间应力强度因子变化曲线可看出:

①当穿层裂纹到达层间界面时 ($a/b = 0$), 会立即触发层间断裂(因为这时 k 为无穷大)。随层间裂纹的扩展(即 a/b 值的增加), 层间断裂会由逐渐丧失推动力而止裂。

②可由这一双重断裂分析求出从穿层断裂至层间断裂的转折点, 即“临界损伤状态”(CDS)。该状态对应于图 6.11(a)与图 6.11(b)中相应曲线的“等斜率点”。对应 CDS 的临界载荷水平为

$$\sigma_{I, I} = \frac{K_{I, I, C}}{\sqrt{t_1} k(a_c/t_1, b_c/t_1)} \quad (6.58)$$

式中, $K_{I, I}$ 与 $K_{I, C}$ 为层间粘合剂沿 x_1 与 x_3 方向剪开的分层韧性。CDS 的裂纹几何 (a_c, b_c) 可由函数 k 的等斜率下降点或由能量平衡法则来确定, 见 Yang 与 Boehler^[12]。

对式(6.51)所对应的非退化方程, 可根据直接迭代法得到其均匀有效的渐近解。有趣的是: 应用非退化方程(6.51)时, 层间剪应力的奇异性消失, 而得到有界的层间边缘剪应力 $\tau_{边}$

$$\tau_{边} = \beta k \tilde{\varepsilon} \begin{cases} \sqrt{\frac{E\bar{E}}{2\bar{S}}} \left[\frac{3(1-\nu\nu_2)}{2(1+\nu)(1+\nu^2)} \right]^{\frac{1}{4}} & \text{平面应变} \\ \sqrt{G_2} \left[\frac{3}{M_{14}M_{55}} \right]^{\frac{1}{4}} & \text{反平面剪切} \end{cases} \quad (6.59)$$

式中, 无量纲因子 β 略小于 1, 其计算可参见 Yang 和 Boehler^[12]; 而其他符号均已在前面定义。因此, 基于式(6.58)的层间应力强度因子准则也可以解释为基于式(6.59)的层间边缘剪应力准则。图 6.12 绘出了粘接边缘附近剪应力(已按 $\tau_s(u) = \frac{d}{du} f_s(u)$ 进行无量纲化)的外场解、内场解和过渡解相对于无量纲裂尖距离

$$r = \frac{1-u}{\varepsilon} \quad (6.60)$$

的变化。可以看出, 当 $r > 3$ 时, 方程(6.56)与方程(6.51)的解非常接近。

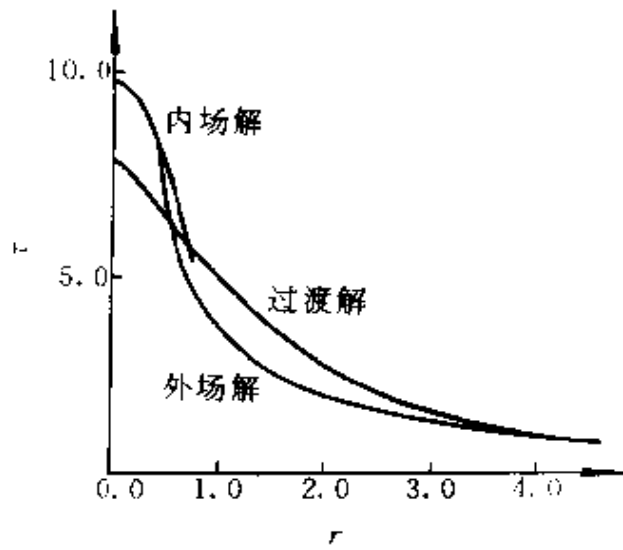


图 6.12 粘接边缘附近的剪应力

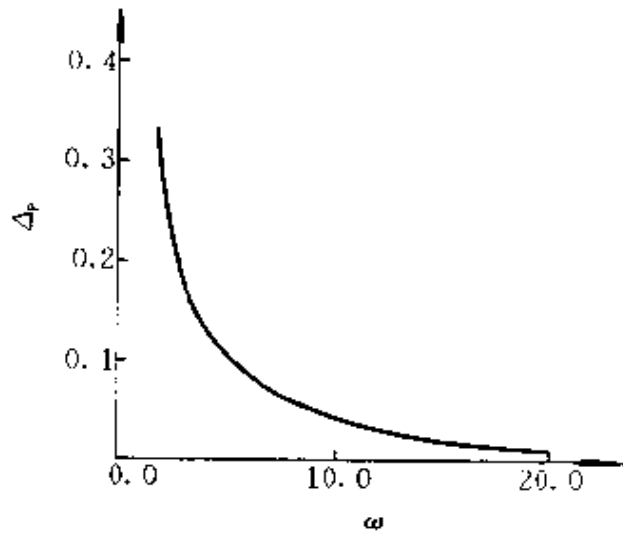


图 6.13 粘结边缘的无量纲收缩

在完好层间粘合假设下,只能得到图 6.14 中虚线所示的伪弹性损伤响应,且在任意加载循环后的残余应变均为零,参阅上节。这与多种复合材料层合板的实测数据有较大出入。若摒弃建立式 (6.51) 时所采用的完好层间粘合假设,而代之以非交互理想层间

滑移模型, 见 Yang 与 Boehler^[12], 便可预测出永久损伤应变、稳定迟滞环和卸载后残余界面应力等现象。其中由最大应变载荷 $\bar{\varepsilon}$ (其定义见式(6.53)或式(6.54)) 在层间裂纹尖端所引起残余滑移为

$$\delta_p = 2(a-b)\bar{\varepsilon}[\Delta_p(\omega) - \Delta_p(2\omega)] \quad (6.61)$$

式中, Δ_p 相对于 ω 的曲线在图 6.13 中给出, 而

$$\omega = \frac{\tau_s}{\bar{\tau}} \quad (6.62)$$

代表粘合剂屈服应力 τ_s 与外载折算剪应力 $\bar{\tau}$ 之比。对平面应变与反平面剪切情况, 有

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \frac{\gamma \bar{E}}{2S} \bar{\varepsilon} & \text{平面应变} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{M_{44} M_{55}}} \bar{\varepsilon} & \text{反平面剪切} \end{cases} \quad (6.63)$$

在这一模型下的循环塑性响应如图 6.14 中实线所示。

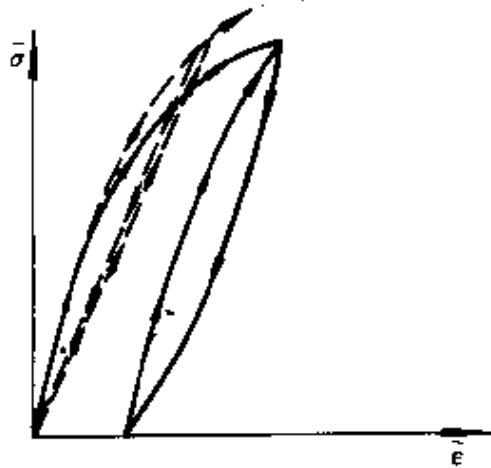


图 6.14 复合材料层合板的循环塑性响应预测

虚线—理想粘合模型; 实线—理想滑移模型。

若考虑粘结层沿 x_1 向剪切屈服与沿 x_3 向剪切屈服的交互效应, 则可能得到具有非正交结构的损伤本构响应。若粘结层不是理想塑性的, 则应力应变迟滞回线不会即刻稳定, 而出现实验中常观

察到的“循环蠕变”现象。

6.7 微裂纹损伤的其他问题

作为本章的结束,我们在这一节中列举微裂纹损伤的其他若干问题。

1. 加载引起各向异性

断裂力学中的裂纹扩展法则是:裂纹沿着使 I 型应力强度因子取最大值的路径扩展。这一裂纹扩展法则往往使弥散分布的微裂纹在确定外载荷下逐渐产生取向效应。此外,微裂纹对压缩应力和拉伸应力的响应也各不相同。在压缩应力下,裂纹发生闭合,且闭合的裂纹表面还会对沿面的剪切滑错产生摩擦力。事实上,下列情况均导致“加载引起各向异性”。

①在微裂纹演化过程中,裂纹面平均法向 n 朝最大拉伸应力轴的转动。

②裂纹张开与闭合行为的不同,以及在压缩正应力作用下产生的摩擦阻力。

2. 加载路径相关性

微裂纹损伤固体的变形响应与加载路径有关。如图 6.15 所示,路径 I 与路径 II 的始态和终态均相同,但它们的中间加载路径

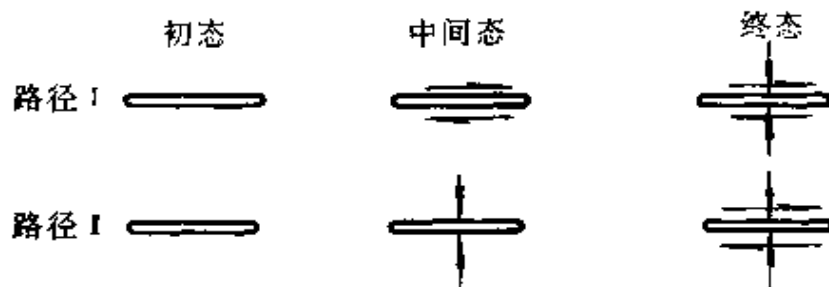


图 6.15 本构响应的加载路径相关性

不同。对加载路径 I, 其剪切变形先于压缩加载进行, 因此在剪切时不必考虑任何可能由压缩闭合引起摩擦阻力。然而, 对加载路径 II, 压缩载荷先于剪切变形施加, 且在第二步剪切变形时该压缩载荷维持不变。于是, 预先施加的压缩正应力便会对随后进行的剪切变形产生裂纹面库仑型摩擦阻力。这样, 图 6.15 中的两条起终点相同的变形路径将表现出不同的各向异性响应。这一加载路径相关性曾由 Kachanov^[17] 和 Horri 与 Nemat-Nasser^[10] 加以论述。

3. 耦联效应

对混凝土与结构陶瓷这类非均质材料, 可能会产生图 6.16 所示的压致劈裂现象。于是, 不仅与裂纹面垂直的拉应力可引起非线性损伤变形, 平行于微裂纹面的压缩应力也能引起非线性损伤变形。这一现象曾由 Ortiz^[18] 和 Bazant^[19] 详细讨论, 并称之为耦联效应。Ortiz^[18] 还通过数值计算展示了考虑耦联效应后若干种材料变形响应的范例。

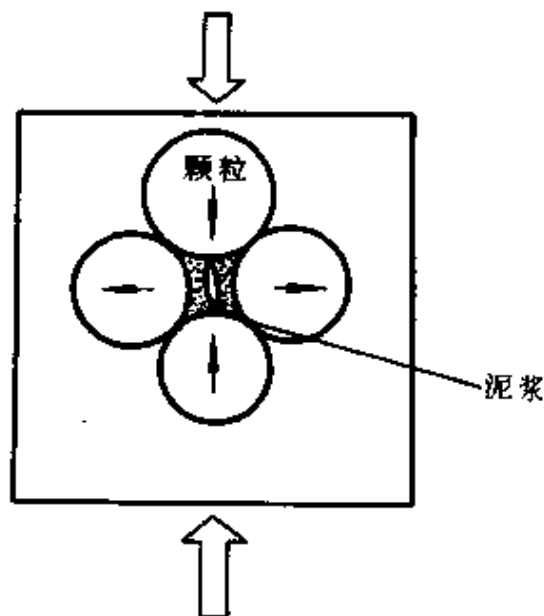


图 6.16 压致劈裂与耦联效应的示意图

参 考 文 献

- 1 Laws N, Brockenbrough J R. The effect of microcrack systems on the loss of stiffness of brittle solids. *Int. J. Solids & Struct.*, 1987, 23, 1247~1268
- 2 Hoerig A. Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *Int. J. Solids & Struct.*, 1979, 15, 137~154
- 3 Budiansky B, O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked solids. *Int. J. Solids Struct.*, 1976, 12, 81~97
- 4 Laws N. A note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials. *Mech. Mater.*, 1985, 4, 209~212
- 5 Oda M. A method for evaluating the effect of crack geometry on the mechanical behavior of cracked rock mass. *Mech. Mater.*, 1983, 2, 163~171
- 6 Kachanov M. Continuum model of medium with cracks. *Trans. of ASCE, J. Engng. Mech. Div.*, 1980, 106, 1039~1051
- 7 Kanatani K. *Tech. Rep. of Comp. Sci.*, Gunma Univ., 1982
- 8 Cowin S C. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. *Mech. Mater.*, 1985, 4, 137~147
- 9 Yang W, Boehler J P. On description of anisotropic damage in composite laminates. *Acta Mech. Sinica*, 1991, 7, 335~343
- 10 Horri H, Nemat-Nasser S. Overall moduli of solids with microcracks, load induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 1983, 31, 155~171
- 11 Hashin Z. Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *J. Appl. Mech.*, 1987, 54, 872~879
- 12 Yang W, Boehler J P. Micromechanics modelling of anisotropic damage in cross-ply laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 1992, 29, 1303~1328
- 13 Delameter W R, Hermann G, Barnett D M. Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks. *J. Appl. Mech.*, 1975, 42, 74~80
- 14 Erdogan F. Mixed boundary value problems in mechanics. In: Nemat-Nasser S ed. *Mechanics Today*, V. 4. New York; Pergamon Press, 1980. 1--85
- 15 Groves S E, Harris C E, Highsmith A L, Allen D H, Norvell R G. An experimental and analytical treatment of matrix cracking in cross-ply laminates. *Expr. Mech.*, 1987, 27, 73~79
- 16 Yang W. Anisotropic damage of cracked composite laminates. In: Zheng Z ed. *Proc. of Int. Conf. of Appl. Mechanics*. Beijing; International Academic Publisher, 1989. 959~

963

- 17 Kachanov M L. A microcrack model of rock inelasticity, part 1, frictional sliding on microcracks. *Mech. Mater.* , 1982, 1: 19~27
- 18 Ortiz M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mech. Mater.* , 1985, 4: 67~93
- 19 Bazant Z P. Mechanics of distributed cracking. *Appl. Mech. Rev.* , 1986, 39: 675~705

第7章 断裂过程区

7.1 损伤引致断裂过程区

通常假定处于临界状态的裂纹沿一条平直的途径向前扩展,而很少注重裂纹尖端断裂过程区内由损伤所引致的形貌变化。对预制裂纹试件的实验观察,却时常表现出非线性型的裂纹扩展形貌:如裂尖分叉,见 Ozmat, Argon 与 Parks^[1];裂尖超钝化,见杨卫等^[2],等等。在裂尖过程区形成的多种损伤形貌,反映了裂尖区变形的高度非均匀性,同时与基于材料微结构的细观损伤规律密切相关。因此,对损伤引致断裂过程的刻划在高强韧材料设计中具有重要意义。

损伤引致断裂过程区的建模可分为两类:①线型或条带型损伤区;②扩散型损伤区。前者使裂纹的线缺陷形貌得以持续,其典型例子有:①条状塑性区模型,如 Dugdale-Barenblatt 模型;②条状损伤区模型,如 Hult-Jason 模型;③条状界面过程区模型,见 Needleman^[3], Tvergaard 与 Hutchinson^[4];④损伤区汇聚模型,如 Needleman 与 Tvergaard^[5];⑤条状细观损伤区计算模型,参见 Shih 与 Xia^[6], Xia, Shih 与 Hutchinson^[7]的最新工作。

条带型损伤区的主要特点在于:

①该模型使裂纹的线型缺陷几何特征在损伤引致的断裂过程中得以保持。

②它刻画了具有局部化(localization)特点的塑性失稳和损伤集中过程。由于这一局部化行为,可认为变形与损伤主要发生于某一条带之中。

③该模型易于建模和解析求解。可以利用桥联力学的模型来研究裂纹扩展问题,并进行强韧性估算。

关于条状损伤失稳区模型的完整叙述可参加 Cottrell 的早期总结^[8]。在该总结中 Cottrell 将条状过程区模型与各种变形和损伤机制相结合,体现了多种延性和脆性断裂损伤过程的精髓。

然而,条带型损伤区模型并不总是成功的。如杨卫^[2],Guo 与 Yang^[9]对 PP/HDPE/SBS(一种橡胶增韧半晶型高分子材料)在不同加载速率和加载幅度下进行了平面应变区裂尖损伤形貌的电镜观察,发现有尖劈、钝劈、矛头、超钝化等多种损伤引致的裂尖形貌,见图 7.1(c)、(d)、(b)、(a)。这些形貌演化无法由条带型损伤区

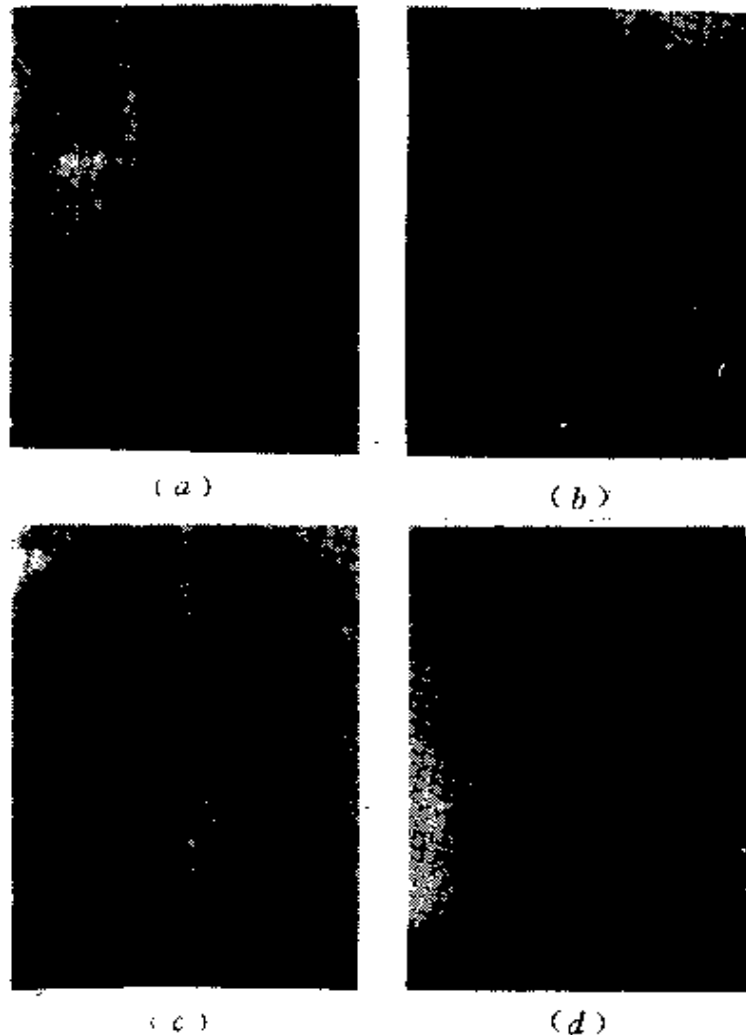


图 7.1 PP/HDPE/SBS 半晶型高分子在不同加载率和加载幅度下的 4 种典型裂尖损伤形貌(引自 Guo 与 Yang^[9])

模型来刻划,且上述裂尖形貌特征在很大程度上决定了材料的韧性(见以下 8.5 节)。非条带型的损伤形貌远不止图 7.1 这几种。在细致地观察 304 不锈钢断裂试件在蠕变变形下的裂尖形貌演化后, Ozmat, Argon 和 Parks^[1]报导了裂尖蠕变分叉形貌。对脆性材料,裂尖分叉、二次分叉、多次分叉、乃至形成树状分叉结构的损伤区都是常见的断裂过程区形貌。

7.2 各向异性损伤演化律

7.2.1 损伤演化律

可在断裂过程区中引入一损伤场变量 ω 来刻划材料单元对应力承载能力的丧失, ω 的变化范围从 0(无损伤)至 1(完全损伤)。对微孔洞损伤的情况,可将 ω 取为孔洞体积百分比。在许多实际情况下,材料损伤失稳(可取孔洞汇合、银纹网络化、微裂纹滲透等形式)可在 $\omega = \omega_c \ll 1$ 时发生。Yang^[10]对几种常用损伤演化律下发生损伤集中的临界值 ω_c 进行了估算。

作为一种最简单的损伤演化律,可由下式来描述由于塑性流动而引起的剪切屈服损伤

$$\dot{\omega} = A \dot{\epsilon}^p \quad (7.1)$$

即损伤率 $\dot{\omega}$ 与有效塑性应变率 $\dot{\epsilon}^p$ 成正比。幅值因子 A 可大致表达为 $\omega_c/\bar{\epsilon}^p$, 其中 $\bar{\epsilon}^p$ 为单拉试件破断时的对数塑性应变。

损伤演化律式(7.1)只在各向同性损伤且无静水应力的极端条件下成立。然而,静水应力通常是制约多种损伤机制(如二相粒子处的损伤形核、微孔洞和银纹物质的长大)的主要参量。Rice 与 Tracy^[11]给出了静水应力对损伤演化影响的定量规律,他们论证损伤演化率应正比于 $\exp\left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right)$ 。式中, σ_m 为平均静水应力; $\bar{\sigma}$ 为 J_2 流动应力。若同时考虑静水应力和损伤各向异性的影响,可将式(7.1)推广为(Guo 与 Yang^[9])

$$\dot{\omega} = Af(\theta)\exp\left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) \quad (7.2)$$

上式中除了 Rice-Tracy 因子 $\exp\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma}\right)$ 以外,还包括了一个取向函数 $f(\theta)$ 。 θ 表征材料细观结构取向(如高分子材料的初拉伸方向,复合材料的纤维方向等)与最大变形率主向的夹角; $f(\theta)$ 表示损伤各向异性的影响。对 $f(\theta)$ 应进行归一化,使其在损伤各向同性的特例下为单位值。

7.2.2 取向函数

本节构造平面应变下取向函数的一类近似表达式。该构造借助于下述定义的最大面内剪切率 $\dot{\gamma}_{\max}$

$$\dot{\gamma}_{\max} = \sqrt{\frac{(d_{22} - d_{11})^2}{4} + d_{12}^2} \quad (7.3)$$

式中, $d_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) 是定义于即时构形的变形率张量。若施加一个与材料细观结构取向呈 θ 角 ($< \frac{\pi}{2}$) 的单向塑性应变率 $\dot{\epsilon}$, 且忽略弹性变形, 则有

$$d_{11} = \dot{\epsilon} \sin^2 \theta, \quad d_{22} = \dot{\epsilon} \cos^2 \theta, \quad d_{12} = \dot{\epsilon} \sin \theta \cos \theta \quad (7.4)$$

这里规定材料细观结构取向沿 X_2 轴。对各向同性损伤的情况, 可将“取向函数”定义为 $f = 2\dot{\gamma}_{\max}/\dot{\epsilon}$, 这时易于验证 f 恒等于 1。对各向异性损伤, 可对式(7.3)进行下述“混合”型的各向异性修正

$$\dot{\gamma}_{\max}^* = \sqrt{\frac{(d_{22} - d_{11} - d^*)^2}{4(1 - \xi)} + d_{12}^2} \quad (7.5)$$

式(7.5)包含两个无量纲的各向异性损伤参量 ξ 和 $\eta = d^*/\dot{\gamma}_{\max}$ 。 ξ 表示 Hill 型各向异性损伤, 它标度拉伸类损伤和剪切类损伤的相对比值。如图 7.2(a)所示, ξ 为正时拉伸类损伤占优, ξ 为负时剪切类损伤占优。各向同性损伤对应于 $\xi = 0$ 的情况, 在以 $\frac{d_{22} - d_{11}}{2}$ 和 d_{12} 为正交坐标轴的平面中绘制的等 $\dot{\gamma}_{\max}^*$ 轮廓线为圆。 ξ 值非零时, 该圆变为椭圆。

另一损伤参量 η 表征 Bauschinger 型各向异性损伤。真实材料

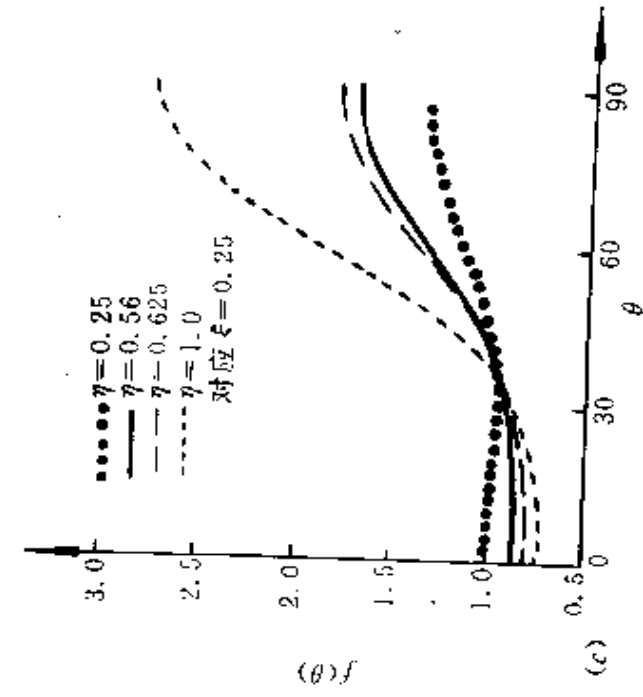
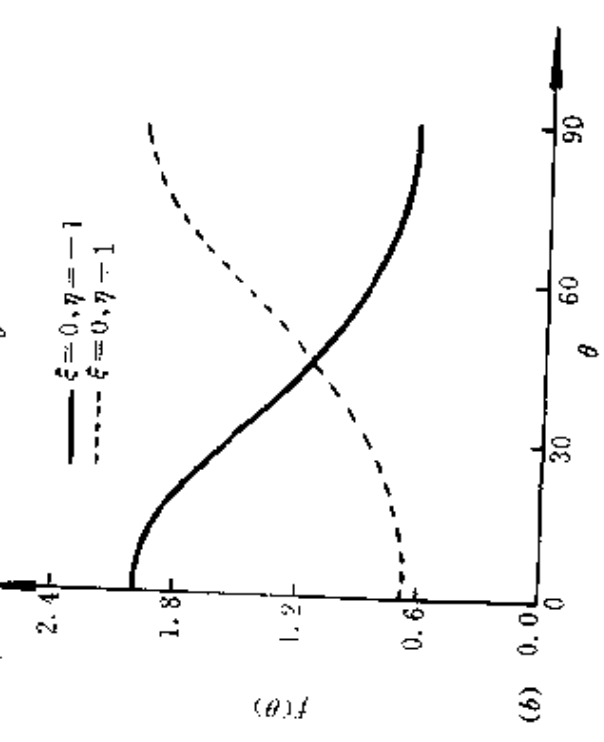
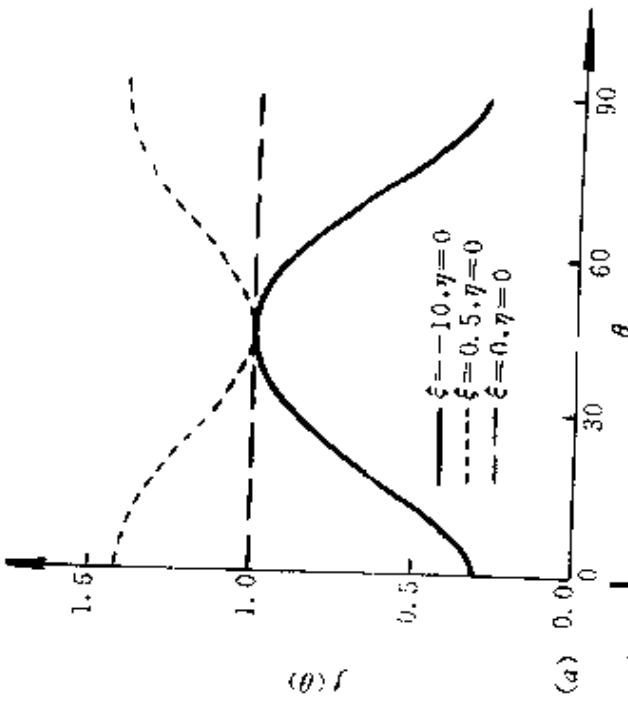


图 7.2 取向函数 $f(\theta)$

(a) Hill 型各向异性损伤的效应; (b) Bauschinger 型各向异性损伤的效应; (c) 数值模拟中所采用的诸 $f(\theta)$ 曲线、



在下的损伤行为不同,将这种“Bauschinger 效应”引入取向函数的最简便方法是在 $\frac{d_{22} - d_{11}}{2} - d_{12}$ 平面的等损伤率椭圆中引入一个中心移位 d^* , 参见 Brown, Duckett 与 Ward^[12]。 η 为正值代表损伤由垂直于材料细观结构取向的变形控制(如纤维复合材料和高分子材料的横向损伤机制), η 为负值代表损伤由平行于材料细观结构取向的变形控制(如纤维复合材料的纤维断裂与拔出, 高分子材料的主链断裂等)。图 7.2(b)中描述了 η 对取向函数的影响。

与各向同性损伤类似,各向异性损伤的取向函数可简单地定义为 $2\dot{\gamma}_{\max}^*$ 与 $\dot{\epsilon}^p$ 的比值,于是

$$f \equiv \frac{2\dot{\gamma}_{\max}^*}{\dot{\epsilon}^p} = 2 \frac{\cos^2 2\theta + (1 - \xi)\sin^2 2\theta}{\eta \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \xi)[4 - (4\xi + \eta^2)\sin^2 2\theta]}} \quad (7.6)$$

推导以上第 2 等式时利用了式(7.4)与式(7.5)。在不同 ξ 与 η 值时取向函数 f 的变化如图 7.2 所示,参数 ξ 与 η 的范围为

$$-\infty < \xi < 1, \quad -2\sqrt{1 - \xi} \leq \eta \leq 2\sqrt{1 - \xi} \quad (7.7)$$

对主链方向沿 x_2 轴的 PP 共聚物, ξ 与 η 值均应为正。图 7.2(c)中给出了若干典型 η 值下 $f(\theta)$ 的变化曲线,这时 ξ 固定为 0.25。

7.3 断裂过程的损伤计算力学

本节描述在各向异性损伤演化律式(7.2)下的损伤计算力学框架,其细节可参阅 Guo 与 Yang^[9]。

7.3.1 本构列式

可在 Moran, Ortiz 与 Shih^[13]的大变形超弹性—粘塑性计算框架中加入损伤来建立本构列式。由变形梯度的弹塑性乘法分解可导致对总变形率张量 d 的加法分解

$$d = d^e + d^p \quad (7.8)$$

将上式映照至卸载中间构形,便得到其对应量 D , \bar{D}^e 和 \bar{D}^p 之间的

关系。为避免选择客观共旋率的困难(参阅 Yang 等^[14]),可采用 Moran 等^[13]建议的超弹性描述

$$\bar{S} = (1 - \omega)[\lambda_0 \ln(\det F^e) \bar{C}^{-1} + \mu_0 (1 - \bar{C}^{-1})] \quad (7.9)$$

式中, λ_0 与 μ_0 为参照构形中的 Lamé 弹性常数; $\bar{C} = \bar{F}^T \cdot g \cdot \bar{F}$ 为弹性右 Cauchy-Green 变形张量; g 为协变度量张量; \bar{F} 为弹性变形梯度; \bar{S} 为中间构形的第 2 类对称 Piola-Kirchhoff 应力张量。式 (7.9) 中已引入了损伤对材料弹性模量的修正。

由正交流动法则, 可将塑性变形率写为

$$\bar{D}^p = \frac{3\dot{\bar{\epsilon}}^p}{2\bar{\sigma}} \text{sym} \bar{C} \cdot \bar{S} \cdot \bar{C} \quad (7.10)$$

式中, \bar{S} 为 \bar{S} 的偏量; sym 表示对称化操作。平均应力 σ_m 、有效应力 $\bar{\sigma}$ 和有效塑性应变 $\bar{\epsilon}^p$ 定义为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} \bar{S} : \bar{C} & \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\bar{S} \cdot \bar{C}) : (\bar{S} \cdot \bar{C})} \\ \bar{\epsilon}^p &= \int \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = \int \sqrt{\frac{2}{3} d^p : d^p} dt \end{aligned} \right\} (7.11)$$

我们尚需给出有效应力与有效应变的关系, 该关系取决于具体的材料体系。由五种 PP 体系的准静态拉伸数据, 可得其准静态有效应力的表达式为

$$\bar{\sigma}_m = H(\bar{\epsilon}^p, \omega) = (1 - \omega) \sigma_y \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^p}{\epsilon_y} \right)^n \quad (7.12)$$

式中, ϵ_y 与 σ_y 分别为材料的屈服应变与屈服应力; n 为应变硬化指数。材料的率敏感性质可由下述“过应力”型关系来表征

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_0 \left[\left(\frac{\bar{\sigma}}{H(\bar{\epsilon}^p, \omega)} \right)^m - 1 \right] \quad (7.13)$$

式中, $\dot{\epsilon}_0$ 为率敏感系数; m 为率敏感指数。PP 及其共聚物的材料数据 $\sigma_y, \epsilon_y, \dot{\epsilon}_0, m, n$ 在文献[9]中给出。

最后给出取向函数 $f(\theta)$ 中 θ 角的表达式。由定义可知

$$\theta = |\varphi - \beta| \quad (7.14)$$

式中, φ 为变形率主向与即时铅直坐标 x_2 的夹角; β 为材料细观结

构取向(原平行于参照构形下的铅直轴)与即时坐标 x_2 轴的夹角。对近似不可压缩的平面应变情况, φ 角应为

$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{若 } d_{11} \leq d_{22} \\ \frac{\pi}{2} - \alpha & \text{若 } d_{11} > d_{22} \end{cases} \quad (7.15)$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left| \frac{2d_{12}}{d_{11} - d_{22}} \right| \quad (7.16)$$

从变形几何学, β 角由下式给出

$$\beta = \cos^{-1} \left| \frac{F_{22}}{\sqrt{F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2}} \right| \quad (7.17)$$

式中, F_{ij} 为变形梯度张量的直角坐标分量。

7.3.2 数值模拟

现讨论上述损伤和本构框架下的有限元数值实施。对本构积分采取 Moran 等^[13]对弹塑性大变形问题的半隐式格式。在计算中加入可容纳损伤演化的修正,并按单元平均的显式格式来模拟损伤演化

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{V^e} \int_{V^e} \dot{\omega} \, dV \quad (7.18)$$

式中, V^e 为参照构形中的单元体积; $\dot{\omega}$ 由式(7.2)给出。式(7.18)中的积分可对单元中所有高斯积分点的 $\dot{\omega}$ 值经加权平均得出。在数值模拟中采用了单元消逝技术,当 Ω 达到 0.99 时,便在 10 至 15 个后续加载步内将该单元邻接的全部非凹节点力逐步消除为零。

在上述计算方案下对 PP/HDPE+SBS10%的裂尖形貌演化进行了数值模拟。其材料参数为 $E/\sigma_c = 54.7$, 泊桑比 $\nu = 0.435$, $n = 0.1$, $m = 20$, $A = 0.4$ 。其中 A 值由单向拉伸时破坏应变为 500% 定出。在数值研究中采纳了小范围屈服的边界层构形;即取一半径

为 R 的平面应变圆盘,沿负水平轴开有裂纹,裂尖初始缺口半径为 $r_{\text{tip}} = 0.001R$ 。加载过程由外缘边界上应力强度因子值的增量加载来实现,其加载速率为 $\sigma_y \dot{\epsilon}_0 \sqrt{R}$ 。由于问题的对称性,仅需对上半平面进行离散计算。有限元网格为 32 层聚集在裂尖的逐级放大网络,含有 639 个四边形等参元。有限元数值模拟的结果揭示出图 7.3 所示的五种裂尖损伤形貌:超钝化、分叉、三分叉、尖劈与钝劈。

7.3.3 裂尖形貌讨论

1. 裂尖超钝化

在各向异性损伤演化律下进行了变形与损伤互相耦合的计算。取向函数 $f(\theta)$ 中的参数值取为 $\xi = 0.25, \eta = 0.56$ 。

图 7.3(a)中显示了由此得到的具有中度超钝化全损伤边缘形貌的裂尖构形。这时外载 $K = 0.98\sigma_y \sqrt{R}$,在该图上仅绘出了内 20 层网格的变形损伤形貌。在第一个损伤单元的 ω 值达到 0.99 时,其对应的平均对数应变值已超过 100%。裂尖前方区内所发生的大量塑性变形使该处 θ 角逐渐加大,导致裂尖前方区单元损伤的加速,从而造成超钝化构形。在超钝化裂尖处积累的大损伤使缺口边缘的单元应变逐渐下降到 70% 左右。若认为在 $\omega = 0.1$ 附近孔洞便发生失稳汇合(其分析见 Yang^[10]),则图 7.4(a)所示的 $\omega = 0.1$ 的等值线便勾勒出与图 7.1(a)中实验观察所类似的裂尖超钝化轮廓。

2. 裂纹分叉与矛头形貌

若重复上述计算,但将 Bauschinger 型损伤参数由 0.56 换至 1,便导致裂尖形貌的根本性变化,即从图 7.3(a)的超钝化形貌转变为图 7.3(b)的宽分叉形貌。图中所描述的分叉裂纹与 Ozmat 等^[1]对 304 不锈钢蠕变断裂形貌的实验量测十分相似。此外,若取 $\omega = 0.1$ 或 0.2 的等值线(见图 7.4(b))作为考虑孔洞汇合作用的损伤裂纹形貌,则可近似重现 PP 共聚物在实验中所观察的矛头形貌。

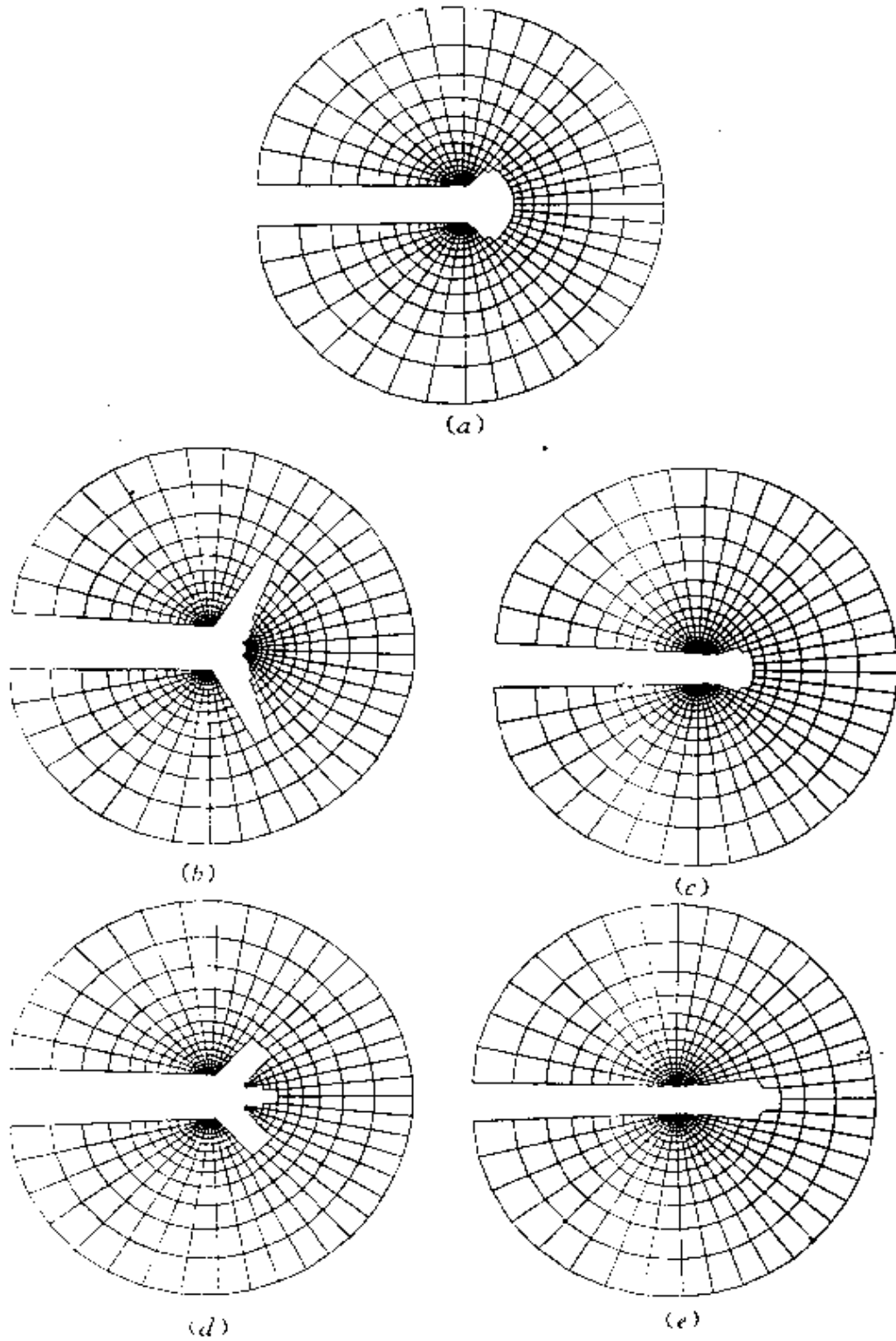


图 7.3 损伤引致裂尖形貌的数值模拟(除(c)外均取 $\xi=0.25$)
 (a) 超钝化, $\eta=0.56, K=0.98\sigma_0 \sqrt{R}$, 内 20 层; (b) 宽分叉, $\eta=1, K=0.8\sigma_0 \sqrt{R}$, 内 18 层; (c) 纯剪, $\eta=0, K=0.7\sigma_0 \sqrt{R}$, 内 18 层; (d) 三分叉, $\eta=0.625, K=0.9\sigma_0 \sqrt{R}$, 内 18 层; (e) 尖劈, $\eta=0.25, K=0.9\sigma_0 \sqrt{R}$, 内 22 层。

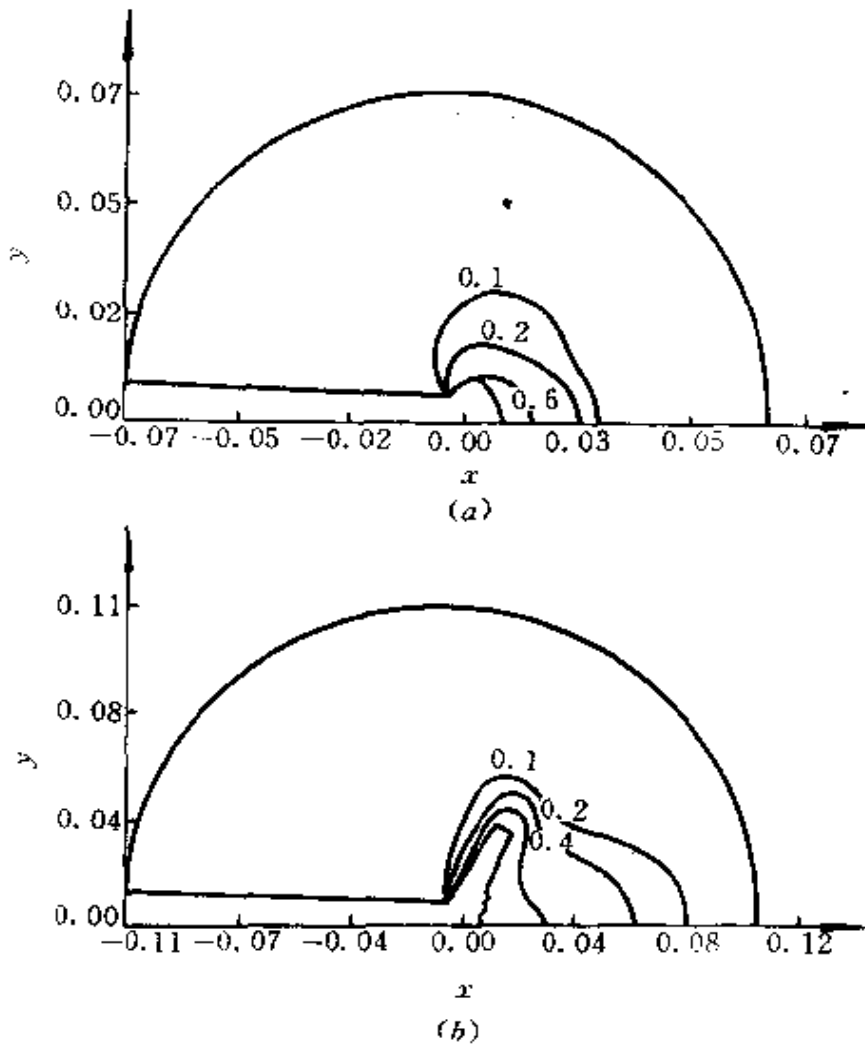


图 7.4 典型等损伤轮廓线
(a)超钝化型, $\eta=0.56$; (b) 矛头型, $\eta=0.1$ 。

3. 其他裂尖形貌

取向参数 η 对损伤引致裂尖形貌的影响可由对同样小范围屈服边界层构形的计算来加以例证。考虑各向同性损伤的情况 ($\xi = \eta = 0$)，则数值模拟结果给出图 7.3(c) 所示的钝劈形貌，与图 7.1(d) 中的实验观察形貌相似。若仍取 $\xi = 0.25$ ，但取 η 分别为 0.625 和 0.25，可模拟出图 7.3(d) 和 (e) 所示的三分叉裂尖形貌和尖劈形貌。图 7.3(e) 中的裂尖损伤形貌之所以称为尖劈是因为在裂纹沿长线上方只有一列单元由于损伤而消逝。

综上所述，这里提出的大变形超弹性—粘塑性各向异性损伤

模型得以展示丰富多彩的裂尖形貌演化图案,包括尖劈、钝劈、超钝化、矛头、双分叉和三分叉裂尖形貌。控制裂尖形貌几何的关键各向异性损伤参数是 Bauschinger 型损伤面中心移位比 η 。

7.4 裂尖区的离散塑性理论

从微米或界于微米与纳米之间的尺度来看:弹性变形仍可视作连续的,而塑性变形必须处理为离散的。也就是说,裂尖区的塑性变形可视为在弹性连续介质中嵌含的间距为微米量级之离散位错的运动,其裂尖场的力学建模见图 7.5。

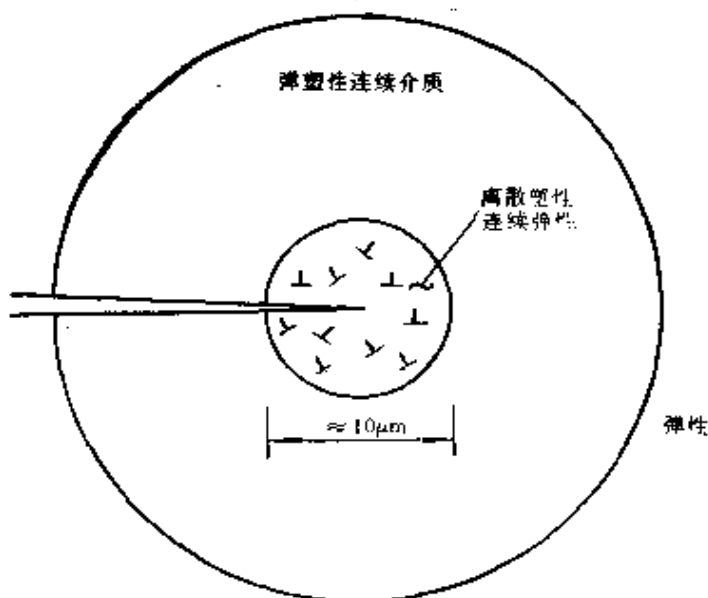


图 7.5 裂尖区的离散位错模型

裂纹尖端附近的离散位错可分为两类:自裂尖发射的钝化位错和裂尖可能会与之遭遇的背景位错^[15]。后者的分布间距为微米量级,而与裂纹遭遇后所产生的钝化量却低于纳米量级。所以,若自裂纹的位错发射机制受到有效抑制,裂尖将保持纳米级尖锐。

裂尖区的离散位错模型带来三个与之相关的研究命题:①裂尖区(或一般缺陷附近)的位错动力演化;②裂尖区的内嵌弹性核理论;③由位错发射与解理断裂所造成的材料韧脆属性问题。这三个命题将在后续各节中予以讨论。

7.5 位错计算力学

位错在固体中的运动及其聚集模式的变化可由位错计算力学来模拟。其基本要素为：①位错段(或位错环)自身场的解析解；②强奇异性剔除计算技术；③位错形核判据；④位错线段在分解剪应力驱动下的延展；⑤位错群体图象的数值模拟。

7.5.1 位错自身解

考虑经典的 Volterra 型位错。由量纲分析,各向同性弹性介质中一任意位错环的自身应力场 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{8\pi(1-\nu)} \hat{\sigma}_{ij} \quad (7.19)$$

式中无量纲自身应力 $\hat{\sigma}_{ij}$ 可由位错段叠加公式来近似

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^M [S_{ij}(z_{kt}) - S_{ij}(z_{ki})] \quad (7.20)$$

式中, M 为位错环的分段数。上式的右端写在局部坐标 (x, y, z) 上,且位错环平面位于 $x-z$ 平面。第 k 个位错段的起点与终点分别为 $(0, 0, z_k)$ 和 $(0, 0, z_t)$, 即局部坐标的 z 轴始终与所选择的位错段共轴。由起源于 z' 点的直位错射线对位错滑移面 ($y=0$) 内一场点所产生的应力即为式(7.20)中的 S_{ij} 矩阵,其具体表达式为

$$S_{ij}(z') = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -b_x \tan \alpha (1 + \cos^2 \alpha) & -b_x \tan \alpha & b_y (\cos^2 \alpha - \nu) \\ & -b_x \tan \alpha & \nu b_y - (1 - \nu) b_x \tan \alpha \\ \text{对称} & & b_x \tan \alpha (\cos^2 \alpha - 2\nu) \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

式中, (b_x, b_y, b_z) 为伯格斯向量在局部坐标系 (x, y, z) 上的分量; ν 为泊桑比; R 与 α 分别为从场点 (x, y, z) 至源点 $(0, 0, z')$ 向量的模长和它与正 x 轴的夹角。

7.5.2 强奇异性剔除技术

常规 Volterra 型位错环在位错芯附近具有强奇异性, 应力具有反比奇异性, 位移具有对数奇异性。这一强奇异性为数值求解造成了困难。为消除这一困难而发展了强奇异性剔除技术^[16,17], 该求解格式把三维位错环的应力场分解为下述三部分:

①位错环在无穷大介质中的自身应力场 σ_0^s , 由式(7.19)至式(7.21)给出;

②驱动力场 σ^{pp} (如外载、外延应力场、残余应力场等);

③复原面力场, σ_0^b , 由它来复原含位错结构的真实边界条件。

对应力场①与②, 一般可以进行解析求解。应力场③并不包含奇异性, 可用常规数值方法求解。由于该问题只涉及弹性介质和边界加载, 可方便地用边界元法求解。

7.5.3 分解剪应力

Peach-Kochler 公式的线性特征使我们可以把分解剪应力 τ 视为三部分的叠加

$$\tau = \tau^s + \tau^{pp} + \tau^b \quad (7.22)$$

式中, τ^s 为位错环在无穷大介质中由于自身交互作用而产生的分解剪应力。由式(7.19)与式(7.20)可得下述 τ^s 的无量纲形式

$$\tau^s = \frac{Eb}{8\pi(1-\nu)R} \sum_{k=1}^n [\hat{\tau}^s(R_{k1}, \alpha_{k1}) - \hat{\tau}^s(R_{k2}, \alpha_{k2})] \quad (7.23)$$

上式中方括号内的两项表示一直位错段或一曲位错段对位错环上任一点 P (场点) 处自身分解剪应力的影响, 而 R 与 α 的意义同第 7.5.1 小节。对图 7.6(a) 所示的直位错段 AB , 有^[17]

$$\hat{\tau}^s = \nu \sin 2\theta - \frac{1}{2}(2 - \nu - \nu \cos 2\theta) \cot(\theta - \beta) \quad (7.24)$$

式中, β 为从伯格向量转到位错段方向的夹角; $\theta = \frac{3\pi}{2} - \alpha + \beta$ 。上述位错滑移力的直位错段近似公式对大多数位错段足够精确, 除非该位错段位于场点 P 的邻近处。对后一种情况, 位错段 AB 的

曲率对 P 点的自身滑移力有重要影响,式(7.24)应由下式替代

$$\dot{\tau}^s = \frac{R}{\rho} \left[\frac{2 - \nu - 3\nu \cos 2\varphi}{4} \ln \tan \frac{\psi}{4} - \frac{3\nu}{2} \cos \left(\frac{\psi}{2} + 2\varphi \right) \right] \quad (7.25)$$

式中, ρ 为位错段的曲率半径; 夹角 ψ 和 φ 的意义在图7.6(b)中

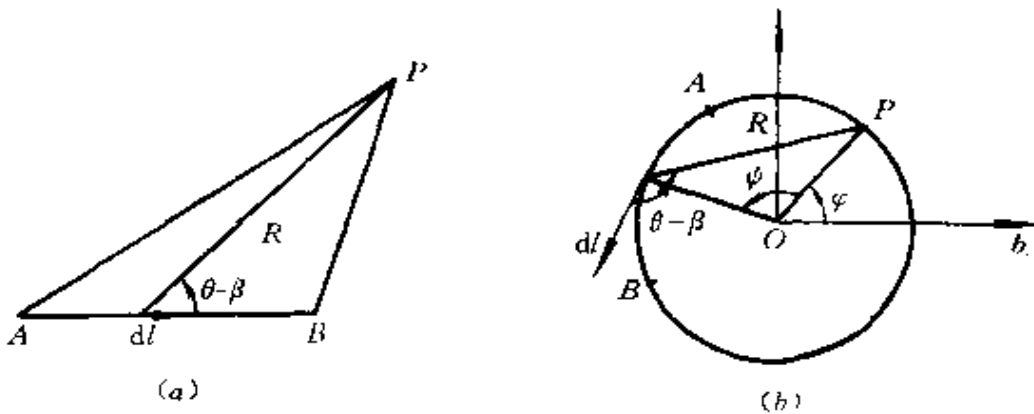


图7.6 位错段 AB 引起的分解剪应力计算

(a) 直位错段; (b) 位错弧段。

标出; φ 为伯格斯向量与直线 OP (O 为位错弧段的曲率中心) 的夹角; $\psi = 2(\pi - \theta + \beta)$ 。应该指出, 式(7.25)仅在 P 点与所考虑的位错弧段十分贴近时才精确。式(7.24)与式(7.25)可精确地包纳各种位错段与场点 P 之间的交互情况。

由驱动力场(外载、外延应力场和残余应力场)在无穷大介质中某一场点 P 所造成的分解剪应力较易计算。若已知驱动力场, 则有

$$\tau^{sp} = b_i \sigma_{ij}^s m_j / b \quad (7.26)$$

式中, b_i 为伯格斯向量, 其模为 b ; m_j 为位错滑移面法线向量。

同理, 若已知复原面力所产生的应力场 σ_{ij}^b , 可由同样的表达式

$$\tau^b = b_i \sigma_{ij}^b m_j / b \quad (7.27)$$

来计算 τ^b 。对复原面力场边界元计算的优点在于: 一旦问题求解,

便可解析地计算域内任一场点 P 处的 σ_0^* 和 τ^* 值。至此,由式(7.22)所表达的各项均已列出求解方案,其具体计算过程参见 Zhang 与 Yang^[17]。

7.5.4 位错形核判据

现考虑在某一缺陷邻域内的位错形核。最简单的形核判据是:在距离缺陷边缘某一特征尺寸 r_0 处放置一与缺陷边缘平行的位错弧段,若驱动力场下作用于该弧段的分解剪应力 τ 指向朝外,则位错便发射,反之则退回(或吸入)缺陷表面。使 τ 刚好为零的驱动力场就是造成位错形核的场。

上述判据存在若干不准确之处:① r_0 是什么?②缺陷几何、位错环几何和驱动力场的不均匀分布会有什么影响?

