

492

力学名著译丛

边界层理论

上册

H. 史里希廷 著



科学出版社

403

力学名著译丛

边界层理论

下册

H. 史里希廷 著



科学出版社

力学名著译丛

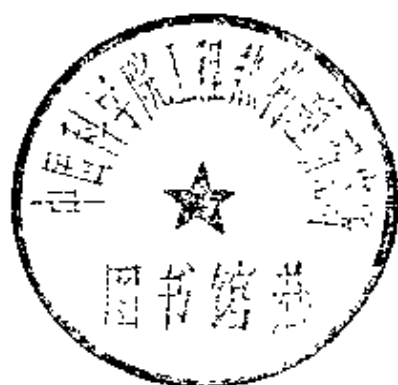
边界层理论

(上册)

II. 史里希廷 著

徐燕侯 徐立功 徐书轩 译

孔祥言 卞荫贵 校



科学出版社

1988

√ 102206

52.135
1-

力学名著译丛

边界层理论

(下册)

H. 史里希廷 著

徐燕侯 徐书轩 马晖扬 译

蔡树棠 校



科学出版社

1991

102826

内 容 简 介

本书是世界名著，中译本分上、下册出版，上册包括此书的第一、二部份，即边界层理论基础、层流边界层理论和热边界层理论。

本书可供力学、航空航天、造船、机械、动力、气象、海洋学和海洋工程等领域的研究生、教师、技术人员和科研人员参考。

H. Schlichting

BOUNDARY-LAYER THEORY

7th Edition

McGraw-Hill Book Company, 1979

力学名著译丛

边界层理论

(上册)

H. 史里希廷 著

徐燕侯 徐立功 徐书轩 译

孔祥言 卞荫贵 校

责任编辑 晏名文

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年2月第一版 开本：850×1168 1/16

1988年2月第一次印刷 印张：16 7/8

印数：精 750 插页：精 3 平 2

平 1—1,600 字数：134,000

ISBN 7-03-000045-5/O·9

定价：布脊精装 5.90 元
平 装 4.80 元

内 容 简 介

本书是世界名著,中译本分上、下册出版,下册包括原书的第三、四部分,即转换和湍流边界层。书中系统地讨论了层流向湍流的转变、压力梯度等因素对边界层转换的影响以及二维、三维、可压缩与不可压缩湍流边界层。

中译本下册第十六、十七章由马晖扬翻译;第二十、二十一章由徐书轩翻译;第二十二、二十三、二十四章由徐燕侯翻译。最后由蔡树棠教授审定。

本书可供力学、航空航天、造船、机械、动力、气象、海洋学和海洋工程等领域的大学、研究生、教师、技术人员和科研人员参考。

H. Schlichting

BOUNDARY-LAYER THEORY

7th Edition

McGraw-Hill Book Company, 1979

力学名著译丛

边界层理论

(下 册)

H. 史里希廷 著

徐燕侯 徐书轩 马晖扬 译

蔡树棠 校

责任编辑 朴玉芬 李成香

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100070

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1991年2月第一版 开本:850×1168 1/32

1991年2月第一次印刷 印张:13 3/8

印数:平 1—900 插页:精 2

布 1—400 字数:353 000

ISBN 7-03-001871-0/O·365 (平)

ISBN 7-03-001872-9/O·366 (精)

定价: 平 装 16.00 元
布 背 精 装 17.70 元

2-F62/08

出版者的话

本书是 H. 史里希廷教授的名著，1951 年的第一版是德文版。本书根据 1979 年的第七(英文)版译出。此英文版是 J. Kestin 教授由作者的德文原稿直接翻译出版的。中译本上册中序言、引言、第一、三、七、十、十三章是徐燕侯译的；第二、四、八、十二、十五章是徐立功译的；第五、六、九、十一、十四章由徐书轩译出。上册由孔祥言校订，最后由卞荫贵教授审定。

第七(英文)版作者序

本书第六(英文)版出版于1968年,它与1965年的第五(德文)版没有多大差别。本书第一(德文)版是在1951年出的。从1951年到1968年的这段时间内,总是在每次德文版之后接着再出英文版,而所有的英译本均由 Kestin 教授出色地完成。