一个常用的说法是: r_0 是在能量涨落的推动下,在所考虑的时间尺度内位错胚所可能从缺陷边界向材料内部跃迁的距离。该距离与另一个较模糊的概念“位错芯尺寸”有一定联系。由此得到的 r_0 一般在 $0.2 \sim 2b$ 之间。Rice 等^[18]最近利用 Peierls 位错框架的概念得到毋需借助位错芯尺寸的位错形核判据,见第7.6.2小节所述。

此外,即使某一位错段得以从距缺陷边缘为 r_0 处向外移动,由于驱动力场不均匀分布等原因,位错环也可能在后续运动过程中被迫返回原缺陷边缘,使该位错未能真正稳定地形核。因此,整个位错环的形核不仅需要满足局部的向外发射条件,还要满足整体的能量释放条件。

综上所述,可写出位错形核的三个组成过程:

(1)涨落型非稳定形核。指在能量涨落下短期跃出缺陷表面而在材料表层处的瞬态形核。

(2)局部亚稳定形核。指涨落型位错形核在局部区域位错滑移力作用下脱离缺陷表层而向固体内部深入的形核过程。

(3)总体稳定形核。指局部亚稳定形核继续延展而造成的能量释放型位错形核。

为模拟位错形核过程,考虑图7.7所示位错环自基体/外延层界面缺陷处形核的例子。双轴外延应变为 ε_0 , 缺陷是半径为 r 的球形孔洞。位错伯格斯向量 b 与 x_3 轴呈 30° 夹角。位错环的胚形取做半径为 $r + \xi b$ 的圆, 其形核驱动力为外延应力。从图7.7的滑移系几何可算出外延应力造成的位错滑移力为

$$\tau^{\text{app}} = - \frac{E\varepsilon_0}{\sqrt{6(1-\nu)}} \quad (7.28)$$

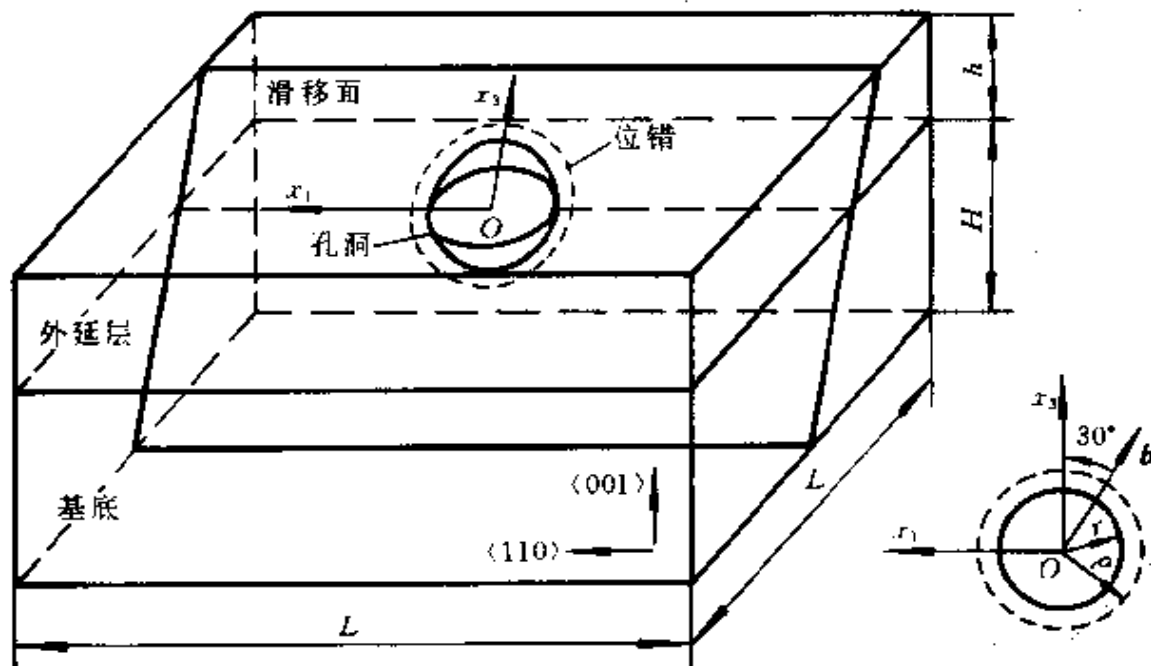


图7.7 从球形孔洞处的圆形位错环形核
(构件中界面以上为外延层, 以下为基底)

图7.8展示了该构形下临界形核外延应变 ε_0 与缺陷孔洞大小的无量纲倒数 b/r 之间的关系。图中带有圆圈的曲线是三维情况下的数值模拟曲线, 不带圆圈的曲线是二维情况(此时位错为直线段)的解析解, 见杨卫与张宏^[16]。与二维预测相反, 形核圆位错环所需的 ε_0 值在小缺陷尺寸时转而上升, 体现了三维模型中位错环曲率的效应。图7.8的结果表明, 中等尺寸的微孔洞(直径从5nm至0.5 μm)最容易引致位错环形核。

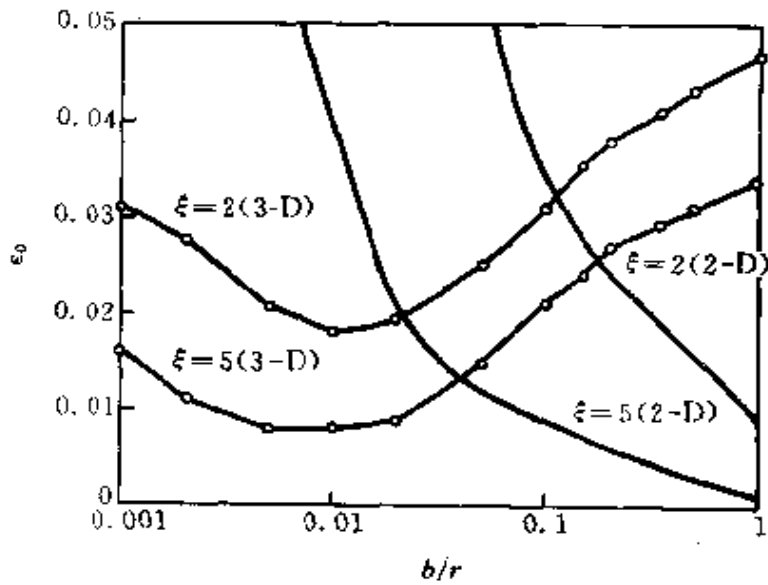


图7.8 位错形核的临界外延应变($\nu = 0.3$)

7.5.5 位错环的延展

考虑在分解剪应力 τ 作用下位错环的延展过程。某位错环段的法向移动速度 v 可表达为下述 Arrhenius 关系

$$v = v_0 \exp\left[-\frac{Q(\tau)}{kT}\right] \quad (7.29)$$

式中, k 为玻耳兹曼常数; T 为绝对温度; v_0 为具有速度量纲的材料常数。对共价键晶体, 式(7.29)中的激活能 $Q(\tau)$ 与分解剪应力 τ 有关, 由下式给出

$$Q(\tau) = Q_0 - E_0 \ln\left[2(1 + \nu) \frac{|\tau|}{E}\right] \quad (7.30)$$

式中, Q_0 与 E_0 为具有能量量纲的材料常数。例如, 对于硅: $Q_0 = 2.704 \times 10^{-19} \text{J}$, $E_0 = 1.024 \times 10^{-20} \text{J}$, $v_0 = 1.36 \times 10^5 \text{m/s}$; 对于锗: $Q_0 = 4.912 \times 10^{-20} \text{J}$, $E_0 = 3.12 \times 10^{-20} \text{J}$, $v_0 = 1.145 \times 10^6 \text{m/s}$ 。将式(7.30)代入式(7.29), 便得到位错延展的动力方程

$$v = \text{sgn}(\tau) v_0 \left(\frac{2(1 + \nu) |\tau|}{E}\right)^{\frac{E_0}{kT}} \exp\left(-\frac{Q_0}{kT}\right) \quad (7.31)$$

利用式(7.31), Zhang 和 Yang^[17] 计算了图7.7所示位错环构形自

孔边形核后,在 $[11\bar{1}]$ 滑移面内的延展过程,如图7.9所示。该位错环的最初延展方向偏于伯格斯向量方向,然后由于表面镜象力效应而吸向自由表面,最后成为大致对称的两条穿层位错(threading dislocation)分别向左右两侧定常扩展,并在外延层与基体的界面处留下两串错配位错。这一数值模拟定量再现了 Freund^[19]最近综述的该外延构形的理论预测和实验观察。

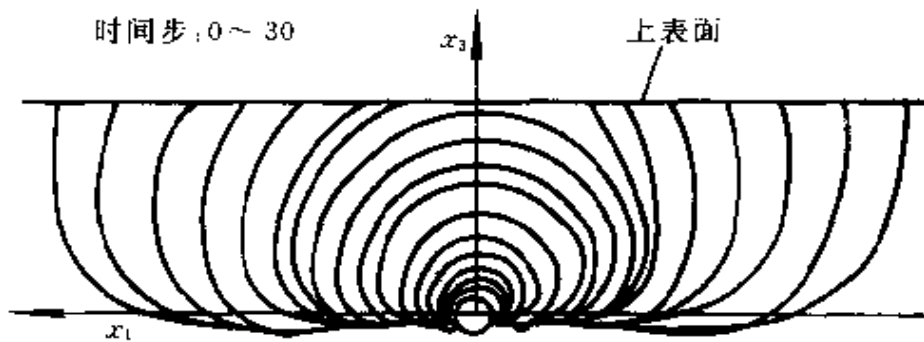


图7.9 外延层 $[11\bar{1}]$ 平面上位错环的延展

7.6 材料韧脆判定

7.6.1 Rice-Thomson 模型

关于材料韧脆判定的经典工作是 Rice 与 Thomson^[20]在1974年所提出的位错发射与解理断裂的竞争模型,见图7.10所示。

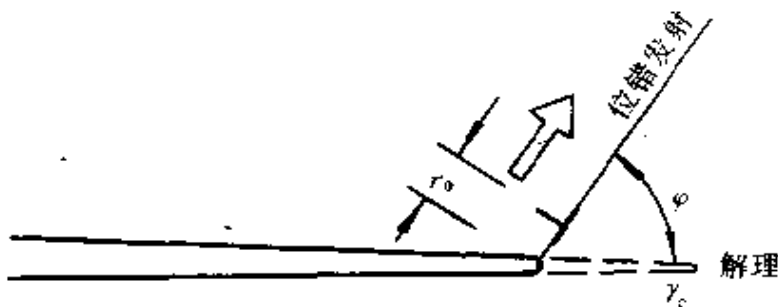


图7.10 Rice-Thomson 模型

假定在裂纹前方倾侧角为 φ 的一位错滑移面处有一位错胚,该位

错胚与裂尖的距离为位错芯半径 r_0 。裂纹在受力后有两种演化可能：①位错胚的发射，导致裂尖钝化；②沿裂纹面的解理断裂，这时裂尖保持原子级尖锐。造成位错发射的力是作用于位错的分解剪应力，它包括：④外力场（如裂尖 K 场）的长程驱动力，与距裂尖向径 r 的平方根成反比；⑤裂纹自由表面的短程镜像吸引力，与距裂尖向径 r 成反比；③由位错钝化而造成的割阶力。造成解理的驱动力是裂纹扩展的能量释放率 G ，阻力为断裂表面能 γ_0 。若加载过程中位错发射先于解理断裂发生，则材料为韧性，裂尖的位错会连续不断地自发形核（spontaneous nucleation）；若加载过程中解理断裂先于位错发射发生，则材料为脆性，位错发射受到抑制。Rice 与 Thomson^[20]用该模型计算了常见材料的韧脆属性，发现其理论预测与实际测量结果定性符合。

图 7.10 的位错发射模型假定为平面应变构形，这时位错为直位错。基于直位错发射的模型往往低估了材料的韧性，且实验观察到位错发射多以半环的形式自裂尖发出。因此，后续研究者采用了矩形半环（见图 7.11(a)）和半椭圆环（见图 7.11(b)）的三维位错发

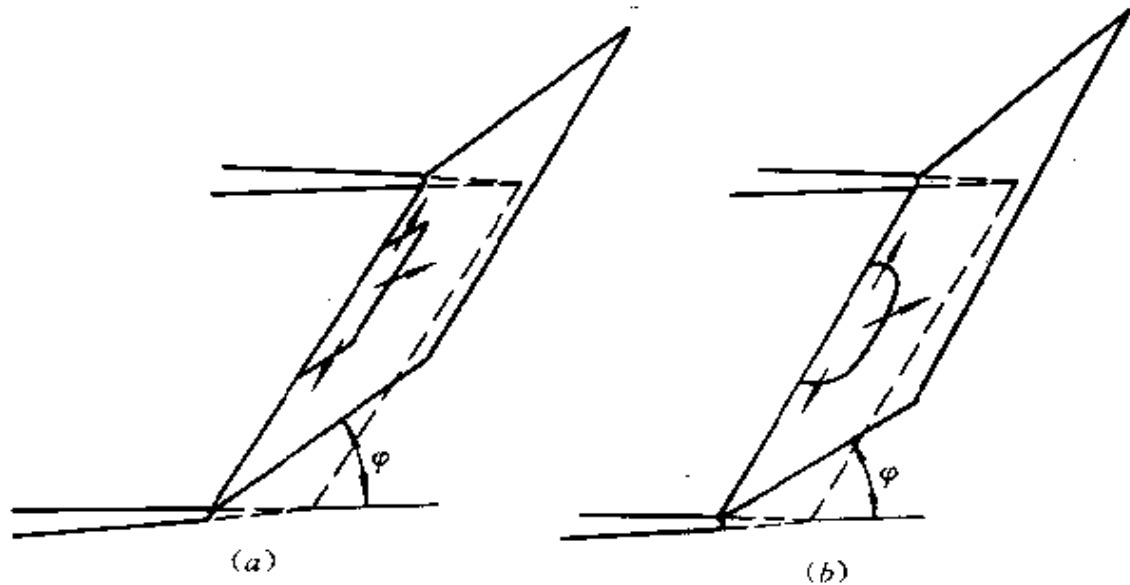


图 7.11 三维位错半环发射模型

(a) 矩形半环；(b) 半椭圆环。

射构形。矩形半环有向前扩展和横向延展两种运动；半椭圆环的延展体现为长轴和短轴的演化。因此，三维半环模型不仅可以给出更合理的材料韧脆判据，又可以描述裂尖发射位错环的形状演化规律。关于半椭圆环的裂尖位错发射分析由 Gao 与 Rice^[21] 完成，其位错发射所需的 K 场低于二维平面应变的直位错发射所需的 K 场。这是因为用于位错形核的能量不必耗散于整个裂纹前缘的位错造形，而只需用于裂纹前缘一段上的局部突起位错造形。

7.6.2 Peierls 位错框架

Rice-Thomson 模型认为裂尖的位错发射以完整的形式在位错芯尺寸 r_0 处形核。于是便产生下述两个问题：①在实际晶体点阵中，位错可能并不是以整个伯格斯向量的形式集中于一处 (Volterra 位错)，而是散布在晶体点阵位错滑移面的某一段处；②位错芯尺寸 r_0 难于确定，且 Rice-Thomson 模型的韧脆判据对 r_0 又很敏感。有鉴于此，Rice 等^[18] 在 1992 年提出裂尖 Peierls 位错框架，在材料韧脆判定上取得了新的进展。该理论框架用 Peierls 位错的概念代替了 Volterra 位错的概念，认为位错所造成的伯格斯向量是按点阵力平衡的方式分布于位错滑移面上。这样，在裂纹尖端处的位错便不是集聚地、整体地形成于距裂尖位错芯尺寸 r_0 处，而是从裂尖延伸的位错滑移面上逐渐滑开的，见图 7.12 所示。

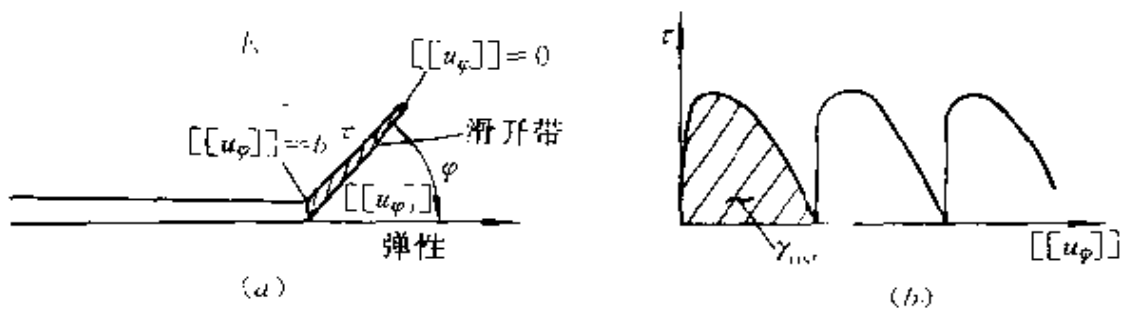


图 7.12 裂尖位错发射的 Peierls 框架

(a) 滑开带力学模型；(b) 滑开带本构关系。

下面简述裂尖位错发射的 Peierls 框架。参见图 7.12(a)，考虑

远场为给定应力强度因子 K 的边界层构型,材料除图中标示的滑开带外均为弹性。滑开带与裂纹成 φ 角,其上面力连续,弹性变形连续,但切向塑性滑移变形有一间断 $[[u_p]]$ 。 $[[u_p]]$ 沿滑开带的分布由求解整个力学问题来定,它与带内切向剪应力 τ 的关系为给定,见图 7.12(b)。该图表达了切向变形时的原子作用力曲线(去除点阵弹性变形部分),由晶体点阵的周期性可知 τ 随 $[[u_p]]$ 的曲线也呈周期性。由滑开带两端的边界条件

$$\left. \begin{aligned} [[u_p]] &= 0 && \text{在带顶端} \\ [[u_p]] &= b && \text{在裂尖处} \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

可计算出滑开带的延伸长度和造成一完整位错发射所需的 K 值。Rice 等的 Peierls 位错框架分析指出:制约裂尖位错发射的主要物理量为材料的失稳堆垛能 γ_{unst} ,即图 7.12(b)中任意一跨 $\tau-[[u_p]]$ 曲线的面积。 γ_{unst} 表示该晶体材料相邻点阵面发生堆垛失稳(即通过一个完整位错)所需要的能量。按照 Peierls 位错框架,材料的韧脆属性由能量比值 $\gamma_{\text{unst}}/\gamma_c$ 确定: $\gamma_{\text{unst}}/\gamma_c$ 值大的材料呈脆性, $\gamma_{\text{unst}}/\gamma_c$ 值小的材料呈韧性。Rice 等^[16]估算了多种材料的 γ_{unst} 值。从更微细层次出发对 γ_{unst} 的原子物理计算目前正在进行。

综上所述,裂尖位错形核的 Peierls 框架不仅较准确地阐述了自裂尖的位错发射过程,还提出了失稳堆垛能 γ_{unst} 这样一个刻画延性断裂的物理量,它与脆性材料的 Griffith 能量释放率 G_c (或 γ_c) 相对应。关于该模型的进一步发展将在下一小节中阐述。

7.6.3 裂尖区位错约束

在上述材料韧脆判据模型中,均假定位错一经形核便可发射至足够远处,从而对后续位错的发射不产生影响。这一理想模型至少在两类情况下是不正确的:①高应变率加载情况;②层厚小于 $1\mu\text{m}$ 量级的多层介质。在这些情况下,裂尖区的位错约束将影响裂尖发射位错的可动性,并进而改变材料的韧脆响应。

先概述高应变率加载的情况。自裂尖发射的位错只能以有限的速度运行(且一般低于剪切波速)。高应变率加载时,位错一个接

一个以有限速度从裂尖处发射出来,其间距随加载率增加而降低。于是,已经发射的位错列由于同号位错的相斥作用而对将要发射的位错施加一背应力。随着位错的不断发射,这种背应力(即位错约束)便越来越高,在达到稳定位错分布阵列以前便有可能抑制裂尖的位错发射,使裂尖演化机制转为解理断裂。Hsia 与 Argon^[22]在对单晶硅的实验与理论分析中报导了这类由于应变率效应而造成的位错约束,以及由该约束机制所造成的材料先韧后脆现象。

本小节的重点在于阐述韧脆层交叠复合介质的位错约束作用,其应用背景是纳米多层介质、微电子封装结构和金属/陶瓷复合材料。若韧性层或韧脆层界面上有一裂纹,这时材料的断裂韧性与层厚 h 的关系便呈图 7.13 的示意性关系。当层厚大于毫米量级时,裂尖塑性区(尺寸大致为 $\frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2$)的发展不受约束,其对应的断裂韧性 K_{Ic} 较高。当层厚为微米至毫米量级时,韧性层裂纹

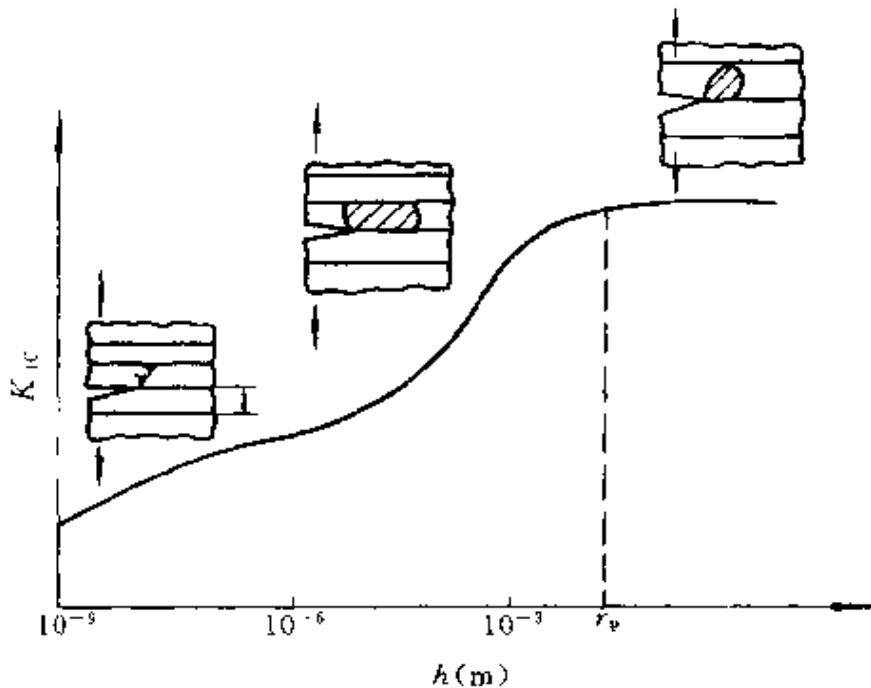


图7.13 多层介质断裂韧性随层厚 h 的变化曲线

尖端处的塑性区发展受到两侧脆性层的限制,造成强约束连续介质塑性问题,见 Varias, Suo 与 Shih^[23]。这时断裂韧性 K_{Ic} 大幅度下降,见图 7.13。

若层厚进一步下降到10nm至1 μ m的范围内,图7.13表明断裂韧性进一步降低。在该尺度范围内不能再使用连续介质塑性理论,而需代之以离散位错模型。图7.14表示了多层介质的离散位错约束模型,见 Hsia, Suo 与 Yang^[24]。假定裂尖处位错会自发形核,且可能通过穿层运动而扩展到整个层厚。大多数已发射的位错由于两侧脆性层的约束而堆积在界面处,形成一延展型巨位错。发射一个

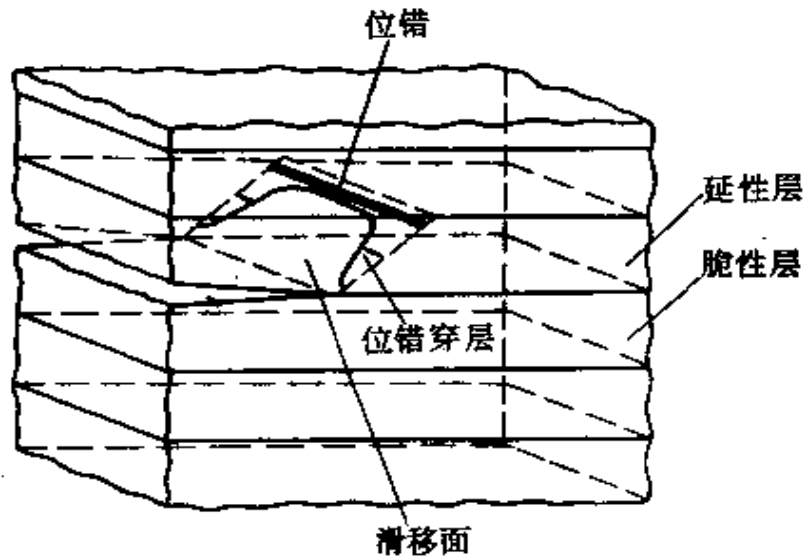


图7.14 多层介质的位错约束模型

伯格斯向径为 nb 的延展巨位错的系统总能量 W_T 为

$$W_T = W_d + W_K + W_L \quad (7.33)$$

等式右端的三项分别为位错自身能,位错与 K 场的交互能和位错割阶能。若裂尖位于韧性层中央,其表达式分别为^[24]

$$\left. \begin{aligned} W_d &= \frac{\mu(nb)^2}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \frac{h_\varphi}{r_0} - C \right] \\ W_K &= - \frac{K_{app}}{A\sqrt{2\pi}} \sqrt{h_\varphi} (nb) \sin\varphi \cos \frac{\varphi}{2} \\ W_L &= nby_c \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

式中, μ 仍为剪切模量; φ 为位错发射角; $h_\varphi = h/(2\sin\varphi)$ 为延性层内位错的最大行程; K_{app} 为外加 K 场; C 为1左右的常数。延展巨位错的等效位错芯半径为

$$r_0 = \left(\prod_{k=1}^n \prod_{q=1}^n \Delta_{kq} \right)^{1/n^2} \quad (7.35)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{kq} &= r_{\text{crack}} && \text{若 } k = q \\ \Delta_{kq} &= |\Delta_k - \Delta_q| && \text{若 } k \neq q \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

式中, r_{crack} 为在裂尖处构成位错的等效位错芯半径, 可由 Peierls 位错框架计算; Δ_i 为第 i 个位错距韧脆层界面的距离。式(7.34)中的无量纲因子 A 略大于1。

考虑图7.14所示位错穿层过程的能量平衡。若裂纹前缘中段的能量(新位错已穿过)不高于裂纹前缘两端处的能量(新位错未穿过), 则位错穿层便得以进行。因此, 若具有巨位错 $\frac{n+1}{2}b$ 与 $\frac{n-1}{2}b$ 的两个状态的能量差

$$\Delta W_T = W_T \left(\frac{n+1}{2}b \right) - W_T \left(\frac{n-1}{2}b \right) \leq 0 \quad (7.37)$$

则新位错得以穿行。在式(7.37)中取等号便得到位错平衡数目。将式(7.34)代入上式得

$$n = \frac{2\pi(1-\nu)}{\ln(\bar{h}/\bar{r})} \left[\frac{\tilde{K}_{\text{app}} \sqrt{\bar{h}}}{A \sqrt{2\pi}} \sin\varphi \cos\varphi - \bar{\gamma} \right] \quad (7.38)$$

式中上缀“~”的各无量纲量定义为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_{\text{app}} &= \frac{K_{\text{app}}}{\mu \sqrt{b}}, & \bar{\gamma} &= \frac{\gamma_c}{\mu b}, & \bar{h} &= \frac{h_0}{b} \\ \bar{r} &= \frac{r_0}{b} e^c, & \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

上述各量的值域为: \tilde{K}_{app} 在0.2到5之间, \bar{h} 在50到10 000之间, \bar{r} 从1到100, 且 $\bar{h}/\bar{r} \gg 1$ 。 $\bar{\gamma}$ 对典型延性金属的值为, Cu: 0.1684; Au: 0.2085; Al: 0.1174。图7.15给出当 $\bar{\gamma} = 0.2$, \bar{h} 分别为100、500、1 000、5 000, 且 \bar{r} 取为1时, 平衡位错数目与 \tilde{K}_{app} 的关系。由图可见, 即使 $\bar{h} = 5 000$, 在韧性层中也只能生成几十根位错。

在界面附近塞积的延展巨位错还对裂尖产生屏蔽型应力强度

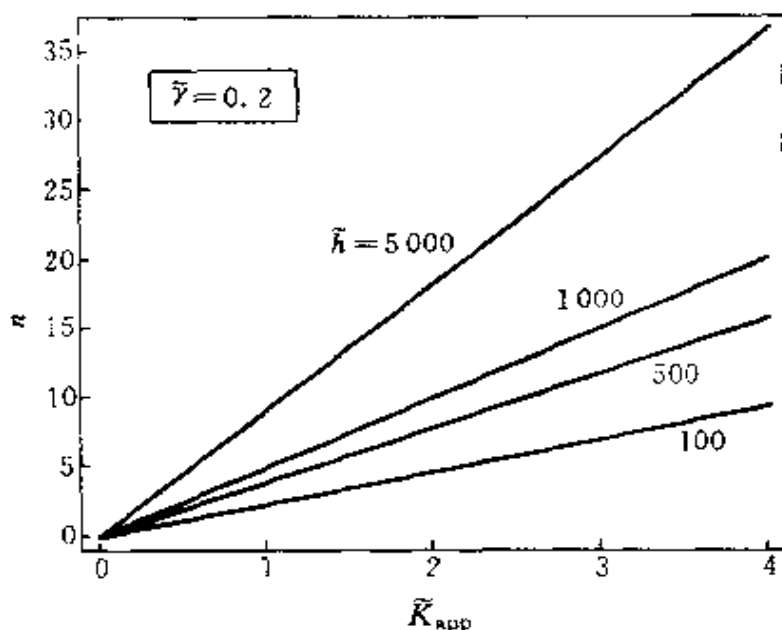


图7.15 平衡位错数目与 \bar{K}_{app} 之间的关系

因子 K_D 。按延展巨位错与裂尖的交互作用,该值可计算为

$$K_D = \frac{A\mu(nb)}{(1-\nu)\sqrt{2\pi h_\varphi}} \frac{3}{2} \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \quad (7.40)$$

于是裂纹尖端处的真实应力强度因子为

$$K_{tip} = K_{app} - K_D = K_{app} - \frac{A\mu(nb)}{(1-\nu)\sqrt{2\pi h_\varphi}} \frac{3}{2} \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \quad (7.41)$$

位错发射的另一个作用在于使裂尖产生钝化,裂尖变为半径大致为 $\frac{nb}{2}$ 的缺口,如图7.16所示。这时可由应力强度因子手册来得到缺口顶端的环向拉应力 σ_{tip} 。

$$\sigma_{tip} = \beta \frac{K_{tip}}{\sqrt{nb}} \quad (7.42)$$

对半圆前缘缺口, $\beta = \frac{2}{\pi}$ 。

将式(7.41)代入式(7.42)可得 σ_{tip} 的具体表达式。当 σ_{tip} 达到解理应力 σ_c 时便发生解理断裂。由固体物理计算,理论解理强度 σ_c 的值在 $0.2 \sim 0.3\mu$ 之间。由 $\sigma_{tip} = \sigma_c$ 可得到位错发射后再解理开

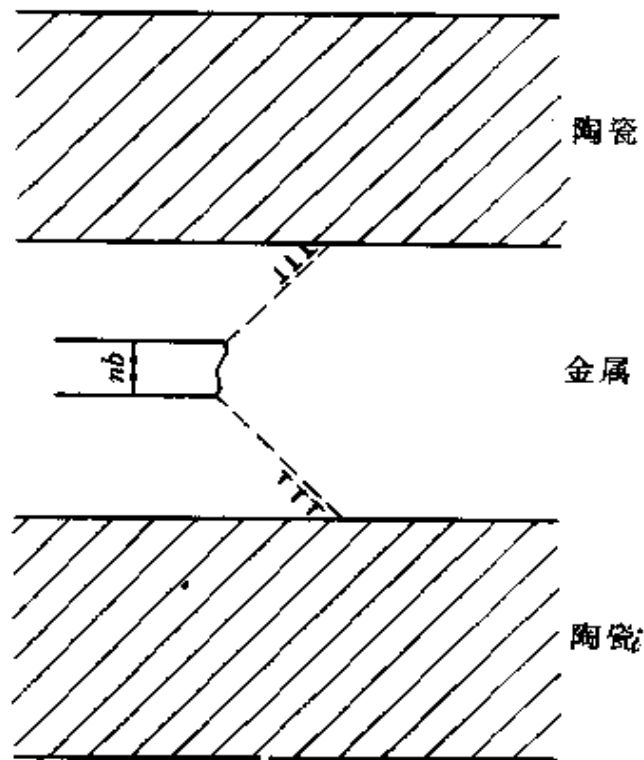


图7.16 钝化裂纹顶端几何

裂的临界应力强度因子 K_{app} ，记为 K_{crit} 。图7.17绘出了 $\bar{\sigma}_c = \sigma_c/\mu$ 分别为0.2和0.3时，无量纲临界应力强度因子 \bar{K}_{crit} 与无量纲层厚 \bar{h} 之间的变化曲线。上述曲线是图7.14中所绘示意性曲线的一段，在 \bar{h} 很大和 \bar{h} 很小时均不能成立。当 \bar{h} 很大时，应改用连续介质塑性约束模型来代替本小节的位错约束模型。当 \bar{h} 很小时，应采用原子的点阵模型。

当 \bar{h} 很小时，图7.17所预测的 \bar{K}_{crit} 值应逼近于 Rice-Thomson 模型意义下的无量纲本征断裂韧性 $\bar{K}_{本征}$ ，因为这时位错发射已不可能。可利用表面能、剪切模量和伯格向量值，按照与式(7.39)相同的无量纲方式来估算 $\bar{K}_{本征}$ ^[20]，如表7.1所示。表中的数据与图7.17在低 \bar{h} 端的预测具有相同量级。注意从 FCC 晶体到 BCC 晶体再到金刚石共价键结构，其对应的 $\bar{\sigma}_c$ 值逐渐降低。因此从韧性预测上，图7.17与表7.1具有一致的趋势。

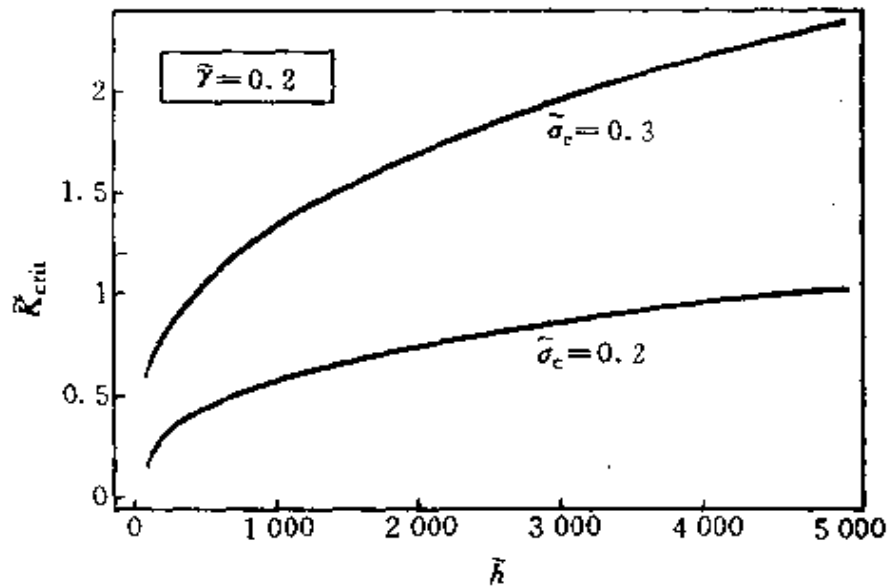


图7.17 位错约束下临界应力强度因子与层厚间的关系

表7.1 无量纲本征断裂韧性 $\bar{K}_{\text{本征}}$

FCC 晶体			BCC 晶体		金刚石结构	
Cu	Au	Al	Fe	W	Si	C
0.98	1.19	0.85	0.80	0.46	0.51	0.43

7.7 内嵌弹性区模型

7.7.1 裂尖内嵌弹性区

在裂纹尖端处一个很小的区域内材料的响应可能呈弹性,而其外围的材料响应为弹塑性,于是形成在外围塑性背景下的内嵌弹性区。这种裂尖内嵌弹性区可能由下述原因产生:

(1) 裂尖位错无法发射。背景位错的间距在 $1\mu\text{m}$ 左右,在距裂尖小于 $1\mu\text{m}$ 处的材料中可能由于没有位错而呈弹性^[25]。

(2) 弹性界面层。在金属/陶瓷界面裂纹处可能出现平行于裂纹的薄弹性层^[15]。

(3) 应力腐蚀断裂。环境侵袭下在裂尖和裂纹面由于氧化或应力吸附作用形成脆性层,见图7.18。这类脆性区便是裂尖内嵌弹性区的例子^[25]。

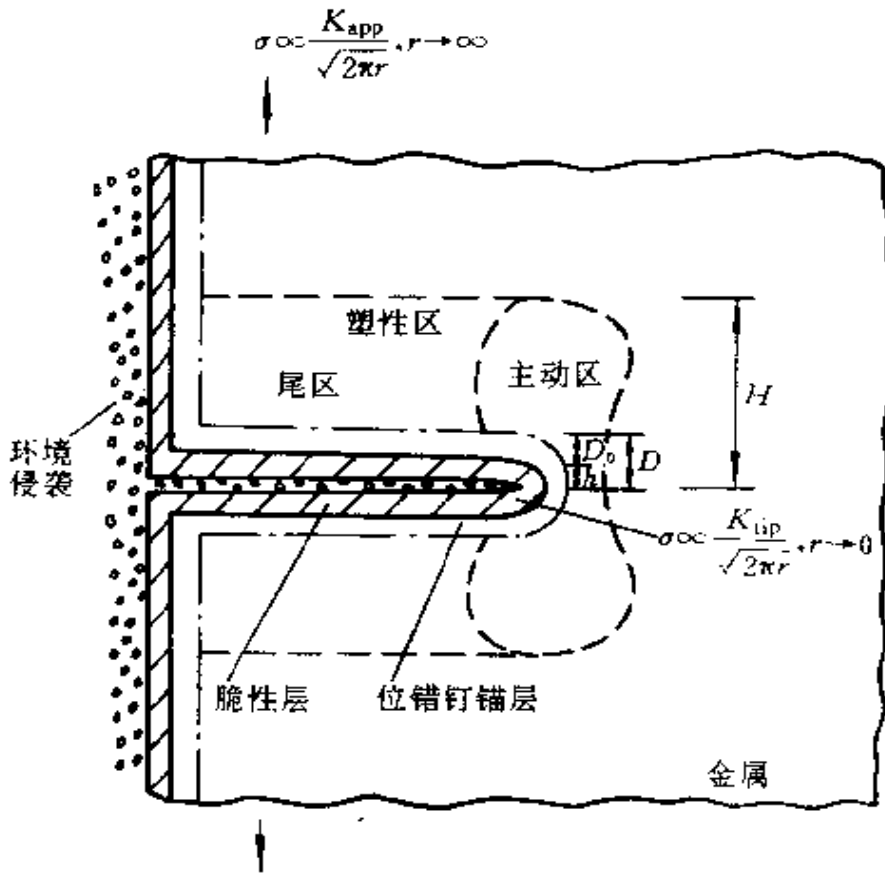


图7.18 腐蚀引起的在外围流动背景下的内嵌弹性区

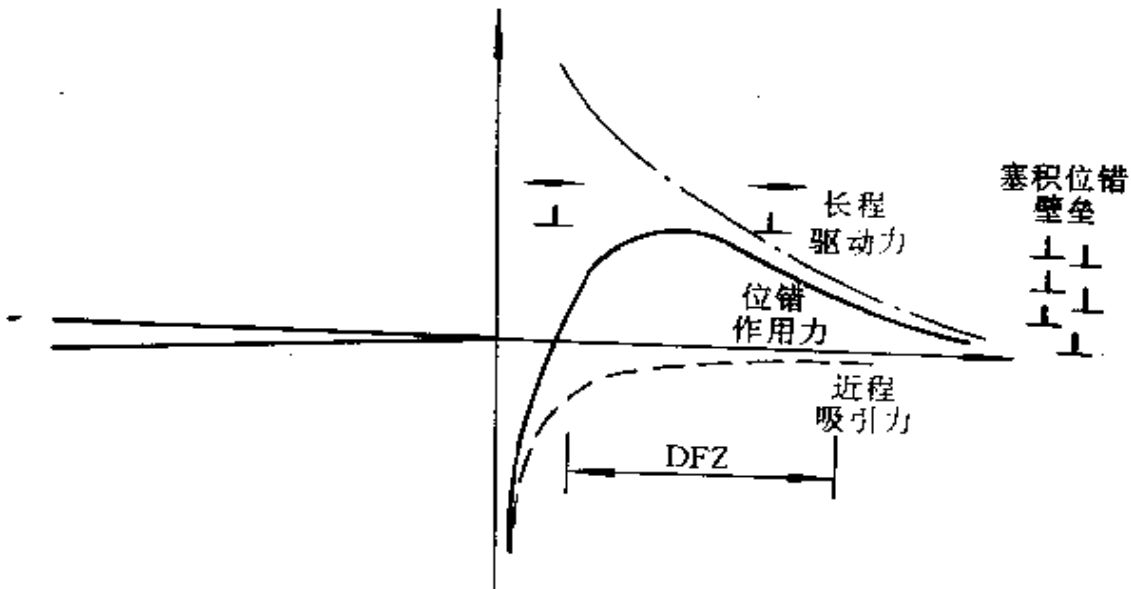


图7.19 无位错区模型

(4) 无位错区 (DFZ)。如图 7.19 所示, 在裂尖附近的位错驱动力具有一个(不稳定)凸峰, 该凸峰区的全部位错均被驱赶出境并阻滞在其外围, 而域内偏裂尖一侧的位错全被吸入裂尖表面。于是该区域(在经历了一定量的位错扫掠后)的即时响应为弹性, 形成了塑性区包围下嵌在裂尖附近的瞬态弹性核, 在文献中称为无位错区 (DFZ)。

裂尖内嵌弹性区有下述四个特点:

(1) 高应力降作用。裂尖内嵌区为弹性, 因此可在很小的尺度范围内按 K 场规律将裂尖应力从理论强度极限迅速降至宏观屈服应力^[15]。

(2) 屏蔽作用。内嵌弹性区由塑性变形的流动背景包围, 塑性外围区可对内嵌弹性区起屏蔽作用。

(3) 亚临界动力过程。在裂尖内嵌区可发生的脆性分离过程和与之关联的物理化学过程(如氧化过程、应力吸附过程、解理过程)可由亚临界动力过程来统一描述。

(4) 能量分割作用。整个断裂能量被分割为两部分: 内嵌弹性区的分离能和塑性外围区的耗散能。前者尽管数值上较小, 但却以阀门的方式控制着整个断裂过程的能量耗散。

裂尖内嵌弹性区模型最早由 Thomson^[26] 和 Weertman^[27] 提出。

7.7.2 流动背景的屏蔽作用

假定裂尖由尺寸为 D 的内嵌弹性区包围。在向径 $r \ll D$ 时, 裂尖的应力分布为 K 场

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{\text{IIP}}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}(\theta) \quad r \ll D \quad (7.43)$$

式中, r 与 θ 为以裂尖为中心的极坐标; $\Sigma_{ij}(\theta)$ 为标准 K 场角分布函数。在应力场式(7.43)下, 应力按 \sqrt{r} 的规律迅速由裂尖($r \approx 0.4\text{nm}$) 的理论强度极限衰减到几倍于宏观屈服应力的量级(在 r 为 $1\mu\text{m}$ 附近), 并继续在外围塑性区按平缓得多的规律下降。裂纹扩展时, 在即时裂尖后留下一个高度为 H 的尾区。 H 通常远大于

D , 但远小于试件尺寸, 见图 7.18。该塑性尾区被嵌含在另一个大得多的平方根奇异应力场中

$$\sigma_y = \frac{K_{app}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_y(\theta) \quad r \gg H \quad (7.44)$$

式中, K_{app} 为外载应力强度因子。本节着重研究稳态的准解理断裂过程, 并将塑性流动与材料相对于裂尖的稳态流动统称为流动背景。式(7.43)与式(7.44)的唯一不同在于应力强度因子的幅值。比值 K_{app}/K_{tip} 表征了流动背景对裂尖的屏蔽作用, 称为屏蔽比。下面分率无关塑性与蠕变塑性的情况来讨论屏蔽比的计算。

对率无关塑性, 取下述幂硬化单轴应力—应变关系

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \frac{e/\varepsilon_y}{(e/\varepsilon_y)^N} \quad \text{若 } e \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \varepsilon_y \quad (7.45)$$

式中, σ_y 为屈服应力; $N = \frac{1}{n}$ 代表应变硬化指数; $\varepsilon_y = \sigma_y/E$ 。对多轴情况可按 J_2 流动理论对上式进行推广。在稳态裂纹扩展下的分析由 Suo 等^[15]给出, 其屏蔽比可表达为

$$\frac{K_{app}}{K_{tip}} = \mathcal{F} \left(\frac{D}{(K_{tip}/\sigma_y)^2} \right) \quad (7.46)$$

图 7.20 在 $N = 0, 0.1, 0.2$ 的情况下绘出了屏蔽比函数 \mathcal{F} 。在该计算及以后的计算中, 均取 $\varepsilon_y = \frac{1}{300}$, $\nu = \frac{1}{3}$ 。由图可见, 当 N 或 σ_y 减少时 (即材料流动性增加时), 屏蔽比增加。此外, 若材料参数固定, 屏蔽比随弹性层厚度减少而增加。

在高温情况下, 需考虑材料的蠕变效应。在单向拉伸下, 其应变率表达式为

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (7.47)$$

式中, σ_0 为参照应力; $\dot{\varepsilon}_0$ 为参照应变率; m 为率敏感指数。对稳态裂纹扩展, 由量纲分析可得屏蔽比为

$$\frac{K_{app}}{K_{tip}} = g(\tilde{D}, \tilde{v}), \quad \tilde{D} = \frac{D}{(K_{tip}/\sigma_0)^2}, \quad \tilde{v} = \frac{\sigma_0 v}{E \dot{\varepsilon}_0 D} \quad (7.48)$$

式中, \tilde{D} 代表内嵌弹性区尺寸的影响; \tilde{v} 代表裂纹扩展相对速率的

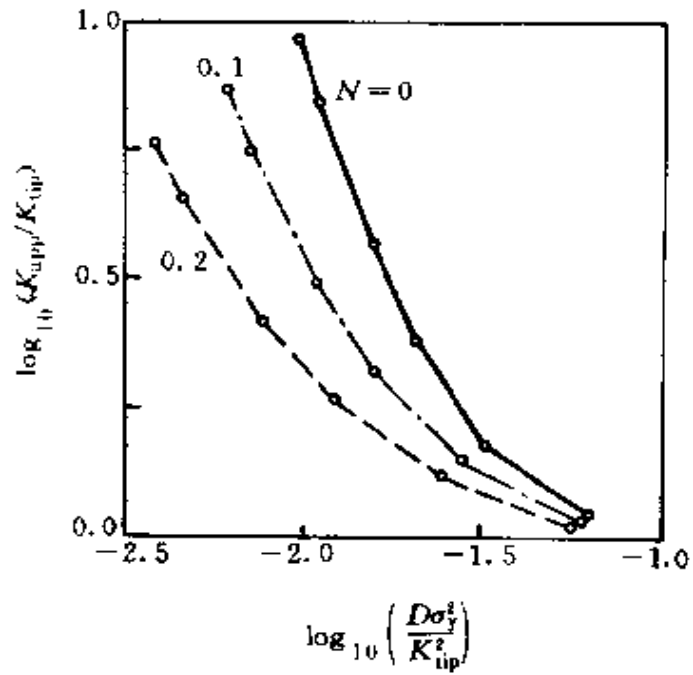


图7.20 率无关塑性材料的屏蔽比函数

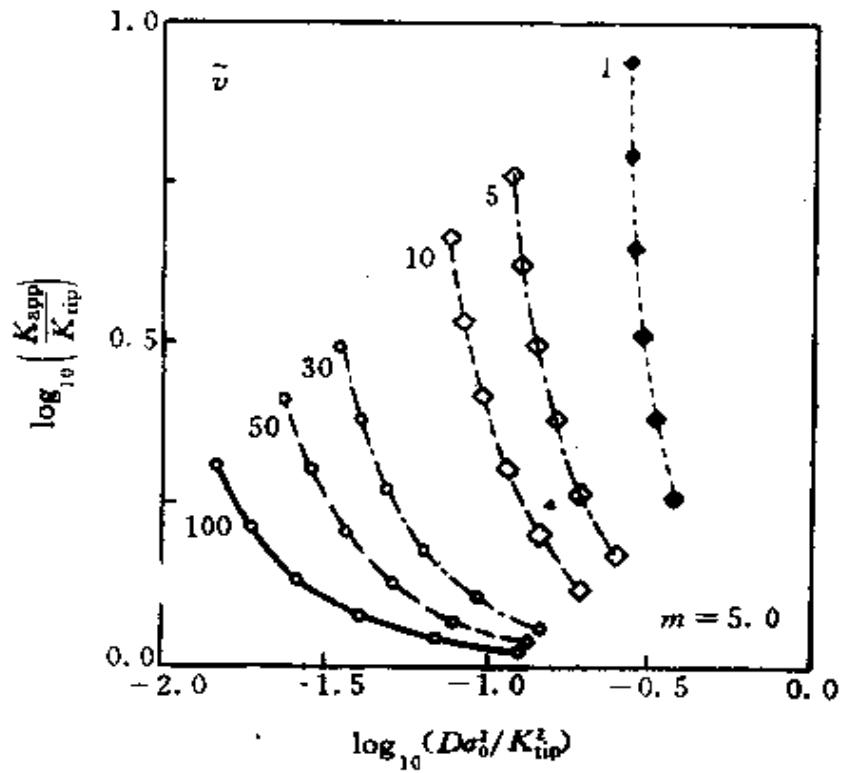


图7.21 蠕变塑性材料屏蔽比随无量纲弹性层厚度的变化

影响。图7.21绘出了 $\bar{v} = 1.5, 10, 30, 50$ 和 100 时屏蔽比的变化。图中屏蔽比随 \bar{v} 加大而减小的趋势与率无关塑性情况相同。由图7.21还可观察到,在 \bar{v} 增加时,应力松弛受到约束,从而导致屏蔽比降低。

7.8 准解理断裂过程

在准解理断裂过程中,材料的断裂由弹性核的解理断裂所造成,且弹性核开裂后又重新在扩展裂纹形成新的弹性核并继而断裂。这一过程可不断重复,形成准解理断裂形貌。

在连续塑性区中嵌含小尺度(几百个纳米至几微米)弹性核的准解理断裂过程还可以在裂尖难于连续发射位错的情况下观察到^[15](如陶瓷/金属界面层)。这时弹性核内的应力在很大程度上取决于裂尖的钝化半径,而外围塑性区的存在对弹性核内的应力起屏蔽作用。该模型的优越之处在于把断裂过程与具有物理背景的材料解理强度相联系,从而实现断裂力学与断裂物理的初步贯穿。

7.8.1 无位错区的准解理断裂过程

首先讨论由于裂尖无位错区的发展而造成的准解理过程。对静止裂纹,其裂尖区的变形示意图见图7.22(a)。在裂尖附近一环形区域处为背景塑性区,有大量位错活动。在该环形区域中距裂尖超过 $0.01 \sim 0.1 \text{ mm}$ 处,位错变形的宏观平均应为 HRR 场。其应力应变历史为常规的弹性变形阶段与塑性变形阶段。

由于图7.19所描述的位错斥出机制,在背景塑性区内部应形成一个无位错区。该区域的应力应变历史由三个阶段组成,Ⅰ:初始弹性变形;Ⅱ:塑性变形,区域内位错开动并逐渐被驱出;Ⅲ:DFZ 形成,应力应变关系转为弹性,此时裂尖场类似于式(7.44)。注意由于第Ⅰ阶段的位错运动,裂纹尖端不再保持尖锐,其张开位移 δ_0 正比于 nb , n 为 DFZ 中的预先位错发射数目。当钝化裂纹顶

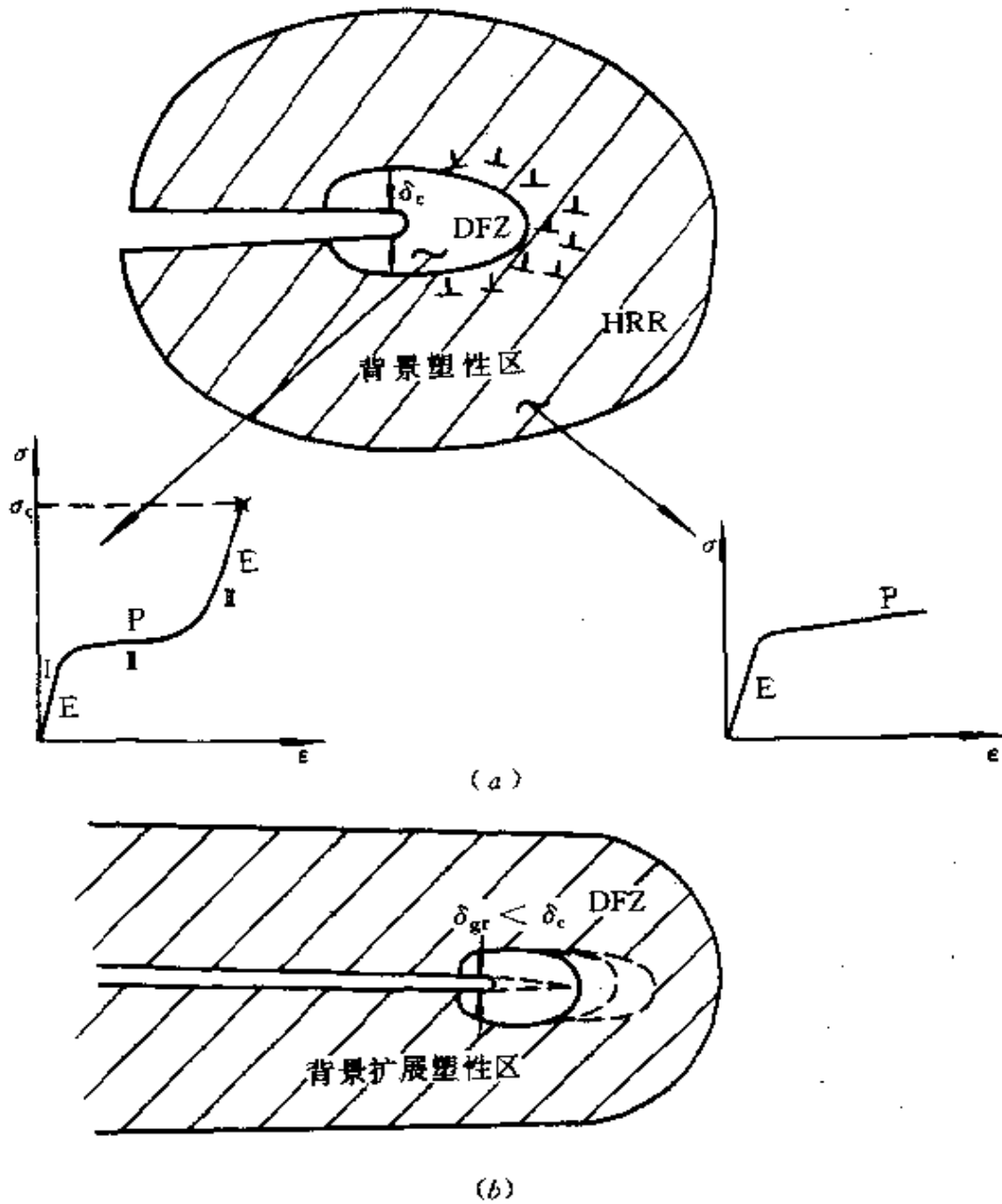


图7.22 无位错区的准解理断裂过程
(a)静止裂纹;(b)扩展裂纹。

端的环向应力(参见式(7.42))达到材料的解理断裂应力 σ_c 时,弹性核便发生解理断裂。

现继而讨论图7.22(b)所示扩展裂纹问题,其外围为背景扩展塑性区。当原来DFZ中钝化裂纹顶端应力达到 σ_c 时,弹性核中发生解理断裂。弹性核断裂产生下述后果:①裂尖锐化;②裂尖不

再为 DFZ 所包围。对准解理过程,我们假定扩展裂纹稍事停顿,以便驱逐出新裂尖处的位错(当然新裂尖也要相应钝化),形成新的 DFZ。重复上述过程,便可得到扩展裂纹由于弹性核不断形成和解理断裂而造成的准解理过程,其裂纹面形貌为断续的解理断裂区,这时的扩展裂尖张开位移 δ_{cr} 小于静止裂纹的裂尖张开位移 δ_c 。

若进而假定上述过程近似以稳态形式发生,便可引用第 7.7.2 小节中关于流动背景的屏蔽比计算。对率无关塑性情况,式(7.46)成立。在 DFZ,假定式(7.42)亦成立,且 $\beta = \frac{2}{\pi}$ 。若进一步认为准解理断裂时 $\sigma_{tip} = \sigma_c$, 则可得其临界外场应力强度因子 K_{app} (记为 K_{crit}) 为

$$K_{crit} = \frac{\pi}{2} \sqrt{nb} \sigma_c \mathcal{F} \left(\frac{\pi^2}{4} \frac{\sigma_p^2}{\sigma_c^2} \frac{D}{nb} \right) \quad (7.49)$$

式中,仅 DFZ 尺寸 D 和位错发射数 n 暂时未知。前者可在图 7.19 的框架下予以计算,而后者在 D 已知时可按第 7.6.3 小节中关于位错约束下可发射位错的最大数目加以估算。参照 Hsia, Suo 与 Yang^[24], n 与 $\frac{D}{b}$ 的近似关系示意于图 7.23。

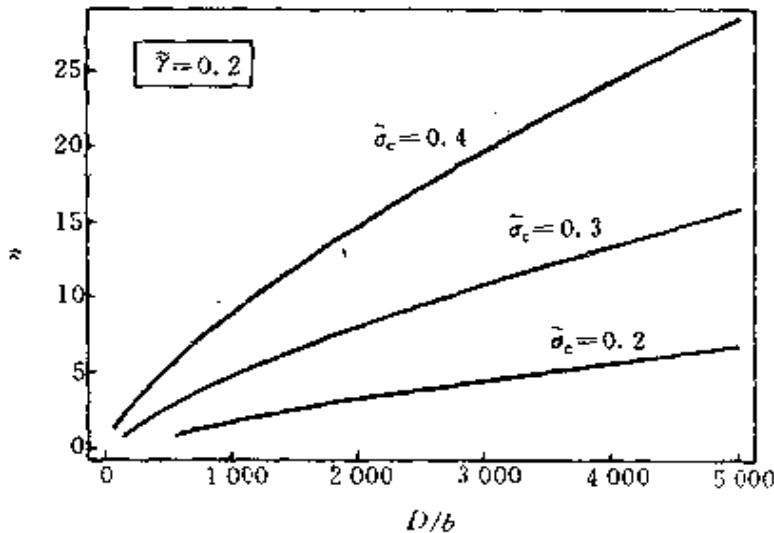


图 7.23 裂尖位错发射数目 n 与无量纲内嵌弹性区

$$\text{尺寸 } D/b \text{ 的关系 } \left\{ \tilde{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{\mu}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma_c}{\mu b} \right\}$$

7.8.2 亚临界解理动力学

我们转而讨论腐蚀环境下的亚临界裂纹扩展过程。应力腐蚀断裂现象(见图7.18)可分解为两个基本过程:①无塑性流动时的亚临界解理动力学;②流动背景的屏蔽效应。后一过程已在第7.7.2小节中分析,本小节讨论前一过程。

考虑某种与内嵌弹性区在力学与金相学上完全相似的块体材料(如金属铝与蒸汽气氛所造成的内嵌弹性区可由 Al_2O_3 块体材料来等价),其亚临界解理动力学的基本曲线可表达为

$$v/v_0 = f(K_{\text{IIP}}/K_c) \quad (7.50)$$

式中, v_0 具有速度量纲,它包含 Arrhenius 型温度依赖关系、对环境气氛偏压的幂次律依赖关系和对侵袭粒子的浓度依赖关系; K_c 为材料在无环境影响下的断裂韧性。函数 f 的常见形式有

$$\left. \begin{aligned} f(K_{\text{IIP}}/K_c) &= f_0 \exp\left(\frac{K_{\text{IIP}}}{K_c}\right) && \text{指数型} \\ f(K_{\text{IIP}}/K_c) &= \left(\frac{K_{\text{IIP}} - K_c^*}{K_c}\right)^n && \text{幂次型} \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

后一式中的 K_c^* 为产生亚临界解理的应力强度因子门槛值。上述函数一般仅能描述亚临界解理动力学的某一个阶段。亚临界解理动力学常由三阶段组成(记为阶段 I, II, III),呈 S 状曲线,参见图 7.24 中 Al_2O_3 的曲线。

综合式(7.50)与式(7.46)或式(7.48),便可得到真实材料的腐蚀断裂动力学曲线。例如利用图7.24中有关 Al_2O_3 的亚临界解理动力学曲线和式(7.46),便可得到图7.24中的铝合金腐蚀断裂动力学曲线,其阶段 I 与 III 的斜率降低,阶段 II 的平台加长,这与对铝合金材料的实验观察是一致的^[28]。此外,由图7.20所知,屏蔽比由于屈服强度的下降而提高,这与铝合金由于过失效(导致屈服应力下降)而造成的抗腐蚀断裂能力升高也是一致的。

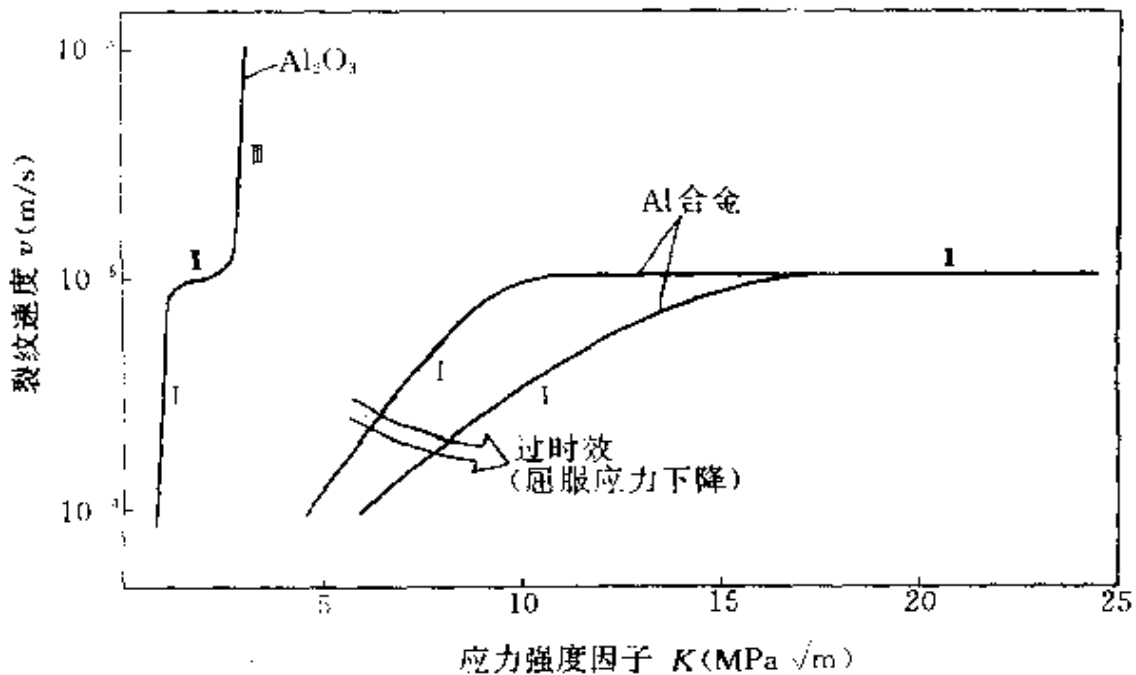


图7.24 铝类材料的腐蚀断裂动力学曲线

7.8.3 应力吸附作用

裂尖高拉应力区引起该处原子键的伸张,从而吸附间隙型杂质原子嵌入,造成比原键合弱的杂质/基体原子混合键合。对这一问题可由本节模型加以分析。其内嵌弹性区尺寸可表达为

$$D = D_0 + h \quad (7.52)$$

式中, h 为吸附层厚度; D_0 为附加位错钉锚层厚度,见图7.18。对应力吸附的情况, $h \ll D_0$, 所以有 $D \approx D_0$ 。将式(7.52)代入式(7.46)和式(7.50),便可得到率无关塑性材料应力吸附下的亚临界解理动力学曲线

$$\frac{v}{v_0} = \mathcal{F}_{\text{ads}} \left(\frac{K_{\text{app}}}{K_c}, \frac{D_0}{(K_c/\sigma_y)^2} \right) \quad (7.53)$$

对蠕变塑性材料,也可利用式(7.48)导出类似的动力学曲线^[25]。

7.8.4 氧化膜断裂

应力腐蚀断裂的另一类过程是裂纹表面氧化与氧化膜断裂的交替进行过程。在控制氧化过程的扩散方程下,氧化膜的厚度 h 与氧化时间 t 近似呈抛物线关系

$$h^2 = k_p t \quad (7.54)$$

式中, k_p 为抛物型速率常数,它与温度 T 有 Arrhenius 型的依赖关系。氧化膜/金属界面的移动速度 $v = \frac{dh}{dt}$ 为

$$v = \frac{k_p}{2h} \quad (7.55)$$

将式(7.55)代入式(7.52)可得

$$D = D_0 + \frac{k_p}{2v} \approx \frac{k_p}{2v} \quad (7.56)$$

后一近似是因为氧化膜厚度远大于 D_0 。将式(7.56)代入式(7.46)和式(7.50),可得到率无关塑性材料在氧化膜破裂机制下的亚临界解理动力学曲线

$$\frac{v}{v_0} = \mathcal{F}_{\text{oxi}} \left(\frac{K_{\text{app}}}{K_c}, \frac{k_p \sigma_Y^2}{v_0 K_c^2} \right) \quad (7.57)$$

对蠕变塑性材料,也可利用式(7.48)导出类似的动力学曲线^[26]。

参 考 文 献

- 1 Ozmat B, Argon A S, Parks D M. Growth modes of cracks in creeping type 304 stainless steel. *Mech. Mater.*, 1991, 11: 1~17
- 2 杨卫, 郭田福, 傅增力. 裂尖超钝化: 实验、理论与数值模拟. *力学学报*, 1993, 25(4): 468~478
- 3 Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 1987, 54: 525~531
- 4 Tvergaard V, Hutchinson J W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40: 1377
- 5 Needleman A, Tvergaard V. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35: 151~183
- 6 Shih C F, Xia L. Modeling crack growth resistance using computational cells with mi-

- microstructurally based length scales. ASTM STP 1244. Philadelphia; Ame. Soc. Testing & Mater. , 1994
- 7 Xia L, Shih C F, Hutchinson J W. A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding condition. Harvard Rep. , 1994. Mech-236
 - 8 Cottrell A H. Mechanisms of Fracture, The 1963 Tewksbury Lecture. Tewksbury Sympo. on Fracture, 1963. 1~27
 - 9 Guo T F, Yang W. Crack tip profiles generated by anisotropic damage. Int. J. Damage Mech. , 1993, 2: 364~384
 - 10 Yang W. On spatial characterization of damage evolution in a tensile bar. J. Mech. Phys. Solids, 1990, 38: 725~740
 - 11 Rice J R, Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. J. Mech. Phys. Solids, 1969, 17: 201
 - 12 Brown N, Duckett R A, Ward I M. The yield behavior of oriented polyethylene terephthalate. Phil. Mag. , 1968, 18: 483~502
 - 13 Moran B, Ortiz M, Shih C F. Formulation of implicit finite elements methods for multiplicative finite deformation plasticity. Int. J. Num. Met. Engng. , 1990, 29: 483~514
 - 14 Yang W, Cheng L, Hwang K C. Objective corotational rates and shear oscillation. Int. J. Plasticity, 1992, 8: 653~666
 - 15 Suo Z, Varias A G, Shih C F. A theory for cleavage cracking in the presence of plastic flow. Acta Metall. Mater. , 1993, 41: 1551-1557
 - 16 Yang W, Zhang H. Heterogeneous nucleation of dislocation loops under epitaxial strain. Acta Mech. Solida Sinica, 1993, 6: 243~259
 - 17 Zhang H, Yang W. Three dimensional dislocation loops generated from a weak inclusion in a strained material heterostructure. J. Mech. Phys. Solids, 1994, 42: 913~930
 - 18 Rice J R, Beltz G E, Sun Y. Peierls framework for dislocation nucleation from a crack tip. In: Argon A S ed. Fundamentals of Fracture and Fatigue. Berlin, Springer-Verlag, 1992. 1~58
 - 19 Freund L B. The mechanics of dislocations in strained-layer semiconductor materials. In: Hutchinson J W, Wu T Y eds. Adv. Appl. Mech. , V. 30. San Diego; Academic Press, 1994. 1~66
 - 20 Rice J R, Thomson R. Ductile versus brittle behavior of crystals. Phil. Mag. , 1974, 29: 73~97
 - 21 Gao H, Rice J R. Application of 3-D weight functions- I . The stress field and energy of a shear dislocation loop at a crack tip. J. Mech. Phys. Solids, 1989, 37: 155~174
 - 22 Hsia K J, Argon A S. Experimental study of the mechanisms of the brittle-to-ductile transition of cleavage fracture in Si single crystals. Mater. Sci. Eng. , Ser. A, 1994.

- 176:111~119
- 23 Varias A G, Suo Z, Shih C F. Ductile failure of a constrained metal foil. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39: 963~986
 - 24 Hsia K J, Suo Z, Yang W. Cleavage due to dislocation confinement in layered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1994, 42: 877~896
 - 25 Suo Z, Yang W. Subcritical cleavage of ductile metals and metal-ceramic interfaces. 1995
 - 26 Thomson R. Brittle fracture in a ductile material with application to hydrogen embrittlement. *J. Mater. Sci.*, 1978, 13: 128~142
 - 27 Weertman J. Fracture mechanics, a unified view for Griffith-Irwin-Orowan cracks. *Acta Metall.*, 1978, 26: 1731~1738
 - 28 Speidel M O, Hyatt M V. Stress-corrosion cracking of high strength aluminium alloys. In: Fontana M G, Stachle R W eds. *Adv. Corr. Sci. Tech.*, V. 2, 1972. 115~335

第8章 材料增韧的细观力学

8.1 引言

近年来固体力学的研究呈现出两极分化的态势,即分叉为针对(宏观)结构的研究和针对(固态)材料的研究。前者追求越来越真实的工程环境,越来越复杂的计算几何和越来越智能化的电脑软件;而后者则侧重于探讨不同固体材料在变形、损伤与破坏时所产生的本质现象与因果关系。虽然结构方面的研究与结构工程及计算机科学紧密联系,材料方面的研究与物理学及材料科学息息相通,但它们均有用连续介质力学的方法去进行结构分析这样一个共同点。前者的研究对象为宏观工程结构,而后者却为细观材料微结构。细观力学就是这一力学分析方法在另一研究范畴里集中、系统的体现,它的迅速崛起已使力学分析方法有效地渗透到各种材料体系的研究之中,并进而推动了固体力学和材料科学的学科发展。

细观力学的分析方法在80年代渗透到几乎所有的工程材料,如金属与合金、金属间化合物、岩石、混凝土、结构陶瓷、结构高分子、各种形式的复合材料及微电子材料,从而使细观力学发展的第1阶段,即用力学的方法来分析解释各种材料的力学行为,得以完全展开。从90年代起,细观力学步入其第2阶段,即在力学原理上设计和试运行具有超级使用性能的各类材料,即超级材料(super materials)。

材料强韧化是近年来细观力学、断裂力学和固体力学等学科研究中活跃的前沿领域。当今的技术、正在发展的技术和在可预测

的将来所可能出现的科学技术均提出发展具有抗裂性能材料的要求。无论是像发展高温发动机和航天飞机这类“前台”问题,还是像探索高温超导、多层封装微电子元件这类“背景”问题,材料的抗裂性均是该项技术得以成功的关键因素。发展高抗裂性(或韧性)的材料将带来巨大的经济和社会效益:①由提高发动机的运行温度与/或降低地面、大气层和太空运输工具的重量可节省能源消耗;②减少桥梁、核反应堆和飞机的结构失效事故可增进人身安全;③由发展更有效的装甲防护和更可靠的武器系统可提高国防能力;④由减少对失效构件的无效制造和降低由设备失效所带来的停产时间可提高工业的生产率与竞争性。

材料强韧化研究的发展既体现断裂力学已步入具有宏细观结合特征的新层次,也为断裂力学主动式的工程应用开辟了广阔的前景。从70、80年代起,材料强韧化宏细观断裂力学理论已逐步从金属及多相合金、精细结构陶瓷、结构高分子、高强混凝土、形状记忆合金和复合材料中发展起来。科学家们发现:在不同材料体系中的强韧性机制具有内在的融会贯通之处,见 Evans^[1],杨卫、黄克智、余寿文^[2]。因此,力学家们致力于以宏细观破坏力学为纲来带动和指导多种材料体系的强韧化研究。其最终目的在于用细观力学作为定量分析手段来进行材料的优化设计(杨卫^[3])。这类设计包括:

- ①分子设计(如定向分子链束);
- ②微结构设计(如沉淀硬化与弥散硬化、弹性体和非弹性体增韧高分子);
- ③细结构设计(如高强混凝土);
- ④相热力学设计(如相变增韧结构陶瓷、形状记忆合金);
- ⑤复合结构设计(如各种复合材料、晶须增强陶瓷);
- ⑥界面设计(如纳米材料、韧界面高温陶瓷、纤维增强复合材料、界相设计)。

考虑上述跨越材料的设计要素将可能使渊源于任何新型材料的优化设计思想得以推动几种材料门类的发展,这已成为新型先

进材料研制的一个特色。本章试图结合多种材料体系中的强韧化力学原理来勾勒出这一宏大设想的若干初步框架。我们首先给出强韧增值与能量积分的一般表达式；进而按①尾区耗能，②裂纹面桥联过程，③裂尖形貌与超钝化，④场激发微区域转变，⑤表面与界面强韧化这五种强韧机制为序来展开讨论。

8.2 强韧增值与能量积分

强韧化的一个衡量指标是材料断裂能 J 积分的变化。对材料强韧增值的研究可归纳为材料的起裂韧度增值与扩展韧度增值这两个范畴。前者指裂纹尖端在受力后的初始钝化行为，该钝化可由空洞或软性第二相对裂纹尖端位错(或剪切带)发射的诱引力而造成，也可由降低裂纹尖端处的三轴约束度所造成。裂尖钝化行为使材料 J_{Ic} 值升高。我们推迟至第8.5节再扼要地讨论这一问题。后者指自裂纹起裂至稳恒态扩展过程中所产生的韧度增值

$$\Delta J = J_{\infty} - J_{Ic} \quad (8.1)$$

式中， J_{∞} 指稳恒扩展的 J 积分值，即 J 阻力曲线的水平渐近值。

在 J (或 K) 控制扩展过程下，下述能量积分在 J 控制区内任意一条(不包括裂纹尖端的)闭合曲线上的积分应为零(Budiansky, Hutchinson and Lambropoulos^[4])

$$\int_{\Gamma} (wn_1 - \sigma_{\alpha\beta} n_{\alpha} u_{\beta,1}) d\Gamma = 0 \quad (8.2)$$

式中， w 为某一物质点 (x_1, x_2) 处的应变能密度

$$w(x_1, x_2) = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2)} \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2) d\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

式中， $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和 u_{α} 分别为应力、应变和位移； n_{α} 为回路 Γ 的外法线。希腊字母下标可取值1、2，重复下标表示从1到2求和， $d\Gamma$ 为回路 Γ 上的弧元。

考察图8.1所示的裂纹起裂与定常扩展过程，将 (x, y) 选为原点恒在裂尖的随动坐标系。若认为图8.1(a)中的起裂 J 积分 J_{Ic}

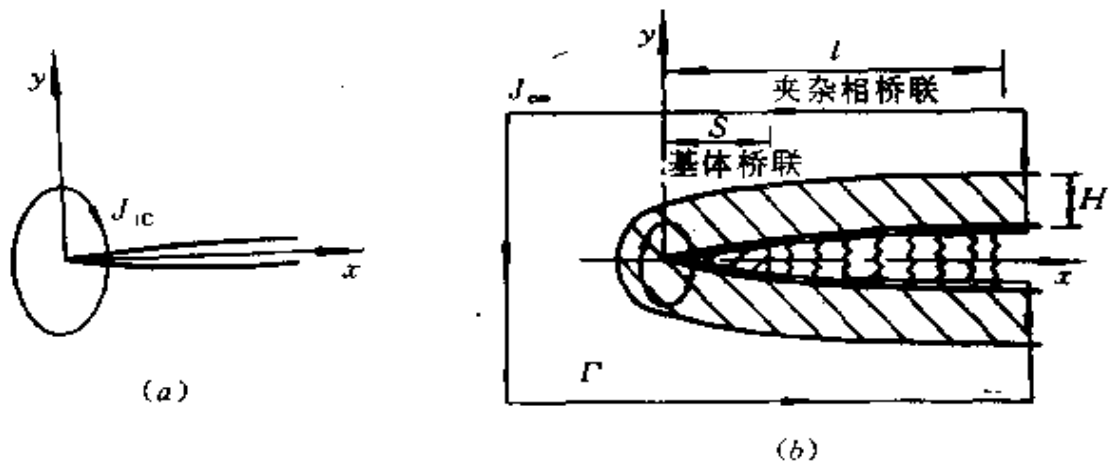


图8.1 能量积分

(a)起裂过程;(b)定常扩展过程。

与图8.1(b)中的内场 J 积分相等,则可按式(8.2)与图8.1(b)中的 Γ 回路求出从裂纹起裂到定常扩展所可能实现的增韧差值,见杨卫^[6]

$$\Delta J = 2 \int_0^H U(y) dy + f_p \int_0^l \sigma_i(x) d\delta(x) + \int_0^s \sigma_M(x) d\delta(x) \quad (8.4)$$

式中, H 为塑性尾区高度; l 与 s 分别为夹杂相桥联与基体桥联的长度(后者亦称为裂纹钉锚深度); f_p 为夹杂相在裂纹面上的面积分数(大致相当于其体积分数 f); δ 为裂纹面张开位移; σ_i 为桥联夹杂相的流动应力; σ_M 为未断基体作用于部分贯穿裂纹段的桥联应力,而

$$U(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \{w(x, y) - w(-x, y)\} = w(\infty, y) \quad (8.5)$$

是坐标高度为 y 的物质单元从裂纹前方无限远处随裂纹扩展而后退至裂纹后方无限远处后的残余应变能密度。式(8.4)右端的第一项曾由 Budiansky 等^[4], Evans 等^[6], 鲁红兵等^[7]采用,代表耗能尾区所产生的增韧作用。Rose^[8]和 Budiansky 等^[9]曾分别导出式(8.4)中右端的第2项,它代表夹杂相桥联力 $f_p \sigma$ 对回路积分中沿裂纹上下岸桥联力的贡献。杨卫等^[10]在线弹性复合基体桥联的特例下曾得到过式(8.4)右端的后两项,并进而由杨卫^[5]推广到非线性基体的情况,在以下两节中将从式(8.4)出发来独立地讨论耗能

尾区和桥联段对增韧的贡献。

8.3 扩展裂纹的尾区耗散增韧

8.3.1 体膨胀与剪切屈服增韧

定常扩展裂纹尾区的典型结构绘于图8.2。对 I 型平面应变扩展裂纹, 裂尖前缘 ($0 \leq \theta < \alpha$) 往往为弱奇异应变(高三轴应力)的前缘区, $\alpha \leq \theta < \pi - \beta$ 的扇形域为剧烈变形区, 而 $\pi - \beta \leq \theta < \pi$, $y < H$ 的区域称为扩展尾区。在尾区及剧烈变形区中可能存在一个饱和损伤区(或饱和相变区), 见鲁红兵等^[7]。上述分区构造又可因体积塑性(带有下标 v)或剪切塑性(带有下标 s)的约束准则不同而不同, 见图8.2所示。由式(8.5)、式(8.3)及小变形理论下的加法分解, 可以把 $U(y)$ 分解为体膨胀与偏斜变形两部分

$$U(y) = U_v(y) + U_s(y) \quad (8.6)$$

式中, 体膨胀项 U_v 与剪切变形项 U_s 分别为

$$\left. \begin{aligned} U_v(y) &= y \int_{\alpha_v}^{\pi - \beta_v} \sigma_m(y, \theta) \dot{\phi}(y, \theta) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \\ U_s(y) &= y \int_{\alpha_s}^{\pi - \beta_s} S_{\alpha\beta}(y, \theta) \dot{e}_{\alpha\beta}^p(y, \theta) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

式中, σ_m 与 $\dot{\phi}$ 分别为平均应力和塑性体积应变(体膨胀); $S_{\alpha\beta}$ 和 $\dot{e}_{\alpha\beta}^p$ 分别为应力偏量和塑性应变率偏量。在推导式(8.7)时, 我们采用了图8.2中的 (y, θ) 坐标, 且仅考虑在变形剧烈区所产生的塑性耗散。

采取考虑球形孔洞夹杂的 Gurson 屈服面

$$\phi = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}} \right) - 1 + f^2 = 0 \quad (8.8)$$

来进行颗粒夹杂相增韧材料的尾区耗能计算。式(8.8)适用于颗粒相模量远小于基体模量的情况。式中, σ_e 与 $\bar{\sigma}$ 为宏观与基体的 Mises 应力; f 为颗粒相的体积百分比。塑性应变率可按对压力敏感的屈服面函数 ϕ 的广义正交法则

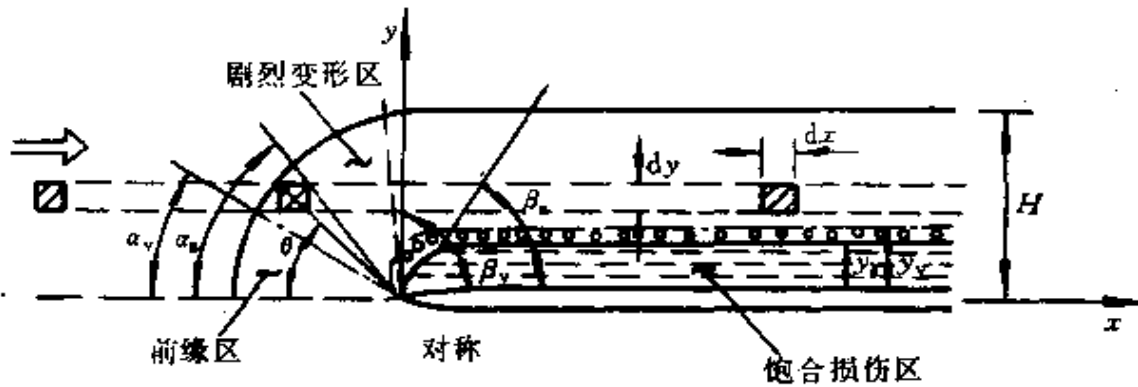


图8.2 定常扩展裂纹的耗能尾区

$$\dot{e}_{\alpha\beta}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \quad (8.9)$$

定出。式中， λ 为塑性流动因子。利用式(8.8)并分别取式(8.9)的球形与偏斜部分可得

$$\dot{e}_{\alpha\beta}^p = \lambda \frac{3}{\sigma^2} S_{\alpha\beta}, \quad \Phi = 3f \frac{\lambda}{\sigma} \sinh\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma}\right) \quad (8.10)$$

将式(8.10)代入式(8.7)并化简得

$$\left. \begin{aligned} U_v(y) &= 3yf \int_{\alpha_v}^{\pi-\beta_v} \frac{\sigma_m}{\sigma} \lambda \sinh\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma}\right) \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \\ U_s(y) &= 2y \int_{\alpha_s}^{\pi-\beta_s} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2 \lambda \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

式(8.11)仅对图8.2所示的非饱和损伤(或相变)区适用,这时对 $U_v(y)$ 要求 $y \in (y_v, H)$, 对 $U_s(y)$ 要求 $y \in (y_s, H)$ 。对饱和损伤(或相变)区有

$$\left. \begin{aligned} U_v(y) &= U_v(y_v) \quad \forall y \in (0, y_v) \\ U_s(y) &= U_s(y_s) \quad \forall y \in (0, y_s) \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

式中的 y_v 或 y_s 常用某种饱和损伤(或相变)条件来确定,如

$$\Phi(y_v, \pi - \beta_v) = \Phi_c, \quad \dot{e}_e^p(y_s, \pi - \beta_s) = \dot{e}_c \quad (8.13)$$

式中, \dot{e}_e^p 为等效塑性应变。对孔洞损伤情况,式(8.13)中第一式的 Φ_c 可取临界孔洞体积比(如 Gurson 模型中的 f_c); 对相变增韧问题, Φ_c 可取全部相变颗粒转变后所产生的体积膨胀。式(8.13)中第二式的 \dot{e}_c 可取单向拉伸时的破坏应变。由式(8.4)、式(8.6)、式

(8.11)和式(8.12)可综合导出

$$2 \int_0^H U(y) dy = \Delta J_v + \Delta J_s \quad (8.14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Delta J_v &= 2y_v U_v(y_v) + 6f \int_{y_v}^H y \int_{\alpha_v}^{x-y_v} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \lambda \sinh \left(\frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}} \right) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} dy \\ \Delta J_s &= 2y_s U_s(y_s) + 4 \int_{y_s}^H y \int_{\alpha_s}^{x-y_s} \left(\frac{\sigma_s}{\bar{\sigma}} \right)^2 \lambda \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} dy \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

假定上述应力及变形场在扩展裂纹尖端具有分离变量形式,且认为渐近展开式的首项可近似延拓至式(8.15)所考虑的积分范围内,则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m(y, \theta) / \bar{\sigma}(y, \theta) &= \rho \Sigma_m(\theta) \\ \sigma_s(y, \theta) / \bar{\sigma}(y, \theta) &= \rho \Sigma_s(\theta) \\ \lambda(y, \theta) &= S(y) \Lambda(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

式中, ρ 为复合相材料体系与纯基体材料流动应力之比。利用式(8.16)可将式(8.15)简化为

$$\Delta J_v = R_v A_v, \quad \Delta J_s = R_s A_s \quad (8.17)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_v &= 6f \{ y_v^2 S(y_v) + \int_{y_v}^H y S(y) dy \} \\ R_s &= 4 \{ y_s^2 S(y_s) + \int_{y_s}^H y S(y) dy \} \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

与扩展裂纹场的奇异性、塑性耗能区高度 H 和饱和损伤(或相变)区高度有关;而 A_v 和 A_s 则与在剧烈变形区的扩展裂纹尖端场角分布函数有关

$$\left. \begin{aligned} A_v &= \int_{\alpha_v}^{x-y_v} \rho \Sigma_m(\theta) \Lambda(\theta) \sinh \left[\frac{3}{2} \rho \Sigma_m(\theta) \right] \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \\ A_s &= \int_{\alpha_s}^{x-y_s} \rho^2 \Sigma_s(\theta)^2 \Lambda(\theta) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

在小损伤情况下, $S(y)$ 、 $\Sigma_m(\theta)$ 、 $\Sigma_s(\theta)$ 和 $\Lambda(\theta)$ 均可由无损伤的扩

展裂纹尖端场的解来加以估算。

8.3.2 理想弹塑性不可压缩基体

由高玉臣^[11],对理想弹塑性不可压缩基体在剧烈变形的中心扇形区有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_v = \alpha_s = \frac{\pi}{4}, \beta_v = \beta_s = 1.18546 = \beta \\ \Sigma_m(\theta) = \left[4.10535 - 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] / \sqrt{3}, \Sigma_s(\theta) = 1 \\ \lambda = \frac{\sigma_y^2}{2\sqrt{2}E\rho^2} \frac{1}{r} \ln\left(\frac{H}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

式中, σ_y 和 E 分别为复合体系的宏观屈服应力和杨氏模量。将式(8.20)代入式(8.15)至式(8.19)后得到

$$\Delta J_v = C_v f H \frac{\sigma_y^2}{E}, \quad \Delta J_s = C_s H \frac{\sigma_y^2}{E} \quad (8.21)$$

式中的无量纲增韧参数 C_v 与 C_s 分别为

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \Sigma_m(\theta) \sinh\left[\frac{3}{2}\rho\Sigma_m(\theta)\right] \frac{1 - y_v/H + \ln\sin\theta}{\sin\theta} d\theta \\ C_s &= \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \frac{1 - y_s/H + \ln\sin\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

塑性尾区高度 H 可用激光拉曼光谱仪、超声显微镜或扫描电镜来观察测定,也可以按下式估算

$$H = \alpha \frac{E J_\infty}{\sigma_y^2} \quad (8.23)$$

有限元数值模拟表明 α 应在0.11至0.23之间,这里据罗学富对本问题的计算取 $\alpha = 0.168$ 。利用式(8.13)及 ϕ 与 ε 的渐近表达式,可得下列显式

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_v}{H} &= \exp \left\{ \frac{1}{D_1} \left[D_2 - \frac{2\sqrt{2}\rho E\theta_c}{3 f\sigma_y} \right] \right\} \\ \frac{y_s}{H} &= \exp \left\{ \frac{1}{D_3} \left[D_4 - \sqrt{2} \frac{E\epsilon_c}{f\sigma_y} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \sinh \left[\frac{3}{2} \rho \Sigma_n(\theta) \right] \frac{d\theta}{\sin\theta} \\ D_2 &= \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \sinh \left[\frac{3}{2} \rho \Sigma_n(\theta) \right] \frac{\ln \sin\theta}{\sin\theta} d\theta \\ D_3 &= \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \frac{d\theta}{\sin\theta} = 1.2766 \\ D_4 &= \int_{\pi/4}^{\pi-\beta} \frac{\ln \sin\theta}{\sin\theta} = -0.1165 \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

利用式(8.22)、式(8.24)和式(8.25),可给出 C_v 与 C_s 的曲线如图 8.3 所示。综合式(8.21)与式(8.22)可得

$$\Delta J_v = a f C_v J_{\infty} \quad , \quad \Delta J_s = a C_s J_{\infty} \quad (8.26)$$

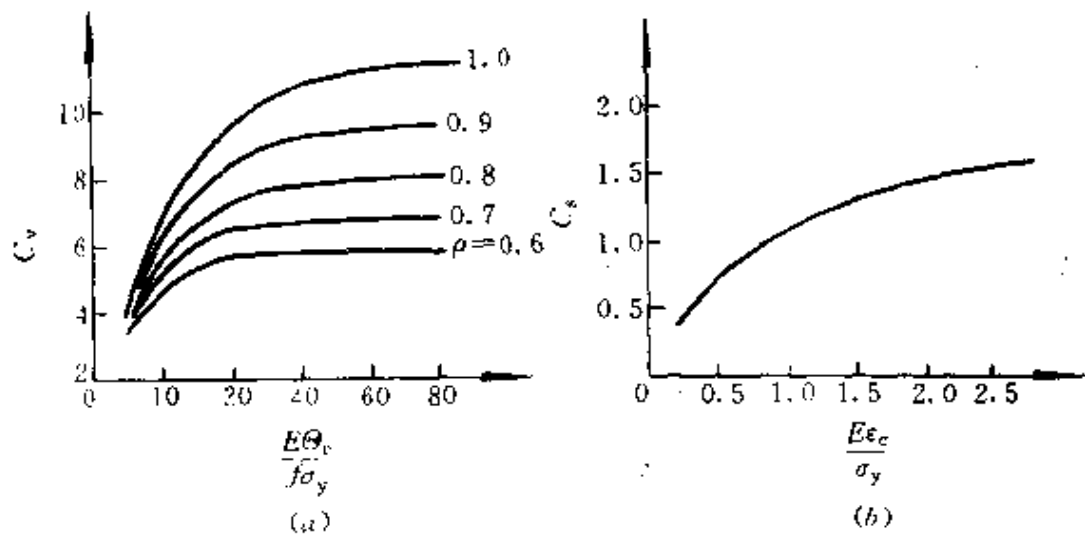


图8.3 增韧系数与饱和损伤的关系

(a) C_v 变化规律, (b) C_s 变化规律。

于是,若忽略桥联作用,则有

$$\Delta J = \frac{a(fC_v + C_s)}{1 - a(fC_v + C_s)} J_{\infty} \quad (8.27)$$

鲁红兵等^[7]对端羧基液体丁腈橡胶(CTBN)增韧环氧树脂这一材料体系量测了断裂阻力曲线。对应两种不同 CTBN 添加量的材料体系的有关材料数据列于表 8.1。该材料体系组分为 100 份 E51 环氧 + 24 份双酚 A + 5 份三乙醇胺 + X 份 CTBN。不加 CTBN 时基体的屈服应力为 55.8 MPa。表中 θ_c 值为根据断裂表面扫描电镜照片经图象分析仪定出的体膨胀橡胶颗粒的体积百分比增量。将上述独立测定的材料参数代入式(8.24)、式(8.22)和式(8.27)便可得到表 8.1 中倒数第三列所示的增韧理论计算值 J_{IC}^* ，该值与实验测定值 J_{IC} 的误差列在表中的倒数第二列。表 8.1 中的最后一列数据表明孔洞体膨胀与诱发基体剪切塑性的增韧值之比。

表 8.1 CTBN 增韧环氧树脂的增韧量测与计算

CTBN 份数 X	f (%)	E (MPa)	σ_y (MPa)	ε_y (%)	ε_c %	θ_c %	J_{IC} N/m	J_{IC}^* N/m	J_{IC}^*/J_{IC} N/m	误差 %	$\frac{\Delta J_{IC}}{\Delta J_{IC}}$
5	12	2787	49.6	1.78	2.50	8	333	445	557	+25	0.85
10	22	2776	46.1	1.66	2.52	15.3	631	1389	1344	-3	1.37