1975年,当我决定写本书的新版本时,我得出了如下结论:以前那种继德文版之后再出英文版的程序不再是适宜的。原因在于这样做会大大增加印刷成本。所以我向两家出版公司(在 Karlsruhe 的 G. Braun 和在纽约的 McGraw-Hill) 建议,这次只出一个英文的新版本。承蒙他们同意,谨此致谢。

和以前的几版一样,这次我也力图在不改变本书基本结构的前提下,从这一时期出现的边界层理论的丰硕成果中选入最重要的贡献。我希望本书的宗旨始终不变,即以工程师易于接受的方式着重介绍理论方面的研究成果。

本书仍旧分成四个部分(粘性流体运动的基本定律;层流边界层;转捩;湍流边界层)。有关增加的内容,我想作几点说明。由于大型电子计算机的出现,许多过去认为不可解的问题,现在变得可以处理了。这些问题包括中等高的 Reynolds 数下 Navier-Stokes 方程的数值解(第四章),层流和湍流边界层方程的数值积分(第九章),以及层流边界层稳定性理论中 Orr-Sommerfeld 方程的显式数值积分(第十四章)。新版中增加的其他内容还有:非定常驻点流的 Navier-Stokes 方程的精确解(第五章),二阶层流边界层理论(第七章和第九章)。完全修订过的章节有:二维不可压缩湍流边界层的计算(第二十二章),计及传热效应的可压缩层流边界层的稳定性(第十七章 e),以及叶栅流动中的损失(第二十五章)。

除了补充以上新内容外,我还应说明有意略去的一些题目,我没有讨论高超声速流中化学应对边界层中流动过程的影响,也没有讨论磁流体动力学、低密度流动和非 Newton 流体中的边界层.和前几版一样,在本版中我仍旧认为不必去讲解湍流统计理论,因为现在已经有了其他很好的专著.

许多章的参考文献目录又扩充了很多.插图的数目增加了约 65 幅,但有 20 幅老的插图已被删去;页数增加了约 70 页.尽管如此,我希望本书保持原有特点,而且仍旧能为读者提供流体物理学中这一重要分支的概貌.

当我写这个新的手稿时,再次十分高兴地得到几位同事的大力协助. K. Gersten 教授为层流边界层部分写了有关二阶边界层的两节(第七章 f 和第九章 j). 这是他近年来取得良好研究成果的一个专门领域. T. K. Fanneloep 教授帮助我完全改写了第九章 i, 即边界层方程的数值积分法. 在湍流边界层部分, E. Truckenbrodt 教授改写了第二十二章中的大部分内容,即二维边界层和轴对称边界层. 加州理工学院 L. M. Mack 博士写了新的一节: 超声速流中边界层稳定性, 即第十七章 e. 由他来写这部分内容是十分恰当的. J. C. Rotta 博士对第四部分湍流边界层作了全面述评和许多补充. 对于俄文文献, 我得到了 Mikhailov 教授的大力帮助. 翻译工作再次委托给 J. Kestin 教授. 对于以上诸位有价值的合作,我谨表示由衷的谢意.

当我写第五(德文)版时,曾得到几位同行朋友的帮助,我再次向他们表示感谢. 不用说,他们所写的部分仍旧保留在这一版中. 这些部分是: 第八章中 F. W. Riegels 博士写的可压缩层流边界层,第十二章中 K. Gersten 教授写的热边界层部分,以及第二十三章中 J. C. Rotta 博士写的可压缩湍流边界层.

我感谢 Gerda Wolf 夫人、Hide Kreibohm 夫人和 Leslie Giacin 夫人为本书手稿仔细准备清楚的抄件; Gerda Wolf 夫人还在图书资料方面给了我很大帮助. 感谢 Rotta, Hummel 和 Starke 各位先生帮助我校对清样.

最后,还必需感谢 Verlag, Braun 出版公司欣然支持了我的愿望,使得本书顺利地和大家见面了.