8.3.3 双线性硬化基体

许多增韧高分子与增韧陶瓷更适宜用图 8.4 所示的双线性应

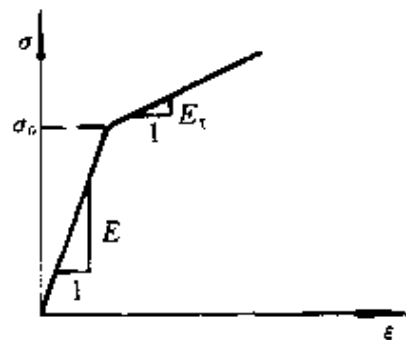


图 8.4 双线性应力应变关系

力应变关系来表征。在小孔洞损伤的前提下，可近似用 Amazigo 和 Hutchinson^[12] 所给出的双线性材料扩展裂纹尖端场来计算式

(8.17)至(8.19)。这时有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_v = \alpha'_v = 0, \quad \beta_v = \beta'_v = \pi - \theta_p \\ S(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) K^2 \sigma_0^2 y^{2s-1} \\ \Sigma_c(\theta) \approx 1, \quad \Sigma_m(\theta) = \frac{\Sigma_{rr}(\theta) + \Sigma_{\infty}(\theta)}{2\Sigma(\theta)} \\ A(\theta) = (\sin\theta)^{1-2s} t(\theta) \Sigma(\theta) / \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

式中,奇异性指数 s 、塑性区角度 θ_p 均与 E_t/E 的比值有关,由 Amazigo 与 Hutchinson^[12]文中表3列出。在确定的 E_t/E 比值下,该文中亦计算了角分布函数 Σ_{rr} 、 Σ_{∞} 、 $t(\theta)$ 和 $\Sigma(\theta)$ 的值。为方便起见,我们在式(8.28)中诸等式的右端均采用了该文中的符号。按量纲分析,在小范围屈服条件下可将式(8.28)中的参数 K 写为

$$K = c_1 \left(\frac{\sigma_0^2}{E J_{\infty}} \right)^s = c H^{-s} \quad c = c_1 \sigma^s \quad (8.29)$$

上式的后一步推导用到式(8.23),且取 $\sigma_0 = \sigma_y$ 。Dean 和 Hutchinson^[13]曾在Ⅱ型裂纹扩展的情况下用有限元数值模拟计算了 c_1 值。将式(8.28)与式(8.29)代入式(8.16)至式(8.19)可得类似于式(8.21)、式(8.26)、式(8.27)的表达式,式中增韧系数应为

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{3c^2}{2\rho(2s+1)} \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) \left[1 + 2s \left(\frac{y_v}{H} \right)^{2s+1} \right] \\ &\quad \cdot \int_0^{\theta_p} \frac{\Sigma_{rr}(\theta) + \Sigma_{\infty}(\theta)}{(\sin\theta)^{1+2s}} t(\theta) \sinh \left[\frac{3\rho}{4} \frac{\Sigma_{rr}(\theta) + \Sigma_{\infty}(\theta)}{\Sigma(\theta)} \right] d\theta \\ C_s &= \frac{2c^2}{2s+1} \left(\frac{E}{E_t} - 1 \right) \left[1 + 2s \left(\frac{y_v}{H} \right)^{2s+1} \right] \int_0^{\theta_p} \frac{\Sigma(\theta) t(\theta)}{(\sin\theta)^{1+2s}} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

上两式中的比值 y_v/H 与 y_s/H 可由准则式(8.13)定出为

$$y_v/H = \left\{ \frac{3fc\sigma_0}{2\rho\theta_c} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \int_0^{\theta_p} \frac{t(\theta)}{\sin^{1+2s}\theta} \right\}^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \cdot \sinh \left[\frac{3\rho}{4} \frac{\Sigma_{rr}(\theta) + \Sigma_{\theta\theta}(\theta)}{\Sigma(\theta)} \right] d\theta \right\}^{-\frac{1}{s}} \\
 y_s/H = & \left\{ \frac{c\sigma_0}{\epsilon_c} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E} \right) \int_0^{\theta_p} \frac{t(\theta)}{\sin^{1+s}\theta} d\theta \right\}^{-\frac{1}{s}}
 \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

式(8.30)与(8.31),以及 Amazigo 与 Hutchinson^[12]和 Dean 与 Hutchinson^[13]的数值计算结果构成了这一问题的全部解答。

8.4 扩展裂纹的桥联增韧

8.4.1 夹杂第二相桥联

由强韧颗粒相或条状增韧相可形成夹杂第二相桥联。由式(8.4),其增韧效果为

$$\Delta J_{IB} = f_p \int_0^l \sigma_1(x) d\delta(x) \quad (8.32)$$

若夹杂相桥联应力 σ_1 仅与裂纹张开位移 δ 有关,即 $\sigma_1(x) = \sigma_1(\delta(x))$,则式(8.32)可简化为

$$\Delta J_{IB} = f_p \int_0^{\delta(l)} \sigma_1(\delta) d\delta \quad (8.33)$$

式中, $\delta(l)$ 为桥联相所能承受的最大伸长,由桥联破断条件来确定。本小节用下述三个例子来说明式(8.33)的计算。

1. 弹性桥联

$$\sigma_1(\delta) = k\delta \quad (8.34)$$

式中, k 为桥联弹性模量。无论是弹性粒子桥联还是刚性粒子对弹性基体的桥联均可归结为这种情况。这时式(8.33)简化为

$$\Delta J_{IB} = \frac{k}{2} f_p \delta(l)^2 \quad (8.35)$$

2. 理想塑性桥联(如韧性颗粒相增韧的结构陶瓷,聚砜增韧环氧树脂等)

$$\sigma_1(\delta) \approx \sigma_s \quad (\text{常数}) \quad (8.36)$$

这时式(8.33)简化为

$$\Delta J_{1B} = f_p \sigma_c \delta(l) \quad (8.37)$$

3. 与基体嵌合的平行短纤维桥联

参阅图8.5,在基体中布有长为 λ 、半径为 r_0 、模量为 E_0 、破断

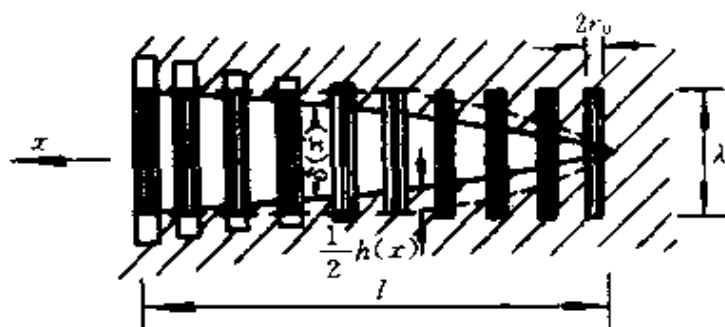


图8.5 平行短纤维的桥联增韧

强度为 σ_c 的平行短纤维,纤维为等间距排列且与裂纹表面相垂直,由此可得在单位裂纹表面上的纤维根数 n 为 $f_p/\pi r_0^2$ 。假定与基体嵌合的诸纤维在高度 $h(x)$ 内有相对滑动,且单位滑动界面上所传递的剪力为常值 q , q 由基体/纤维对的界面力学性质所确定。类似计算亦不难推广到一般纤维拔出的情况,见 Freund^[14]。经一定计算可得

$$\sigma_1(x) = \frac{q}{r_0} h(x) \quad (8.38)$$

如图8.5所示,式(8.38)中 $h(x)$ 为纤维与基体在上下裂纹岸产生滑移部分的总高度。式(8.38)可近似适用于完全摩擦界面或延韧界面的情况。应该指出:该式仅在 σ_1 小于 σ_c 时才成立,否则纤维破断, σ_1 消失为零。

由变形学约束,界面滑移区高度 $h(x)$ 应与裂纹张开位移呈下述关系

$$h(x) = \begin{cases} E_0 \delta(x) / \sigma_1(x) & \text{当 } h(x) + \delta(x) < \lambda \\ \lambda - \delta(x) & \text{当 } h(x) + \delta(x) \geq \lambda \end{cases} \quad (8.39)$$

定义纤维的无量纲柔度 u 和无量纲强度 $\bar{\sigma}$ 为

$$u = \lambda q / r_0 E_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma_c / E_0 \quad (8.40)$$

则可将夹杂第二相的增韧效果表示为

$$\Delta J_{IB} = f_p E_0 \lambda B(u, \bar{\sigma}) \quad (8.41)$$

纤维所能承受的最大假想应力为

$$\sigma_1^{\max} = \frac{1}{2} E_0 [\sqrt{1 + 4u} - 1] \quad (8.42)$$

若上式计算的 σ_1^{\max} 小于纤维破断应力 σ_c , 即 $\sqrt{1 + 4u} < 2\bar{\sigma} + 1$, 则式(8.41)中的桥联增韧函数 B 与 $\bar{\sigma}$ 无关, 为

$$B = \frac{1 + 2u - \sqrt{1 + 4u}}{12u} (1 + 2\sqrt{1 + 4u}) \quad (8.43)$$

且裂纹扩展时所有的纤维均被拔出。若按式(8.42)计算的 σ_1^{\max} 值大于纤维破断应力 σ_c , 则桥联增韧函数 B 可表达为

$$B = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^3 / u \quad (8.44)$$

这时除起裂阶段外, 所有的纤维均在一定滑错变形后被拉断, 当 $\sigma_1^{\max} = \sigma_c$ 时, 式(8.43)与式(8.44)之间将出现一值为 $\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 / u$ 的大幅度跌落。这是由于对定常扩展裂纹来说, 在桥联中部 $h(x)$ 的最大值处出现的纤维断裂将意味着从该点至裂纹尾部全部桥联作用的丧失。该种情况所对应的 J 阻力曲线应自 J_{IC} 出发, 逐渐上升, 然后当第一根纤维破断时便达到 J_{∞} 的平台。图8.6绘出了夹杂桥联增韧函数 B 在不同 $\bar{\sigma}$ 值时随 u 的变化规律。由该图可知, 在短纤维增韧复合材料设计中若取

$$\lambda q / r_0 E \quad \text{略小于} \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\sigma_c}{E_0} + 1 \right)^2 - 1 \right] \approx \frac{2\sigma_c}{E_0} \quad (8.45)$$

可望得到较好的增韧效果。

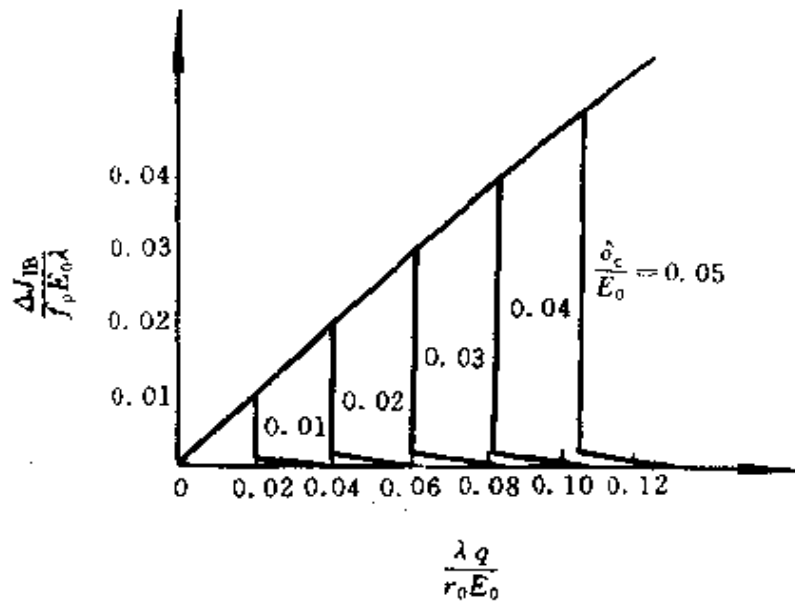


图8.6 平行短纤维的桥联增韧函数

8.4.2 未贯穿基体的桥联增韧

见图8.7,由颗粒韧性相或短纤维钉锚会造成(a)图所示波浪状的裂纹前缘,这种前缘可近似处理为在部分贯穿段($0 < x < s$)的基体桥联作用,见图8.7(b)。将 $\sigma_M(x)$ 解释为未贯穿基体沿厚度

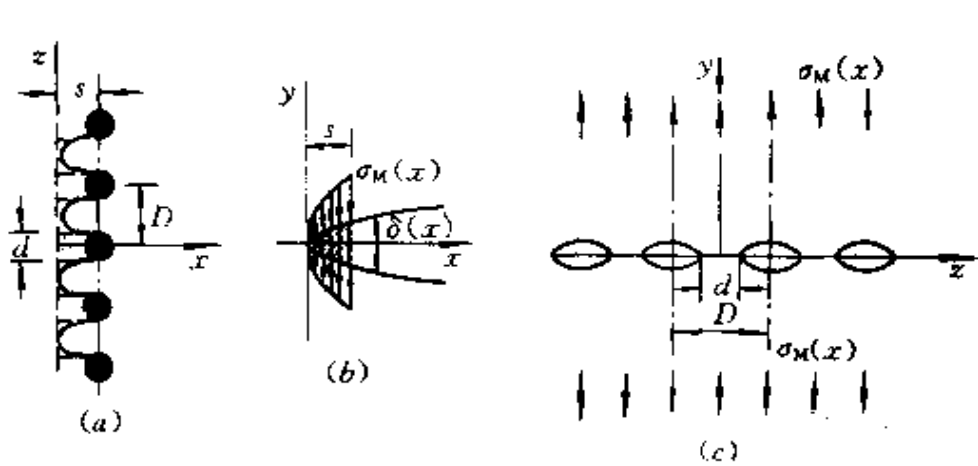


图8.7 未贯穿基体的桥联效应

(a)波浪状裂纹前缘;(b)基体桥联;(c)周期裂纹构形。

z 平均的桥联应力,其增韧作用为(参见式(8.4))

$$\Delta J_{MB} = \int_0^{s(s)} \sigma_M(\delta) d\delta \quad (8.46)$$

式中, σ_M 与 δ 的关系式可由研究图 8.7(c) 所示含一排周期分布裂纹的解答得到。该裂纹构型的裂纹间距为颗粒相中心间距 D , 裂纹长为相邻颗粒的内间距 $D - d$, d 为颗粒直径。在图 8.7(c) 所示构形的远方作用着沿厚度 z 平均的桥联应力 $\sigma_M(x)$ 。 $\delta(x)$ 定义为由于周期裂纹张开而产生的附加 y 向伸长

$$\delta = \Delta_c = \Delta - \Delta_{nc} \quad (8.47)$$

式中, Δ 为 $\sigma_M(x)$ 作用下的远场平均伸长; 而 Δ_{nc} 为对应的无裂纹体伸长。上述模型使人们可讨论任意幂硬化基体

$$\varepsilon_{ij}/\varepsilon_0 = \frac{3}{2} \alpha (\sigma_e/\sigma_0)^{n-1} (S_{ij}/\sigma_0) \quad (8.48)$$

的情况。若应用 EPRI 工程估算方法, 还可以推广用到 Ramberg-Osgood 材料的情况, 但由于 σ_M 往往较大, 这一推广并非必须。在式 (8.48) 的纯幂次本构关系下, 对图 8.7(c) 所示的平面应变问题, 有

$$\delta = \alpha \varepsilon_0 \frac{d}{2} h_3 \left(1 - \frac{d}{D}, n \right) \left(\frac{\sigma_M}{\eta \sigma_0} \right)^n \quad (8.49)$$

式中, $\eta = 0.35 + 0.81d/D$; h_3 函数可借助如图 8.7(c) 点划线所界定的有限宽双边裂纹板的全塑性计算结果, 见 EPRI 延性断裂手册^[15]。将式 (8.49) 代入式 (8.46) 并积分得到

$$\Delta J_{MB} = \alpha \varepsilon_0 \frac{d}{2} \frac{n}{n+1} \eta \sigma_0 h_3 \left(1 - \frac{d}{D}, n \right) \left[\frac{\sigma_M(s)}{\eta \sigma_0} \right]^{n+1} \quad (8.50)$$

式中, 最大基体桥联应力可由 $x = s$ 处的横向贯穿临界条件

$$J = \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 \frac{d}{2} h_1 \left(1 - \frac{d}{D}, n \right) \left[\frac{\sigma_M(s)}{\eta \sigma_0} \right]^{n-1} \leq J_L \quad (8.51)$$

来确定。式中, h_1 函数亦可查延性断裂手册^[15]; J_L 为控制横向贯穿的临界 J 积分值。对比式 (8.51) 与式 (8.50) 可得

$$\Delta J_{MB} \leq \frac{n}{n+1} \eta \frac{h_3 \left(1 - \frac{d}{D}, n \right)}{h_1 \left(1 - \frac{d}{D}, n \right)} J_L \quad (8.52)$$

上式提供了未贯穿基体桥联增韧的一个上限。

8.5 裂尖形貌与超钝化

8.5.1 平面应变裂尖过程区的形貌观察

加载过程中裂尖过程区的演化直接制约着材料的增韧行为。本节以改性 PP(聚丙烯)体系为例来说明裂尖形貌影响及超钝化行为。在形成 PP/HDPE(高密度聚乙烯)复合基体后,再加入5%~10%的 SBS 橡胶颗粒相可使三元共混体系在慢加载下的 J_{IC} 和冲击加载下的 G_{IC} 有很大上升,对后者可提高一个量级以上,见表 8.2。

表 8.2 PP 与改性 PP 的断裂韧性试值

材料		PP1300	PP1330	PP/HDPE	PP/HDPE +SBS5%	PP/HDPE +SBS10%
慢速	$J_{IC}(\text{kJ/m}^2)$	7.7	12.6	12.9	17.2	18.2
冲击	$G_{IC}(\text{kJ/m}^2)$	2.65	4.6	11.7	30.2	34.1

傅增力等^[16]研究了厚试件芯部平面应变区(即断裂主控制区)的裂尖过程区演化特征。实验采用单边裂纹板(SECP)试件,其几何示于图 8.8 中左图。先在试件上开出宽为 0.1mm 的边缺口,继而后用齿状剃须刀片切出尖裂纹。单边裂纹长度为 3mm,与拉伸轴垂直,而拉伸轴平行于注射方向。将诸试件加载到图 8.8 右图所示的 $P-A$ 加载曲线上的诸加载点 A, B, C 与 D,其中: A 为初始偏离线性处; B 处已发生严重非弹性变形; C 为载荷/伸长曲线峰值; D 为最终破断前状况。上述加载可在四种加载率(用夹头速度表示)下进行。

慢加载(S) 5mm/min

快加载(F)	200mm/min
中速冲击(R1)	2.9m/s
快速冲击(R2)	4.3m/s

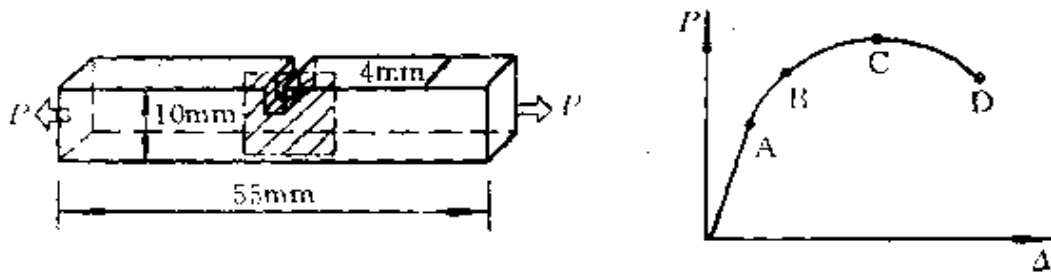


图8.8 在各种加载参数下测试平面应变裂尖形貌

左:SECP 试件几何;右:加载段选择.

不同于常规裂尖形貌的表面观察,我们集中研究在裂纹前缘平面应变占优段的裂尖过程区。断裂力学研究表明裂纹前缘平面应变段对材料断裂韧性确定起关键作用。当实现指定加载步后,将试件浸入液氮浴中以冻结其变形模式。随后,将图8.8左图影线区所示的中心薄片从试件上剖出。进行表面蚀刻与蒸金后,便可在SEM下观察该中心剖片所载有的平面应变裂尖过程区形貌。图8.9照片(a)~(c)显示了不同材料体系在各种加载参数下的扫描电镜照片,这些照片揭示了千姿百态的裂尖形貌。上述实验操作的细节由文献[16]给出。

如图8.9照片(a)所示:纯PP的平面应变过程区由放射状银纹/微裂纹束形成。银纹束形态细长,随机地穿过球晶并垂直于应用方向。加载时在裂尖塑性屈服区有明显的球晶细化,见左图。加载速度越快,银纹束的扇状区张角就越小,而主裂纹呈典型脆性断裂的尖劈状,见图8.9照片(a)右图。

PP/HDPE复合基体的裂尖形貌与纯PP截然不同。在慢加载率(S)下,裂尖过程区由载荷点A、B到C的演化示于图8.9照片(b)左3幅照片,它们揭示了从裂尖空穴化到发育完全的蘑菇状形貌的全过程。我们注意到沿裂纹环向边缘的逐步损伤导致了裂尖

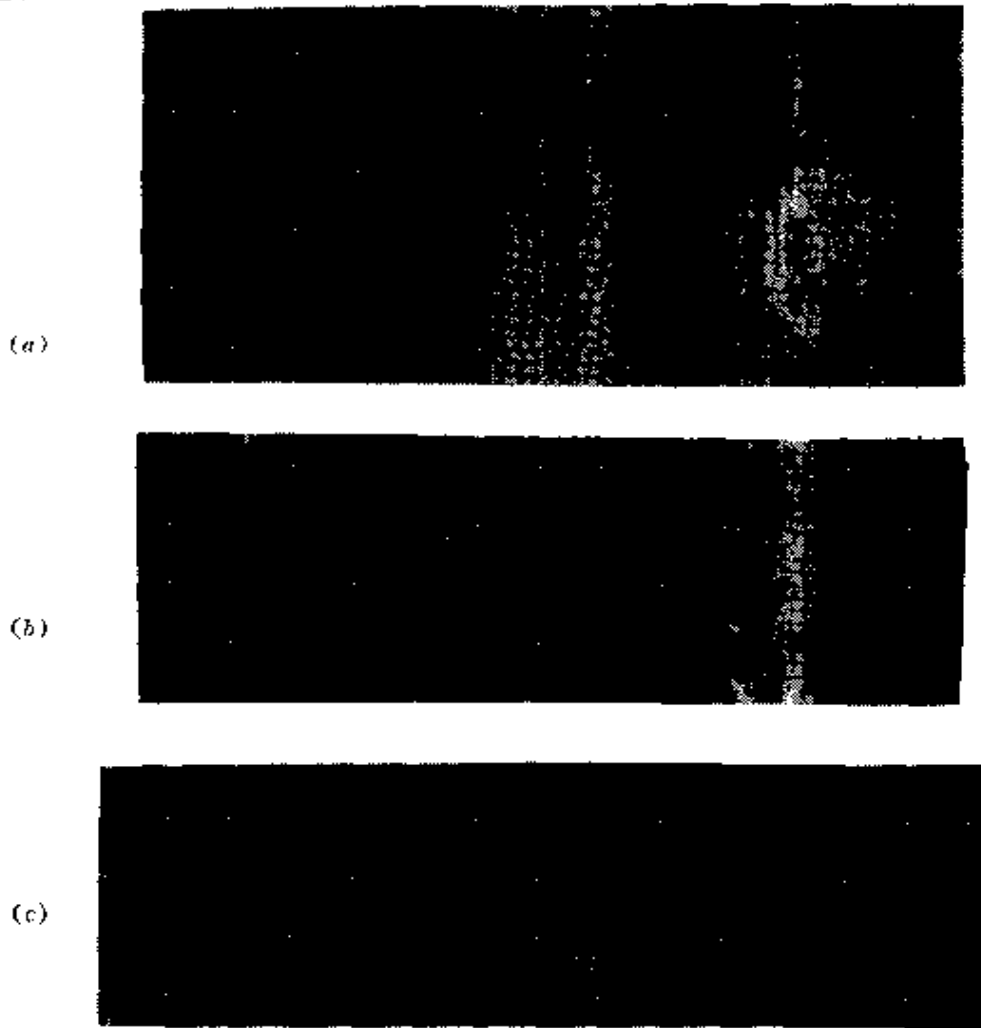


图8.9 平面应变裂尖过程区的形貌观察

(a)纯 PP 在载荷点 D 的裂尖形貌(左:加载速率(S);右:加载速度(F));(b)PP/HDPE 复合基体裂纹形貌(从左至右:加载率(S)下裂尖形貌在 A、B、C 诸载荷点的演化;高加载率(F 和 R1)下 D 载荷点处所对应的矛头形貌和解理断裂);(c)PP/HDPE+SES10%在载荷点 D 处的裂尖形貌(从左至右:加载率(S);加载率(F)及裂尖放大;加载率 R1;加载率 R2)。

超钝化形貌,而该损伤过程在慢加载率下有足够时间来发展。超钝化过程仅在试件厚度中段才清晰可见,因为在该处的厚度约束缓解了横向收缩对裂尖超钝化的扭曲。当加载率提高时,裂尖形貌发生改变。如在加载率(F)时,形成如图8.9照片(b)中左起第4幅照片所示的矛头状裂尖形貌。在冲击加载率(R1)下,便出现图8.9照片(b)最右端所示的纯脆性解理形貌。也就是说:PP/HDPE 复合基体尽管在慢速加载时呈韧性,但在冲击加载时仍呈脆性,恰如表8.2

中对应数据所示。

对 PP/HDPE+SBS10%增韧材料体系,裂尖超钝化更为显著。在加载率(S)下,裂尖呈扁平超钝化状。在加载率(F)下超钝化形貌仍得以维持。甚至在中速冲击加载(R1)下,仍可观察到箭头状裂尖形貌,且在裂尖两翼均观察到空穴化损伤区,这时试件的破断仍由延性损伤机制所控制。在快速冲击加载(R2)下,裂尖演化为钝劈形貌,并观察到材料脱落,见图8.9照片(c)中末幅照片。

以上实验结果表明,在试件平面应变区观察到裂尖超钝化,超钝化现象对增韧体系表现得尤为明显且随加载率升高而减弱。

8.5.2 环向叠次冷拉理论

PP及其改性体系在单轴慢拉伸时呈现出冷拉行为。如图8.10上图所示,冷拉型颈缩在单拉过程的一特定阶段出现,颈缩段将以一特征速率 v_{cd} 向两侧延展到整个试件标距长度。冷拉传播速度 v_{cd} 依赖于粘塑性PP体系的材料弛豫时间,且其数值当材料随PP换至PP/HDPE,再换至PP/HDPE+SBS10%而递增。

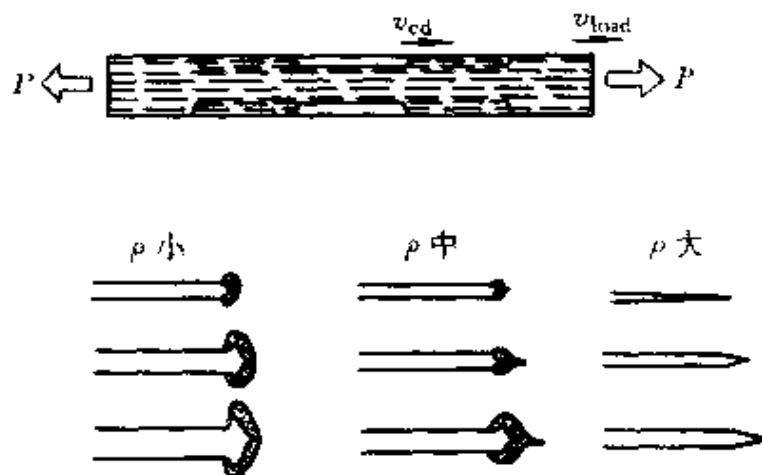


图8.10 环向叠次冷拉模型

上图:单拉时的冷拉形成;下图:在不同 ρ 值下裂尖处的环向冷拉。

本小节阐述关于钝化或超钝化的环向叠次冷拉理论。控制裂

尖形貌的参数为加载速率 v_{load} 与冷拉传播速率之比

$$\rho = \frac{v_{\text{load}}}{v_{\text{cd}}} \quad (8.53)$$

针对不同的 ρ 值,图8.10下图给出了裂尖形貌的三种演化趋势。当 ρ 值高时,颈缩胚可形成,但却由于扩展时间不足而无法沿环向发展,于是形成尖劈或小半径钝劈,反之,当 ρ 值小时,冷拉可沿环向伸展扫过整个缺口前端区,直至在缺口后方应力下降处终止。当载荷继续增加时,这一颈缩形成超钝化形貌。因此,蘑菇状超钝化裂尖形成得益于叠次环向冷拉的充分发育。对中等大小 ρ 值,未充分发展的叠次环向冷拉变形沉积成矛头形貌。从图8.9照片(c)第3幅照片,即缺口顶端的放大照,可清楚观察到纤维化冷拉织构及环向冷拉传播的波形。

裂尖超钝化将直接造成材料增韧。由弹塑性断裂力学,可将起裂韧性 J_{IC} 表达为

$$J_{\text{IC}} = \frac{1}{d} \sigma_y \delta_c \quad (8.54)$$

式中无量纲因子 d 为硬化指数 n 与三轴约束度的函数。式(8.54)表明 J_{IC} 正比于裂尖张开位移 δ_c 。裂尖超钝化的形成将显著提高 δ_c 值,于是便改善了 J_{IC} 。此外,裂尖超钝化可由缓解裂尖应力集中而抑制裂纹扩展,试件于是由韧带塑性失稳而导致破坏。综上所述,环向叠次冷拉理论所预测的结果与上小节所列举的裂尖形貌及表8.2中的断裂韧性数据定性符合。

由损伤引致的裂尖形貌变化的力学数值模拟已在第7.1至7.3节中予以讨论。

8.6 场激发微区域转变

近年来对精细结构陶瓷和形状记忆合金的力学行为研究阐明了具有夹杂亚结构的介质由于应力型相变而产生的强韧化效果。应力型相变是场激发微区域转变的一种,指某一微区域在某一确

定应力组合超过临界值时,即发生马氏体型相变,产生体膨胀 ε^{ν} 和相变剪切应变 ε^{σ} 。下面拟按相变准则、相变细观力学分析和相变增韧的次序来进行讨论。

8.6.1 应力型相变准则

科学家们在研究相变增韧时提出过种种相变准则。早期的准则(如 McMeeking 与 Evans^[17], Budiansky, Hutchinson 与 Lambropoulos^[4])强调由静水应力 $\Sigma_m = \frac{1}{3}\Sigma_{ii}$ 所引起的晶格膨胀,(重复拉丁下标表示从1到3求和),

$$\Sigma_m = \Sigma_c \Rightarrow E\varepsilon_{ii} = f\varepsilon^{\nu} \quad (8.55)$$

上式所依据的二阶张量 Σ_{ij} 和 $E\varepsilon_{ij}$ 分别表示宏观应力和相变应变; f 为相变粒子的体积分数。随后提出的其他具有代表性的相变准则有

①最大剪应力引起相变,见 Evans 与 Cannon^[18]

$$\tau_{\max} = \tau_c \Rightarrow E\varepsilon_{12} = f\varepsilon^{\sigma} \quad (8.56)$$

②最大拉伸引起相变,见 Lambropoulos^[19]

$$\Sigma_{11} = \Sigma_c \Rightarrow E\varepsilon_{11} = f\varepsilon^{\sigma} \quad (8.57)$$

③“水珠”假设下的应力相变准则,见 Lambropoulos^[19]

$$\frac{5(1-\nu^2)}{3(1-2\nu)(7-2\nu)}\sigma_m^M + \sigma_m^M = \left(\frac{E\varepsilon^{\nu}}{3(1-2\nu)}\right)^2 P(a) \quad (8.58)$$

式中, σ_m^M 和 σ_m^M 分别对应于基体应力张量 σ_{ij}^M 的 J_2 等效应力和平均应力; ν 为材料泊松比; $P(a)$ 为与相变颗粒尺寸 a 有关的材料函数。

④应力唯象准则, Chen 和 Reyes-Morel^[20]

$$\Sigma_c/\Sigma_c^* + \Sigma_m/\Sigma_m^* = 1 \quad (8.59)$$

式中, Σ_c^* 与 Σ_m^* 为实验可测材料常数; Σ_c 为 J_2 等效宏观应力。

8.6.2 细观力学模型

为建立相变塑性细观本构关系,特取图8.11所示的胞元模型^[21]。该胞元含有足够多的未相变母相颗粒及弥散分布的相变马

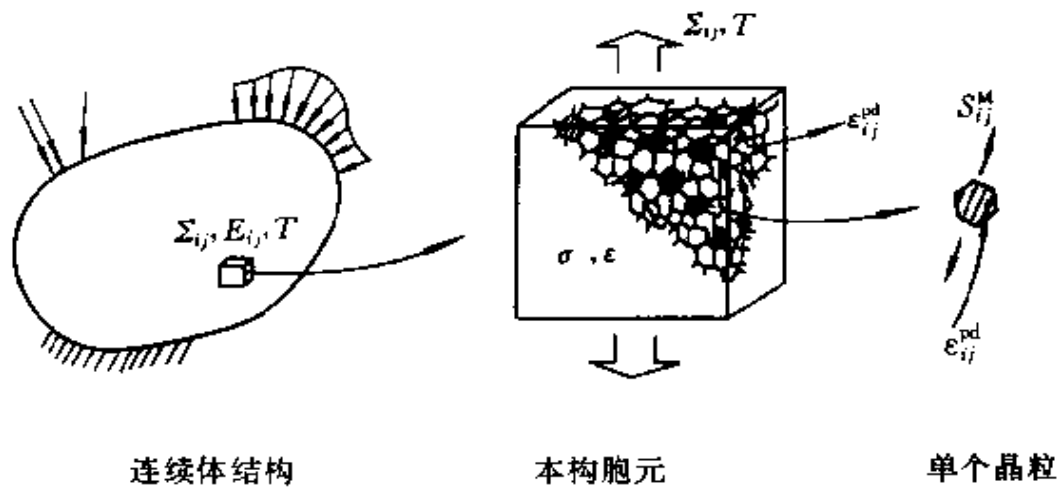


图8.11 本构胞元的微结构和细观力学模型

氏体夹杂, 后者的体积分数记为 f 。在该胞元上温度 T 为均匀, 且在胞元的边界作用有宏观应力 Σ_{ij} 或宏观应变 E_{ij} 。显微观察表明: 在确定热力相变环境下, 母相/马氏体相变界面以接近声速的高速掠过, 以致在非冲击加载的情况下, 任一特定晶粒只存在未相变态和相变完毕态两种极限情况。但对图8.11所示的胞元来说, 其已相变晶粒所占的体积比为 f ($0 < f < 1$), 该 f 值受到应力相变准则 (式(8.54)至式(8.58)) 控制, 代表在整个材料胞元上取体积平均的结果。

在应力激发相变过程中, 体膨胀相应变 ϵ^{pv} 对应于确定的晶格膨胀, 其取向与应力状态无关。然而, 由于晶体学取向及剪切变形特征, 偏斜相变应变与应力取向有关。马氏体有24种可能取向, 它们中能量最有利的一种取向可优先形成并以声速延展到该晶粒的四周边界。因此, 对任一特定晶粒来说, 其相变偏斜应变 ϵ_{ij}^{pd} 应近似与当地平均偏斜基体应力 S_{ij}^M 共向, 即剪切相变应变平行于偏应力与相变背应力之差。于是可提出 (如见 Sun 和 Hwang^[21])

$$\epsilon_{ij}^{pd} = \sqrt{\frac{3}{2}} g \frac{S_{ij}^M}{\sigma_c^M} \quad (8.60)$$

式中, $\sigma_e^M = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^M S_{ij}^M}$ 表示等效基体应力; $g = \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0}$ 代表偏斜相变应变的强度。借助于均匀化过程及 Mori-Tanaka 定理, Sun, Hwang 和 Yu^[22] 在上述取向规定和长程、突发相变假设下, 导出了下述增量型本构关系

$$\dot{E}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + f \left\{ \frac{\varepsilon_{ij}^0}{3} \delta_{ij} + \sqrt{\frac{3}{2}} g \frac{S_{ij}^M}{\sigma_e^M} \right\} \quad (8.61)$$

式中, M_{ijkl} 代表弹性柔度张量; 相变率 f 可由一致性条件得到。Sun 和 Hwang^[21] 将这一方法推广到逆向相变和形状记忆过程。

8.6.3 相变增韧

相变塑性在增韧结构陶瓷的当代发展中起到了重要的作用, 其典型例子包括部分稳定二氧化锆 (PSZ) 和正方二氧化锆多晶体 (TZP) 中的单斜/正方马氏体相变。在上述材料体系中, 裂纹尖端高应力区所诱发的微区域转变过程对扩展裂纹造成尾区闭合效应。可用宏细观断裂力学的方法估算这一屏蔽效应, 这时近尖端应力强度因子的折减为

$$\Delta K = K_{app} - K_{tip} \quad (8.62)$$

见 McMeeking 与 Evans^[17], Budiansky, Hutchinson 与 Lambropoulos^[4], 文献[4]的解答常称为 BHL 解。这些早期的解答局限于纯体膨胀相变的情况。在 BHL 解中发现, 对静止裂纹 ΔK 为零, 体膨胀相变屏蔽仅对扩展裂纹才有效, 残余塑性体膨胀在裂纹尾区造成的闭合起到了屏蔽作用。

下面定量地讨论相变塑性所造成的增韧效果。对扩展裂纹, BHL 解中用到了下面一个与路径无关的能通量围道积分

$$I = \int_r (w n_1 - n_\alpha \Sigma_{\alpha\beta} u_{\beta,1}) ds \quad (8.63)$$

上式中的符号意义与式(8.2)相同, 应变能密度 w 的表达式见式(8.3)。若采用与第8.2节中相似的推导步骤, 可得其远方作用的应力强度因子 K_{app} 相对于近尖端应力强度因子 K_{tip} 的增值。该增韧

效应可由下述扩展裂纹的尾区耗能公式来确定

$$K_{app}^2 - K_{tip}^2 = \frac{2E}{1-\nu^2} \int_0^H U(x_2) dx_2 \quad (8.64)$$

在 BHL 解中根据断裂力学分析得到,当裂纹为稳恒扩展时,增韧效果的估算公式为

$$\Delta K = \beta \frac{E}{1-\nu} \epsilon^{pv} f \sqrt{H} \quad (8.65)$$

对由式(8.54)控制的纯体膨胀相变, BHL 解中定出 $\beta = 0.214$ 。由这一 β 值所得到的增韧估算示于图 8.12 中的虚线。该预

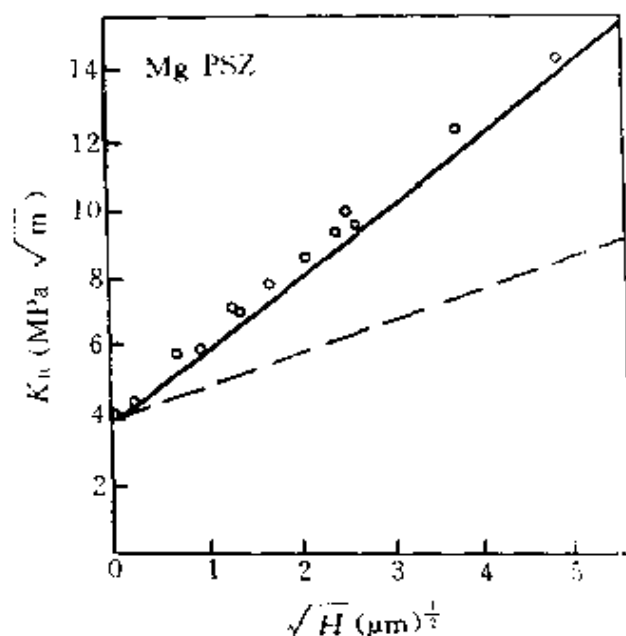


图 8.12 增韧预测与 Chen 和 Reyes-Morel 实测数据的比较

(引自 Sun, Hwang 和 Yu^[22])

测明显低估了实测 Mg-PSZ 增韧数据 (Chen 与 Reyes-Morel^[20]), 见图 8.12 中的各圆圈点。若采用第 8.6.1 小节中所援引的其他相变准则式(8.56)~式(8.59), 可估计得 β 值如下

$$\begin{aligned} \beta &= 0.38 & \sigma_{max} \text{ 诱发相变} \\ \beta &= 0.50 & \Sigma_1 \text{ 诱发相变} \\ \beta &= 0.48 & \text{应力唯象准则} \end{aligned} \quad (8.66)$$

然而, 目前这些准则的物理意义还未完全澄清。Sun, Hwang, Yu^[22]

综合考虑体膨胀和剪切相变的影响,在细观力学模型下导出

$$\beta = 0.46 \quad (8.67)$$

如图8.12中的实线所示,该预测与 Chen 和 Reyes-Morel 的实验数据吻合甚佳。

8.7 表面与界面强韧

表面与界面强韧化在材料强韧理论中占有重要地位。现代表面强化的一个有效途径是近期发展的表面合金工程,如采用离子注入工艺获得具有适当离子注入分形动力学结构的表面强韧过渡层。这些注入离子在表面层内产生衰减型的压缩残余应变,有效地抑止了垂直于表面的开裂过程,如图8.13所示。一个重要的力学问题是设计最优的残余应变分布以使得该离子注入工艺不致引发平行于表面的开裂(即表面层剥落)。与表面过渡层相类似的另一个问题是图8.14所示的界面过渡层。以新型高温发动机中在高温镍铬钢基体上等离子喷涂碳化硅陶瓷绝热层为例,实践证明必需在基体与陶瓷相中间用 $(\text{SiC})_x(\text{Al}_2\text{Cr})_{1-x}$ 变配比等离子粉喷涂上一界面过渡层后才能有效地防范绝热层在高温循环加载下的剥落过程,对这一问题的力学研究正在进行。

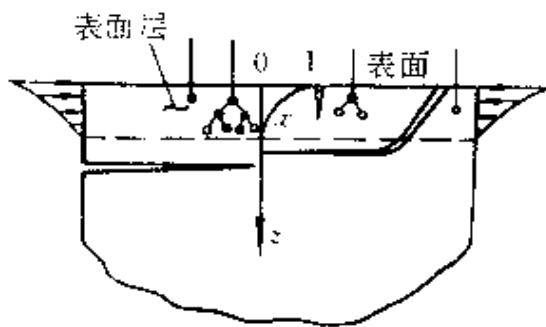


图8.13 表面过渡层

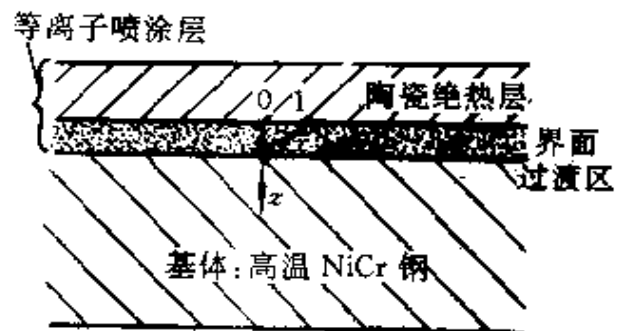


图8.11 界面过渡层

界面层增韧的设计要点在于合理地控制近尖端裂纹奇异场的混合度(以幅角 θ_0 表示)。近年来界面断裂韧性的测试数据表明近

Ⅱ型界面断裂韧度(I)远大于近Ⅰ型界面韧度,甚至可以高出一个量级。因此根据外载环境而将界面断裂设计为近Ⅱ型是至关重要的。传统的数学界面理论引致裂尖场的振荡性,以致于不能清晰地定义 ψ_{tip} 。而最近提出的物理界面层理论却能得到稳定的 ψ_{tip} 值。关于界面层断裂理论已在第5.7节中予以详细阐述。

以 ψ_{tip} 为单变量可将原依赖一定义含糊特征长度 \hat{L} 的界面断裂准则改造为下述本质界面断裂曲线

$$G(\hat{\psi}, \hat{L}) = \Gamma(\hat{\psi}, \hat{L}) \Rightarrow G(\psi_{tip}) = \Gamma(\psi_{tip}) \quad (8.68)$$

$\Gamma(\psi_{tip})$ 曲线可由细观力学给出。考虑如图8.15所示界面层位错发射

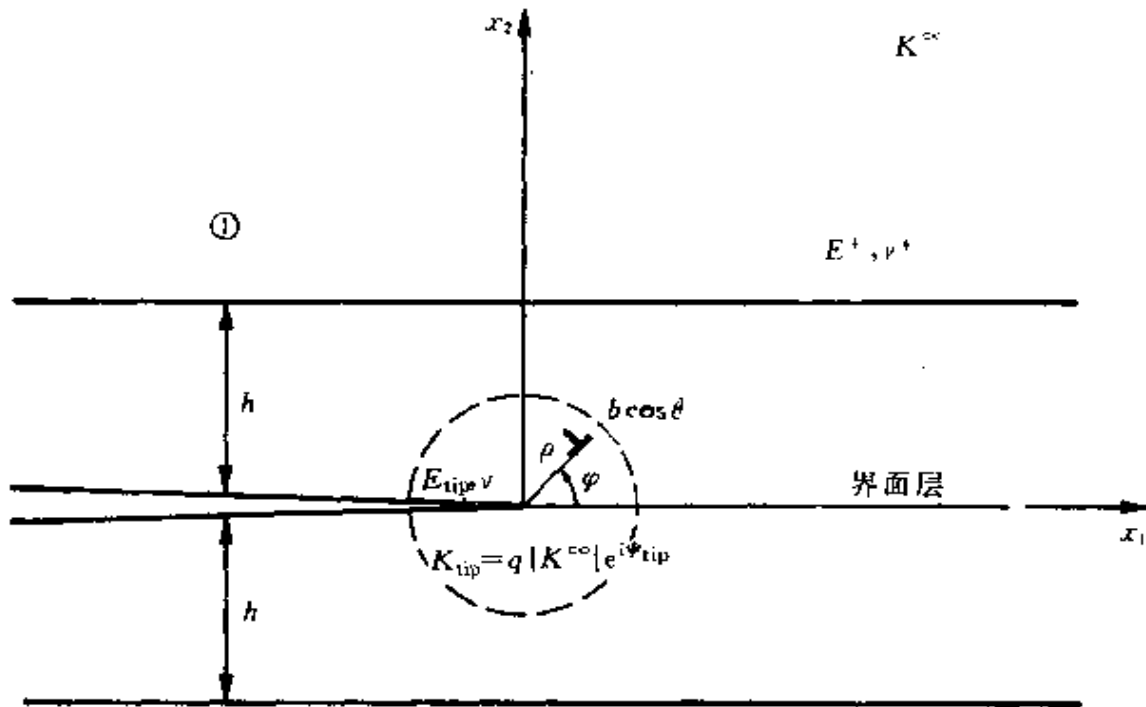


图8.15 界面层断裂的位错发射模型

射模型(图中诸特征量的定义亦参见第5.7节), Yang 与 Shih^[25]得以导出下述临界位错发射条件

$$\xi = \hat{\xi} / R_m^2 \leq \xi_c \quad (8.69)$$

式中, $\xi_c = \frac{r_c}{b}$; r_c 为临界形核半径; $\hat{\xi}$ 对应于纯Ⅰ型近尖端场下的 ξ 值

$$\hat{\xi} = \frac{E_{tip} b}{16\pi\gamma R_0^2} \left(\frac{1 - \nu \sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)^2 \quad (8.70)$$

式中, E_{tip} 为裂尖处杨氏模量; γ 为表面能; θ 为伯格斯的刃分量与螺分量的倾角; $R_0 = 0.7698$ 为 $\sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2}$ 的最大值。式(8.69)中的数值因子 R_m 表示由于裂尖混合度偏离纯 I 型所造成的位错驱动力放大因子, 其表达式为

$$R_m = \cos\frac{\varphi}{2} [\sin\varphi \cos\psi_{\text{tip}} + (3\cos\varphi - 1)\sin\psi_{\text{tip}}] / R_0 \quad (8.71)$$

图8.16绘出了位错发射角 φ 与位错驱动力放大因子 R_m 随裂

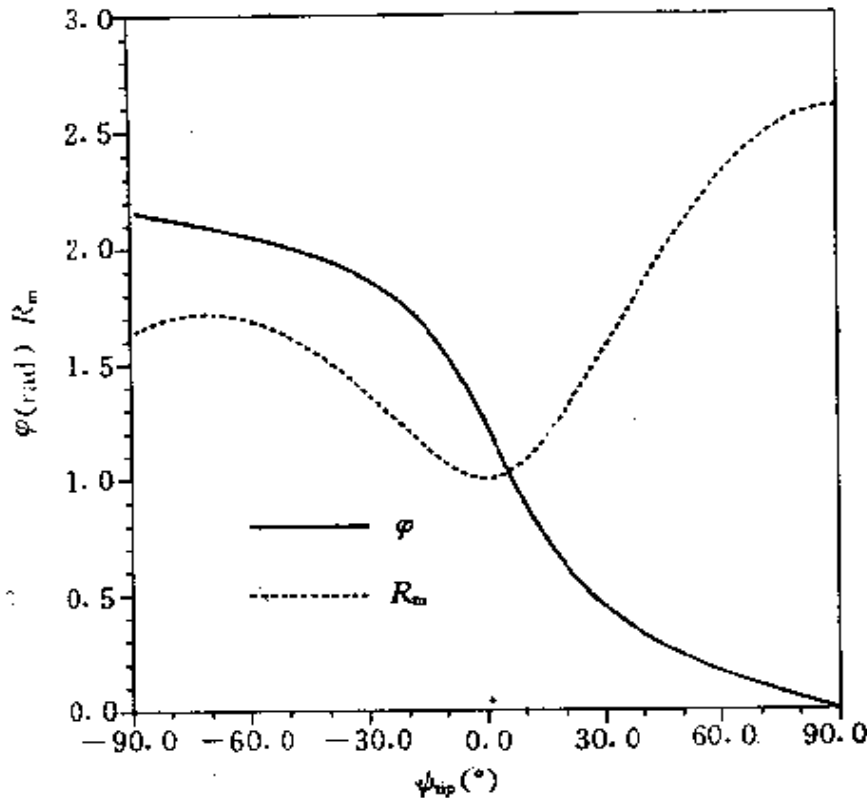


图8.16 位错发射参量与裂尖混合度的关系

尖混合度 ψ_{tip} 的变化曲线。该计算表明当 $\psi_{\text{tip}} = 0$ 时位错最不易于从裂尖发射, 即近 I 型的界面断裂最危险。于是可推断在 $\psi_{\text{tip}} = 0$ 附近, R 值应为最小。在实际材料界面设计中, 若外载幅角与双材料配合确定, 则可由改变界面层参数来改变 ψ_{tip} 。改变 ψ_{tip} 便可在近一个量级的范围内改变界面断裂韧性 Γ 。即当 $|\psi_{\text{tip}}|$ 接近于 $\frac{\pi}{2}$ 时, Γ 可变得很大。我们将这种界面层设计思想称之为界面层断裂混合度设计。

参 考 文 献

- 1 Evans A G. The mechanical properties of fiber reinforced ceramic, metal and inter-metallic composites. *Mater. Sci. Eng., Ser. A*, 1991, 143, 63
- 2 杨卫, 黄克智, 余寿文. 材料强韧化的宏细观断裂力学理论. *力学与实践*, 1991, 13(6): 1~9
- 3 杨卫. 细观力学与细观损伤力学. *力学进展*, 1992, 22(1): 1~9
- 4 Budiansky B, Hutchinson J W, Lambropoulos J C. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics. *Int. J. Solids Struct.*, 1983, 19, 337~355
- 5 杨卫. 结构韧性材料在裂纹扩展中的韧性增值. *力学学报*, 1990, 23(1): 61~71
- 6 Evans A G et al. Mechanisms of toughening in rubber toughened polymers. *Acta Metall.*, 1986, 34, 79~87
- 7 鲁红兵, 余寿文, 杨卫等. CTBN 增韧环氧树脂增韧机制的新裂力学研究. *清华大学学报*, 1990, 30(5): 22~29
- 8 Rose L R F. Crack reinforcement by distributed springs. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35, 383~405
- 9 Budiansky B, Amazigo J C, Evans A G. Small scale crack bridging and fracture toughness of particulate reinforced ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, 30, 167~187
- 10 Yang W, Fu Z L, Sun Y S. Bridging toughening of epoxy resin by dispersed thermoplastics. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 5, 332~342
- 11 高玉照. 理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性场. *力学学报*, 1980, 12(1): 48~56
- 12 Amazigo J C, Hutchinson J W. Crack tip fields in steady crack growth with linear strain hardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, 25, 81~97
- 13 Dean R H, Hutchinson J W. Quasi-static steady crack growth in small scale yielding. *ASTM STP 700*. Philadelphia, Ame. Soc. Testing & Mater., 1980, 383~405
- 14 Freund L B. The axial force needed to slide a circular fiber along a hole in an elastic material and implications for fiber pull out. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 1992, 11, 1~19
- 15 Zanoun A. *Ductile Fracture Handbook*, V. 1, 2, 3. New York, Novatech/EPR1, 1991
- 16 傅增力, 施松华, 孙以英等. 聚内烯多相改性体系的裂尖过程区与增韧模型. *中国塑料*, 1991, 3(3): 11~13
- 17 McMeeking R, Evans A G. Mechanisms of transformation toughening in brittle materials. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1982, 65, 242~244

- 18 Evans A G, Cannon R M. Toughening of brittle solids by martensitic transformations. *Acta Metall.* ,1986, 34:761~800
- 19 Lambropoulos J C. Shear, shape and orientation effects in transformation toughening. *Int. J. Solids Structs.* ,1986, 22:1083~1106
- 20 Chen I W, Reyes Morel P E. Implications of transformation plasticity in ZrO_2 -containing ceramics; I, shear and dilatation effect. *J. Am. Ceram. Soc.* ,1986, 69:181~189
- 21 Sun Q P, Hwang K C. Micromechanics constitutive description of thermoplastic martensitic transformation. in: Hutchinson J W, Wu T Y eds. *Adv. Appl. Mech.* , V. 31. San Diego, Academic Press, 1994. 249~298
- 22 Sun Q P, Hwang K C, Yu S W. A micromechanics constitutive model of transformation plasticity with shear and dilatation. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39:507~524
- 23 Yang W, Shih C F. Fracture along an interlayer. *Int. J. Solids Structs.* , 1994, 31: 985~1002

下篇 纳观断裂力学

第9章 纳观力学基础

9.1 纳观断裂力学引论

对固体断裂过程的本质理解必须在细观力学与纳观力学的结合角度上才能实现。细观破坏过程的四种基本构元(孔洞、微裂纹、界面失效、变形局部化带)的起源和演化描述必须在纳观尺度才能完全阐明,这时其破坏状态方程能够借助于物理失效法则(如原子结合力曲线)实现封闭。也就是说,从宏观到细观再到纳观的层次深入将导致从唯象认识学到损伤机制学再到断裂物理学的概念突破。由于近几年来对细观力学认识的深入,由于连续介质/粒子嵌套构形概念的提出,由于大规模计算手段的发展,由于在高分辨率电镜技术和单原子探测技术(如隧道扫描电镜、原子力显微镜)上的突破,使这一固体力学的学科进展在近若干年内成为可能。

纳观断裂力学体现了从经典的固体力学向固体物理层次的深入。它扬弃了宏观力学的连续介质假设,直接深入到原子层次,通过研究粒子在势函数作用下的运动来讨论固体在纳观尺度下的断裂行为^[1]。

纳观断裂力学认为:晶格密排面的分离导致材料解理断裂;密排面沿晶格方向的错移导致由“裂尖锐化而造成的韧性。运用分子动力学、蒙特卡罗方法,以及原子换位技术,可模拟纳米量级空间尺度上的细微结构和飞秒至皮秒量级时间尺度上的原子运动,再

现破坏的纳观过程。

进入90年代以来,国际力学界在纳观力学研究中取得了四项重要成就:

(1)哈佛大学 Rice 教授所领导的研究组提出了裂尖位错形核的 Peierls 框架。Rice 等在原子内聚力的思想下研究了非完整位错自裂尖的逐步形成过程,摒弃了不准确的位错芯概念。该研究提出了一个位错形核特征量:失稳堆垛能,其重要性相当于 Griffith 为描述脆性断裂过程在1920年提出的断裂表面能。美国 ONR 评价这项研究是近十年来这一领域内最重大的研究发现。以该项研究作为契机,一批固体力学家的研究开始进入传统的固体物理领域。

(2)美国 Brown 大学 Kim 教授所领导的纳观力学实验室实现了力学量测技术的重要突破:借助于具有原子分辨率的电镜和量测数据的量子场论修饰技术,首次实现了具有原子尺度分辨率的力学场测量,使实验力学测试的空间分辨率从原先的微米量级跃进至纳米量级。在实验中测得的位错变形场结构推翻了原有的位错芯模型。

(3)原子镶嵌方法(Embedded Atom Method,简记为 EAM)逐渐成熟。美国桑地亚国家实验室在 Baskes 教授领导下的研究组已对元素周期表上的常用元素(42种)测出 EAM 所需的物理参数。该项研究为原子多体势理论的应用提供了一个可操作的方案。在该套数据下,固体的本构和破坏过程描述将在原子层次上初步得到封闭。

(4)大规模位错计算得到实施。其计算规模为几千根三维位错的演化过程。大规模位错计算初步支持了变形诱导位错花样的理论。

9.2 原子间作用势

细观断裂模拟的真实性依赖于对原子间作用势的准确描述。以往常用原子对势来描述原子间的键合。该表述仅适用于多体效

应不明显的晶体,如离子晶体。对于金属晶体,对势不能确切表达弹性模量 C_{12} 、 C_{44} ,且当原子所处环境与规整晶格排列有偏差时(如缺陷附近)对势表达不充分,因此需考虑多体效应的修正。

9.2.1 对势模型

对离子价键下构成的晶体,可采用 Born, Lande 与 Madelung 的简单对势模型。其晶体总能可表达为

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{Z_i Z_j}{r_{ij}} + \frac{b}{r_{ij}^m} \right] \quad (9.1)$$

式中, e 为电子电荷; ϵ 为介电常数; m 和 b 是晶格参量,可在一般的材料手册上查到; Z_i, Z_j 分别为 i, j 原子的价电子数; $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ 为位于 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}_j 的第 i 个和第 j 个原子间的距离。式中的第一项表示离子间的库仑相互作用。虽然具有相同电性的离子间存在着排斥作用,但由于在离子晶体中,正负离子一般呈相间排列,每一种离子都以异号的离子为近邻,因此库仑作用的总效果为吸引力。式(9.1)中的第二项为由泡利不相容原理引致的短程相互作用,产生排斥力。

9.2.2 原子镶嵌方法(EAM)

对电子云基本呈球对称的金属原子键合,可采用 Daw 和 Baskes^[2]提出的原子镶嵌方法来对原子对势模型进行多体修正。该方法在对势基础上,引入原子所处位置的电子密度对势能的影响,考虑了原子周围的晶格环境,为描述非规整晶格环境下(诸如含微观缺陷、界面、表面等的晶格)的原子运动提供了有效工具。

原子镶嵌方法把晶格总能表达为

$$E_{\text{total}} = \sum_i \left[\frac{1}{2} \Phi_i(\mathbf{r}_i) + F(\rho_i) \right] \quad (9.2)$$

等式右端和式的第一项代表了传统的对势,用 Φ 表示第 i 个原子核与晶格中其余原子核之间的相互排斥作用

$$\Phi_i(\mathbf{r}_i) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{z_i(\mathbf{r}_i) z_j(\mathbf{r}_j)}{r_{ij}} \quad (9.3)$$

有效电荷数 $z_i(r)$ 与 $z_i(r)$ 由于受到屏蔽作用, 随着原子间距离增大而衰减

$$z_i(r) = Z_i \exp(-\alpha r) \quad (9.4)$$

式中, Z_i 为原子的价电子数; α 为待定常数, 由单质材料的弹性模量来确定。对于纯铝, α 通过计算为 $1.16 \times 10^{10}/\text{m}$ 。

式(9.2)的第二项为多体修正项。 $F(\rho_i)$ 为把第 i 个原子核镶嵌入密度为 ρ_i 的电子云中所需的能量。其中 ρ_i 为除第 i 个原子以外的所有其他原子的核外电子在第 i 个原子处产生的电子云密度之和

$$\rho_i = \sum_{j(\neq i)} \rho_j^{\text{atom}}(r_{ij}) \quad (9.5)$$

式中, $\rho_j^{\text{atom}}(r_{ij})$ 为第 j 个原子的核外电子在第 i 个原子处贡献的电荷密度; ρ^{atom} 为离指定原子中心的球坐标向径 r 的函数。对于铝, 原子的核外电子密度由核外的 s 电子与 p 电子所贡献, 可表达为

$$\rho_i^{\text{atom}}(r) = n_s \rho_s(r) + n_p \rho_p(r) \quad (9.6)$$

式中, n_s 和 n_p 为核外 s 电子与 p 电子的数目; $\rho_s(r)$ 和 $\rho_p(r)$ 分别为与 s 电子和 p 电子的波函数相联系的电子密度沿径向的分布。Clementi 和 Roetti^[3] 计算出 s 电子与 p 电子的电子云密度在球面的平均值为

$$\rho_s(r) = \frac{1}{4\pi} \left| \sum_k C_k R_k(r) \right|^2 \quad (9.7)$$

式中

$$R_k(r) = \frac{(2\zeta_k)^{n_k - \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2n_k)!}} r^{n_k - 1} e^{-\zeta_k r} \quad (9.8)$$

对 $\rho_p(r)$ 有同样的表达式。式(9.8)中的参数 C_k 、 n_k 和 ζ_k 可以用 Roothaan-Hartree-Fock 方法从 Schrödinger 方程中求出。

式(9.2)中的镶嵌能函数 $F(\rho)$ 可以从晶格的升华能 E_s 中求出。考虑原子 i 从晶格的逸出过程, 根据 Rose 等^[4], 可以写出

$$F(\bar{\rho}_i) = -E_s - \frac{1}{2} \Delta_i(\bar{\rho}_i) \quad (9.9)$$

式中, 上标一杠量为根据规则晶格排列计算出的值。升华能 E_s 随

晶格的变形而改变,规则晶格的变形用晶格常数 a 的变化来表达

$$E_i = E_{\text{sub}}(1 + a^*)e^{a^*} \quad (9.10)$$

式中, E_{sub} 为未变形晶格的升华能;无量纲数 a^* 表达了晶格伸张的程度

$$a^* = \sqrt{\frac{9B\Omega}{E_{\text{sub}}}} \left(\frac{a}{a_0} - 1 \right) \quad (9.11)$$

式中, B 为材料的体弹性模量; Ω 为平衡时每个原子所占的体积; a 与 a_0 分别为变形与未变形时的晶格常数。

由于原子间相互作用势随原子间距的增大而衰减,因此对于能量的计算可在所考虑原子周围几个原子间距的区域以外进行截断。对于金属晶体,截断半径可取4个原子间距;对于离子晶体,截断半径可取8个原子间距。

9.2.3 修正原子镶嵌方法(MEAM)

原子镶嵌方法尚存在下述缺点:

①电子密度计算式(9.7)为球面平均,对具有极性的价键结构不适宜;Baskes^[6]曾将原子镶嵌方法推广到共价键材料,导出了硅的半经验型原子势函数。

②在若干计算问题上发现 EAM 的预测不够准确,如对堆垛层错能估计过大,对小聚集样本计算仅有定性价值,而不具备定量上的准确性。

有鉴于此,Baskes 等^[6,7]提出了修正原子镶嵌方法(Modified Embedded Atom Method, 简称为 MEAM),现简述如下:

对照式(9.2),MEAM 仍认为晶格总能可表达为每个原子所对应能量的叠加

$$E_{\text{total}} = \sum_i E_i \quad (9.12)$$

上式中的求和对点阵中所有原子进行。在任意原子构形下,能量贡献 E_i 可写为^[7]

$$E_i = \frac{1}{Z_i} \sum_{j(\neq i)} E_i(r_{ij}) + \left[F_i \left(\frac{\rho_i}{Z_i} \right) - \frac{1}{Z_i} \sum_{j(\neq i)} F_i \left(\frac{\bar{\rho}_i(r_{ij})}{Z_i} \right) \right] \quad (9.13)$$

式中, 升华能 E_s 与原子 i, j 之间距离 r_{ij} 的定义同前; Z_i 为原子 i 的近邻价键数, 上式右端的第一项表示原子 i 在参照点阵中每个近邻距离处的能量平均; 而第二项表示原子 i 在背景电子密度下真实受到的镶嵌能与该原子在参照点阵每个近邻阵点的平均镶嵌能之差。在式(9.13)中, 升华能的表达式仍由式(9.10)给出, 但该式中无量纲伸张程度可写为

$$a^*(R) = \lambda \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right), \quad \lambda = \sqrt{9B\Omega/E_{\text{sub}}} \quad (9.14)$$

式中, 符号 $B, \Omega, E_{\text{sub}}$ 的意义同式(9.11); R_0 为平衡(未变形)状态下的近邻原子距离。

式(9.13)中的镶嵌函数 F_i 可写为

$$F_i(\rho) = A_i E_{\text{sub}} \rho \ln \rho \quad (9.15)$$

式中, A_i 为原子 i 镶嵌能的幅值因子。在 MEAM 下 26 种金属键、共价键和双原子气体的 $E_{\text{sub}}, R_0, \lambda$ 和 A_i 值在表 9.1 中给出。

至此, 在式(9.13)中仅有 ρ_i 与 $\bar{\rho}_i$ 未知, 它们分别代表在实际点阵和参照点阵(后者仅存在近邻交互作用)中的背景电子密度。在 MEAM 中考虑了电子云的非球对称分布, 这时可由各背景电子密度组分 $\rho_i^{(l)}$ 的加权平方和来计算 ρ_i

$$(\rho_i)^2 = \sum_{l=0}^3 t_l^{(i)} (\rho_i^{(l)})^2 \quad (9.16)$$

加权系数 $t_l^{(i)}$ ($l=0, 1, 2, 3$) 亦列于表 9.1。 $\rho_i^{(l)}$ ($l=0, 1, 2, 3$) 代表电子云密度的 l 阶矩, 其具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} \rho_i^{(0)} &= \sum_{j(\neq i)} \rho_j^{a(1)}(r_{ij}) \\ (\rho_i^{(1)})^2 &= \sum_{\alpha} \left[\sum_{j(\neq i)} x_{ij}^{\alpha} \rho_j^{a(1)}(r_{ij}) \right]^2 \\ (\rho_i^{(2)})^2 &= \sum_{\alpha, \beta} \left[\sum_{j(\neq i)} x_{ij}^{\alpha} x_{ij}^{\beta} \rho_j^{a(2)}(r_{ij}) \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\sum_{j(\neq i)} \rho_j^{a(2)}(r_{ij}) \right]^2 \\ (\rho_i^{(3)})^2 &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left[\sum_{j(\neq i)} x_{ij}^{\alpha} x_{ij}^{\beta} x_{ij}^{\gamma} \rho_j^{a(3)}(r_{ij}) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

式中, $x_{ij}^{\alpha} = r_{ij}^{\alpha} / r_{ij}$, 且 r_{ij}^{α} 为位置向量 $(r_j - r_i)$ 的第 α 个分量; $x_{ij}^{\beta}, x_{ij}^{\gamma}$ 的

意义与之相似; $\rho_j^{(l)}(r_{ij})$ 表示距点阵点 i 为 r_{ij} 处一个 j 型原子在该点阵点造成的电子密度的 l 阶矩影响函数; 该函数假定取下述指数型衰减形式

$$\rho_j^{(l)}(R) = e^{-b_l^*} \quad (9.18)$$

式中衰减因子 b_l^* 由下式给出

$$b_l^* = \beta^{(l)}(R/R_0 - 1) \quad (9.19)$$

26种元素键合的 $\beta^{(l)}$ 值($l = 0, 1, 2, 3$)亦在表9.1中给出。

表9.1 MEAM 的参数值(引自 Baskes^[2])

	R_0	λ	A	$\beta^{(0)}$	$\beta^{(1)}$	$\beta^{(2)}$	$\beta^{(3)}$	$q^{(0)}$	$q^{(1)}$	$q^{(2)}$	$q^{(3)}$	
Cu	3.749	2.56	5.11	1.07	3.33	2.2	6.0	2.2	1	3.14	2.49	2.95
Ag	2.850	2.88	5.89	1.06	4.46	2.2	6.0	2.2	1	5.54	2.45	1.29
Au	3.930	2.88	6.34	1.04	5.45	2.2	6.0	2.2	1	1.59	1.51	2.61
Ni	4.159	2.49	4.99	1.10	2.45	2.2	6.0	2.2	1	3.57	1.60	3.70
Pd	3.910	2.75	5.43	1.01	4.98	2.2	6.0	2.2	1	2.34	1.38	4.48
Pt	5.770	2.77	6.11	1.04	4.67	2.2	6.0	2.2	1	2.73	-1.38	3.29
Al	3.580	2.86	4.61	1.07	2.21	2.2	6.0	2.2	1	1.78	-2.21	8.01
Pb	2.610	3.50	6.08	1.01	5.31	2.2	6.0	2.2	1	2.74	3.06	1.20
Rh	5.750	2.69	6.00	1.05	1.13	1.0	2.0	1.0	1	2.99	4.61	4.80
Ir	6.930	2.72	6.52	1.05	1.13	1.0	2.0	1.0	1	1.50	8.10	4.80
Li	1.650	3.04	2.97	0.87	1.43	1.0	1.0	1.0	1	0.26	0.44	-0.20
Na	1.130	9.72	3.61	0.90	2.21	1.0	1.0	1.0	1	5.55	0.69	-0.20
K	0.911	4.63	3.90	0.92	2.69	1.0	1.0	1.0	1	5.10	0.69	-0.20
V	5.300	2.63	4.82	1.00	4.11	1.0	1.0	1.0	1	1.20	4.10	-1.00
Nb	7.470	2.86	4.75	1.00	4.37	1.0	1.0	1.0	1	3.76	3.83	-1.00
Ta	8.080	2.86	4.90	0.99	3.71	1.0	1.0	1.0	1	1.59	3.35	-1.50
Cr	4.100	2.50	5.12	0.94	3.22	1.0	1.0	1.0	1	-2.21	12.26	-1.90
Mo	6.310	2.73	5.85	0.99	1.48	1.0	1.0	1.0	1	5.18	3.49	-2.90
W	8.690	2.74	5.63	0.98	9.98	1.0	1.0	1.0	1	5.16	8.25	-2.70
Fe	4.260	3.48	5.07	0.89	2.94	1.0	1.0	1.0	1	3.91	4.12	-1.50
C	7.310	1.54	1.11	1.80	5.50	4.3	3.1	6.0	1	3.57	1.94	-0.77
Si	4.630	2.35	1.87	1.00	1.40	5.5	5.5	5.5	1	3.13	1.47	-1.80
Ge	3.830	2.15	4.98	1.00	4.55	5.5	5.5	5.5	1	1.02	5.23	-1.60
H	2.225	0.74	2.96	2.50	2.96	3.0	3.0		1	0.20	-0.10	0.00
N	1.880	1.10	5.90	1.50	4.00	4.0			1	0.05	0.00	0.00
O	2.650	1.21	6.49	1.50	6.49	6.5	6.5		1	0.09	0.10	0.00

对仅考虑近邻作用的参照点阵,式(9.13)中的 $\bar{\rho}_i$ 可表达为

$$(\bar{\rho}_i(R))^2 = Z_i^2 (\rho_i^{s(0)}(R))^2 + t_i^{(3)} S_i^{(3)} (\rho_i^{s(3)}(R))^2 \quad (9.20)$$

式中, Z_i 为近邻价键数; $S_i^{(3)}$ 为规整点阵的3阶几何形因子。对 FCC 点阵: $Z_i = 12, S_i^{(3)} = 0$; 对 HCP 点阵: $Z_i = 12, S_i^{(3)} = \frac{1}{3}$; 对 BCC 点阵: $Z_i = 8, S_i^{(3)} = 0$; 对金刚石类型点阵: $Z_i = 4, S_i^{(3)} = \frac{32}{9}$ 。至此 MEAM 的全部计算公式和有关数据均已给出。

9.2.4 界面区的原子势函数

界面区的原子势描述是一个很复杂的问题。以下取 Al/AlO₂ 界面的简单混合型势函数为例来介绍界面区的纳观力学模型。

对于单质材料原子间的势函数采用上面所述方法;对 Al 与 Al 间的势函数采用金属原子间相互作用势函数的计算方法;Al³⁺ 与 Al³⁺、Al³⁺ 与 O²⁻、O²⁻ 与 O²⁻ 之间的势函数采用离子晶体的对势计算方法。对于跨界面原子间的势函数采用下述计算方法,该方法吸取了镶嵌原子模型的思想。

(1) Al 的势函数计算采用类似于镶嵌原子方法(EAM)的计算模型。即计算铝离子与周围带电粒子间的被屏蔽库仑作用势能,再根据铝原子所处位置的电荷密度,求得铝的镶嵌能。将这两种势能相叠加,即得铝原子的势函数。与纯铝计算所不同的是,铝离子周围的带电粒子可能有氧离子,铝离子与氧离子间的库仑作用不考虑屏蔽效应。同时,铝原子所处位置的电荷密度可根据周围 Al、Al³⁺、O²⁻ 粒子在该处产生的电荷密度进行叠加。

(2) Al³⁺ 的势函数计算采用先加后减的方法。即先给 Al³⁺ 加上3个电子电荷成为 Al,采用上面所述方法计算出 Al 的势函数 E_1 ,再计算这3个附加电子电荷与周围粒子间的库仑作用势 E_2 ,最后求得 Al³⁺ 的势为 $E_1 - E_2$ 。

(3) O²⁻ 与所有粒子间的作用势均为库仑作用。

9.2.5 平面模型的简化

铝与氧化铝都有较复杂的空间结构,将这种空间结构投影到平面上,并且只考虑粒子在投影平面上的运动。便得到平面简化计算构形。

对进一步的计算,应考虑采用真实的空间三维结构,在原投影平面上增加一维,为计算方便可在这一维上采用周期边界的模型。

9.3 纳观计算力学方法

9.3.1 分子动力学方法

纳观计算力学的主要手段是分子动力学方法。分子动力学方法将 N 个经典粒子系统的运动方程组数值积分,得到相轨道,并进而研究该系统的平衡热力学性质、结构动力学性质和非平衡输运性质。

简单球形分子系统的拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - U(\mathbf{r}^N) \quad (9.21)$$

而系统的哈密顿量(Hamiltonian)可表达为

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}^N, \mathbf{P}^N) &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{P}_i - L(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i}{m_i} + U(\mathbf{r}^N) \end{aligned} \quad (9.22)$$

式中, $U(\mathbf{r}^N)$ 表示系统的总势能,它只与粒子的坐标有关而与粒子速度无关; \mathbf{r}^N 是 N 个粒子的坐标集合; $\mathbf{v}^N, \mathbf{P}^N$ 分别是 N 个粒子的速度和动量集合; N 是粒子数; $m_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{P}_i$ 分别是 i 粒子的质量、位置、速度和动量。

对上述经典牛顿力学体系可写出系统的正则哈密顿方程如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_i} = \frac{\mathbf{P}_i}{m_i} \\ \frac{d\mathbf{P}_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = - \nabla_i U(\mathbf{r}^N) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.23)$$

式中, t 为牛顿时间; ∇_i 为对坐标的梯度算子。式(9.23)右端 $-\nabla_i U(\mathbf{r}^N)$ 是系统中其他粒子对 i 粒子的总作用力, 常用 F_i 表示。

MD 方法的核心是数值求解正则运动方程组(9.23), 求得系统运动的相轨道 $\mathbf{r}^N(t)$ 、 $\mathbf{P}^N(t)$ 或 $\mathbf{r}^N(t)$ 、 $\mathbf{v}^N(t)$ 。计算采用蛙跳算法 (Leapfrog Algorithm)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \mathbf{v}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{m_i} F_i(t) \\ \mathbf{r}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_i(t) + \Delta t \cdot \mathbf{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

由粒子的某一时刻位置 $\mathbf{r}^N(t)$ 可以求出作用力 $F^N(t)$, 进而求出粒子的速度 $\mathbf{v}^N\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ 和更新的位置 $\mathbf{r}^N(t + \Delta t)$ 。

时间步长 Δt 的选取应使得瞬时的微小扰动在 Δt 时间间隔内所传播的距离远小于原子间距, 同时必须使扰动在几百步计算后足以传出内层原子。计算中取

$$\Delta t = 5 \times 10^{-16} \text{s}$$

若取固体中扰动传播的速度为应力波速, 对金属一般为下述量级

$$v = 5000 \text{m/s}$$

这样, Δt 时间间隔内扰动传播的距离为

$$s = 0.025 \text{nm}$$

上述分子动力学方法描述的是温度为绝对零度时的粒子运动情况。实际运动情况下应考虑温度影响, 这时系统各质点的初始动能和与系统温度有确切关系。温度影响也可由采用下小节中所述的蒙特卡罗方法来解决。

典型的最大振动速度为 10^3m/s , 因此单位时间间隔 ($5 \times 10^{-16} \text{s}$) 内的最大位移为 $5 \times 10^{-12} \text{m}$ 。在蒙特卡罗方法中, 每次随机运动的位移在 0 到 $5 \times 10^{-12} \text{m}$ 之间。这样在分子动力学确定性计算中, 同时含有粒子由于热运动而产生的随机位移。

9.3.2 蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法也称为统计模拟试验方法。它的含义是: 利用随

机变量的统计试验或统计模拟过程,通过数值模拟计算来近似求解。

采用 Metropolis 取样法,具体计算过程如下:

- ① 粒子 i 随机运动产生位置变化 Δr_i ;
- ② 导致粒子 i 的能量变化 ΔE_i ;
- ③ 取 ξ 为 $(0, 1)$ 区间的随机数;
- ④ 判断:如果

$$\xi \leq \exp\left(-\frac{\Delta E_i}{kT}\right) \quad (9.25)$$

则继续,否则便返回(1);

- ⑤ 更新原子位置

$$r_i^* = r_i + \Delta r_i$$

式中, k 为玻耳兹曼常数; T 为温度; $\exp\left(-\frac{\Delta E_i}{kT}\right)$ 为玻耳兹曼因子。重复①~⑤的过程多次,构成一个 Markov 链,对一个足够长的序贯求平均,可逼近玻耳兹曼分布的情形。

9.3.3 原子换位技术

随机交换两近邻原子,记 E_1 为交换前两原子的能量之和, E_2 为交换后两原子的能量之和,若 $E_2 < E_1$,则这种交换是可能的;若 $E_2 > E_1$,交换的可能性还受温度影响。与蒙特卡罗方法相类似,取 ξ 为 $(0, 1)$ 区间的随机数,如果 $\xi \leq \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$,则交换可能;否则交换不可能。

采用原子换位技术,可大大加快模拟过程,逼近于能量较低的平衡状态。

参 考 文 献

- 1 杨昆,谭鸿来,断裂过程的细观力学与纳观力学,中国科学基金,1993,7(4): 219~254
- 2 Daw M S, Baskes M I. Embedded-atom method; Derivation and application to impuri-

- ties, surfaces and other defects in metals. *Phys. Rev. B*, 11, 21, 29, 6443
- 3 Clementi E, Roetti G. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. Academic Press, 1974. 11, (2) and (3)
 - 4 Rose H, Smith J R, Guinea F, Ferrante J. **Universal features of the equation of state of metals.** *Phys. Rev. B*. 1984, 29, 2963
 - 5 Baskes M I. **Application of the embedded-atom method to covalent materials; A semiempirical potential for silicon.** *Phys. Rev. Letters*. 1987, 59, 2666~2669
 - 6 Baskes M I, Nelson J S, Wright A F. **Semiempirical embedded atom potentials for silicon and germanium.** *Phys. Rev. B*. 1989, 40, 6085~6100
 - 7 Baskes M I. **Modified embedded-atom potentials for cubic materials and impurities.** *Phys. Rev. B*, 1992, 46, 2727~2742

第 10 章 纳观断裂过程

10.1 边界层计算构形

本章利用纳观计算力学的方法模拟原子尺度尖锐的裂纹在远端力加载下的裂尖演变过程^[1,2]。考虑原子尺度尖锐裂纹的原因在于：无论是裂尖锐化过程、解理断裂过程，还是由于无位错区存在导致的准解理断裂过程，裂纹的发展都源自原子尺度的微裂纹缺陷。从原子尺度尖锐裂纹出发即可以讨论延性断裂时裂纹的钝化趋势，又可以讨论裂纹前锋始终保持尖锐的解理断裂情况。

纳观计算的初始构形为半径为18nm的平面应变盘状构形，含5434个原子。在负 x 轴上抽去一层原子以形成原子尺度尖锐的裂纹。远场的力学氛围由平面应变弹性解给出。对均相固体的纯 I 型加载，远场应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

式中， $K(t)$ 为应力强度因子的加载历史。

裂纹的上下表面的原子间无相互作用力。初始计算时，从原子构型中抽取一层原子后让裂纹表面弛豫一段时间，便得到初始形成的微裂纹表面。

在原子模型中可以清晰地看到位错在离散基体中的发射和解理断裂两种相互竞争的机制，以及由此演变而成的裂尖形貌。计算

模拟表明纳观原子尺度的裂尖形貌和宏观的裂尖形貌有某种相似性,不同的纳观裂尖形貌对应于不同的宏观断裂行为。

由式(10.1)所施加的应力场在计算构形外边界原子层处转化为一组外力。我们将上述面力值施加于最外三层原子上。这三层原子在外边界上的遮蔽式射线投影形成一个互不重叠的元面积集,其中第 k 个原子所对应的边界投影面积为 A_k 。于是,作用于该原子上外力的径向和切向分量为

$$\left. \begin{aligned} F_r &= A_k \sigma_{rr} \\ F_\theta &= A_k \sigma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

式中, $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ 由式(10.1)转换给出。在纳观计算模拟的整个过程中均需在外三层原子中保持上述外力集。

10.2 均相固体断裂的纳观过程

首先讨论均相固体断裂的纳观过程。断裂过程区的演化(见第7章)预示着在加载率升高时会有一个明显的由韧至脆转变。以纯铝的计算为例,图10.1定义了四种不同的应力强度因子加载历史。曲线A为低幅应力强度因子下($K = 0.325 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$)的阶跃加载曲线。曲线B至D的最大 K 值均为 $0.65 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ (是曲线A的两倍),但到达该值的加载率各不相同。对曲线B、C、D,其加载率分别为每皮秒 $0.1, 0.15, 0.225 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 。如图10.2所示,加载12ps后,这四种加载历史导致完全不同的原子断裂图案。

当加载幅度较低时,断裂过程由位错发射控制,对加载率并不敏感。然而,若对同样的材料施以高加载幅值,则其原子破坏图案就随加载率的升高由位错发射转变为解理。可用下述临界速率理论来解释这些观察:对给定一固态原子聚集体,存在着三个参数来刻划裂尖纳观区内解理与位错发射之间的竞争。它们是: K_{emit} (裂尖开始发射位错所对应的 K 场); K_{cleave} (纳观尖锐裂纹发生解理的临界 K 值); T_{nu} (裂尖形核位错的孕育时间)。对金属材料,通常 K_{emit} 小于 K_{cleave} 。对铝的原子模拟得到下述参数值: $K_{\text{cleave}} =$

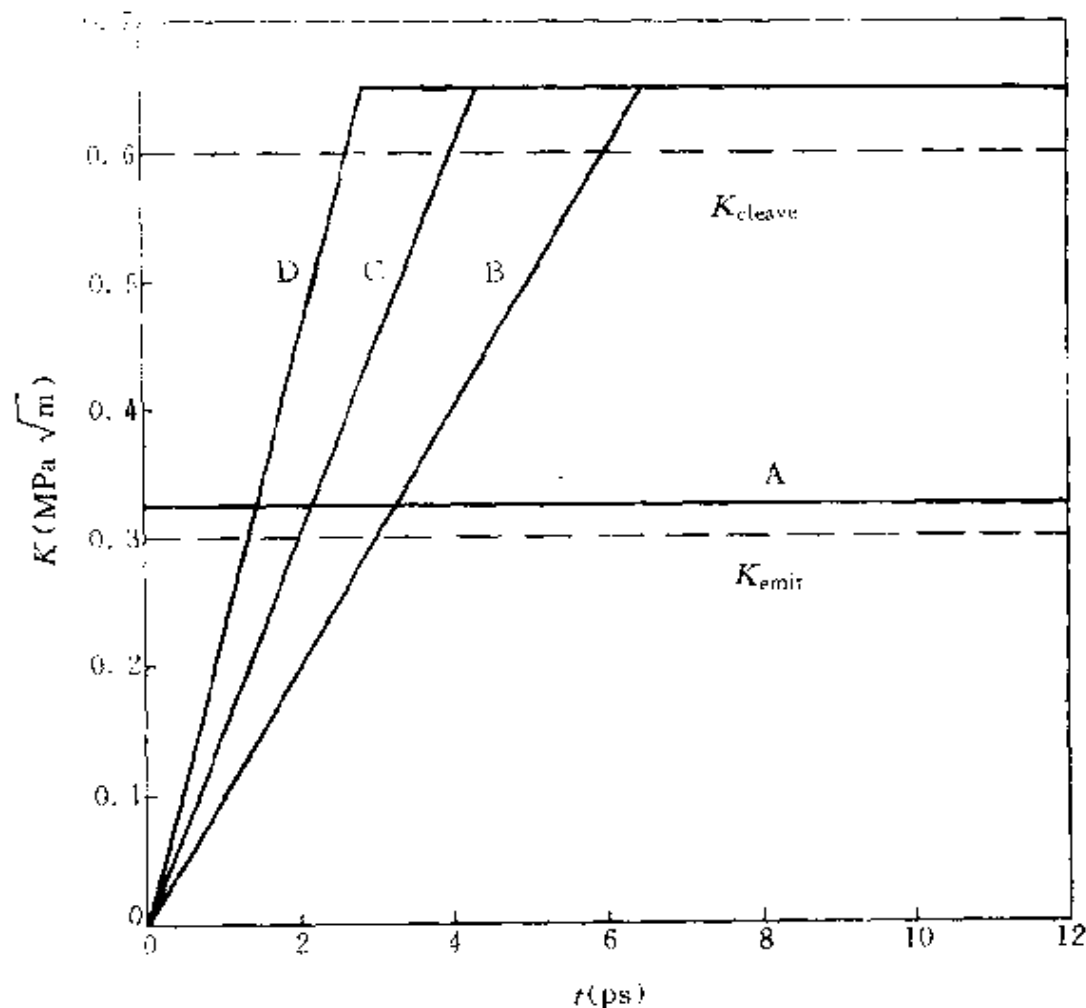


图10.1 四种不同的加载历史(A: $\dot{K} = \infty, K_{\max} = 0.325\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$; B: $\dot{K} = 0.1\text{MPa}\sqrt{\text{m}}/\text{ps}, K_{\max} = 0.65\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$; C: $\dot{K} = 0.15\text{MPa}\sqrt{\text{m}}/\text{ps}, K_{\max} = 0.65\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$; D: $\dot{K} = 0.225\text{MPa}\sqrt{\text{m}}/\text{ps}, K_{\max} = 0.65\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$)

$0.6\text{MPa}\sqrt{\text{m}}, K_{\text{emit}} = 0.3\text{MPa}\sqrt{\text{m}}; T_{\text{nu}} = 2\text{ps}$ 。对铝的计算结果表明:裂尖位错发射的速度为 1000m/s ,且只有在离裂尖数个伯格斯向量以外才能形成一个完整位错,与Rice等^[3]最近提出的位错发射模型的Peierls框架相一致。由此可见,一根位错需 0.4ps 时间来跃过一个原子间距,该时间间隔仅为位错形核孕育时间 T_{nu} 的20%。因此在判断韧脆转变的加载率效应时,最主要的时间尺度为

位错形核所需的时间。

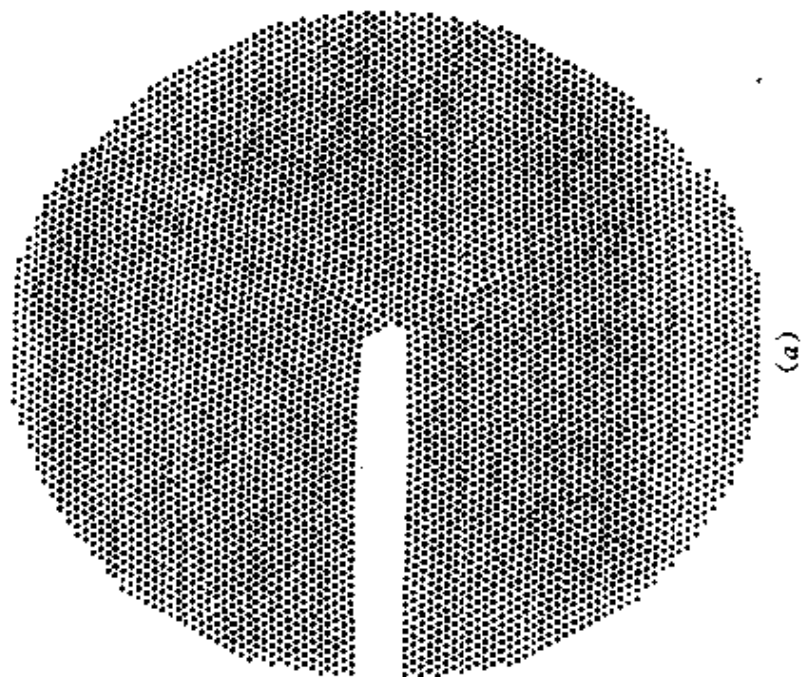
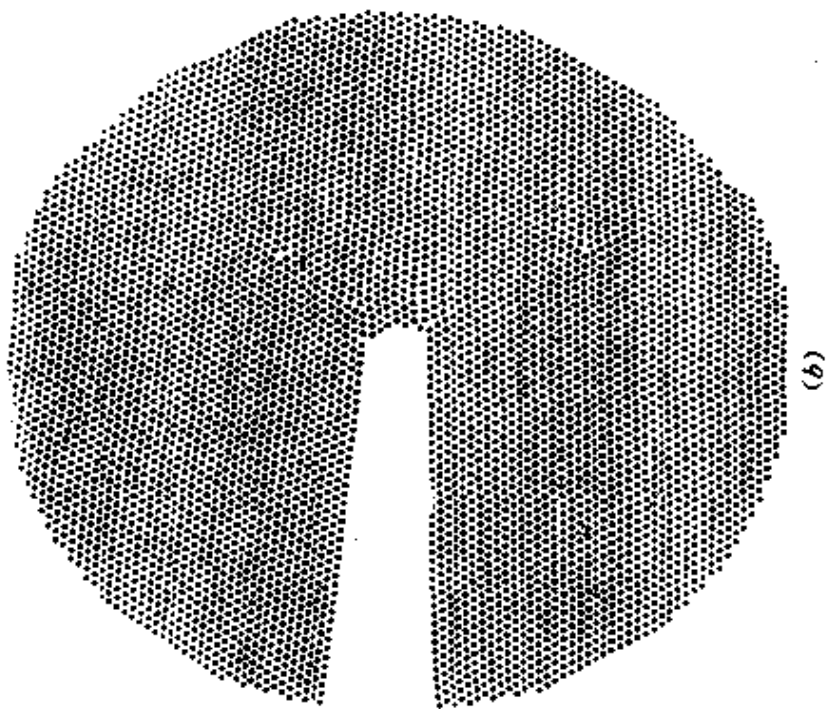
当 K 低于 K_{emit} 时,材料仅发生弹性变形。当 K 超过 K_{emit} 但仍低于 K_{cleave} 时,从裂纹尖端可发射出位错,且加载率对断裂过程无影响,见图 10.2(a)。当 K 高于 K_{cleave} 时,加载率便开始主宰纳观区内的断裂过程与韧性。引入下述临界加载率 \dot{K}_{ic} 。

$$\dot{K}_{ic} = \frac{K_{cleave} - K_{emit}}{T_{nu}} \quad (10.3)$$

当实际加载率 \dot{K} 低于 \dot{K}_{ic} 时,在 K 超过 K_{emit} 以后裂尖区会有足够的时间来产生位错。正如图 10.2(b) 所示,在 K 的表观值达到 K_{cleave} 以前所发射的位错便足以钝化裂尖,因此材料响应为纳观韧性。材料的这种纳观韧性随加载率上升而降低。当 \dot{K} 临近 \dot{K}_{ic} 时(即图 10.1 中加载历史 C),纳观裂尖构形开始从延性形貌转为脆性形貌。图 10.2(c) 显示了位错与解理胚共存的情况。

当加载率 \dot{K} 高于 \dot{K}_{ic} 时,在 K 从 K_{emit} 快速升至 K_{cleave} 的过程中,裂纹尖端在受到位错钝化之前便因为顶端应力超过解理应力而断裂,如图 10.2(d) 所示。材料开始解理破坏后,位错发射受到压抑,位错胚被遗留在解理裂尖之后。解理过程比位错形核快得多。当 K 超过 K_{cleave} 时,每纳秒期间可解理断裂 4 至 5 根键(解理速度约为 $1\ 600 \sim 2\ 000\text{m/s}$),而位错形核则需要 2ns 。在位错由原始裂尖发射出去以前便可以解理断裂 8 至 10 个原子键合,断裂过程呈脆性。因此,式(10.3) 所定义的临界加载率在韧脆转变中起重要作用。

Tan 和 Yang^[2] 的纳观模拟表明铝的临界加载率为 $0.15\ \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。若该加载率被直接施加于所计算原子构形的外边界上,则该处的应变率将达到 $6 \times 10^9/\text{s}$ 这样一个天文数字。即使令载荷加在该原子构形的外围连续介质的边缘,再假设该外缘加载率以波动的形式聚集传递至裂尖,那么在半径为 20mm 的外缘上所加的应变率也应达到 $6 \times 10^8/\text{s}$ 才能实现裂尖的临界加载率。由此可见,在所有现今可行的加载率下,铝均为延性。对另外一些材料却可能有低得多的 \dot{K}_{ic} 值。例如探讨单晶硅在不同加载率下的韧



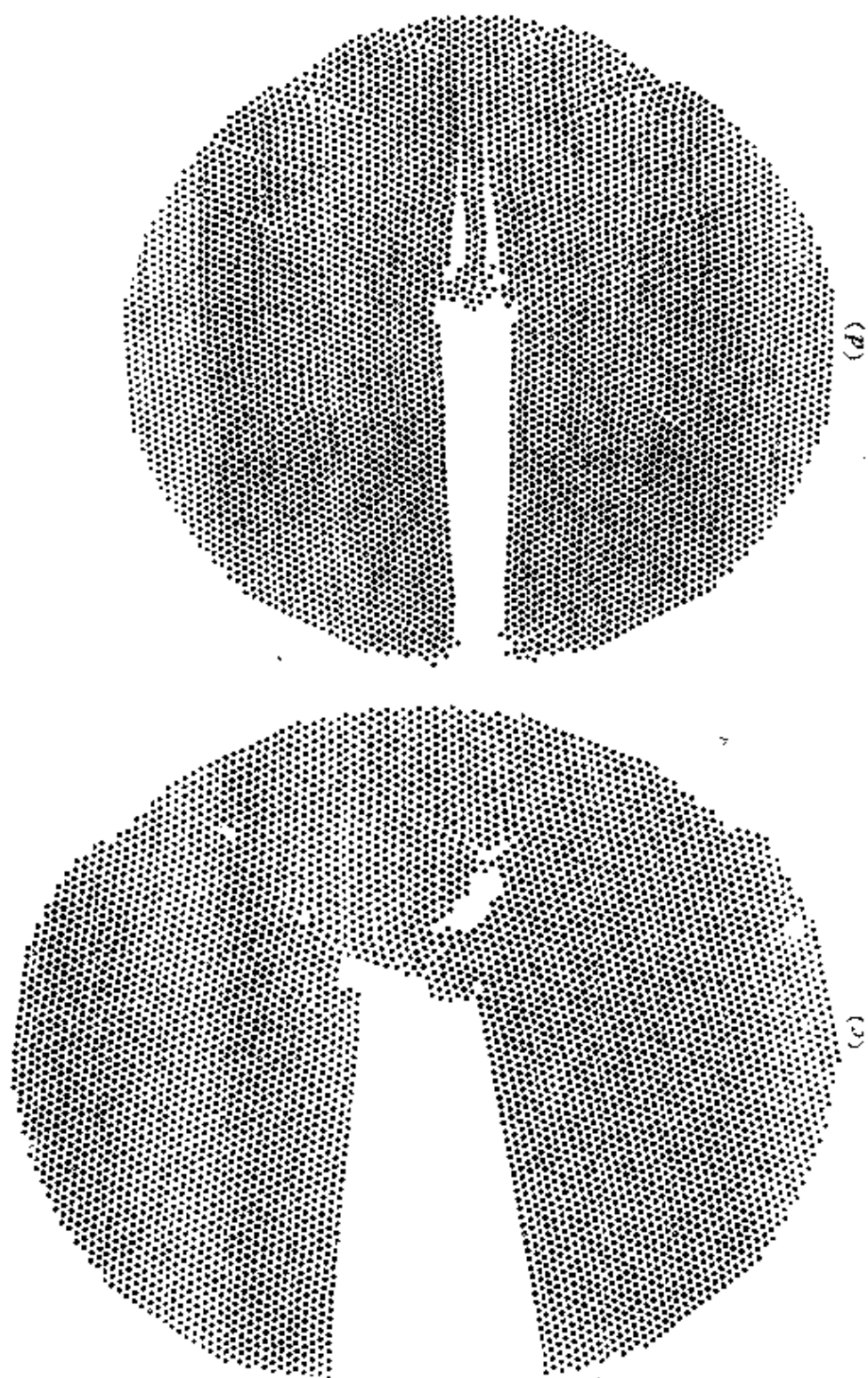


图10.2 纯铝在图10.1所规定的四种加载历史下的原子断裂图案

$t=12\text{ps}$ 。

脆转变效应将是饶有趣味的,正如 Hsia 与 Argon^[4]的测试和理论分析所表现的那样。

10.3 理想界面断裂的纳观过程

界面力学的引入使人们得以揭示复合材料的界面断裂力学规律。无论从纳观原子角度还是从细观位错角度,连续介质力学的方法都不足以描述界面破坏现象。深层次的断裂机理研究涉及到纳观计算力学。界面断裂的纳观计算旨在探讨材料界面裂纹尖端破坏的原子图案。

先考察理想的平直物理界面,这时两相材料之间没有相互扩散混合。用纳观力学的方法研究理想界面内的裂纹,边界层的弹性氛围由平面应变弹性界面裂纹尖端场给出

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [\operatorname{Re}(Kr^{ie}) \Sigma_{ij}^I(\theta) + \operatorname{Im}(Kr^{ie}) \Sigma_{ij}^{II}(\theta)] \quad (10.4)$$

式中, K 为复应力强度因子; $\Sigma_{ij}^I(\theta)$ 和 $\Sigma_{ij}^{II}(\theta)$ 为依赖于 e 的 I 型与 II 型的实值角分布函数; e 为材料的振荡指数。对双各向同性材料,角分布函数与振荡指数的表达式分别由式(5.7)与式(5.2)给出。

由第5章,界面断裂应力强度因子 K 的实部和虚部并不单纯对应于 I 型外载和 II 型外载,界面面力的混合度随距裂尖的距离而缓慢变化。选择一个固定的特征长度 L ,可将载荷相位角 ψ 定义为

$$\tan \psi = \frac{\operatorname{Im}(Kr^{ie})}{\operatorname{Re}(Kr^{ie})} = \left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \right)_{r=L} \quad (10.5)$$

ψ 标志着 $r = L$ 处 I 型载荷与 II 型载荷的混合度。

Kr^{ie} 的实部和虚部可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(Kr^{ie}) &= |K| \cos \left[\psi - e \ln \left(\frac{L}{r} \right) \right] \\ \operatorname{Im}(Kr^{ie}) &= |K| \sin \left[\psi - e \ln \left(\frac{L}{r} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

不失一般性,取 L 为原子间距,则 ψ 为按弹性解算出的距离裂尖一个原子间距处的 I 型与 II 型断裂的混合度。

模拟同一 $|K|$ 值、但不同混合度 ψ 下加载的纳观断裂形貌。该纳观原子模型得以揭示双材料在不同混合度下的韧脆特性。作为算例,将界面上方材料取为铝,下方材料取为离子键陶瓷类材料。该材料的点阵常数与铝相协调,但宏观杨氏模量取为铝的10倍。两种固体材料的泊桑比均取为0.3。上述数据使式(9.1)中的参数 m 与 b 得以确定。谭鸿来^[5]对该材料进行了详细的数值研究,在同样 $|K|$ 值下,按断裂混合度每隔30°角计算了纳观裂尖构形。