Hermann Schlichting

1978 年 8 月于 Goettingen

第七(英文)版英译者序

本书是 H. Schlichting 教授《边界层理论》一书的英文本第四版。这个新版本也是在与作者紧密合作下产生的。为了最后确定内容和措辞，我到 Goettingen 去拜访过他几次。我要感谢 Schlichting 教授的殷勤接待，以及 McGraw-Hill 出版公司为这几次旅行所提供的部分资助。

这次不再出德文版本，作者将修改稿直接寄给了我。

我要感谢 H. E. Khalifa 教授，他帮助进行了校对。我的夫人 Alicia 作了作者索引和主题索引，并在困难的条件下将其完满地打印出来。我的秘书，在 Providence 的 Giacin 夫人和在 Goettingen 的 Kreibohm 夫人熟练地打出了手稿。我由衷地感谢她们耐心的工作。两家出版公司，Karlsruhe 的 G. Braun 公司和纽约的 McGraw-Hill 公司，同过去一样，总是不厌其烦地满足我们有关本书出版的要求。

J. Kestin

1978 年 8 月于 Providence, Rhode Island

第一(德文)版作者序

大致自本世纪初以后，流体动力学领域的现代研究已经取得了巨大的成就，已经能够对观测到的现象提供理论上的解释。这是上个世纪的经典流体动力学所不能做到的。在过去五十年间，流体动力学有三个分支发展得特别好，它们是边界层理论、气体动力学和机翼理论。本书将讨论边界层理论这个分支，这是现代流体动力学中最老的分支，它是 L. Prandtl 于 1904 年建立起来的。当时他成功地阐明了，怎样处理粘性很小的流体的流动(特别是，从应用观点来看最重要的水和空气的流动)，才能进行数学分析。这个问题是这样解决的：只在粘性不可忽略的区域内，即在紧靠物体的邻域中的一个薄层内考虑摩擦影响。这一概念澄清了过去不能理解的许多流动现象。最重要的是，它使与阻力产生有关的问题能够进行理论分析。当时航空工程科学正在迅速发展，因而能很快将这些理论结果应用到实际问题中去。而且，航空工程确实提出了许多问题，这些问题可以借助新的边界层理论予以解决。很久以来，航空工程师就把边界层概念当作日常应用的概念。如果现在没有边界层概念，那简直是不可想像。在其它有流动问题的机械设计领域中，特别是涡轮机设计中，边界层理论的进展要慢得多。但是，最近这些新概念已出现在这类应用中。

本书主要是为工程师写的。1941—1942 年间的冬季学期，作者为 Braunschweig 航空研究院的科学工作者讲授了一门课。本书就是这门课程的产物。战后，Braunschweig 工程大学为物理和机械工程学生举办的许多专题讲座中，已经利用了上述教材。开过第一遍课程之后，H. Hahnemann 博士整理出一套讲义。经作者审阅并加以补充之后，此讲义由科学文献公司 (Zentrale für Wissenschaftliches Berichtswesen) 以油印形式出版，并在有限范围

内分送给有关的科学工作者。

战后几年，作者决定完全重编这个早期的教材，并以图书的形式出版。时机似乎特别有利，因为出版这样一本内容广泛的书的时机看来已经成熟，同时最近一、二十年的研究成果已使整个边界层理论领域日臻完善。

本书分成四个主要部分。第一部分包括绪论性的两章，其中阐明了边界层理论的基础，但是没有用到数学。随后几章在 Navier-Stokes 方程的基础上，对边界层理论作出了数学上的和物理上的证明。第二部分包括层流边界层理论和热边界层理论。第三部分讨论由层流到湍流的转捩现象(湍流的起因)。第四部分专门论述湍流。现在可以这样来概括，层流边界层理论大体上是完善的，其物理关系已经完全弄清楚；其计算方法已经基本制定，并且在许多情形下已经简化到对工程师没有困难的程度。在讨论湍流时，基本上只采用了根据 Prandtl 混合长度所导出的半经验理论。实际上，根据目前的看法，这些理论有许多缺陷。但是，迄今还没有想出更好的方法，即对工程师有用的方法来代替它。本书没有包括湍流的统计理论，因为至今还看不出这些理论对工程师有什么实际意义。

正如书名所表明的那样，本书重点放在问题的理论论述上。为此，我们力图使这些论述具有工程师易于掌握的形式。在浩瀚的实验资料中，我们只引用了少数结果，目的是使各种现象获得清晰的物理上的理解，并为所介绍的理论提供直接的证明。书中选用了一些同湍流有关的例子，因为它们构成半经验理论的基础。我们力图证明，实质性的进展并不是大量实验结果汇集而成的，而是由少量以理论研究为后盾的基本实验所取得的。

Hermann Schlichting

1950年10月于 Braunschweig

引 言

十九世纪末叶,流体力学这门科学开始沿着两个方向发展,而这两个方向实际上毫无共同之处,一个方向是**理论流体动力学**,它是从**无摩擦、无粘性流体的 Euler 运动方程**出发发展起来的,并达到了高度完善的程度。然而,由于这种所谓**经典流体动力学**的结果与实验结果有明显的矛盾——尤其是关于管道和渠道中压力损失这个非常重要的问题以及关于在流体中运动物体的阻力问题——所以,它并没有多大实际意义。正因为这样,注重实际的工程师为了解决在技术迅速发展中所出现的重要问题,自行发展了一门高度经验性学科,即**水力学**。水力学以大量的实验数据为基础,而且在方法上和研究对象上都与理论流体动力学大不相同。

本世纪初,L. Prandtl 因解决了如何统一这两个背道而驰的流体动力学分支而著称于世。他建立了理论和实验之间的紧密联系,并为过去七十年来流体力学异常成功的发展铺平了道路。就是在 Prandtl 之前,人们就已经认识到:在很多情形下,经典流体动力学的结果与实验结果不符,是由于该理论忽略了**流体的摩擦**的缘故。而且,人们早就知道了有摩擦流动的完整的运动方程(Navier-Stokes 方程)。但是,因为求解这些方程在数学上极其困难(少数特殊情形除外),所以从理论上处理粘性流体运动的道路受到了阻碍。此外,在两种最重要的流体,即水和空气中,由于粘性很小,一般说来,由粘性摩擦而产生的力远小于其它的力(重力和压力)。因为这个缘故,人们很难理解被经典理论所忽略的摩擦力怎么会在如此大的程度上影响流体的运动。

在 1904 年 Heidelberg 数学讨论会上宣读的论文“具有很小

摩擦的流体运动”中，L. Prandtl¹⁾指出：有可能精确地分析在一些很重要的实际问题中所出现的粘性流动。借助于理论研究和几个简单的实验，他证明了绕固体的流动可以分成两个区域：一是物体附近很薄的一层(边界层)，其中摩擦起着主要的作用；二是该层以外的其余区域，这里摩擦可以忽略不计。基于这个假设，Prandtl 成功地对粘性流动的重要意义给出了物理上透彻的解释，同时对相应的数学上的困难做到了最大程度的简化，甚至在当时，这些理论上的论点就得到一些简单实验的支持，这些实验是在 Prandtl 亲手建造的水洞中做的。因此他在重新统一理论和实践方面迈出了第一步。边界层理论在为发展流体动力学提供一个有效的工具方面证明是极其富有成效的。自本世纪开始以来，在新近发展起来的空气动力学这门学科的推动下，边界层理论已经得到迅速发展。在一个很短的时间内，它与其他非常重要的进层(机翼理论和气体动力学)一起，已成为现代流体动力学的基石之一。

最近，关于边界层理论在数学上的合理性的研究，已引起了很大的重视。根据这些研究，边界层理论是更普遍的理论框架中的首次近似，这个更普遍的理论要计算完整的运动方程组的解的渐近展开。这个问题可以归结为所谓的奇异摄动方法，即用匹配渐近展开法求解。因此，边界层理论为我们提供了一个应用奇异摄动法的典型例子。流体力学中摄动方法的概述是由 M. Van Dyke²⁾撰写的。这些方法的基础可以追溯到 L. Prandtl 的早期贡献。

边界层理论在计算作用于(在流体中运动的)物体上的表面摩擦阻力方面获得了应用，例如零攻角平板所经受的阻力，船、机翼、机舱或涡轮叶片的阻力。边界层流动具有特殊的性质，即在某种

1) L. Prandtl., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Proc. Third Intern. Math. Congress, Heidelberg, 1904, pp. 484—491; 也可参考 L. Prandtl, Gesammelte Abhandlungen Zur angewandten Mechanik, Hydro-und Aerodynamik(Collected Works), ed. by W. Tollmien, H. Schlichting and H. Görtler, vol. 11, pp. 575—584, Springer, Berlin, 1961.