假定采取阶梯形应力强度因子加载历史,取 K 的绝对值为 $1\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$,比较加载后6ps时裂尖原子图案的变化。盘形原子聚集体的半径为16nm,原子数为4304。图10.3中列出了两种有代表性的界面纳观破坏形貌,其近尖端混合度分别为 $\psi = -\frac{\pi}{3}$ 和 $\psi = \frac{\pi}{6}$ 。前一种情况有利于位错沿着与界面成100°的斜面上滑移,该面与点阵滑移面(与界面成120°)成一小角度。于是,位错沿图10.3(a)所示的拐折滑移面运行,在阶梯处造成的原子点阵面分离逐渐地集聚为一个纳观孔洞。若将 ψ 增至 $\frac{\pi}{6}$,最大剪应力方向便与界面基本平行(夹角约为10°),于是导致图10.3(b)所示的分层破坏。对其他 ψ 角下的数值模拟亦表明:近尖端混合度支配着裂尖断裂过程的原子演化图案。

连续介质力学模型下的裂纹尖端场具有应力奇异性。对于真实的裂纹,无穷大应力是不可想象的。从原子角度来看,应力总应为有限值,否则便发生滑移或者撕裂型破坏。对于应力奇异性有一个观察角度的问题。从宏观来看,裂纹无限细小,应力相对于远方可认为是无限大;从微观的角度来看,裂纹有一定的宽度(至少大于原子间距),裂尖并没有奇异的点存在。

根据微观原子之间的相互作用力,可以求得相应宏观意义下的应力。在平面变形假设下,应力向量可定义为作用于单位长度线

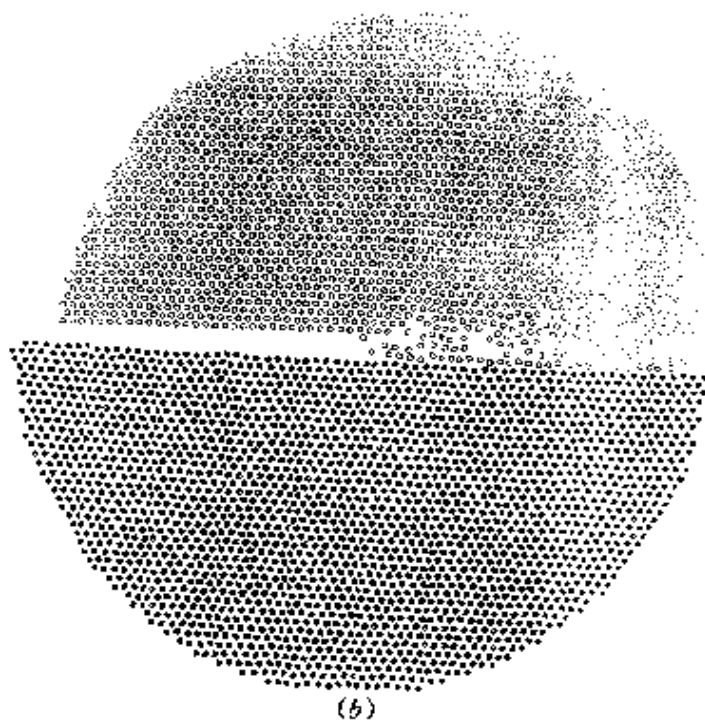
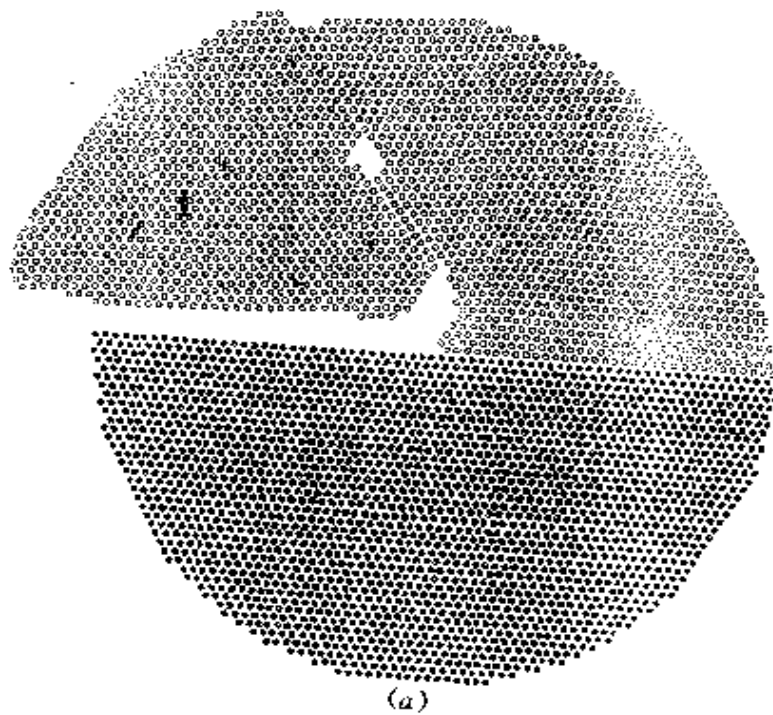


图10.3 对理想平直界面上原子尖锐裂纹的数值模拟
(a) $\psi = -60^\circ$; (b) $\psi = 30^\circ$ 。

元上的面力。我们可在任意一点 x 点附近取一长度为 l 、单位法线为 n 的线元(在计算时取 $l=3a_0$)。该直线段向两端做无限延伸后,就将平面分割为两个区域。法线向量 n 所指的区域称为外区 R_{out} ,法线向量 n 背后的区域称为内区 R_{in} 。从 R_{out} 到 R_{in} 通过线段 l 的原子间作用力之和记为 F 。于是,作用于点 x 处法线为 n 平面上的面力向量 t 可计算为

$$\sigma \cdot n = t = \frac{F}{A} \quad (10.7)$$

式中, σ 为应力张量; A 为 l 乘以单位厚度。

上述原子计算力学方法所得的应力场在距裂尖约为20倍原子间距后可逼近外围弹性 K 场。图 10.4 中的实线是根据原子计算所得的环向界面应力沿径向的分布,点线为弹性力学解。由图可见,当 $r > 20a_0$ 时两种预测趋于一致。在裂尖附近,原子计算所得的应力振荡比连续介质解要低,所预测的应力分布也更合理。

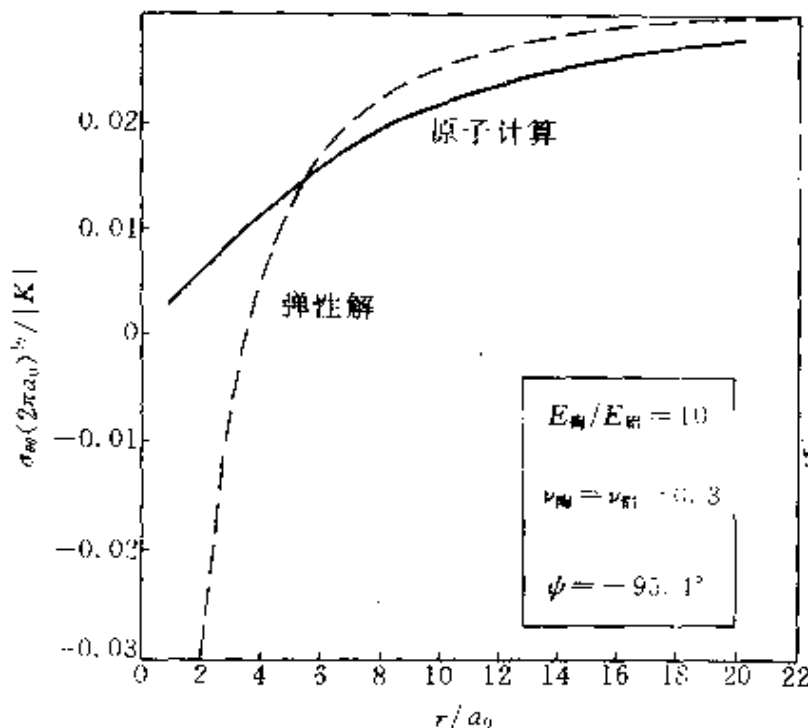


图10.4 $\sigma_{\theta\theta}$ 沿界面的分布

图10.5为原子计算所得界面裂纹环向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 沿环绕裂尖周

向的分布,分别给出了距裂尖为 60、80 与 100 Å 的圆周上 $\sigma_{\theta\theta}$ 的角分布变化。图中还将它们与宏观弹性理论解(即图中点线)作了比较。易于观察,在 r 较大时原子模型计算出来的应力与宏观弹性计算所得的结果接近。

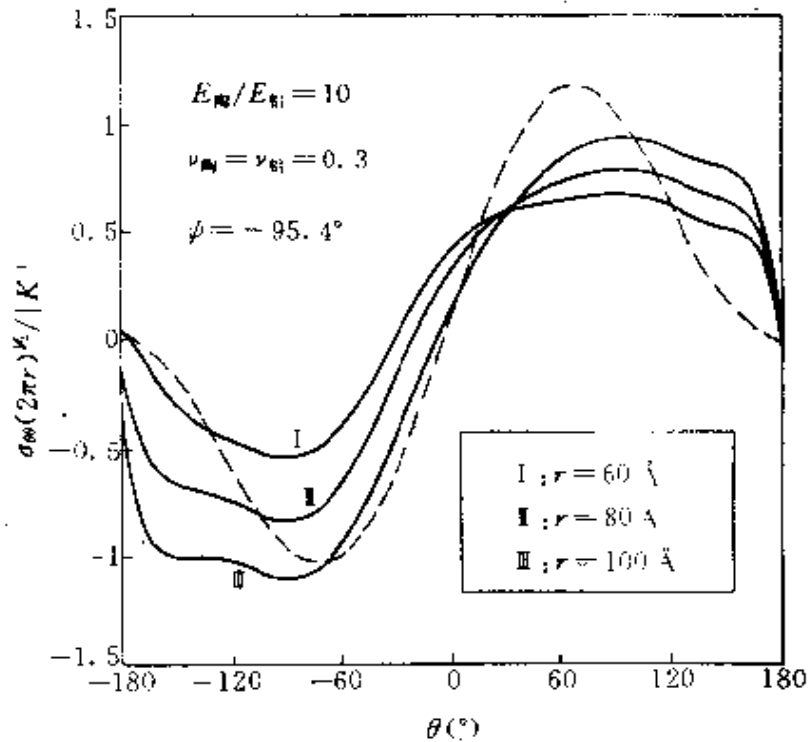


图10.5 距裂尖不同向径 r 处 $\sigma_{\theta\theta}$ 的角分布变化

10.4 峰峦界面结构的纳观数值模拟

对 Al/SiC 界面的高清晰度电镜(HRTEM)观察结果表明:该界面在原子尺度上具有峰峦状界面结构。类似的峰峦界面结构也在其他金属/陶瓷界面体系中出现。于是提出下述问题:

- ①峰峦状界面结构是如何产生的?
- ②峰峦的几何特征与界面形成的工艺过程有何联系?
- ③峰峦界面结构对界面断裂的韧脆行为有何影响?

本节将扼要地介绍对前2个问题的数值模拟结果^[2],并定性地讨论峰峦界面结构与断裂韧脆行为的关系。

10.4.1 三种基本纳观运动过程

运用原子计算力学的方法,可模拟下述三种基本纳观运动过程:

1. 短时运动(随机运动)

可运用蒙特卡罗方法模拟时间增量尺度在 10^{-14} s量级的无规热运动。

2. 相对长时运动(随机运动)

运用第9.3.3小节所介绍原子换位技术,通过试探性交换近邻原子间的位置,以使总能量迅速达到最小。采用这种技术,可大大加快模拟的过程。

3. 势函数下的确定性运动

在加压氛围下,可运用分子动力学方法求解粒子运动的相轨道。

考虑界面在加温加压下的形成过程。在初始高温阶段,短时的热运动占主要地位;降温一定程度后,仍有一定的长时蠕变换位效应,可由原子换位技术来加速模拟该蠕变过程;冷却至室温并加压后,可通过分子动力学描述的确定性运动来模拟实现规整的晶格排列。

10.4.2 界面结构的形成过程

1. 初始高温状态

图10.6(a)表示一对界面材料处于高温融熔状态,两种不同类型原子互相扩散混合的初始计算构型。空心圆代表金属晶体,它们的运动受金属间相互作用的势函数所制约,实心圆代表离子晶体,它们的运动受离子间相互作用的势函数所制约。上端材料是金属(如Al),下端材料是陶瓷(如 Al_2O_3)。初始构型旨在模拟高温融熔液体混合的情形,通过控制随机函数的产生,使空心圆在上端出现的概率为1,在下端出现的概率为0;实心圆在下端的出现的概率为1,在上端出现的概率为0;中部各类原子出现的概率根据两端的情

形线性变化。初始时,中心温度为1 200K,两端温度为300K。在最上端和最下端的3排原子,采用规整的晶格排列,对应于室温下的固体状态。

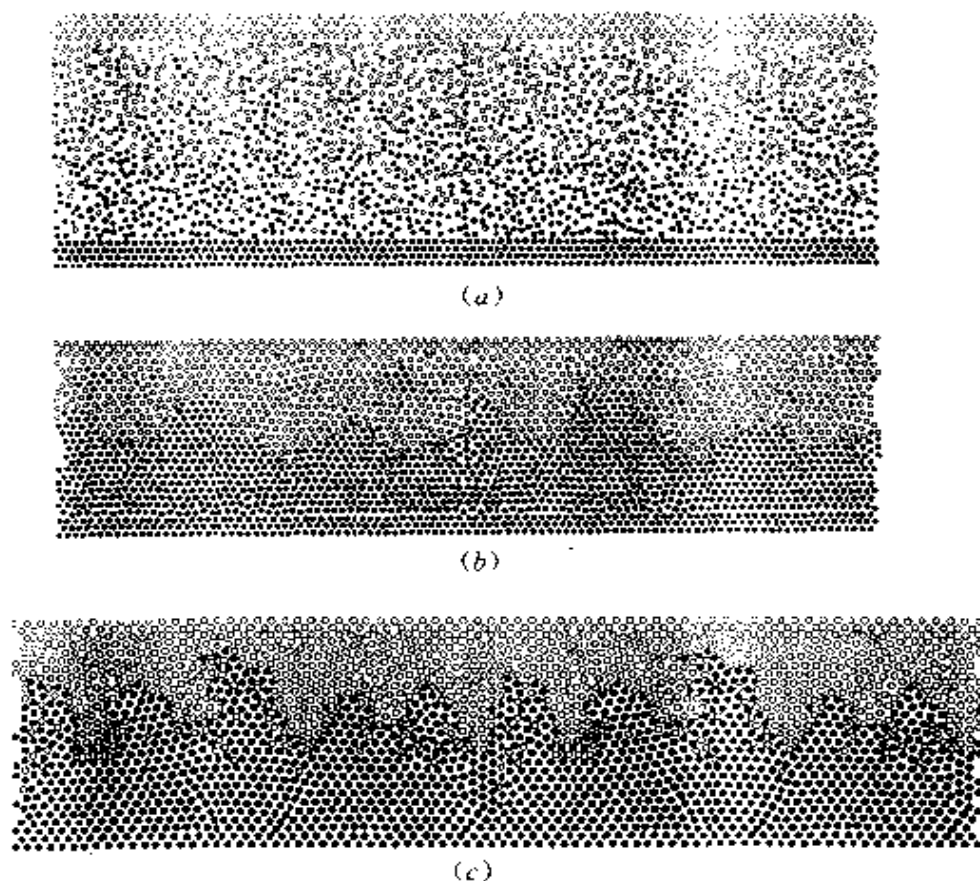


图10.6 金属/陶瓷界面结构的模拟
(a)具有熔融界面层的初始构形;(b)固化30°波折界面;
(c)固化60°波折界面。

2. 冷凝结晶过程

冷凝结晶过程可由在构形上下两端保持恒定室温来控制,用蒙特卡罗方法模拟粒子的初始高温热运动。粒子间的碰撞同时包含有能量的传递。从统计平均的效果来看,能量的传递表现为温度的传递。

粒子碰撞的具体过程可描述如下。对任意粒子(标号为 i),若其近邻有 n 个与之距离小于 $1.2a$ 的粒子,则称这 n 个粒子与粒子 i

发生碰撞,并将尺度 $1.2a_0$ 称为碰撞半径。粒子 i 的温度 T_i 在碰撞后应更新为

$$T_i \leftarrow \frac{1}{n+1} \left[T_i + \sum_{j=1}^n T_j \right] \quad (10.8)$$

式中, T_j 为与粒子 i 相碰撞的粒子 j 的温度。不论受到碰撞与否,远端粒子上的温度在数值模拟时恒保持为室温(300K)。也就是说,外围环境的热传导假设为足够大。通过频繁的碰撞,热原子($T > 300\text{K}$) 的温度在温度重分配式(10.8)的不断作用下逐渐降低。经历许多步的蒙特卡罗模拟后,界面层的温度场下降,粒子热运动的幅度也下降,而峰峦界面的雏形逐渐出现。

3. 室温长时平衡过程

为加速模拟的时间步长,在短时蒙特卡罗模拟后接续以第9.3.3小节中所介绍的原子换位技术。这里用原子的直接换位来近似模拟长时间尺度下的随机过程。

在温度降至室温时,在构形上下两边加压,用分子动力学方法模拟室温下界面层合的规整结构。根据以上这些简单规则,冷凝结晶过程由最先冷却下来的粒子向外扩展,最终导致了峰峦状界面的形成。

在对这些过程进行模拟时,金属原子之间的相互作用按原子镶嵌方法模拟,离子之间的相互作用按经典对势模拟。此外尚需考虑到金属键与离子键之间的交互作用。当某一金属键粒子与一离子产生交互作用时常发生极化。其键合可近似用离子型交互作用势来表达

$$E_{\text{int}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{PZ_{\text{metal}}Z_{\text{ion}}}{r_{ij}} + \frac{b}{r_{ij}^n} \right) \quad (10.9)$$

式中, $Z_{\text{metal}} > 0$ 表示金属原子的价键值; Z_{ion} 表示离子的价键值。式(10.9)对常见对势(如式(9.1))的修正在于引入极化常数 P 。 P 的正负号选取应使式(10.9)中第1项库仑力为吸引力。因此,若 Z_{ion} 为正, P 便为负值;若 Z_{ion} 为负, P 便为正值。模拟计算中取 P 的绝对值为0.5。

10.4.3 数值模拟结果

采用上述计算方案可模拟实际界面的加工形成过程,数值结果再现了峰峦状的界面结构。峰峦的倾角及转向交错与晶格取向有关,高度为几个纳米,且具有一定的分形特征。上下两种材料通过这种峰峦状界面形成一种犬牙交错的接合层,与铝/碳化硅晶须界面在高清晰度电镜下的原子尺度观察结果相一致。改变实际的加工工艺过程(晶格常数、初始温度、扩散深度),可得到图10.6(b)和(c)的两种界面结构。上述峰峦状界面的形成类似于铸造过程中的“枝晶”生长现象,它由于结晶时的局部过冷所造成。界面加工工艺过程与最后得到的界面结构有着对应关系。峰峦的起伏高度与界面熔化层的高度有关。大范围的数值实验表明峰峦的角度与类似于式(10.8)所描述的热交换规律有关。当粒子碰撞所致传热效应增快或选用更大的粒子碰撞半径时,冷却率上升,固化粒子的可动性降低,峰峦角度就变得陡峭。有鉴于此,界面热压合工艺过程将影响峰峦的几何形貌。

10.4.4 峰峦界面结构与界面断裂行为

实际的界面总有一定的界面结构。综合应用蒙特卡罗方法、原子交换方法、分子动力学方法,可计算模拟实际界面形成的工艺过程,即再现两种材料加热混合后的冷却凝聚过程或在冷基底上的第二相热沉积过程。通过模拟刚冷却时粒子的快速运动和碰撞能量交换,以及冷却至一定程度后的长时粒子蠕动过程和室温下的平衡过程,可得到峰峦状的界面结构。

沿着该锯齿晶界开出一条裂纹并经弛豫平衡,必然比理想界面裂纹更接近于真实情况。这时,沿晶格取向的峰峦状界面将对裂纹尖端位错的发射有很大影响。改变混合度 ψ ,在某些条件下界面对位错发射起诱发形核作用;而在另外一些条件下硬脆材料相中隆起的齿状峰则可能抑制近界面处位错的发射。随着 K 场加大,裂纹尖端附近的裂纹上下表面发生移动。当近尖端混合度配置基

本为张开型时,界面的锯齿形状无碍于上下裂纹面的移动;而当近尖端混合度配置以滑开型为主时,峰峦界面会发生“闭锁”现象,对裂纹尖端场造成屏蔽。在第11.5节中将进一步讨论峰峦界面结构对裂尖位错发射的影响。Liechti 和 Chai^[6]关于界面韧度的实验观察表明,断裂韧性随着混合度的上升而增加,这在纳观原子模型中可得到很好的解释。

Yang 与 Shih^[7]曾经讨论过峰峦状界面导致的界面层结构(亦见第5.7节)。该界面层结构用来改变裂尖混合度,并使界面韧度曲线发生移位。

参 考 文 献

- 1 Yang W, Tan H L, Guo T F. Evolution of crack tip process zones. *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering*, 1994, 2(3a), 767~782
- 2 Tan H L, Yang W. Atomistic/continuum simulation of interfacial fracture, Part I: Atomistic simulation. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(2), 151~162
- 3 Rice J R, Beltz G E, Sun Y. Perieris framework for dislocation nucleation from a crack tip. In: Argon A S ed. *Fundamentals of Fracture and Fatigue*. Berlin, Springer-Verlag, 1992. 1~58
- 4 Hsia K J, Argon A S. Experimental study of the mechanisms of the brittle-to-ductile transition of cleavage fracture in Si single crystals. *Mater. Sci. Eng., Ser. A*, 1994, 176:111~119
- 5 谭鸿来. 固体界面断裂过程的宏微观数值模拟:[学士论文]. 北京,清华大学工程力学系,1993
- 6 Liechti K M, Chai Y-S. Biaxial loading experiments for determining interfacial toughness. *J. Appl. Mech.*, 1992, 59, 295~304
- 7 Yang W, Shih C F. Fracture along an interlayer. *Int. J. Solids Struct.*, 1994, 31, 985~1002

第 11 章 宏微观结合

11.1 宏观/细观/纳观三重嵌套模型

在第10章中,我们模拟了均相材料和异质界面处裂尖纳观区所发生的断裂过程。该模拟展现了若干断裂物理机制,但在很多方面却仍有欠缺。首先,在计算规模的限制下,原子聚集体的可行计算半径只有几十个纳米,该尺度对描述可制约裂纹尖端附近几毫米的尖端奇异场来说是不够的。在原子计算中很难考虑微米尺度缺陷(如位错堆积)的影响,因此必须把原子聚集体嵌入连续介质中^[1,2,3]。其次,原子尺度下无法考虑周围连续介质对裂尖纳观区的约束效应。

早先的原子/连续介质模型采用位移边界条件。例如,将外层原子的位置由连续介质分析给定,并在实施模拟计算时令之保持不变,见 Kannien 与 Gehlen^[4]。这种固定位移边界对裂尖附近的原子运动产生非常苛刻的约束,因此裂尖附近的非线性位移受到压抑。Sinclair 等^[5]引入了一个具有给定连续介质位移的外围原子框,将该原子框与动态演化的原子聚集体相联接。如此得到的位移边界条件的柔性略好于前面一种。数值模拟时内区的原子聚集体得到弛豫,由此产生的力便传递给相连的外框原子。这些力可借助于线弹性理论中的 Green 函数,通过调整外框原子的位置来消除。Zhou 和 Carlsson^[6]曾利用 Green 函数法进行位错形核与裂纹失稳的原子模拟。然而,上述位移式原子/连续介质连接方案引起对位错发射的人为屏障。原子/连续介质交界面对裂尖发射位错的透越过程施加一个虚象力,因此便改变了材料的真实断裂响应。

deCelis 等^[7]曾建议了一种应力边界条件的格式。该格式在上一章纳观计算中得到采用,它对裂尖处的位错发射没有人为的约束。从另一个方面来看,deCelis 等的格式未能有效考虑外层连续介质对纳观区的约束,因此材料裂尖的响应比真实情况的柔性要大。

Mullins 等^[8]在与外界有限元计算进行迭代式调整的基础上提出边界条件,并按此格式计算了 α 铁中的平面裂纹。在他们的模型中,原子运动由 Johnson 的 I 型对势所描述。其模拟计算的过程为:由有限元的节点位移导致单元应变,在强加应变的前提下由原子间作用势来计算应力,然后按有限元技术转换为节点力。然而,有限元计算难于容纳位移错配,于是从裂尖形核的位错不能移入连续介质。此外,上述迭代有限元计算需耗费大量的计算时间。

综上所述,对断裂过程的一个有效的宏微观模拟应能满足下述要求:

①要通过宏微观相结合的仿真计算来提高计算效率,既要反映裂尖纳观区的原子运动过程,又不致超过当今计算设备在速度和容量方面的限制。因此,必须进行原子构形与连续介质构形相结合的计算,而不是单纯的原子构形计算。

②所采用的宏微观计算模型不应改变裂尖处的韧脆性质,既不能对裂尖的原子运动强加约束,又不能完全放松外围连续介质的约束而使其过度柔化。

③在计算模型中形成的各类建模区域的交界面要具备缺陷(如位错)的透越能力。这些界面不是真实材料中存在的,而是在宏微观计算中人为地设置的。

在上述指导原则下,我们提出一种宏观/细观/纳观三重嵌套模型,以实现宏微观定量贯穿的断裂理论^[1,2,3]。

纳观区的尺度为半高为10nm左右的内嵌原子断裂构型,具有曲折界面。细观区为外径10 μ m的区域,其与纳观区的结合层需考虑位错传递,以及位错半原子列没入连续介质的技术。细观区内既有初始随机生成的背景位错,又有自纳观区接力传递的裂尖钝化位错,这些离散位错在弹性连续介质内的运动由位错计算力学模

拟,并按位错动力学曲线的规律运行。内径为 $10\mu\text{m}$ 、外径为 1mm 的宏观外环区用弹-粘塑性大变形模型计算。宏观区与细观区的界面除满足应力连续外,还应容纳自细观区移出位错的累积错配效应。宏观外环区的外边界上给定单一材料或双材料界面断裂的 K 场,在确定的裂尖混合度下按指定的加载率增加 $|K|$ 值。上述模型可望实现固体断裂过程的宏微观定量模拟。

上述宏观/细观/纳观三重嵌套模型还可以模拟其他宏微观力学问题,如间隙原子造成的腐蚀致脆问题;膜基界面结构和界面结合强度;先进复合材料的界面层工艺设计;表面离子注入和表面强化;裂尖晶格相变问题;纳米压头(nanoindenter)的压痕问题;超精密加工问题等等。对这一研究领域的深入开拓将可能使控制宏观氛围的力学参量与断裂物理机制和损伤几何图象实现定量的结合。

该宏观/细观/纳观三重嵌套模型的关键环节在于连续介质的细观区与原子聚集体的纳观区之间的过渡。该问题将在下一节中予以讨论。

11.2 连续介质——离散粒子的交叠层模型

纳观与细观结合的计算模型如图11.1所示。该图外围为外层细观区的放射状有限元网格,网格沿径向有20层(图中仅显示了最内两层网格),每层沿周向划分24个单元,总共480个单元。有限元网格的内半径为 10nm ,外半径为 $30\mu\text{m}$ 。整个模型在空间上实现了从细观向纳观的过渡。图11.1(a)和图11.1(b)为内层纳观区的原子模型,共有2310个原子。图11.1(a)为理想平直界面的原子计算构型,图11.1(b)为考虑了峰峦界面结构的原子计算构型。内层纳观区的半径为 12.5nm ,用分子动力学计算,模拟原子的受力运动。外层细观区用有限元计算,描述裂尖弹性基体上的离散位错运动。

在原子与连续介质的交接处采用自动设计的粒子/连续介质交叠模型,其交叠量为4至5个原子间距。在交叠层中粒子与其所处

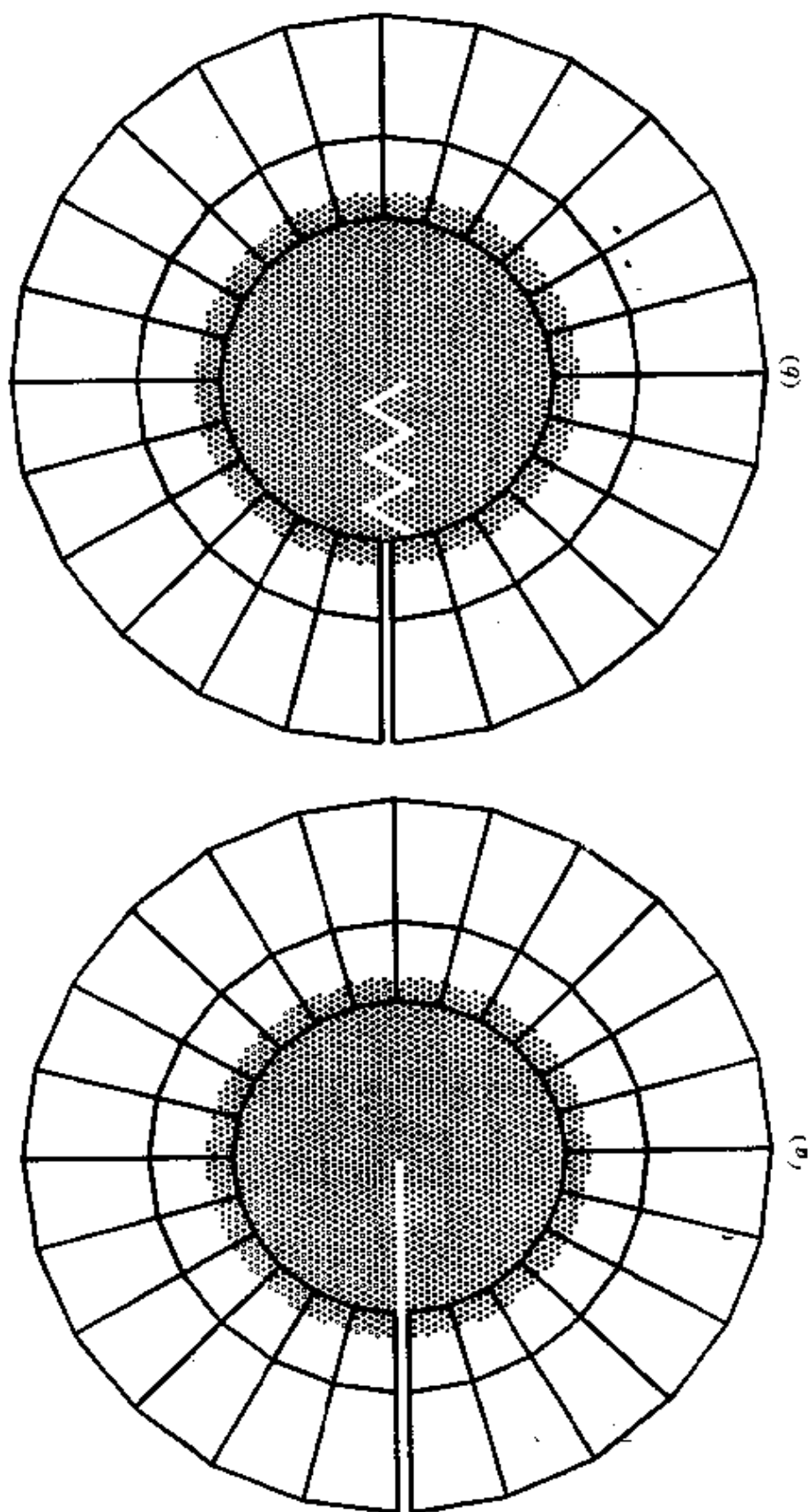


图11.1 界面断裂原子/连续介质结合模拟的初始构形
(a)平直界面；(b)峰密状界面。

的单元有着共同的位移、应力等力学量。这种模型的优点在于使细观与纳观力学量的传递变得自然,同时便于描述位错的跨层次运动。

作为进一步的计算,还可以考虑周期性的三维模型。另外还可以考虑在细观层内放置随机背景位错(地点:随机生成;Burgers 向量:在三个可能方向随机赋值;数量:给一个位错密度,如1~5条/平方微米),看它们对裂尖发射位错的影响,以及由于位错阻塞所造成的第二个位错系的开动。

下面讨论连续介质区的有限元计算。有限元节点中被交叠层原子所覆盖的节点之集合标记为“I”(指连续介质内区),其余节点之集合标记为“E”(指连续介质外区)。细观区的连续介质基体假定为弹性,而塑性变形由嵌含在该连续介质中的诸位错的运动所产生。图11.2中的实线描述了纯铝原子聚集体在使用 EAM 势下计

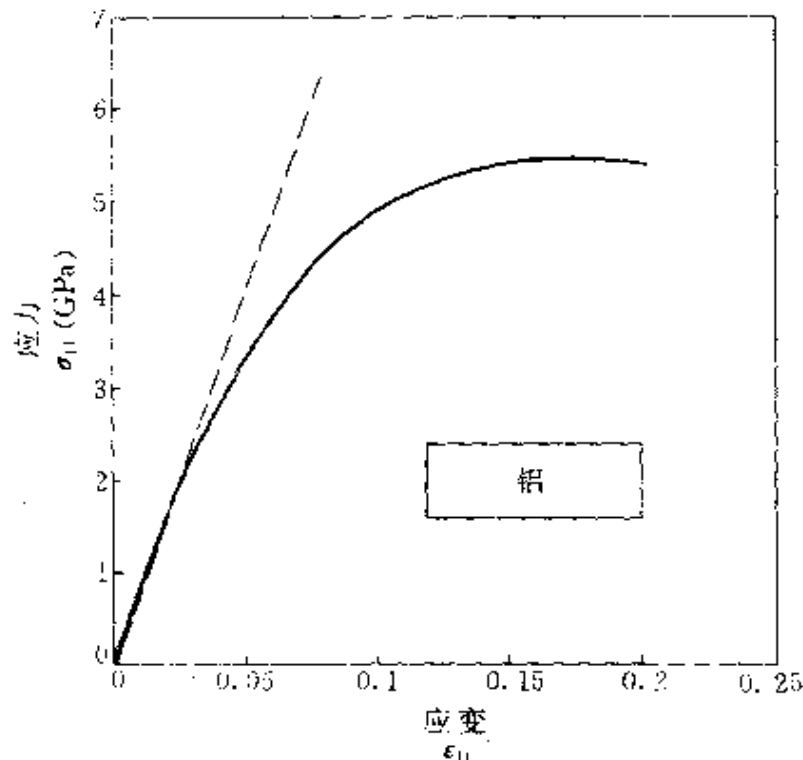


图11.2 纯铝在平面应变拉伸下的应力应变关系(实线为原子镶嵌模型下的计算结果,虚线为小变形下的弹性关系)

算的平面应变拉伸曲线。图中的虚线表明由无穷小变形的斜率而推测的线弹性应力应变曲线。图11.2表明,若等效应力小于

2. 0GPa, 则理论应力应变曲线与线弹性假定的差别十分微小。在实际裂尖解理或位错发射计算中, 连续介质区的应力峰值小于 1. 2GPa。这些数据说明在细观区的线弹性基体假设是合理的。

细观区的线弹性变形特征说明在该区叠加法成立, 于是可在该区使用第 7. 5. 2 小节所描述的位错强奇异性剔除技术。这时可将已知的无穷大介质中的直位错解从整个解中抽离出来, 由对弹性环域的有限元法来计算由实际外边界条件与无穷介质位错解的抵消边界力之差所造成的残余问题。

11.3 交叠层力学量传递与力学氛围

11.3.1 交叠层力学量传递

我们接下来讨论连续介质一粒子交叠层上力学参量的传递。引入矩阵 $T_{I \rightarrow A}^u$ 来表示由原子聚集体(记为“A”)到交叠层连续介质有限元内节点(记为“I”)的位移传递。从有限元节点至原子聚集体的逆操作称为 $T_{A \rightarrow I}^u$ 。类似的, 可用 $T_{I \rightarrow A}^f$ 与 $T_{A \rightarrow I}^f$ 来表达 I 区与 A 区之间的力传递。假定在交叠层有 m_I 个单元节点(逐一标记为 1, 2, ..., m_I), 且它们与 m_A 个原子所交叠。对节点 i , 其对应的环绕原子数为 n_i (在实际计算中 n_i 约为 20 左右)。与节点 1 所对应的原子记为 1, 2, ..., n_1 , 与节点 2 所对应的原子记为 $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$, 等等, 以此类推。定义一个传递矩阵 T_i 为

$$T_i = (I_2 \cdots I_2)_{2 \times n_i} \quad (11.1)$$

式中, I_2 代表秩为 2 的单位矩阵, 因为位移和力都具有 x 与 y 分量。 $T_{I \rightarrow A}^u$ 和 $T_{A \rightarrow I}^u$ 的装配方式为

$$T_{I \rightarrow A}^u = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} T_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \frac{1}{n_{m_I}} T_{m_I} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{2m_I \times 2m_A} \quad (11.2)$$

$$T_{\lambda \rightarrow i}^* = (T_{i \rightarrow \lambda}^T)^T \quad (11.3)$$

式中,上标“T”代表矩阵转置。 $T_{i \rightarrow \lambda}$ 和 $T_{\lambda \rightarrow i}^*$ 的装配方式为

$$T_{i \rightarrow \lambda} = \begin{bmatrix} T_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & T_{m_1} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}_{2m_1 \times 2m_\lambda} \quad (11.4)$$

$$T_{\lambda \rightarrow i}^* = (T_{i \rightarrow \lambda}^T)^T \quad (11.5)$$

这些矩阵可用来构造下述交叠层力学量的转化公式

$$\left. \begin{aligned} u_i &= T_{i \rightarrow \lambda}^* u_\lambda & u_\lambda &= T_{\lambda \rightarrow i} u_i \\ \dot{u}_i &= T_{i \rightarrow \lambda}^* \dot{u}_\lambda & \dot{u}_\lambda &= T_{\lambda \rightarrow i} \dot{u}_i \\ f_i &= T_{i \rightarrow \lambda}^* f_\lambda & f_\lambda &= T_{\lambda \rightarrow i} f_i \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

式中, u , \dot{u} 和 f 分别代表位移、速度和力向量。

11.3.2 力学氛围

可按下述方式进行耦合的原子/连续介质模拟。在每一加载步用有限元法对外围弹性介质进行分析以求出在连续介质—离散粒子交叠层上形成的力学氛围。这一连续介质变形通过交叠层中的节点应力来引致嵌含在它内部的原子运动。由矩阵 $T_{\lambda \rightarrow i}^*$ 可将有限元计算的节点应力转换为交叠层内各个原子上的力。在这些给定原子力下,在原子间作用势下结为一体的原子聚集体(见第9.2节)将演化为新的构形。这一新构形产生位移和动量的更新,并反过来修正了交叠层上的力学氛围。原子聚集体与连续介质的交互作用可用迭代方式加以估算。

作为初步的模拟,我们采用 Mullins 和 Dokainish 的假设^[8],即认为连续介质总处于准静态平衡。在下一小节中我们再讨论完全动态情况下的响应。这一模拟的效率取决于对交叠层上力学氛围的提取。

耦合的 FEM/MD 计算可由下述矩阵方程来描述

$$\begin{pmatrix} K_{EE} & K_{EI} & 0 \\ K_{IE} & K_{II} & K_{IA} \\ 0 & K_{AI} & K_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_E \\ u_I \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_E \\ f_I \\ f_A \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

该方程还应受到下述传递关系的约束

$$u_I = T_{I \rightarrow A}^T u_A, \quad f_I = T_{I \rightarrow A} f_A \quad (11.8)$$

式(11.7)中的黑体符号 K 代表刚度矩阵。下标“E”和“I”仍旧标记外节点与内节点中的自由度。后者对应被原子聚集体覆盖的最内层一圈节点。下标“A”表示原子聚集体所对应的自由度。所有与原子相关的刚度矩阵都是切线刚度矩阵。向量 f_E 与 f_I 既包括远方 K 场加载,也包括为抵消位错自身应力场而在边界和界面上施加的反向面力。 f_I 仅在裂纹面处的两个节点上不为零,在该处应抵消由位错应力场而引起的力。 f_A 表示由原子间作用势所产生的力向量。计算的初始构形不含位错,且内嵌原子聚集体在外载施加前应已得到足够的弛豫。在叠合层上力向量 f_I 的初值为零。

约束条件式(11.8)和由式(11.1)到式(11.5)所定义的传递矩阵使我们可将交互刚度矩阵 K_{IA} 和 K_{AI} 写为

$$\begin{aligned} K_{AI} &= T_{A \rightarrow I}^T (K_{II} - K_{IE} K_{EE}^{-1} K_{EI}) \\ K_{IA} &= K_{AI}^T = (K_{II} - K_{IE} K_{EE}^{-1} K_{EI}) T_{I \rightarrow A} \end{aligned} \quad (11.9)$$

为提高计算效率,可进行外节点高斯消元。将式(11.7)的两端同时左乘一矩阵 L

$$L = \begin{pmatrix} K_{EE}^{-1} & 0 & 0 \\ -K_{IE} K_{EE}^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

于是方程(11.7)变为

$$\begin{pmatrix} I & K_{EI}^* & 0 \\ 0 & K_{II}^* & K_{IA} \\ 0 & K_{AI} & K_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_E \\ u_I \\ u_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_E^* \\ f_I^* \\ f_A \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{II}^* &= K_{II} - K_{IE} K_{EE}^{-1} K_{EI} \\ K_{EI}^* &= K_{EE}^{-1} K_{EI} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f_E^* &= K_{EE}^{-1} f_E \\ f_I^* &= f_I - K_{IE} K_{EE}^{-1} f_E \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

方程(11.11)分离了外节点与内节点的求解。利用式(11.8)、式(11.9)和式(11.12),可得到方程(11.11)中后两式的解答如下:

$$K_{AA} u_A = f_A + T_{A-1}^i (f_I^* - K_{II}^i T_{I-A}^i u_A) \quad (11.13)$$

该式使我们得以通过交叠连续介质的作用来更新诸原子的位置。

方程(11.13)可由第9.3节所示的分子动力学方法求解。由于在该方程中不包含有限元的自由度,其求解格式是有效的。交叠层上作用的面力由下式合成

$$\hat{f}_I = f_I^* + \sum_a f_a^b - K_{II}^i T_{I-A}^i u_A \quad (11.14)$$

式中, f_a^b ($a = 1, \dots, n$, 而 n 为连续介质区中位错的根数) 为位错自身应力。我们将 \hat{f}_I 称为在交叠层上形成的力学氛围。在式(11.14)右端的三项分别代表: 应力氛围、位错背应力和连续介质对原子聚集体的约束。在连续介质约束和外载的共同作用下, 施加于原子聚集体的力记为 f_A^{ext} , 它由下式给出

$$f_A^{\text{ext}} = T_{A-1}^i \hat{f}_I \quad (11.15)$$

交叠层原子上的作用力向量集合 f_A^{ext} 使我们得以对近尖端原子聚集体进行分子动力学计算。此外, 在原子聚集体边界上, 还需附加一族约束力来抵消在边界原子处的人工表面效应, 见 Mullins 与 Dokainish^[21]。由于在交叠层的平均应力为零, 那里的应变起伏不大, 因此该保持力很小。在计算中进一步假定该保持力在宏微观模拟时保持为常数。

在原子至节点的联系矩阵 T_{I-A}^i 的帮助下, 可由分子动力学模拟给出的原子位置来更新有限元计算中的节点位移 u_I

$$u_I \leftarrow u_I + T_{I-A}^i \Delta u_A \quad (11.16)$$

式中, Δu_A 为该模拟步中的原子移位。外区节点位移可由下式计算

$$u_E = f_E - K_{EI} u_I \quad (11.17)$$

在连续介质区的总位移 u^{tot} 除包含位移 u_E 或 u_I 以外, 还应包括由连续介质中所有位错所产生的自身位移场

$$\mathbf{u}^{\text{tot}} = \frac{\mathbf{u}_E}{\mathbf{u}_I} + \sum_a \mathbf{u}_a^0 \quad (11.18)$$

在外区 E 的有限元节点可进一步分为两组, E_1 与 E_2 。 E_2 是沿外边界和双材料界面的节点, E_1 为 E 区中其他有限元节点。注意到外载或位错自身应力的抵消面力仅作用于节点集合 E_2 上, 因此对节点集 E_1 的高斯消元可一劳永逸地进行。若把式(11.7)中的连续介质刚度矩阵和载荷向量进一步写成分块形式

$$\mathbf{K}_{E+I} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{E_1 E_1} & \mathbf{K}_{E_1 E_2} & \mathbf{K}_{E_1 I} \\ \mathbf{K}_{E_2 E_1} & \mathbf{K}_{E_2 E_2} & \mathbf{K}_{E_2 I} \\ \mathbf{K}_{IE_1} & \mathbf{K}_{IE_2} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{E+I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{E_2} \\ \mathbf{f}_I \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

则式(11.19)中的矩阵可部分地对角化为

$$\mathbf{K}_{E+I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{E_1 E_2}^* & \mathbf{K}_{E_1 I}^* \\ \mathbf{K}_{E_2 E_1} & \mathbf{K}_{E_2 E_2} & \mathbf{K}_{E_2 I} \\ \mathbf{K}_{IE_1} & \mathbf{K}_{IE_2} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

而在这一过程中载荷列向量保持不变。在实际有限元计算时, E_1 区包含 91% 的节点, 因此对该区的高斯消元大幅度地降低了方程组的自由度, 减少了模拟计算所需的机时。模拟时间主要消耗于原子聚集体的分子动力学计算。每一计算步后需更新 \mathbf{f}_{E_2} 和 \mathbf{f}_I , 以计及位错位置的移动和外载的变化。在修正载荷向量后, 可进一步完成高斯消元而得到

$$\mathbf{K}_{E+I}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{E_1 E_2}^* & \mathbf{K}_{E_1 I}^* \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{K}_{E_2 I}^* \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{II}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{E+I}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{E_2}^* \\ \mathbf{f}_I^* \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

式中的 \mathbf{f}_I^* 和 \mathbf{K}_{II}^* 可用来形成分子动力学模拟的面力氛围, 如式(11.14)。

11.3.3 动力耦合列式

为探索断裂过程的动态演化, 应使用有限元分析的动态格式。本小节对原子/位错/连续介质的动态模拟框架做一扼要阐述。交

叠层的概念与层中形成的力学氛围将有助于该动态模拟格式。

这一动态格式的特色之一在于交叠层上的动量传递。在有限元计算的连续介质区内,动态方程可写为

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (11.22)$$

式中, M 和 C 分别为体系的质量矩阵与阻尼矩阵。求解式(11.22)的有限元格式可参见任何一本关于有限元的著作,如 Zienkiewicz^[9]。在动力时间积分的 Newmark 截断下,可得下列更新格式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= \dot{\mathbf{u}}(t) + [(1 - \delta)\dot{\mathbf{u}}(t) + \delta\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]\Delta t \\ \mathbf{u}(t + \Delta t) &= \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\Delta t \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \alpha\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

式中, Newmark 参数 α 与 δ 确定了积分精度和数值稳定性。 $\delta = \frac{1}{2}$

与 $\alpha = \frac{1}{6}$ 对应着线性加速方法。在时刻 $t + \Delta t$ 重写方程(11.22), 并利用式(11.23), 可导出下述伪静态方程组

$$K^d \mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{f}^d(t + \Delta t) \quad (11.24)$$

式中

$$K^d = K + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}M + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}C \quad (11.25)$$

$$\mathbf{f}^d(t + \Delta t) = \mathbf{f}(t + \Delta t)$$

$$\begin{aligned} &+ M \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2} \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] \\ &+ C \left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{u}(t) + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] \end{aligned} \quad (11.26)$$

同前,式(11.24)中的刚度矩阵与载荷向量仍可以分块处理为与外节点和内节点有关的量,并进行外节点高斯消元。减缩后的刚度矩阵与载荷向量的形式与式(11.11)相同,只是缀以上标“d”以强调动态效应。在这些分块矩阵与向量中, K_{ii}^d 与 f_i^d 定义了交叠层

上的力学氛围。力学氛围的提法使我们得以按前一节所阐述的程式来进行原子/连续介质的耦合模拟。对分子动力学计算,可在上述力学氛围下更新诸原子的位移 u_A 和速度 \dot{u}_A 。于是在交叠层上有限元节点的位移和速度为

$$u_i(t + \Delta t) = T_{i \rightarrow A}^* u_A(t + \Delta t) \quad \dot{u}_i(t + \Delta t) = T_{i \rightarrow A}^* \dot{u}_A(t + \Delta t) \quad (11.27)$$

上述公式描述了从原子聚集体到外围连续介质的位移与动量传递。在连续介质外区的节点位移可计算如下:

$$u_E(t + \Delta t) = f_E^*(t + \Delta t) - K_{Ei}^* u_i(t + \Delta t) \quad (11.28)$$

式中, f_E^* 与 K_{Ei}^* 的表达式具有与式(11.12)相同的形式,但采用式(11.25)与式(11.26)所定义的 K^* 与 f^* 值。由式(11.23)和式(11.22),可分别计算连续介质外区的速度与加速度。

11.4 位错运行的跨层次传递

11.4.1 从纳观区到细观区的位错传递

对原子聚集体,位错的发生及其在纳观区原子模型中的运动根据分子动力学的计算直接决定,既不需附加任何位错发射准则,也不依赖于实验测得的位错动力学曲线。实验测得的位错动力学曲线所要求的力学环境可能与裂纹尖端(距裂尖几个到十几个原子间距)的应力场相差很大,而在原子模型中根据原子结合力曲线模拟裂尖位错的运行,方法更为直接。在这一计算模型下,裂尖是解理还是位错发射由原子间作用势,加载幅度、混合度和速率,以及材料中所含的缺陷来决定,参见第10章。