2) M. Van Dyke, Perturbation methods in fluid mechanics, Academic Press, 1964.

条件下,在紧靠固壁处的流动会变成倒流,同时引起边界层与固壁的分流。这将伴随着在物体尾迹中多少会明显地形成旋涡。因此,压力分布改变了,并且与无摩擦流中的压力分布有着显著的不同。这种偏离理想情形的压力分布是造成型阻的原因。因此型阻可以用边界层理论来计算。边界层理论给出了这样一个非常重要问题的答案,即为了避免这种不利的分离,物体应该具有什么样的形状。分离不是只限于在绕物体的外流中。也可以出现在流经管道的内流中。由涡轮机(旋转式压缩机和透平)叶片构成的通道中的流体流动问题,同样可以用边界层理论来处理。而且,发生在机翼最大升力点上的现象以及与机翼失速有关的现象,只有基于边界层理论才能理解。最后,固体与其绕流流体(气体)之间的传热问题,也属于这类边界层现象起决定作用的问题。

起初发展的主要是不可压缩流体中的层流边界层理论。因为在这种条件下,切应力的唯象假设早已存在于 Stokes 定律的形式中了。接着,大量的研究论文中发展了这个课题,并达到了如此完善的程度,以致目前可以认为:层流问题在主要方面已经解决了。后来,这个理论又扩展到了不可压缩湍流边界层。从实际应用的观点来看,不可压缩湍流边界层问题更为重要。诚然,在湍流情况下 O. Reynolds 早在 1880 年就引入了表观湍流应力或虚拟湍流应力这个具有基本重要意义的概念。但是,这个概念本身还不足以从理论上分析湍流流动。直到引入 Prandtl 的混合长度理论(1925 年),这才取得了重大的进展。Prandtl 的混合长度理论加上系统的实验,为借助于边界层理论进行湍流的理论研究铺平了道路。但是,关于完全发展的湍流的合理理论至今尚未建立。而从湍流的极端复杂性来看,这种情况还将继续一段相当长的时期。人们甚至还不能肯定,科学在这个任务上是否能获得成功。到了现代,由于新式飞机飞行速度急剧增加的推动,可压缩边界层中发生的现象已成为深入研究的课题。这种流动除了速度边界层之外,又出现了热边界层。热边界层的存在,在流体及其绕流物体之间的传热过程中起着重要的作用。在 Mach 数很高时,由于产生

摩擦热，固壁表面将加热到很高的温度(“热障”)。这个现象带来了一个难以分析的问题，而它的解决在飞机设计和了解人造卫星的运动中却是重要的。

从层流向湍流转换的现象是流体动力学中的基本现象。O. Reynolds 早在十九世纪末就首先对这一现象进行了研究。1914年，Prandtl 做了著名的圆球实验，并正确指出：边界层中的流动可以是层流的，也可以是湍流的。而且进一步指出：分离的问题，因而计算阻力的问题是受这种转换支配的。从层流向湍流转换过程的理论研究，是以 Reynolds 的假设为基础的，即承认湍流是由于层流边界层产生不稳定性的结果。1921年，Prandtl 开始进行转换的理论研究；经过许多徒劳无益的尝试之后，于1929年获得了成功。当时 W. Tollmien 从理论上算出了零攻角平板转换的临界 Reynolds 数。然而过了十多年之后，H. L. Dryden 及其同事们所进行的非常仔细的实验，才证实了 Tollmien 的理论。稳定性理论能够考虑到对转换有影响的许多因数(压力梯度、抽吸、马赫数、传热)。这个理论已得到很多重要的应用，其中之一就是设计阻力非常低的翼型(层流翼型)。

在一般流体动力学领域以及边界层领域中，现代研究的特点在于理论和实验的紧密结合。在大多数情形下，一些最重要的进展可以认为是理论研究所支持的少量基本实验的结果。在 A. Betz¹⁾ 所写的一篇论文中，回顾了边界层理论的发展历史，强调了理论与实验之间相辅相成的关系。在1904年 Prandtl 开创边界层理论之后约二十年中，几乎只有他自己的 Goettingen 学派在进行研究。形成这种局面的原因之一，可以认为是首次发表论文时的环境。1904年发表的边界层理论是很难令人理解的。直到1927年在伦敦召开的一次英国皇家航空学会会议上，当 Prandtl

1) A. Betz, Ziele, Wege und Konstruktive Auswertung der Strömungsforschung, Zeitschr. VDI, 91(1949), 253.

的 Wilbur Wright 纪念讲演¹⁾发表之后,可以说才宣告了这个时期的结束。在以后的年代里,大致从 1930 年开始,其他的研究工作者,尤其是在英国和美国的研究工作者,也在边界层理论的发展中起了积极的作用。今天边界层理论的研究已经遍及全世界,它和其它分支一起,已成为流体力学的最重要支柱之一。

1931 年, W. Tollmien 在《实验物理手册》²⁾里面的两篇短文中,首次对这门学科分支作了评述。随后不久(1935 年),在 W. F. Durand 主编的《空气动力学理论》³⁾一书中, Prandtl 发表了全面的论述。在这当中的四十年间,这方面的研究论文的篇数已有了极大的增加⁴⁾。根据 1955 年 H. L. Dryden 发表的评论文章的统计,有关边界层理论的论文发表率,当时已达每年一百篇。在二十多年以后的今天,论文发表率又增加了二倍以上。像几个其它的研究领域一样,边界层理论已经达到这样大的篇幅,以致即使是在这个领域中从事研究工作的科学家个人,也不可能期望通晓它的所有专题。所以,在一本现代手册中,边界层理论的叙述工作已交给几位作者,这是很对的。至于边界层理论的发展史,最近已由 I. Tani⁵⁾ 予以追述了。

1) L. Prandtl, The generation of vortices in fluids of small viscosity (15th Wilbur Wright Memorial Lecture, 1927), *J. Roy. Aero. Soc.*, 31 (1927), 721-741.

2) 请查下册书末参考书目。

3) L. Prandtl, The mechanics of viscous fluids, *Aerodynamic Theory* (W. F. Durand, ed.), Vol. 3, 34-208, Berlin, 1935.

4) H. Schlichting, Some developments of boundary-layer in the past thirty years (The third Lauchester Memorial Lecture, 1959), *J. Roy. Aero. Soc.*, 64 (1960) 63-80.

也可参阅: H. Schlichting, Recent progress in boundary-layer research (The 37th Wright Brothers Memorial Lecture, 1973), *AIAA Journal*, 12(1974), 427-440.

5) I. Tani, History of boundary-layer research, *Annual Rev. of Fluid-Mechanics*, 9 (1977), 87-111.

目 录

上册数值表目录.....	ix
第七(英文)版作者序.....	xi
第七(英文)版英译者序.....	xiv
第一(德文)版作者序.....	xv
引言.....	xvii

第一部分 粘性流体运动的基本定律

第一章 有摩擦的流体运动的概述	1
a. 真实流体和理想流体	1
b. 粘性	2
c. 可压缩性	6
d. 管流的 Hagen-Poiseuille 公式.....	7
e. 相似性原理; Reynolds 数和 Mach 数	10
f. 理想流体理论和实验的比较	20
第二章 边界层理论概述	25
a. 边界层概念	25
b. 分离及涡的形成	30
c. 管中和边界层中的湍流	44
第三章 可压缩粘性流体运动方程的推导 (Navier-Stokes 方程)	51
a. 流体流动的基本运动方程和连续方程	51
b. 变形体中一般应力系统	53
c. 流动中流体微元的应变率	56
d. 应力和应变率之间的关系	64
e. Stokes 假设	66