离散粒子—连续介质交叠层模型为位错从纳观区到细观区的传递提供了一条方便的途径。在合适的载荷下,位错可自然而然地在裂尖附近形核,并沿着分解剪应力最大的滑移系向外逸出。当领头原子位错到达可用原子聚集体和连续介质模型所同时刻划的交叠层时,便在原地用一个具有相同伯格向量连续介质位错来取代,该位错嵌含在相叠合的弹性连续介质中。由于新创造了一根

连续介质位错,便要采用原子湮没技术来去除交叠层内多出的半列原子,以保持原子与连续介质嵌合模型的质量总体平衡。此后需要调整交叠层的区域以保证内节点为足够多的交叠原子所覆盖,并对式(11.1)至式(11.5)的原子/节点转移矩阵进行重新标号。在交叠层新形成的网格节点上,其弹性位移向量 $u^{\#}$ 可写为

$$u^{\#} = T_{1-A}^{\#}(u_A - Nb_A) \quad (11.29)$$

式中, u_A 为原子移位; b_A 为一族伯格斯向量。对角阵 N 代表聚集体中每个原子上掠过的位错数。在这一模拟中包含了从裂尖纳观区到外围连续介质的物质传递。

转换后的连续介质位错将在弹性应力场驱动下在细观区延伸。在给定连续介质应力场 σ_0 下,位错运行的推力为分解剪应力

$$\tau^{\alpha} = m_{\alpha}^{\alpha} \sigma_0 s_j^{\alpha} \quad (11.30)$$

式中,单位向量 m^{α} 与 s^{α} 分别代表第 α 个滑移系的滑移面法向和滑移方向。该滑移系上的位错速度 v^{α} 由唯象学位错动力学曲线给出。对纯铝而言,若 v^{α} 小于剪切波速的四分之一, Parameswaran, Urabe 和 Weertman^[10]表明其位错动力学曲线可简化为

$$v^{\alpha} = B\tau^{\alpha}b \quad (11.31)$$

式中, b 表示伯格斯向量的长度,而材料常数 B 由 Parameswaran 等^[16]列表。对纯铝, $B = 5.7 \times 10^{-5} \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 。

为检验位错从纳观区传递到细观区时运行速度的变化,我们对第10.3节曾讨论过的双材料进行了宏微观计算。图11.3显示了从裂尖发出的第一根位错的运行速度变化。在连续介质上所加的 K 场的幅值为 $|K| = 0.8 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$, 其裂尖混合度 ψ (参见式(10.5))为 15° 。位错在界面上方铝相中沿与界面成 60° 的滑移面滑行。位错速度随裂尖距离的变化曲线说明,该位错从原子聚集体传递到外围连续介质时(即 r 从 110\AA 到 130\AA),其运行速度呈连续变化。基于分子动力学模拟的原子位错速度与基于唯象学位错动力学曲线的连续介质位错速度之间的这种完美的吻合表明了这种可透越位错传递层模型的优越之处。在从裂尖射出的前 50\AA 距离中,由于原子运动呈高度非线性,位错移动很快,其速度保持在

2 000m/s 左右。移出强非线性原子聚集区后,位错运行不断减速,在离裂尖300 Å处降为600m/s。

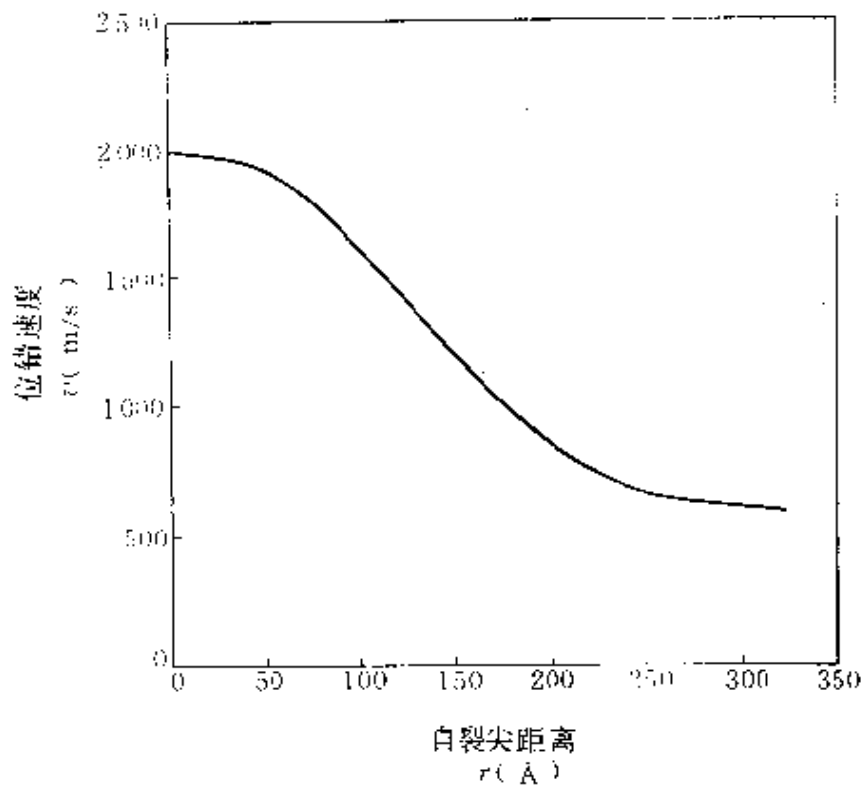


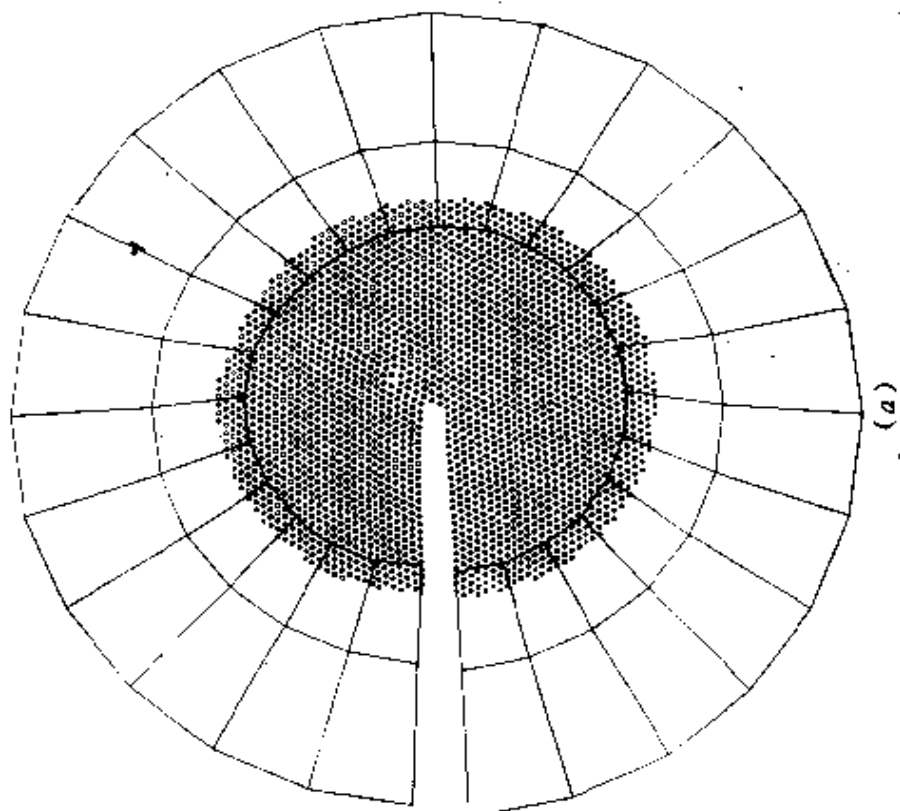
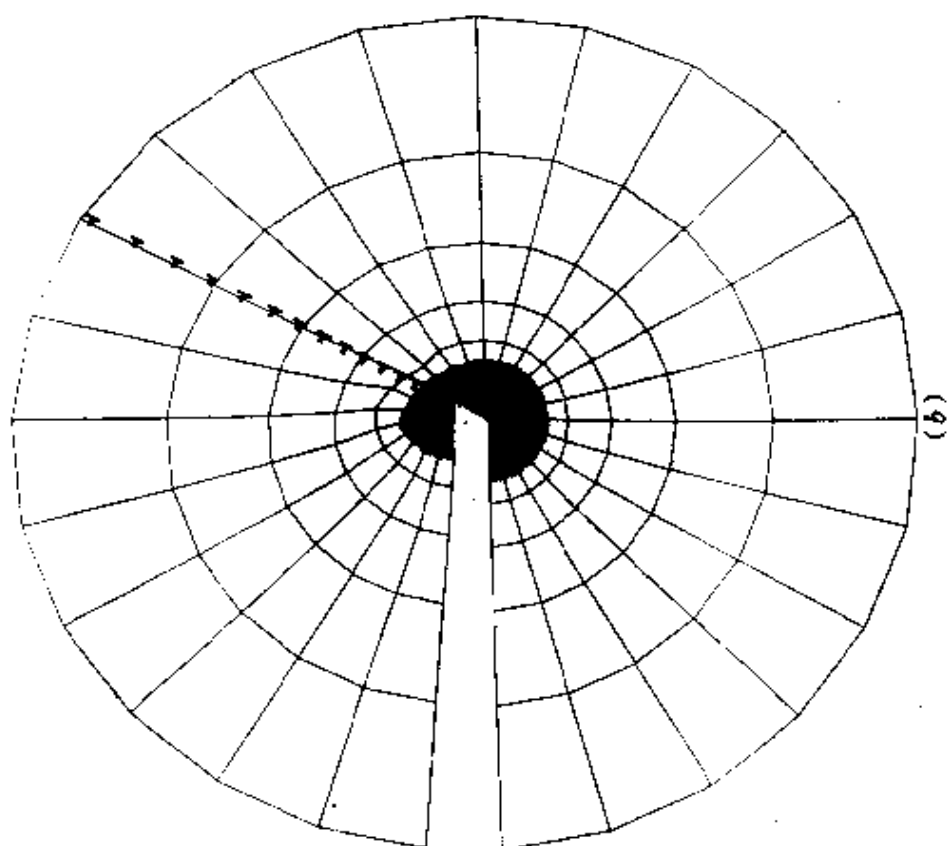
图11.3 从裂尖发射的第一根位错的速度变化

$$(|K| = 0.8\text{MPa} \sqrt{\text{m}}, \psi = 15^\circ)$$

11.4.2 从细观区到宏观区的位错吸收

在细观区(半径从10nm~10 μm)外还可以嵌套一个宏观区。该宏观区由唯象学的弹塑性连续介质本构方程所刻画。为与细观区的位错动力学曲线相匹配,在宏观区应由率相关的连续塑性模型来表征。在宏观区外围可施加制约小范围屈服行为的 K 场,包括其幅值 $|K|$ 和混合度 ψ 。在宏观区与细观区的交界曲线 Γ 上,应满足位错吸收条件。即对 Γ 上任意一点 x ,所有入射的位错均应被该边界吸收,而表现为

$$[[\mathbf{u}(x)]] = \int_{x_0}^x \bar{\mathbf{b}} d\Gamma \quad (11.32)$$



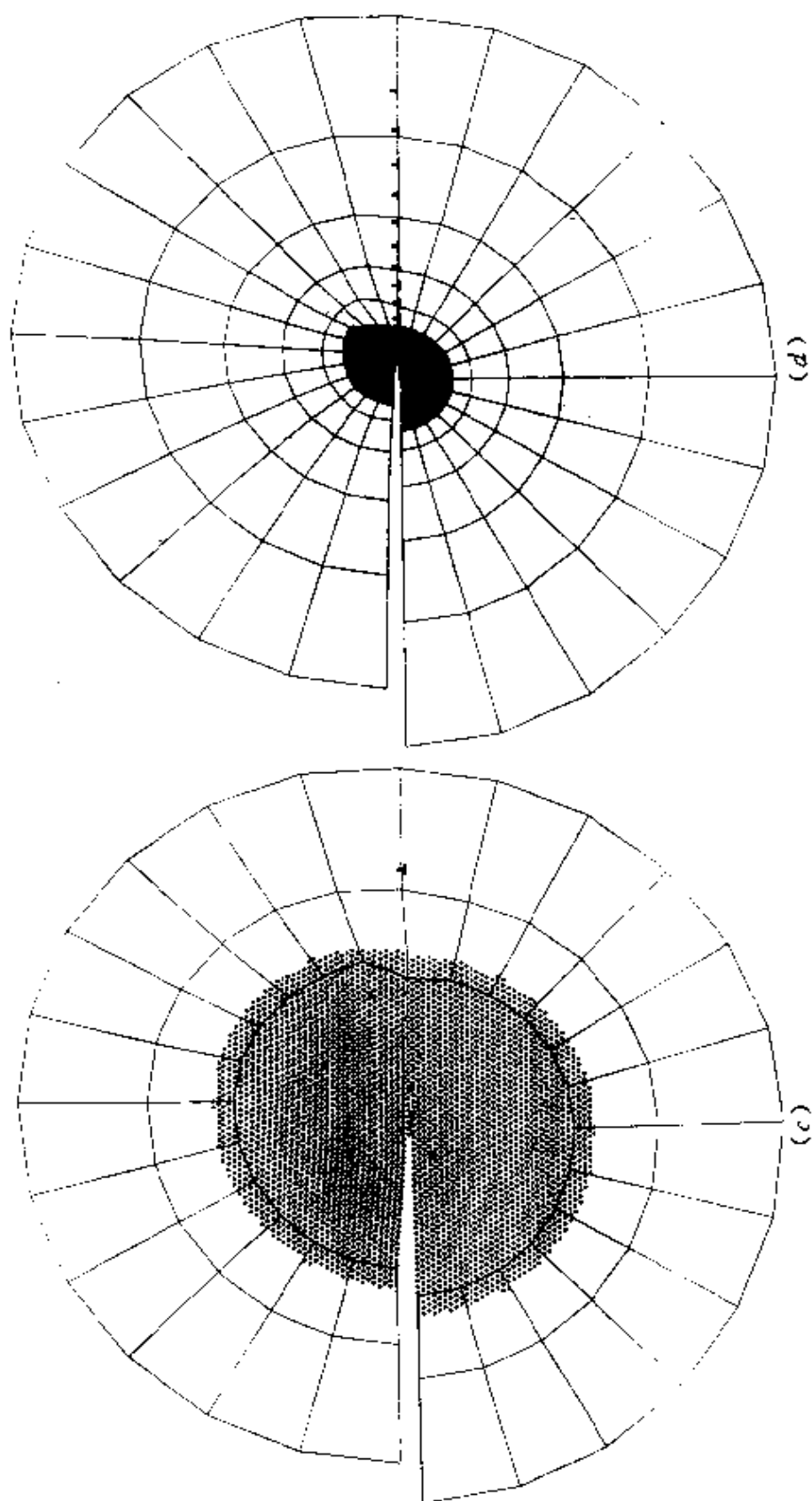
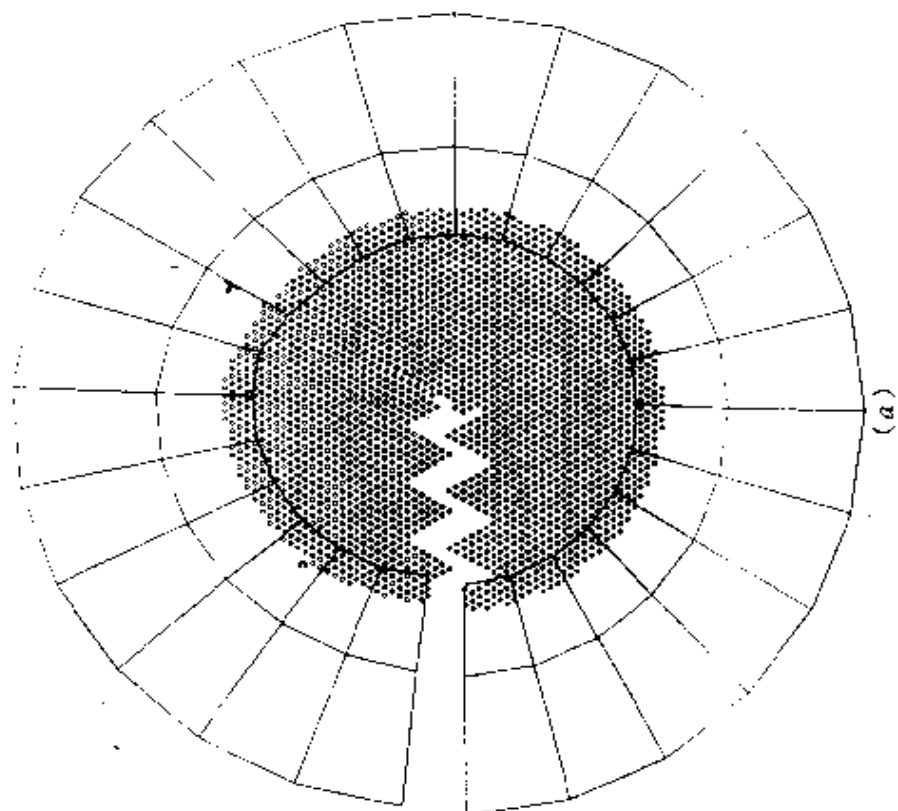
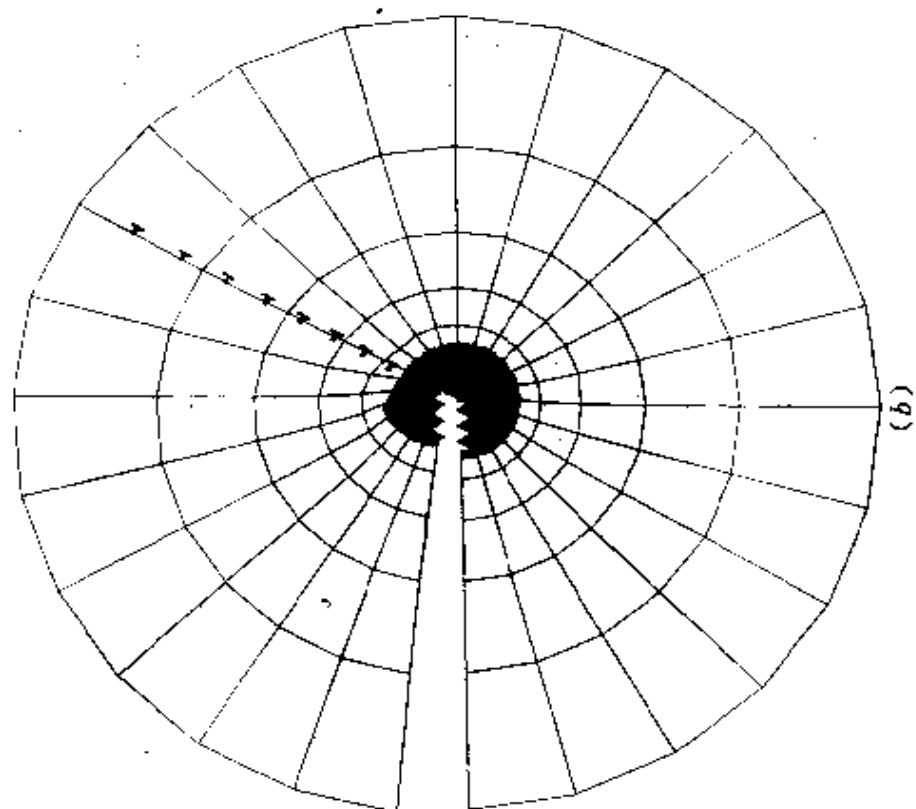


图11.4 沿平直界面断裂的原子/位错/连续介质模拟

$$(|K| = 0.8 \text{MPa} \sqrt{\text{m}})$$

(a) $\phi = 15^\circ, t = 4 \text{ps}$; (b) $\phi = 15^\circ, t = 30 \text{ps}$; (c) $\phi = 120^\circ, t = 4 \text{ps}$; (d) $\phi = 120^\circ, t = 30 \text{ps}$.



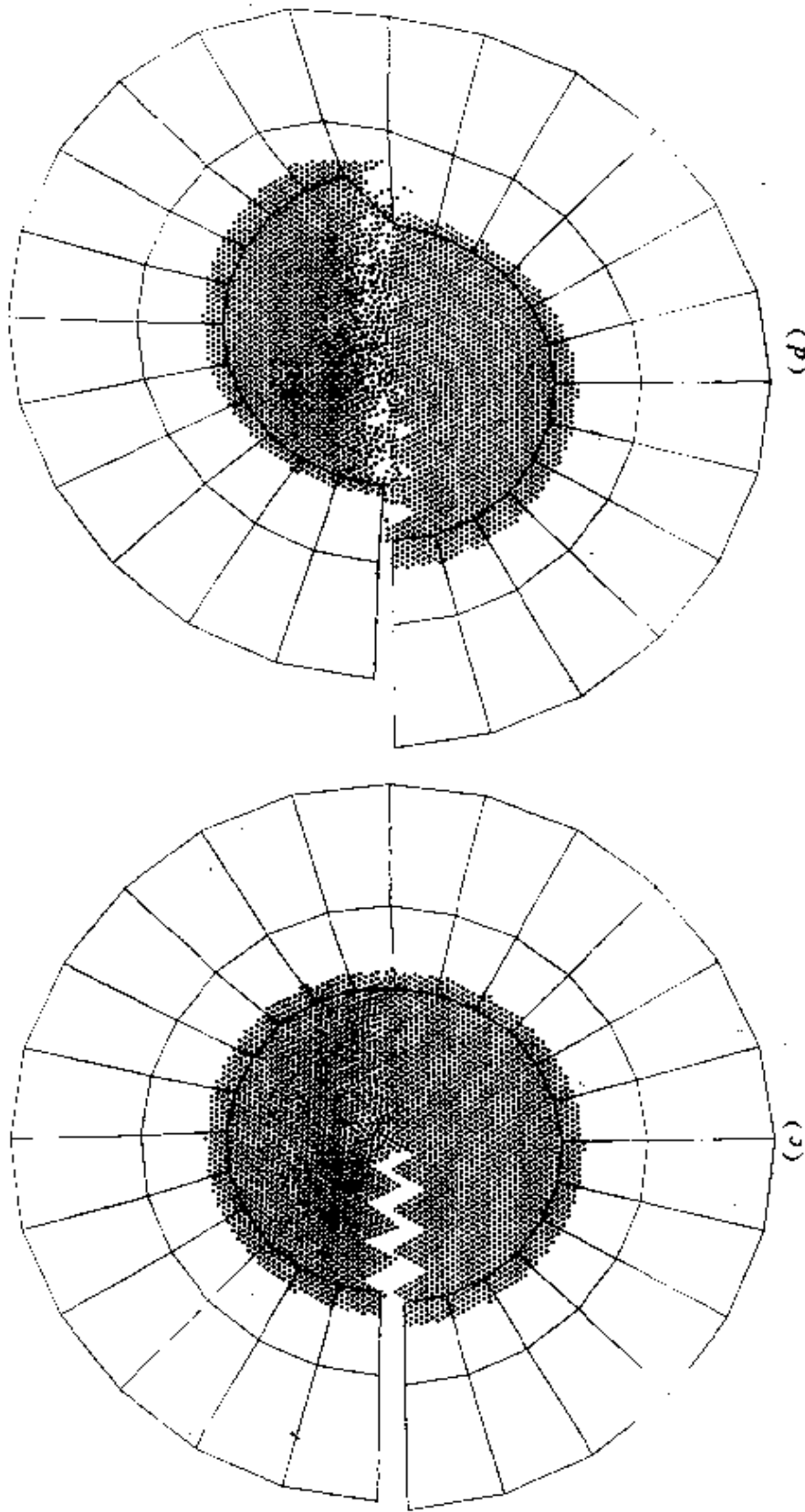


图11.5 沿峰峦界面断裂的原子/位错/连续介质模拟

$$(|K| = 0.8 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}})$$

(a) $\psi = 15^\circ, t = 4 \text{ ps}$; (b) $\psi = 15^\circ, t = 30 \text{ ps}$; (c) $\psi = 120^\circ, t = 4 \text{ ps}$; (d) $\psi = 120^\circ, t = 30 \text{ ps}$.

式中, $[[u(x)]]$ 表示沿界面 Γ 的位移间断; x_0 为 Γ 上位移保持连续的参考点; \bar{b} 表示沿界面 Γ 所吸收的伯格斯的密度的函数。

11.5 宏微观计算实例

本节将展示金属/陶瓷双材料界面断裂行为的宏微观计算实例。其材料描述同第10.3节。研究的重点放在裂尖混合度和峰峦界面形貌的耦合作用。如第6、7章所述,脆性与韧性分层行为分别对应着界面键合的破坏和裂尖位错发射。计算采用图11.1所示的边界层界面断裂构形,区分理想平直界面(见图11.1(a))和峰峦界面(见图11.1(b))两种情况。

图11.4显示了平直界面下宏微观计算模拟的位错发射情况。图11.5显示了峰峦界面下的宏微观界面断裂行为。在两组图中,图幅(a)与(b)代表裂尖混合度 $\psi = 15^\circ$ 的情况,图幅(c)与(d)代表裂尖混合度 $\psi = 120^\circ$ 的情况。前者为近 I 型断裂,后者为近 II 型断裂。在图11.4的(a)与(c)幅中,从裂尖原子区发射的第一根位错刚刚穿过连续介质——离散粒子交叠层,其对应时刻为 $t = 4\text{ps}$ 。在(b)与(d)幅中,显示了由于位错不断发射而造成的位错列组态,其对应时刻为 $t = 30\text{ps}$,或6 000个时间步。当 $\psi = 15^\circ$ 时,位错沿与界面成 60° 的滑移面方向发射,在平直界面情况下其首根位错的运行速度变化如图11.3所示。由图11.4(b)可见,当 $t = 30\text{ps}$ 时已有13根位错穿越连续介质——离散粒子交叠层。在近 I 型界面断裂时,峰峦界面对裂尖位错发射的影响在于降低其发射速度,而不是改变其位错发射模式。如图11.4(b)与图11.5(b)所示,在同一时刻 $t = 30\text{ps}$ 和同一载荷幅 $|K| = 0.8\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 下,自峰峦界面处发射而穿过交叠层的位错数(8根)小于自平直界面处发射而穿过交叠层的位错数(13根)。界面下方的陶瓷相比上方的金属相硬得多,峰峦界面的形貌扰动了位错形核条件,因此裂尖位错形核区的峰峦硬性约束减滞了位错形核。

当 $\psi = 120^\circ$ 时,情况则完全不同。对平直界面构形,位错可接

连不断地从裂尖发射,并沿界面运行,如图11.4中(c)幅与(d)幅所示。在同样的远方加载条件和加载时间步下,峰峦界面使裂尖过程区的演化发生根本变化,见图11.5(c)与(d)。互相锁住的峰峦界面形貌干扰了位错的发射,见图11.5(c)。若继续加载则造成界面原子键合的崩溃,并形成一滑移摩擦分层带,见图11.5(d)。

11.6 加速时间步积分

当我们把注意力逐渐贴近裂尖时,不仅在空间上从宏观尺度细化为细观尺度再细化为纳观尺度,在特征时间上也出现了十几个量级的变化。时间与空间组成一个不可分割的整体,对空间作了从宏观到纳观的深入观察,对时间也应作相应的细致剖分。对这种多维时空的放大与缩小应该同时进行。对宏观尺度的波动行为来说,由于声波的传播速度是5 000m/s,当取时间的特征长度为1s时,空间的特征长度就应取为5 000m的量级。当观察到原子尺度(5×10^{-10} m)时,对空间作了 10^{13} 的放大,那么对时间也应作相应的放大,即在原子尺度作观察时,时间的特征间隔为 10^{-13} s。在所进行的细观/纳观计算中,采用的时间步长为 0.5×10^{-14} s,为特征时间间隔的1/20,计算的结果应足够细致。但在范围更广的宏微观计算中,由于时间步长太小,难以描述时间更久的变化。为使宏微观模拟的计算在时间上成为可能,必须采取加速模拟方法。

1. 加速时间步积分方案

对宏微观结合的模拟计算来说,在空间上可通过第11.1节所述的纳观/细观/宏观/三重嵌套模型得以实现。在时间上也应有时间步长由小到大的逐步调整。在加载的初始时刻,裂尖原子的运动变化剧烈,时间步长应取得较小;变化一定程度之后,原子运动变化幅度趋于缓慢,并呈现出一定的规律性(当然这种规律性会随时间有一些涨落),可以采用数值滤波的办法来滤去原子的高频振动,而留下其低频段所代表的位置演化历史。利用模拟出来的规律,可以加大计算的时间步长,模拟更长久时间范围内的原子运动

变化导致的裂尖破坏情况。

2. 阶段时间步积分方案

上述的加速时间步积分方案虽然可行,但正如断裂行为在不同的空间层次表现为不同的变化形式,在不同的时间层次也应显示出不同的表征形式。

(1)加载初期响应。在加载初期,断裂过程区变化以裂尖纳观区的原子运动占主导地位,这时可以假设细观区与宏观区处于静止状态,它们对纳观原子区的影响体现在静力平衡场在纳观/细观交叠层处产生的力学氛围。时间步长的选取应与纳观尺度下特征时间相对应,模拟原子在相互作用势函数下的运动。

(2)裂尖变形胚貌。初期加载将产生一定的裂尖变形胚貌:如对于韧性材料,裂尖发射了几个到十几个位错;对于脆性材料,裂尖发生了几个到十几个原子间的解理断裂。断裂过程区的后续变形由细观区的位错运动或断裂所主导,可采用一些磨平的数学方法来获得裂尖在下一个时间阶段的持续破坏规律。在这段时间内,最外层宏观区对细观区的影响表现为在宏观/细观交接处形成的力学氛围,最内层纳观区对细观区的影响表现为持续运动规律在较长时间步下的运行。时间步长的选取应与细观尺度下特征时间相对应,模拟对应于韧性断裂的位错在位错动力学曲线下的运动或对应于脆性断裂的裂尖原子间键合作的持续破坏。这时细观区的计算必须考虑由于引进了位错与原子间键合破断等纳观持续破坏形式后对有限元的影响。

(3)加速时间步计算。当位错运行到宏观区并在宏观/细观交接处产生了几到十几个伯格斯向量大小的塑性变形后,可进一步加大计算采用的时间步长。对前一阶段的位错发射与运行的规律与信息进行总结与概括。这一阶段的计算以宏观塑性变形为主。

(4)纳观追随区技术。对裂纹过程区的破坏性演化可借助于纳观追随区技术。利用第11.2节与第11.3节所介绍的连续介质—离散粒子交叠层,可不断地把裂纹顶端正在持续破坏一侧的连续介质转化为离散原子,把裂尖尾区的离散原子转化为连续介质。这样

纳观区总追随着即时裂尖,并在原子规律下不需任何破坏准则而给出裂尖的不断演化趋势。

11.7 裂尖原子的混沌运动:解理过程

11.7.1 原子混沌运动

将非线性力学方法(如分叉、突变、混沌和分形研究方法)引入宏微观研究是一个可望取得突破性成果的前缘研究方向。其主要依据为:①微观原子运动的力学规律更富有随机性,更能为动力系统的随机/确定性转换理论提供用武之地;②这些运动规律的转化可能标志着固体材料的重要力学性能(或其他物理性能)的突变;③用宏微观结合的手法可能取得具有应用价值的力学控制方式,即如何通过宏观力学氛围的变化来控制微观原子运动规律的分叉、突变乃至混沌过程。这一发展将在理论上孕育称之为“非线性宏微观力学”的新学科框架,使对固体材料力学行为的认识基础上升到一个新阶段。

本书的最后两节将用非线性宏微观力学的方法扼要地阐述裂纹尖端原子的混沌运动。本节侧重于解理过程,下一节侧重于位错发射过程。

Welland 等^[11]用 Leonard-Jones 原子串模型研究了一维断裂问题,分析的结果给出了断裂统计概率的信息。Paskin 等^[12]对二维晶格上裂纹扩展的动力响应进行了研究。但上述研究并未注重讨论断键原子的非线性行为。Nip 等^[13]构造了二维晶格点阵的运动方程,并研究了其混沌行为。数值分析表明其动力系统的可积分性取决于能量水平。当能量水平低时,动力系统可积,相空间出现正规轨道;当能量水平足够高时,正规轨道不再出现,动力系统的行为逐渐转向混沌。Mohan 等^[14]在一维原子串模型下研究了裂尖原子串所对应的动力系统的混沌行为。

本节旨在用宏微观结合的思想来研究解理过程中出现的裂尖原子的混沌运动。

11.7.2 原子势

为简单起见,我们用修正的 Leonard-Jones 势来描述裂尖处原子间的相互作用。当用于固体原子时,Cherepanov^[15]建议了下述6-9型原子对势

$$e(r) = -\frac{C_1}{r^6} + \frac{C_2}{r^9} \quad (11.33)$$

式中, e 为原子势; r 为两原子的间距; C_1 与 C_2 为待定常数。由式(11.33),可写出原子间作用力 f 为

$$f(r) = -\frac{de(r)}{dr} = -\frac{6C_1}{r^7} + \frac{9C_2}{r^{10}} \quad (11.34)$$

当 $f(r)$ 为正值时,两原子相互排斥;当 $f(r)$ 为负值时,两原子相互吸引。常数 C_1 与 C_2 可由原子间的平衡间距 a_0 和该间距下的平衡能量 e_0 来确定,即

$$f(a_0) = 0, \quad e(a_0) = -e_0 \quad (11.35)$$

将式(11.33)与式(11.34)代入式(11.35)后可得

$$C_1 = 3e_0a_0^6, \quad C_2 = 2e_0a_0^9 \quad (11.36)$$

e_0 亦可用宏观体积模量 B 来表示。记每个原子的近邻原子数为 n_0 , 则可导出

$$e_0 = \frac{Ba_0^3}{3n_0} \quad (11.37)$$

对立方点阵,有 $n_0 = 6$ 。在后续计算中我们取 $a_0 = 0.4\text{nm}$, $B = 100\text{GPa}$, 由此可算出 $e_0 = 2.22\text{eV}$ 。由该模型,还可算出表面能 γ 为

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e_0}{a_0^2} = \frac{Ba_0}{6n_0} \quad (11.38)$$

而原子间的最大吸引力为

$$(-f)_{\max} = 2.349 \frac{e_0}{a_0} \quad (11.39)$$

11.7.3 对称型裂尖双原子模型

作为最简单的宏微观断裂模型,考虑裂尖上下的连续介质中嵌合一对占据对称位置的原子,它们之间由原子间作用力相联系。含裂纹连续介质的构形为边界层型。为考察解理断裂过程,远方作用有对称型加载应力强度因子 K_I 。对双原子中任一原子来说,其移位 $u(t)$ 遵循牛顿第二定律

$$m\ddot{u} = pa_0^3 + f(a_0 + 2u) \quad (11.40)$$

式中,右端第一项表示连续介质的作用(p 为作用于该原子的应力);第二项表示相邻原子的作用。式(11.40)中的总位移 u 由两部分组成

$$u = u^K + u^A \quad (11.41)$$

式中, u^K 是由于应力强度因子 K_I 所造成的背景位移场,

$$u^K = \frac{2K_I}{E'} \sqrt{\frac{2a_0}{\pi}}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (11.42)$$

而 u^A 表示由于原子运动产生的位置起伏。连续介质作用于该原子上的应力 p 与 u^A 有关。对宏观场弛豫时间低于微观平衡弛豫时间的宏微观过程,可按准静态的平衡场来估算 p 与 u^A 的关系。由 Tan 和 Yang^[16] 的推导可得

$$u^A = -1.950 \frac{pa_0}{E'} \quad (11.43)$$

将式(11.42)与式(11.43)代入式(11.41),可导出由总移位来表达应力 p 的公式,再将该公式代入牛顿第二定律式(11.40)可得下述控制方程

$$m\ddot{u} = F - ku + f(a_0 + 2u) \quad (11.44)$$

式中, F 代表由于外载 K_I 造成的经连续介质传至原子上的力

$$F = 0.818a_0^{\frac{3}{2}} K_I \quad (11.45)$$

而 k 表示周围连续介质的约束

$$k = 0.513E' a_0 \quad (11.46)$$

式(11.44)的能量积分为

$$\frac{1}{2}mu^2 + U = C \quad (11.47)$$

式中, C 为常数; 势函数 U 的表达式为

$$U(u, K_1) = \frac{1}{2}e(a_0 + 2u) - F(K_1)u + \frac{1}{2}ku^2 \quad (11.48)$$

图11.6绘出了在不同的 K_1 值下 U 随 u 变化的曲线, 这些曲线揭示

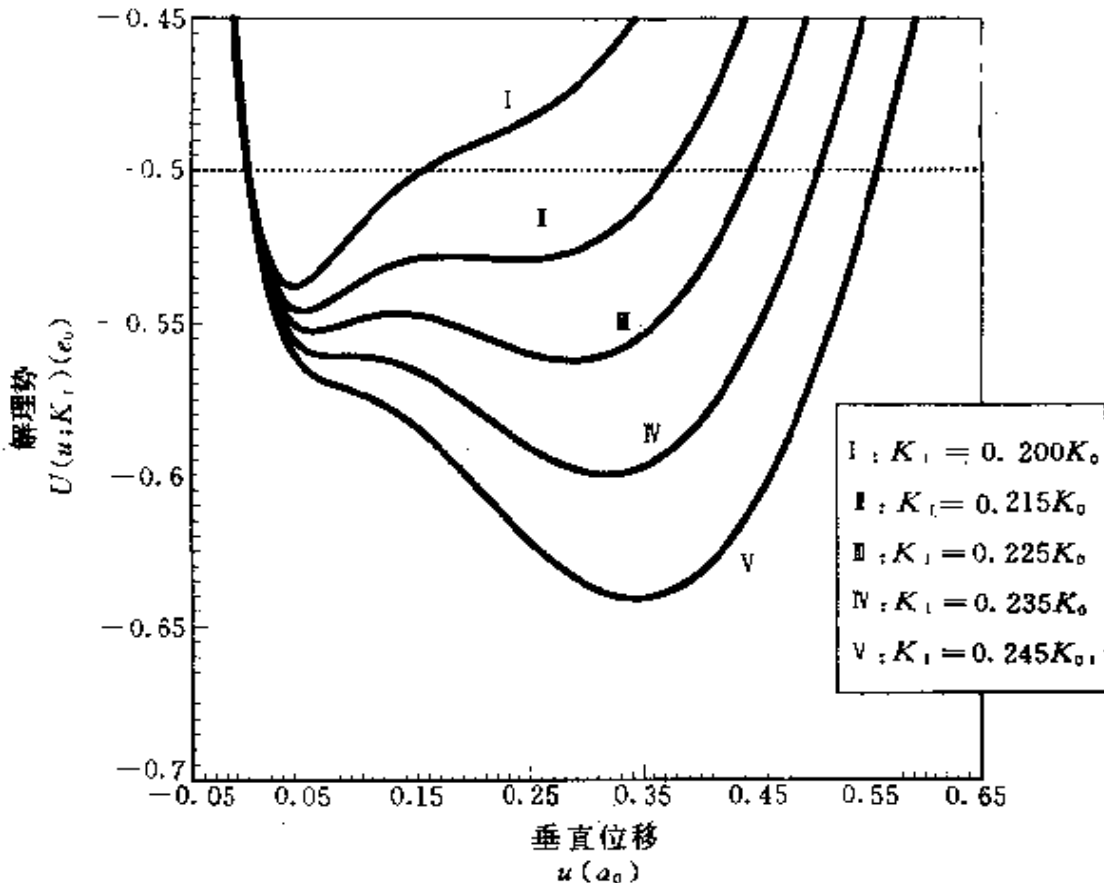


图 11.6 势函数 U 随 u 的变化曲线与原子位置的突变

了解理过程中突变现象的有趣图象。当 K_1 达到 $0.235E' \sqrt{a_0}$ 时, 原子位移 u 会从一个稳定位置突变跃迁至另一个稳定位置。若想像在移动裂尖放置一个足够敏感的声探头, 它将能记录下脉冲型的声信号。这些脉冲信号由裂纹原子稳定位置的突变移动产生。

下面定量讨论该突变模型下所预测的断裂韧性。由图11.6, 在原子位置突变转化下所对应的断裂韧性为

$$K_{\text{cata}} = 0.235K_0 \quad (11.49)$$

这里及以后,我们均取

$$K_0 = E' \sqrt{a_0} \quad (11.50)$$

为平面应变参照应力强度因子。对同样的材料,按准静态 Griffith 模型有(该模型不考虑原子的振动)

$$K_{Ic} = \sqrt{2E' \gamma} = 0.258K_0 \quad (11.51)$$

上式中后一等式的推导利用了式(11.38),及 $B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, $\kappa_0 = 6$, $\nu = 0.38$ 。对比式(11.49)与式(11.51),可知基于原子位置突变的 K_{Ic} 预测略小于基于 Griffith 准静态理论的 K_{Ic} 预测。

11.7.4 混沌运动的若干基本概念

为更进一步阐述裂尖原子的混沌运动,下面介绍混沌运动的若干基本概念,包括相空间、庞加莱图、李雅普诺夫指数和信息分维数。

1. 相空间

相空间是由广义位移和广义动量为坐标所形成的抽象数学空间。

2. 庞加莱图

观察奇怪吸引子分形特征的一个途径是构造运动的庞加莱截面图。庞加莱截面图指相空间内连续演变的动力轨道与该空间某一广义平面或曲面之贯穿点的集合。

3. 李雅普诺夫指数

混沌运动的一个重要特征在于对初始条件的微小扰动非常敏感。初始条件的微小扰动在后续的动力演化过程中可能以指数的形式发展,对 n 维空间这种指数变化趋势可由李雅普诺夫指数谱 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 来表示。任何动力系统若至少含有一个大于零的李雅普诺夫指数,该动力系统便发生混沌。为定量说明这一点,考虑定义在 n 维相空间上的一个连续动力系统,我们考察由初始条件的一个无限小偏差球造成的长时动力演化。在长时演化后,该偏差球发展为一个 n 维椭球,在第 i 维上的半轴长为 $P_i(t)$ 。

李雅普诺夫指数定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{P_i(t)}{P_i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.52)$$

式中 λ_i 按代数值从大到小排列, 即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。于是李雅普诺夫指数与相空间中不同方向的拉长或缩短性质有关。李雅普诺夫指数定量描述了吸引子动力学, 这些指数在信息论中给出了系统动力过程中创造或销毁信息的速率。Wolf 等^[17]提供了搜索某一动力系统全部李雅普诺夫指数的算法, 该算法使用相空间与切空间。

4. 信息分维数

李雅普诺夫指数谱与其所对应的奇异吸引子的分维数有关。Kaplan 与 Yorke^[18]推测, 信息分维数 d_i 与李雅普诺夫指数谱之间由下述方程相联系

$$d_i = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}} \quad (11.53)$$

式中整数 j 由以下条件所确定

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i < 0 \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i > 0 \quad (11.54)$$

11.7.5 对称型裂尖四原子模型

考察图 11.7 所示裂尖四原子模型。边界层构形连续介质上承受对称型外载 K_1 。由于对称性, 可仅考虑上半平面的两个原子“1”和“2”。记 $x_1 = u_1, x_2 = mu_1, x_3 = u_2, x_4 = mu_2$ 为该系统的相空间坐标。仿照与第 11.7.3 小节类似的推导, 可得下述四元一阶动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = -f(a_0 + x_3 - x_1) + f(a_0 + 2x_1) \\ \dot{x}_3 = \frac{x_4}{m} \\ \dot{x}_4 = F - kx_3 + f(a_0 + x_3 - x_1) \end{cases} \quad (11.55)$$

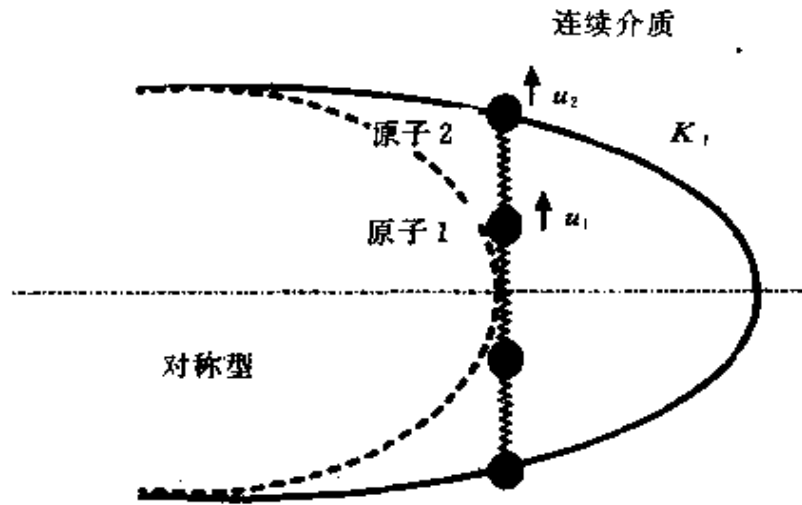


图11.7 对称型裂尖四原子模型

式中, F 与 k 的定义同式(11.45)与式(11.46)。该系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2m}x_2^2 + \frac{1}{2m}x_1^2 + \frac{1}{2}e(a_0 + 2x_1) + e(a_0 + x_3 - x_1) \\
 & - Fx_3 + \frac{1}{2}kx_3^2
 \end{aligned}
 \tag{11.56}$$

由式(11.55)与式(11.56)易于证明该动力系统存在能量积分 $H = \text{常数}$, 因此只有 3 个自由度。3 个自由度的系统是可能产生混沌行为的最简系统。

现在讨论不同外载 K_1 下相空间中可能发生的混沌运动。记

$$\alpha = K_1/K_0 \tag{11.57}$$

为无量纲外载强度。观察与连续介质裂纹面交界的原子(原子2)的运动, 其垂直位移与动量分别记为 u_2 与 P_2 。在这里及今后所有的动力系计算中, 均取初始速度为零, 初始位置为不加外载 (K_1 或下一节的 K_2) 时的原子平衡位置。

图11.8显示了不同 α 值下相空间的动力轨迹, 其运动特征从小 α 值下的近似线性简谐振动到中等 α 值下的无规(混沌)运动, 直到 α 值趋于静态 K_{IC} 对应值时的原子对分离。

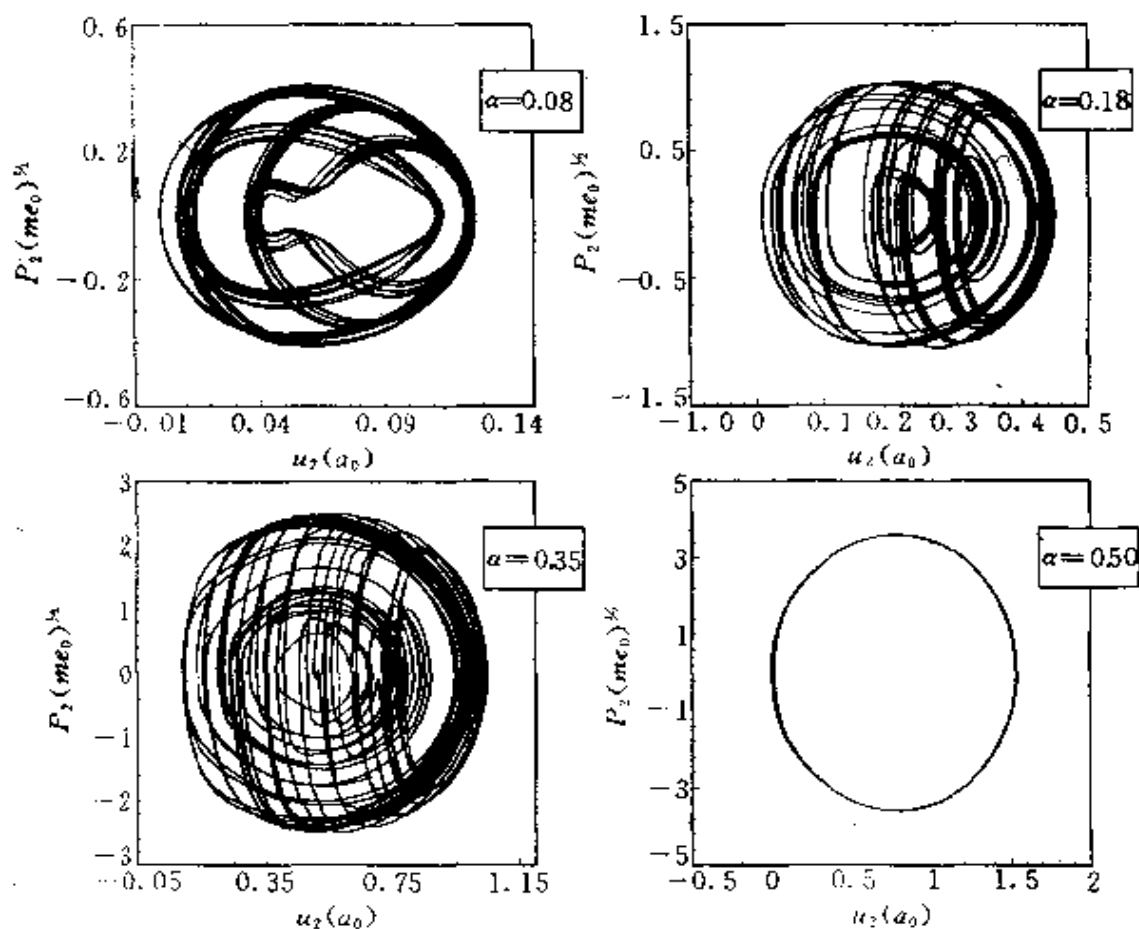


图 11.8 解理断裂下裂尖原子的相空间运动轨迹

当外加宏观氛围 K_1 较低时, 每个原子的运动是线性的, 且各个原子的运动并不耦合。当 K_1 提高时, 非线性效应变得重要, 原子间的运动也出现耦合, 这时原子键合趋于破断。当 K_1 更高时, 原子键合破坏, 上下原子的运动不再耦合, 系统回复到线性振动状态。这时上下原子均悬挂在裂尖后方的连续介质上, 裂尖移至下一个原子对。

为探讨奇怪吸引子的演化, 我们在不同外载强度 α 下绘出该系统的庞加莱截面图。庞加莱截面图由下列方法绘制: 对原子 1 的运动进行频闪观察以确定其动量为零的一个时刻, 再点出该时刻原子 2 在相空间的位置。由这一方法确定的原子 2 许许多多点的集合即为庞加莱截面图。图 11.9 绘制了不同 α 值下的庞加莱截面图。

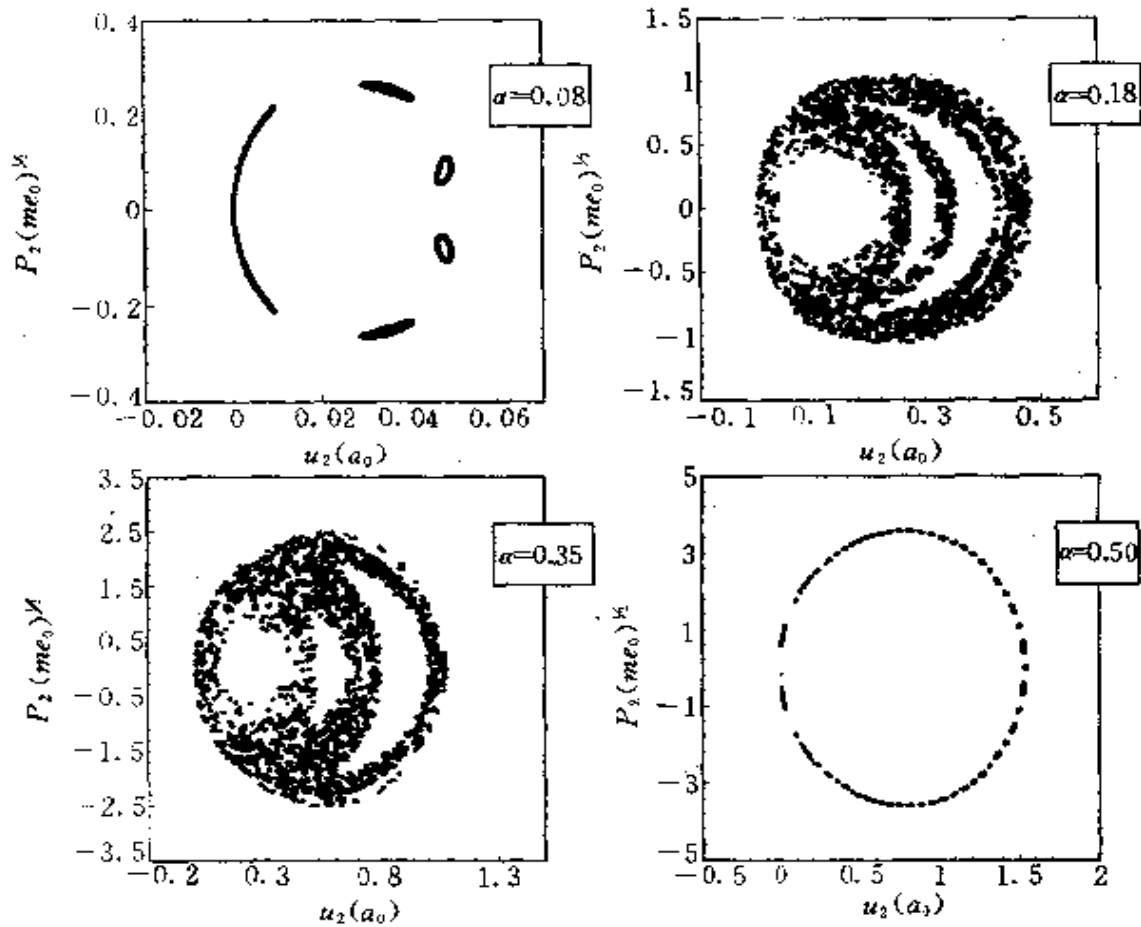


图11.9 解理断裂下裂尖原子的庞加莱截面图

从这些图中可以看到从有规到混沌再回到有规的过程,以及奇怪吸引子的演化。当庞加莱截面图回到有规时,裂尖已经往前扩展了一步。

图11.10显示了解理断裂下裂尖原子的李雅普诺夫指数 λ_1 随外加应力场比值 α 的变化。随着 α 的增加, λ_1 最初大致为零,在 $\alpha = 0.1$ 附近陡起上升,表示系数发生混沌;随后经一个起伏后逐渐降至零,表明由于原子键断开而发生的从混沌到有序的变化。

混沌是描述非线性运动系统的无规性和复杂性的一个术语。它除在数学上的意义外,在描述解理过程时还有下述含意:

- ①裂尖原子对的混沌运动是断裂的先兆。
- ②若裂尖原子对断开之前不经过混沌运动阶段,则解理过程

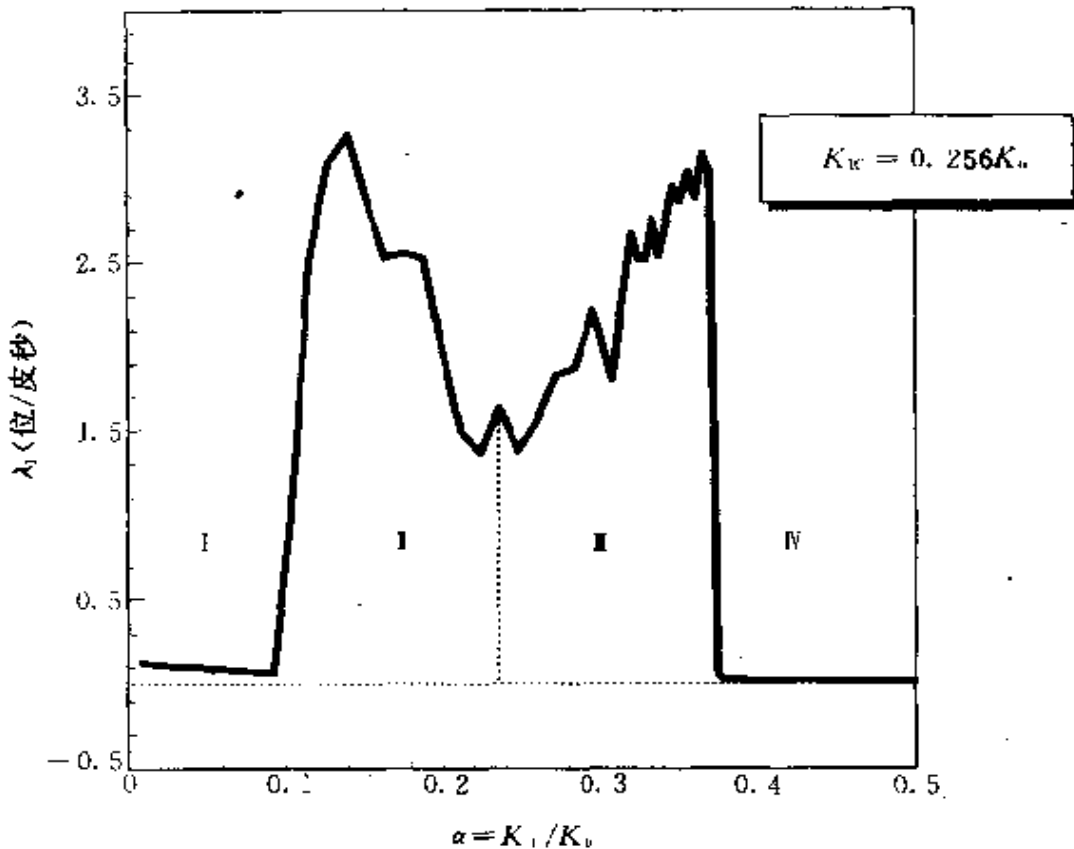


图11.10 解理断裂下裂尖原子的李雅普诺夫指数 λ_1 随外加应力场的变化。

具有突发性质。若裂尖原子对先经历混沌运动后再断开,则由于混沌区域的空间传播,解理过程将具有徐变性质。

③若以混沌的发生来定义解理断裂的开始,则其所对应的材料解理韧性明显小于按 Griffith 理论所计算的 K_{Ic} 值。按这一模型还可以进一步估算加载速率与裂尖温度对解理韧性的影响。

11.8 裂尖原子的混沌运动:位错发射过程

本节讨论在剪切型远场应力强度因子 K_I 作用下可能出现的沿裂纹延伸方向的位错发射。假定第11.7.2小节所定义的原子间作用势仍然成立。但当沿滑移面的原子错动很大时,采取周期性的

原子势。以下各小节将分别介绍研究这一问题的单列原子对模型，双列原子对模型和位错带模型，其细节参见 Tan 与 Yang^[10]。

11.8.1 反对称型裂尖单列原子对模型

图11.11显示了研究 K_I 加载下位错发射的反对称型裂尖单列原子对模型。裂纹由抽出一层原子形成。由问题的反对称性，裂纹延长处的镶嵌原子(序号为1', 2', ...)水平位移为零。在裂纹上方仅镶嵌了一个原子，序号记为1。该原子可发生横向振动，并称这种只有一列原子有运动自由度的模型为单列原子对模型。它是用来研究裂尖位错发射的最简单的动力系统模型。

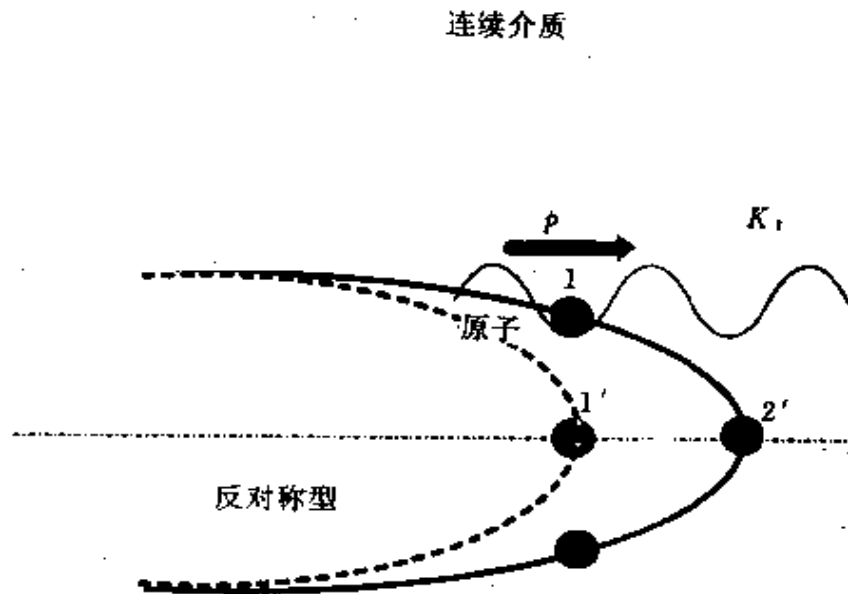


图11.11 裂尖位错发射的反对称型单列原子对模型

由于问题的反对称性，可对裂纹面上方原子1写出牛顿第二定律如下：

$$m\ddot{u}_1 = p_1 a_0^2 - \sum_{j=1}^i f(|r_{ij}|) \frac{r_{ij} \cdot e_1}{|r_{ij}|} \quad (11.58)$$

式中， e_1 为沿 x_1 方向的单位向量； u_1 为原子1的水平位移； $r_{ij} = r_j - r_i$ 为原子 i (上方) 与原子 j (裂纹延长线) 的距离向量； p_1 为外围连续介质作用于原子1的水平剪应力。仿照第11.7.3小节的推

导并设连续介质的裂尖于 $2'$ 处, 可将式(11.58) 改写为

$$m\ddot{u}_1 = F - ku_1 - \sum_{j=1}^{2'} f(|r_{1j}|) \times \frac{r_{1j} \cdot e_1}{|r_{1j}|} \quad (11.59)$$

式中, F 代表在外载 K_1 下经连续介质传至原子上的力, 其表达式同式(11.45), 仅需把 K_1 换为 K_1 ; k 表示周围连续介质的约束, 其表达式见式(11.46)。

在位错发射的单列原子对模型中, 需假设裂尖位错一旦形成便可即刻发射出去。该假设所对应的弹性连续介质约束应是原子平衡间距 a_0 的周期函数。为简单起见, 这里取正弦函数, 用 $\frac{ka_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u_1}{a_0}\right)$ 来代替式(11.59) 中的 ku_1 项。易于验证, 该表达式周期为 a_0 , 且当 u_1 很小时退化为 ku_1 。于是式(11.59) 修改为

$$m\ddot{u}_1 = F - \frac{ka_0}{2\pi} \sin \frac{2\pi u_1}{a_0} - \sum_{j=1}^{2'} f(|r_{1j}|) \frac{r_{1j} \cdot e_1}{|r_{1j}|} \quad (11.60)$$

该动力系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m} \dot{u}_1^2 + \sum_{j=1}^{2'} e(|r_{1j}|) - Fu_1 + \frac{ka_0^2}{2\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi u_1}{a_0}\right) \quad (11.61)$$

从方程式(11.60) 易于证明: 式(11.61) 所定义的哈密顿量代表系统的能量积分, 即 $\frac{dH}{dt} = 0$ 。

式(11.60) 中的第三项代表裂纹延长线上的原子 $1'$ 、 $2'$ 对上方原子1 横向运动的点阵阻力。当 u_1 较小时, 该阻力应简化为 $\mu_{\text{slip}} \frac{u_1}{a_0}$, μ_{slip} 为点阵滑移模量。当 u_1 较大时, 式(11.60) 中的第三项应具有周期性质, 体现点阵排列的周期性。采用 Frenkel 正弦函数表示, 可将式(11.60) 的第三项表示为

$$\sum_{j=1}^{2'} f(|r_{1j}|) \frac{r_{1j} \cdot e_1}{|r_{1j}|} \stackrel{\text{def}}{=} a_0^2 \tau(u_1) \approx \frac{a_0^2 \mu_{\text{slip}}}{2\pi} \sin \frac{2\pi u_1}{a_0} \quad (11.62)$$

点阵剪应力 $\tau(u_1)$ 的积分为点阵滑移势 $V(u_1)$ 。不难写出

$$V(u_1) = (V_0 + \frac{\mu_{\text{slip}} a_0}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi u_1}{a_0}) \approx \frac{1}{a_0^2} \sum_{j=1}^z e(|r_{1j}|), \tau(u_1) = \frac{\partial V}{\partial u_1} \quad (11.63)$$

易于验证：当 u_1 为零时， $V(u_1)$ 为一确定平衡值 V_0 。在本分析所用的原子势模型（见第 11.7.2 小节）给出 $V_{\text{max}} - V_0 = 0.154e_0/a_0^2$ 。将这一数据代入式 (11.63) 可得

$$\mu_{\text{slip}} \approx 3.04 \frac{e_0}{a_0^3} \quad (11.64)$$

在上述简化下，动力方程式 (11.60) 可写为下述形式

$$m\ddot{u}_1 = - \frac{d}{du_1} [U(u_1; K_1)] \quad (11.65)$$

其中势函数 $U(u_1; K_1)$ 为

$$U(u_1; K_1) = \frac{a_0^2}{2\pi^2} (\mu_{\text{slip}} a_0 + k) \sin^2 \frac{\pi u_1}{a_0} - F(K_1) u_1 \quad (11.66)$$

图 11.12 绘出了在不同的 K_1 值下 U 随 u_1 变化的曲线。当 K_1 小于

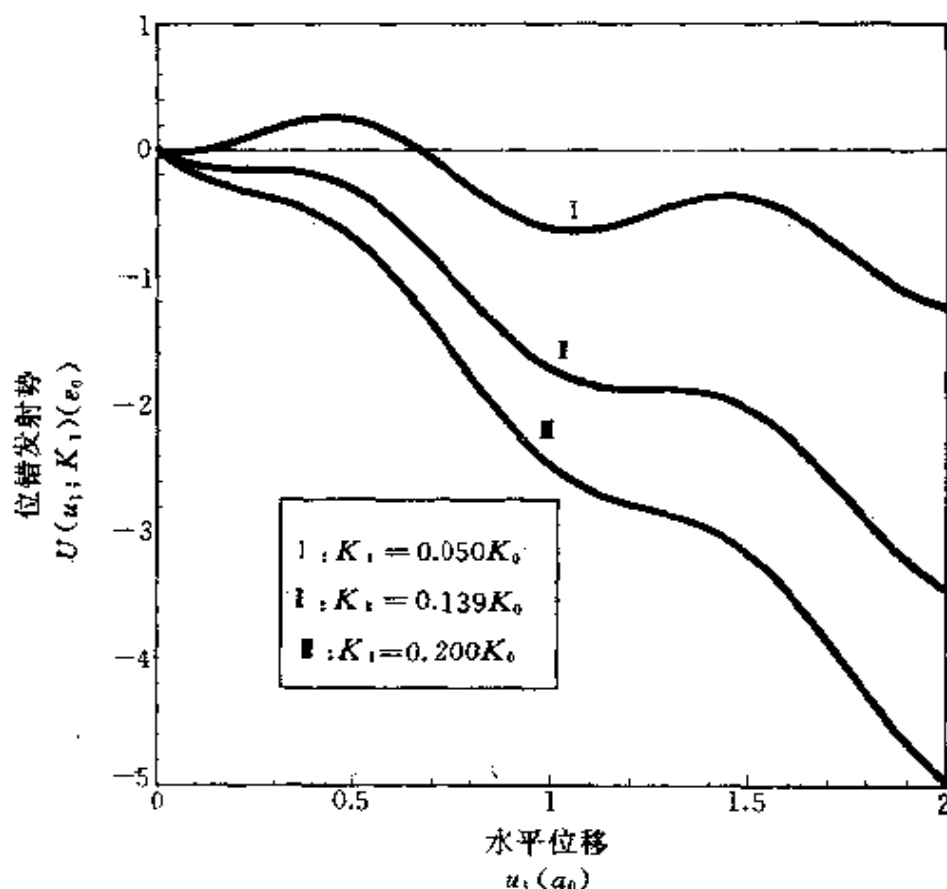


图 11.12 势函数 U 随 u_1 的变化曲线与位错的突变发射

某一临界值 K_{emit} 时, 裂纹尖端的原子将在其平衡位置附近振动, 如图中曲线 I。当 $K_1 \geq K_{emit}$ 时, 如图中曲线 II 与 III, 原子平衡位置发生突变, 对应于位错在裂尖的形核。图 11.12 中曲线 I 恰对应于 $K = K_{emit}$ 的临界情况。由图 11.12 所示 U 随 u_1 的变化曲线可见: 在本模型下, 位错一旦形核, 便导致接连不断的位错发射。由图 11.12 可定出

$$K_{emit} = 0.139K_0 \quad (11.67)$$

K_0 由式(11.50) 给出。

11.8.2 反对称型裂尖双列原子对模型

考虑图 11.13 所示的反对称型裂尖双列原子对模型, 该模型比图 11.11 的单列原子对模型增加了一对可以横向振动的原子, 以描述在裂尖可能发生的混沌运动。

连续介质

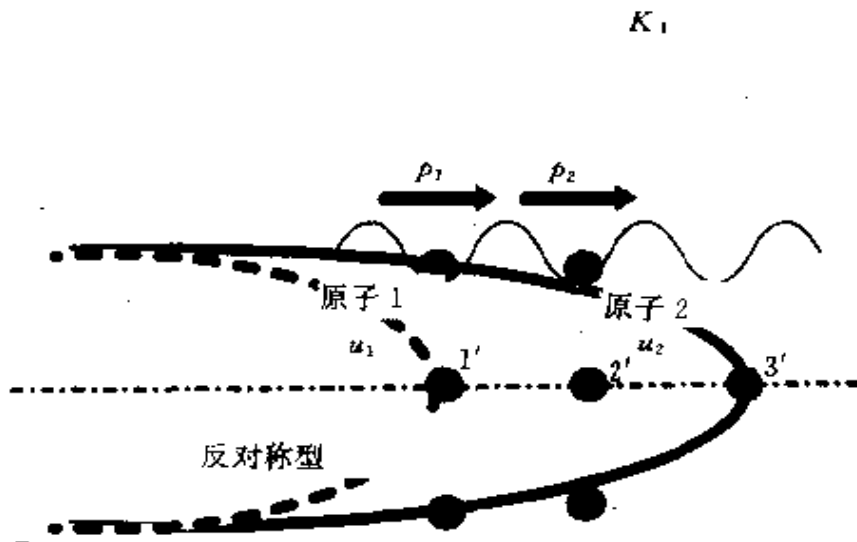


图 11.13 裂尖位错发射的反对称型双列原子对模型

由于问题的反对称性, 可写出上方原子(图中序号为 1, 2)运动的牛顿第二定律方程为

$$M\ddot{u}_a = a_0^2 p_a - \sum_{j=1'}^3 f(|r_{aj}|) \frac{r_{aj} \cdot e_1}{|r_{aj}|} + (-1)^a f(r_{12})$$

$$\alpha = 1, 2 \quad (11.68)$$

由图11.13可见,原子1、2上面作用的应力 p_1, p_2 除连续介质的约束力外,还有远场 K_1 的传递效应,即

$$p_\alpha = F_\alpha - \frac{k_\alpha a_0}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{u_\alpha}{a_0}\right) \quad \alpha = 1, 2 \quad (11.69)$$

同前一小节,上式考虑了连续介质约束力的周期性作用。式中的远场传递效应项 F_α 与介质约束系数 k_α 的表达式为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.941 \\ 0.818 \end{Bmatrix} a_0^{3/2} K_1 \quad (11.70)$$

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.417 \\ 0.513 \end{Bmatrix} E' a_0 \quad (11.71)$$

将式(11.69)代入式(11.68),可得四元一阶动力系统。该系统的哈密顿量为

$$H = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{m}{2} \dot{u}_\alpha^2 - F_\alpha u_\alpha + \frac{k_\alpha a_0^2}{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi u_\alpha}{a_0}\right) + \sum_{j=1}^{3'} e(|r_{\alpha j}|) \right] \quad (11.72)$$

该哈密顿量在时间演化过程保持为常数。

若记 $u_1 = x_1, \dot{u}_1 = x_2/m, u_2 = x_3, \dot{u}_2 = x_4/m$, 则双列原子对模型下的动力系统可写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} & \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{x}_3 &= \frac{\partial H}{\partial x_4} & \dot{x}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (11.73)$$

该动力系统具有混沌行为,在相空间、庞加莱截面上的图象见图11.14与图11.15。图中 P_1 为原子1的动量,无量纲加载参数 α 定义为 K_1/K_0 。

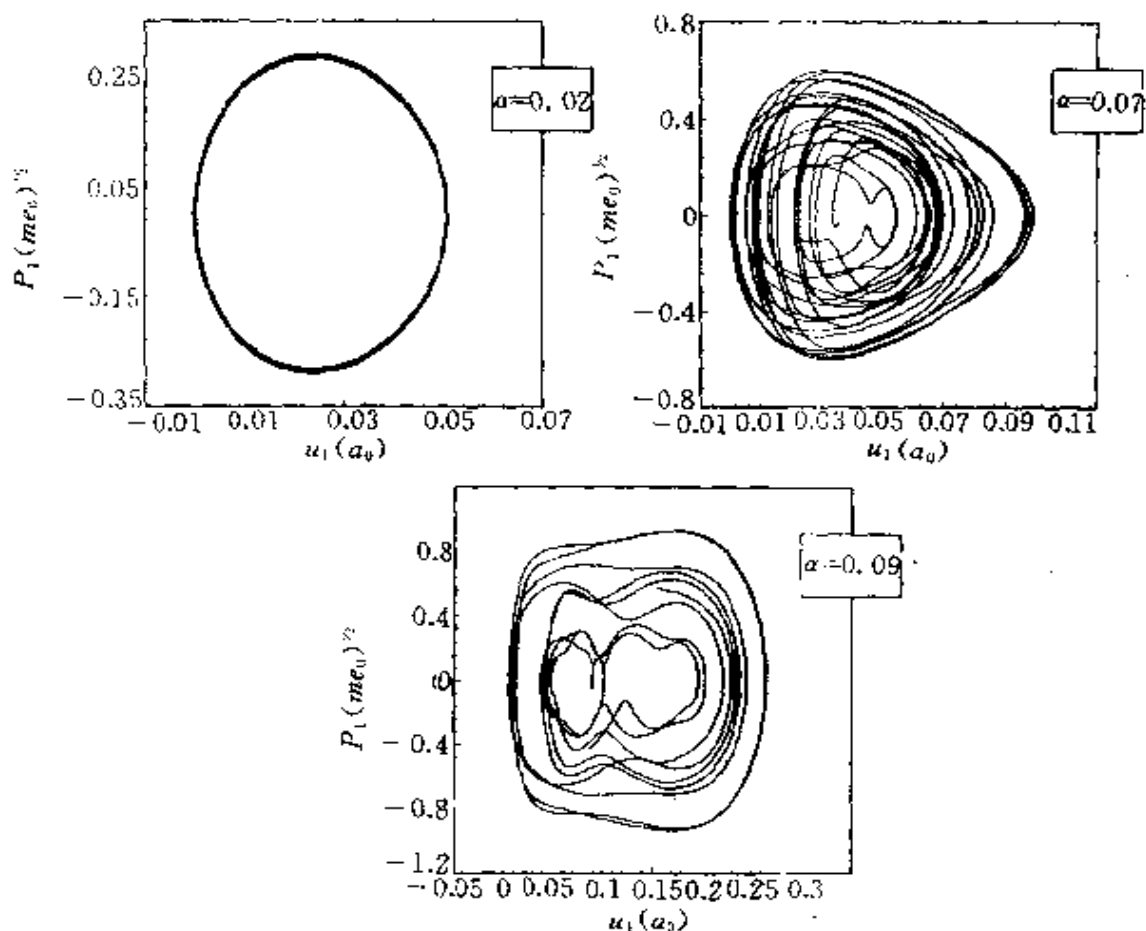


图11.14 位错发射过程中裂尖原子的相空间运动轨迹($\alpha = K_1/K_0$)

11.8.3 反对称型裂尖位错带模型

作为前两小节位错发射模型的推广,考虑图11.16所示反对称型裂尖位错带模型。带内有 N 列可进行横向反对称运动的原子。在具体计算中取 $N = 30$ 。

将前两小节的分析加以推广,不难写出系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{i=1}^N \left[\frac{m}{2} \dot{u}_i^2 + V(u_i) - F_i u_i + \frac{k_i a_0^2}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi u_i}{a_0} \right] \\
 & + \sum_{i=2}^N e(u_i - u_{i-1}) \quad (11.74)
 \end{aligned}$$

式中,求和对上半平面的所有原子进行; $V(u_i)$ 的表达式与式(11.63)类似。上式中的连续介质约束因子 k_i 与远场传递力 F_i 的表

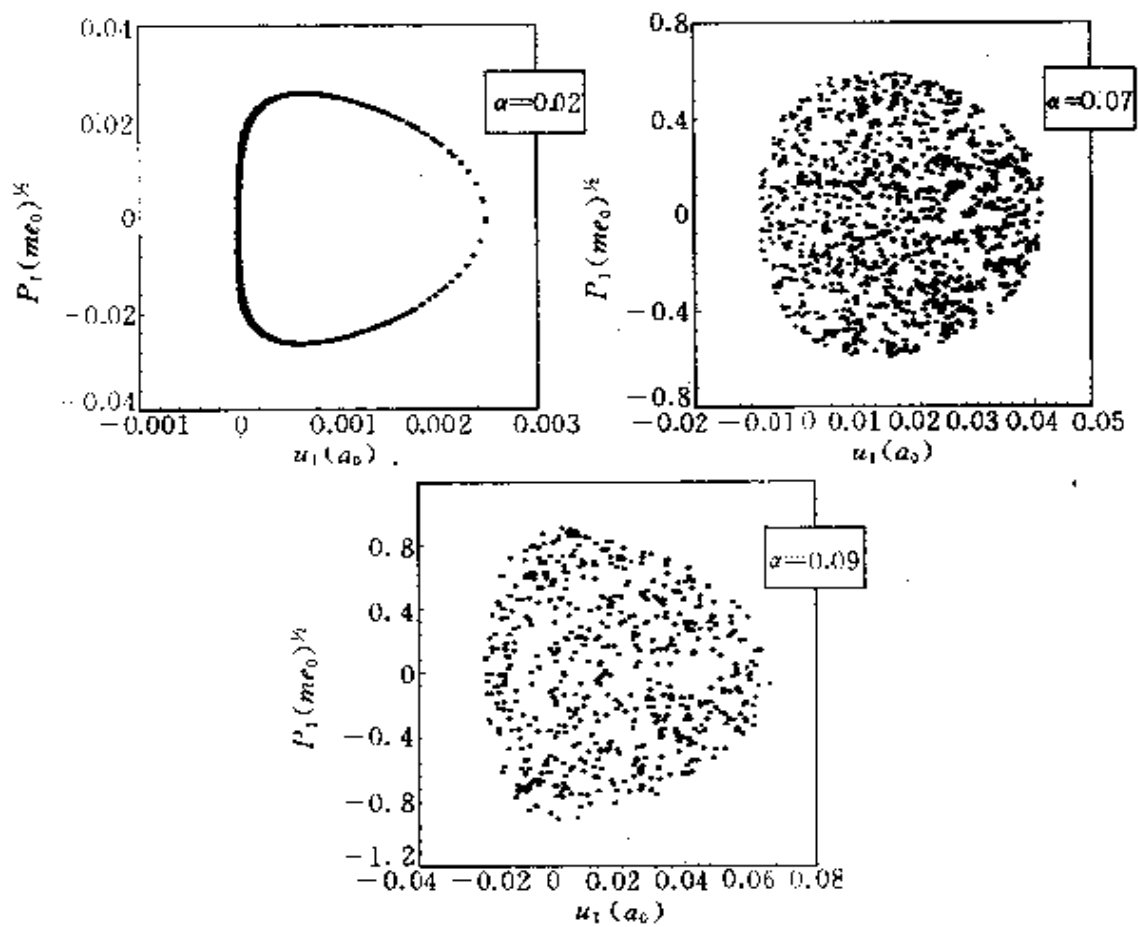


图11.15 位错发射过程中裂尖原子的庞加莱截面图($\alpha=K_1/K_0$)

达式为

$$\left. \begin{aligned} k_i &= \frac{\pi}{4\beta(N+1-i)} E' a_0 \\ F_i &= \frac{\sqrt{2(N+1-i)}}{2\beta(N+1-i)} \sqrt{\pi a_0 a_c} K_1 \\ & \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (11.75)$$

式中

$$\begin{aligned} \beta(m) &= \sqrt{\frac{m}{2}} (\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}) \\ & \quad + \frac{1}{4} [\ln(2\sqrt{4m^2+2m+4m+1}) \\ & \quad + \ln(2\sqrt{4m^2-2m+4m-1})] \end{aligned} \quad (11.76)$$

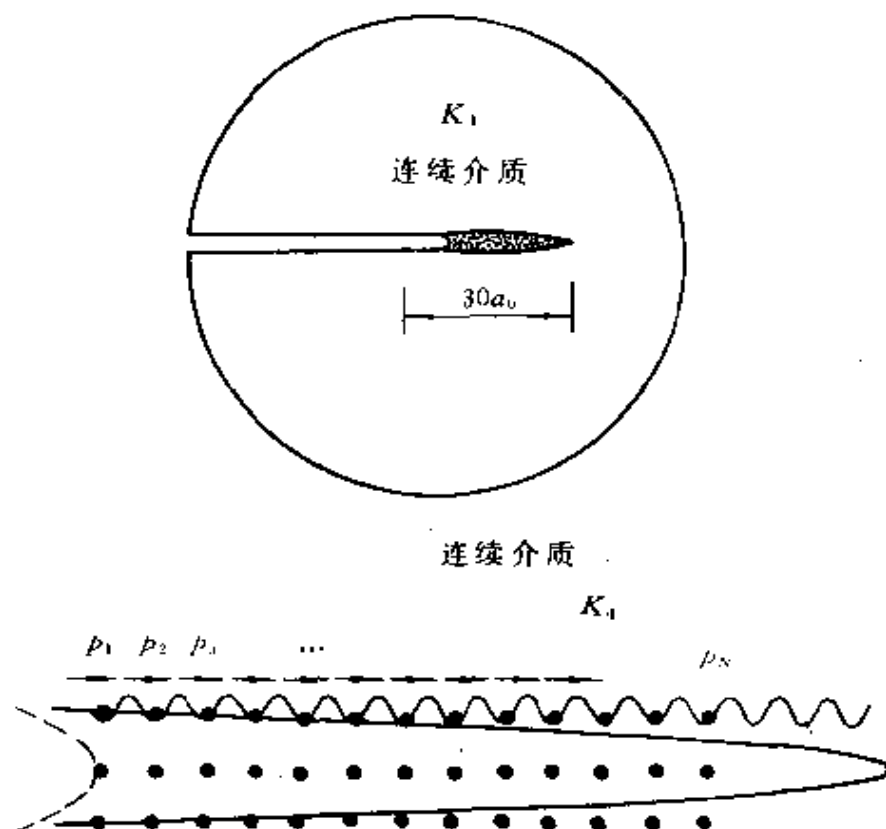


图11.16 反对称型裂尖位错带模型

在位错带的顶端(即原子 N 处),假定该处的原子嵌在未变形的晶格之中(由于变形的反对称性,在位错带延长线上横向变形为零,正应力 σ_{xx} 与 σ_{yy} 亦为零)。于是

$$u_N = 0, \quad f(r_{N-1,N}) = 0 \quad (11.77)$$

令 $x_{2i-1} = u_i, x_{2i} = mu_i, i = 1, \dots, N$, 可得位错带模型的动力系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{2i-1} &= \frac{\partial H}{\partial x_{2i}} \\ \dot{x}_{2i} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{2i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

Rice^[20]曾利用 Peirerls 位错概念,从能量平衡的角度上来分析位错形核,见第7.6.2小节。若采用这里的 Frenkel 正弦点阵势,其对应的失稳堆垛能为

$$\gamma_{\text{unst}} = \frac{\mu_{\text{slip}} b_0}{2\pi^2} \quad (11.79)$$

在临界位错发射情况下,应力强度因子 K_{emit} 与失稳堆垛能 γ_{un} 之间的关系为

$$\gamma_{un} = \frac{K_{emit}^2}{2E'} \quad (11.80)$$

综合式(11.80)、式(11.79)和式(11.64)可得

$$K_{emit} = 0.143K_0 \quad (11.81)$$

式(11.67)与式(11.81)之间的微小差别由后者将滑移面上下物质考虑为连续介质所造成。

下面讨论方程组(11.78)的动力行为。一个重要的现象是在 K_I 的某一加载区间下,裂尖形核的位错并不马上逸走,而是滞留在裂尖前方来回漂移。我们将这一现象称之为位错云现象。

图11.17(a)显示了自裂尖发射的一根位错的位错芯位置的概率分布函数 $\text{Prob}(x_1)$ 。图11.7(b)显示了自裂尖发射的两根位错各自位错芯位置的概率分布函数。从这两幅图中易于观察到:

①位错芯位置无定。在宏观可观测的时间尺度内,所测得的位错变形场实际上是位错芯在不同位置上造成的位错变形场的某种长时平均。因此,实测位错场的芯部范围(即无法用弹性位错场所描述的区域)应在所处滑移系上拖成带状。

②两个不同位错的位错芯可发生形式上的交叠。这种交叠不是位错芯本身的交叠,而是它们漂移范围的交叠。

对位错发射过程,原子的混沌运动有下述含意:

①裂尖原子的横向混沌运动是位错发射的前兆。产生混沌运动的 K_I 值(见图11.14与图11.15)低于静态分析所得的 K_{un} 值。

②裂尖原子的横向混沌运动导致位错芯位置的漂移不定。它造成位错变形场的测不准原理和相邻位错芯之间的动态碰撞。位错芯的位置只能由概率分布曲线来定义,由此产生位错云的概念。

③取决于裂尖原子运动是否发生混沌,位错发射至少有云状发射(有混沌)和孤立子状发射两种方式。

④材料的韧脆转变在很大程度上取决于不同混沌模式的竞争。

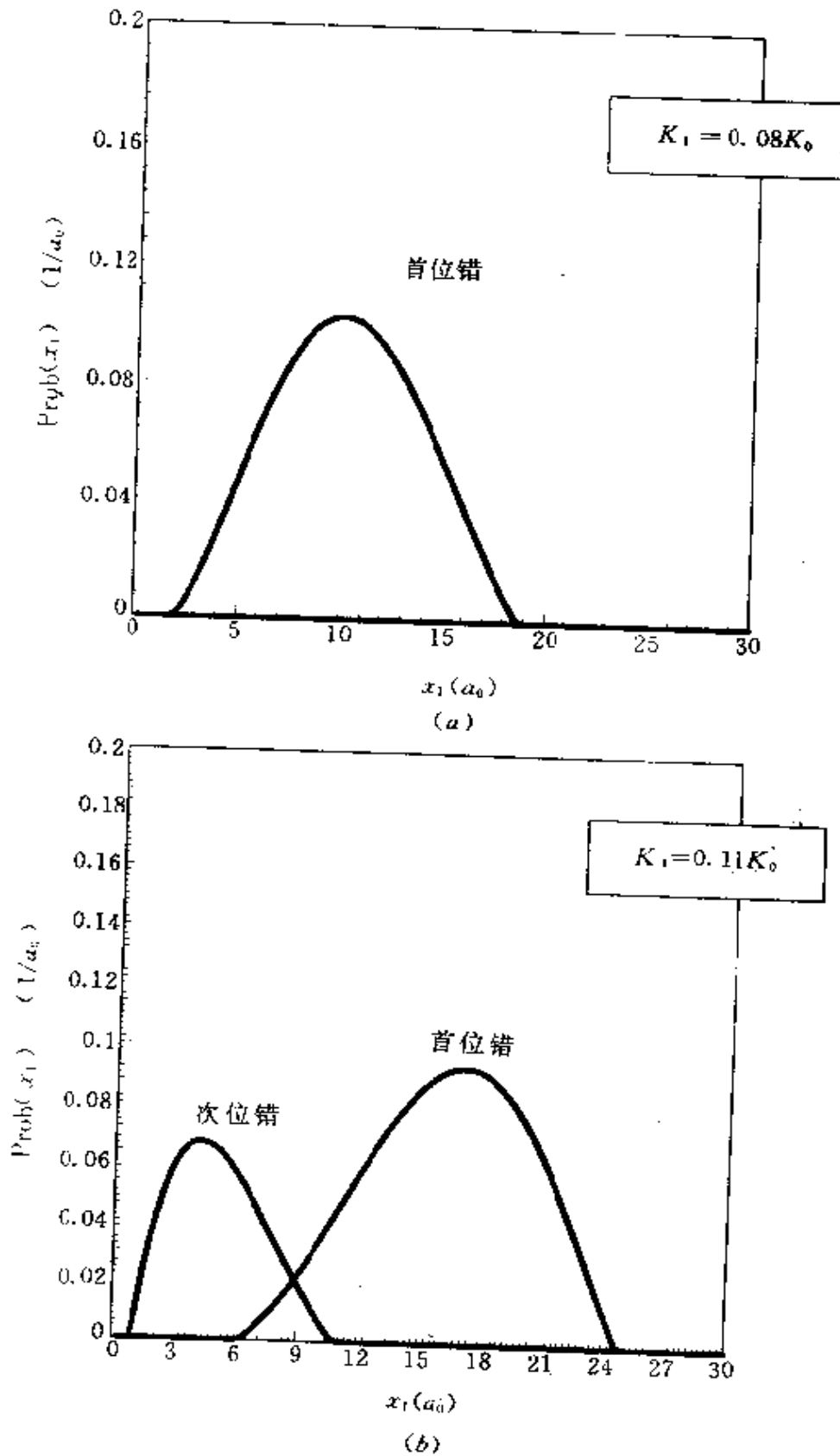


图11.17 位错芯位置的概率分布
(a)一根位错。(b)两根位错。

参 考 文 献

- 1 Yang W, Tan H L, Guo F F. Evolution of crack tip process zones. *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering*, 1994, 2(3a): 767~782
- 2 Yang W, Tan H L. A combined macro/meso/nanomechanics simulation of interface fracture. *Proc. of IMMM'93, Mie University (Japan)*. Mie: Mie Academic Press, 1993. 11~18
- 3 Tan H L, Yang W. Atomistic/continuum simulation of interfacial fracture, Part I: Combined atomistic/dislocation/continuum simulation. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(3): 237~249
- 4 Kannien M F, Gehlen P C. *Int. J. Fract. Mech.*, 1971, 7, 471
- 5 Sinclair J E, Gehlen P C, Hoagland R G et al. Flexible boundary conditions and nonlinear geometric effects in atomic dislocation modeling. *J. Appl. Phys.*, 1978, 49(7): 3890~3897
- 6 Zhou S. J, Carlsson A E. Dislocation nucleation and crack stability; Lattice Green's-function treatment of cracks in a model hexagonal lattice. *Phys. Rev. B*, 1993, 47, 7710~7719
- 7 deCelis B, Argon A S, Yip S. Molecular dynamics simulation of crack tip processes in alpha-iron and copper. *J. Appl. Phys.*, 1983, 54, 4864~4878
- 8 Mullins M, Dokainish M A. Simulation of the (001) plane crack in α -iron employing a new boundary scheme. *Phil. Mag.*, Ser. A, 1982, 46: 771~787
- 9 Zienkiewicz O C. *The Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill, 1977
- 10 Parameswaran V R, Urabe N, Weertman J. Dislocation mobility in aluminum. *J. Appl. Phys.*, 1972, 43: 2982~2986
- 11 Welland R W, Shin M, Allen D. Fracture in one dimension. *Phys. Rev. B*, 1992, 46, 503
- 12 Paskin A, Sieradzki K, Som D K et al. Dislocation enhancement and inhibition induced by films on crack surfaces. *Acta Metall*, 1983, 31: 1253~1265
- 13 Nip M L A, Tuszynski J A, Gortel Z W. Chaotic phenomena in a two dimensional lattice. In: Rozmus W, Tuszynski J A eds. *Nonlinear and Chaotic Phenomena in Plasmas, Solids and Fluids, CAP-NSERC Summer Institute in Theoretical Physics, Canada*. Singapore: World Scientific, 1991
- 14 Mohan R, Markworth A J, Kollins K W. Effects of dissipation and driving on chaotic dynamics in an atomistic crack tip model. *Modelling & Simulation of Mat. Structs.*

- Eng. ,1994,2(3a);659~676
- 15 切列帕诺夫 П И. 脆性断裂力学. 黄克智等译. 北京:科学出版社,1990
 - 16 Tan H L, Yang W. Nonlinear motion of atoms at a crack tip during cleavage fracture process. To appear in *Int. J. Fracture*, 1995
 - 17 Wolf A, Swift J, Swinney H L, Vastano J A. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, 1985, 16; 285~317
 - 18 Kaplan J, Yorke J. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In: Peigen H O, Walther H O eds. *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, Lecture notes on mathematics, V. 730. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 228
 - 19 Tan H L, Yang W. Nonlinear motion of atoms at crack tip during dislocation emission process. To appear in *J. Appl. Phys.* , 1995
 - 20 Rice J R. Dislocation nucleation from a crack tip; an analysis based on the Pejerls concept. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40; 239~271

致 谢

宏微观断裂力学是一个在国内外刚刚兴起的研究领域。著者衷心地佩服国防科技图书出版基金的魄力,资助出版了这个尚未定型的新领域中一本尝试性的学术专著。作者在本书的构思和写作过程中,得到了国防工业出版社编辑的热情帮助和大力支持,特此表示诚挚的谢意。

在形成写作本书的主要学术观点时,著者得到了国家自然科学基金委员会和国家教委多年来关于这一研究方向的资助与支持。没有这一强有力的、面向基础科研的支持,本书所报道的许多研究工作是不可能开展的。

感谢中科院院士、清华大学教授黄克智先生长期以来对作者从事这一新兴研究方向的鼓励,感谢我的学生们多年来在这一领域的勤奋耕耘。尤其值得称赞的是谭鸿来同志,没有他两年来堪称废寝忘食的研究热忱,本书的下篇将是无法完成的。

杨 卫

1994年国庆前夕于清华园

主题索引

(按汉语拼音字母顺序排列)

- A**
- ASME 方法 108
- B**
- 饱和损伤区 265
- BHL 解 283
- 表面强韧 285
- 边界层计算构形 302
- BCS 模型 67
- 本征断裂韧性 246
- 薄板断裂 25, 36
- C**
- 材料优化设计 261
- 材料增韧 260~287
- 穿层断裂 208
- 穿层/层间组合断裂 211
- COD 理论 14, 65, 69, 79, 110
- D**
- 等效裂纹长度 62
- 动力耦合列式 327~329
- 动态裂尖场 49, 52, 168
- 断裂过程区 14, 67, 135, 220~
- 257
- 断裂混合度 163, 185, 188, 189, 308, 316, 336
- 断裂类型 26
- 断裂韧性 39, 188, 342
- 断裂阻力曲线 19, 86
- Dugdale-Barenblatt 模型 14, 67, 220
- 对势模型 292, 340
- Dundurs 参数 154, 161
- 钝化修正 118~120
- 多层介质力学 151, 188
- 多重断裂损伤 206
- E**
- EPRI 方法 15, 113, 115
- F**
- 分层力学
- 跨音速 173, 177
- 亚音速 167
- 分解剪应力 233, 330
- 分子动力学 298, 315
- 峰峦界面结构 312~317, 320,

- 336,337
- Freund 动静态普适关系 54,173
- 腐蚀断裂 256
- 复变函数法 27,52,74,160
- 复合材料 202,206
- 复应力特征展开 30
- G**
- Gol'dstein 问题 181
- Griffith 理论 14,15~19
- Gurson 模型 146,265
- H**
- 哈密顿量 298,345,350,353,353
- 耗能尾区 265~271
- 宏观/细观/纳观三重嵌套模型 318
- 宏微观理论 3,318~359
- HRR 场 14,81,84,99
- 环向叠次冷拉理论 279
- 混沌运动 339~359
- I**
- Irwin-Orowan 理论 21
- J**
- J 等效原理 123
- J 积分 14,71,73,77,79,84,99,135,182,262
- J 控制扩展 88,90
- J 积分实测 77
- J - Q 理论 99~104
- J - T 双参量评定 121~131
- J 阻力曲线 86
- J_{Ic} 86,103
- 加载路径相关性 216
- 加载引起各向异性 216
- 交叠层力学量传递 323
- 交叠层模型 320~323,329,336,338
- 角点奇异场 25,32,36
- 解理断裂 238,245,302,339~348
- 界面层断裂 182,286,317
- 界面层设计 189,285,287
- 界面断裂 150,308
- 界面断裂奇异场 153,156
- 界面断裂曲线 165,185,286
- 界面断裂试件 165~167
- 界面矩阵 161,182
- 界面力分解因子 170
- 界面裂纹偏转 186
- 界面损伤 142
- 界面原子势 297
- 局部化带状损伤 143
- K**
- K -场 31,33,35,52
- K 环域 59
- K_{min} 351
- K_{Ic} 40,64,343
- 孔洞聚集形态识别 139
- 孔洞损伤 139
- 孔洞演化率 141
- 空间尺度 6,7

扩展裂纹尖端场 94, 95, 96, 97,
98, 134

L

冷凝结晶 314
 离散位错 231
 离子型交互作用势 315
 理论断裂阻力曲线 116, 117,
120
 力学氛围 324~327, 329
 裂尖超钝化 228, 276
 裂尖分叉 228
 裂尖渐近关系 24, 50, 94~99,
167, 267
 裂尖内嵌弹性区 247
 裂尖区位错约束 241
 裂纹扩展稳定性 19, 21, 90
 裂纹密度 199, 203
 裂纹再形核 188
 临界加载率 305
 临界损伤状态(CDS) 213
 流入裂尖能通量 75, 77, 95,
170, 176
 李雅普诺夫指数 343, 348

M

蒙特卡罗方法 299, 314

N

纳观 7
 纳观断裂力学 289
 纳观断裂形貌 309
 纳观孔洞 309

纳观计算力学 298~300
 能量释放函数 204
 能量释放率 18, 24, 39, 54, 74,
135, 162, 186

能量转换因子 55, 170

O

耦联效应 217

P

Peierls 位错 240, 356
 片层模型 183
 屏蔽 44, 146, 249, 250
 庞加莱图 343, 346, 347, 353,
355

Q

奇怪吸引子 343, 346
 强度设计 13
 强奇异性剔除 232
 强韧增值 262
 桥联 263, 271~276
 屈曲折带 143
 取向分配函数(ODF) 199
 取向函数 223
 权函数法 45
 缺陷评定 14, 108~131

R

瑞利波速 54, 55, 159, 169, 173,
179, 182
 韧脆判定 238~247
 Rice-Thomson 模型 238, 240

柔度标定 19,91
柔度增值 199,201

S

三级缺陷评定体系 113
升华能 293,295
失稳堆垛能 241,291,356
时间步长 298,337
时间尺度 8
释放能张量 195~197
守恒积分 71,72
双判据法 109,128
撕裂模量 93
Stroh 列式 160
塑性区形状 59,62,64
损伤计算力学 225
损伤演化率 147,222,227
损伤引致裂尖形貌 141,146,
220,228,276~281
损伤状态 205

T

弹塑性断裂工程估算方法 114
弹塑性起裂准则 80
体膨胀与剪切屈服增韧 264
条带损伤区 220
突变 342,352
推力曲线 92,123

W

微观 7
微裂纹 141,193~217

随机分布 197~200
有序排列 202~205

位错带模型 354,356
位错发射 238,254,286,303,
329,348~359
位错跨层次传递 329,331~337
位错计算力学 232
位错平衡数目 244
位错速度 330
位错吸收条件 331
位错形核 235,291
位错延展 236
位错云 357
Westergaard 函数 41,44
无位错区(DFZ) 247,252

X

细观 7,134
细观损伤 136
细观损伤基元 136
相变增韧 283
相容应力曲线峰值法 129
相移位公式 183
镶嵌能 293,295
小范围接触 158
小范围屈服 58,63,70,80
信息分维数 344
修正原子镶嵌方法 294~297
旋出位错 152
循环塑性 215

Y

亚临界解理 254~256

- 氧化膜断裂 256
应力强度系数 179
应力强度因子 14, 31, 33, 36,
37, 39, 41, 43, 47, 53, 54,
135, 172, 208, 212, 245, 303
应力松弛修正 61
应力吸附 256
应力型相变 281
应力振荡 157, 170, 311
- 原子换位技术 300, 315
原子镶嵌方法 291, 292~294
- Z**
- 增韧系数 268
织构张量 201
准解理断裂 252~257
自洽方法 198, 199, 200
自治场 135