f. 体积粘性系数和热力学压力	68
g. Navier-Stokes 方程	71
第四章 Navier-Stokes 方程的一般性质	78
a. 根据 Navier-Stokes 方程推导 Reynolds 相似性原理 ...	78
b. 作为 Navier-Stokes 方程的“解”的无摩擦流动	81
c. 作为涡量输运方程的 Navier-Stokes 方程	81
d. 粘性很大 (Reynolds 数很小) 时的极限情形	85
e. 粘性很小 (Reynolds 数很大) 时的极限情形	86
f. R 趋于无穷大的数学解释	89
第五章 Navier-Stokes 方程的精确解	93
a. 平行流动	93
1. 直槽内的平行流动和 Couette 流动	94
2. 圆管流动的 Hagen-Poiseuille 理论	95
3. 两个同轴旋转的圆柱面之间的流动	98
4. 突然加速的平板壁面; Stokes 第一问题	101
5. Couette 流动的形成	103
6. 由静止开始的管内流动	104
7. 振动平板附近的流动; Stokes 第二问题	105
8. 一种一般类型的非定常解	107
b. 其他的精确解	108
9. 平面驻点流动 (Hiemenz 流动)	108
9a. 二维非定常驻点流动	111
10. 三维驻点流动	112
11. 旋转圆盘附近的流动	114
12. 收缩槽和扩张槽内的流动	121
13. 结束语	123
第六章 极慢运动	125
a. 极慢运动的微分方程	125
b. 平行流绕圆球的流动	126
c. 润滑的流体动力学理论	130
d. Hele-Shaw 流动	138

第二部分 层流边界层

第七章 二维不可压缩流动的边界层方程；平板边界层	141
a. 二维流动中边界层方程的推导	141
b. 边界层分离	146
c. 积分边界层方程的说明	149
d. 表面摩擦力	149
e. 平板边界层.....	150
f. 高阶边界层理论	160
第八章 边界层方程的一般性质	165
a. 边界层特性对 Reynolds 数的依赖关系	165
b. 边界层方程的“相似”解	167
c. 边界层方程转换成热传导方程	173
d. 边界层的动量积分方程和能量积分方程	175
第九章 二维定常边界层方程的精确解	179
a. 绕楔流动	180
b. 收缩槽中的流动	182
c. 绕柱体流动；对称情形 (Blasius 级数)	185
d. 用 $U(x) = U_0 - ax^n$ 表示的位势流动的边界层.....	190
e. 零攻角平板尾迹中的流动	192
f. 二维层流射流	197
g. 层流平行流动	201
h. 直槽进口段的流动	203
i. 有限差分方法	205
j. 二阶边界层	214
第十章 二维定常边界层方程的近似解法	220
a. 动量方程在绕零攻角平板流动中的应用	220
b. 二维流动的 Th. von Kármán 和 K. Pohlhausen 近似方法	225
c. 近似解和精确解的比较.....	236

1. 零攻角平板	236
2. 二维驻点流动	236
3. 绕圆柱的流动	237
d. 其它的算例	240
e. 有逆压梯度的层流流动; 分离	243
第十一章 轴对称边界层和三维边界层	248
a. 轴对称边界层的精确解	248
1. 地面附近的旋转流动	248
2. 圆形射流	254
3. 轴对称尾迹	259
4. 旋成体边界层	260
b. 轴对称边界层的近似解	264
1. 非旋转物体上边界层的近似解	264
2. 圆管进口段的流动	266
3. 旋转的旋成体上的边界层	267
c. 轴对称边界层与二维边界层的关系; Mangler 变换	271
d. 三维边界层	273
1. 偏航柱体上的边界层	274
2. 其他物体上的边界层	281
第十二章 层流热边界层	288
a. 能量方程的推导	288
b. 绝热压缩的温升; 驻点温度	292
c. 传热的相似性理论	295
d. 粘性流动中关于温度分布的精确解	302
1. Couette 流动	302
2. 平壁槽中的 Poiseuille 流动	307
e. 边界层简化	309
f. 热边界层的一般性质	312
1. 强迫流动和自然流动	312
2. 绝热壁	313
3. 传热和表面摩擦力之间的比拟	314
4. Prandtl 数的影响	317

g. 强迫流动中的热边界层	320
1. 绕零攻角平板的平行流动	320
2. 热边界层方程的其它相似解	330
3. 任意形状等温物体上的热边界层	334
4. 壁面具有任意温度分布的热边界层	340
5. 旋成体和转动物体上的热边界层	342
6. 圆柱体和其它形状物体的测量结果	343
7. 自由流湍流度的影响	346
h. 自然流动(自由对流)中的热边界层	348
第十三章 可压缩流动中的层流边界层	355
a. 物理分析	355
b. 速度场和温度场之间的关系	359
1. 绝热壁面	361
2. 传热壁面	361
c. 零攻角平板	363
d. 压力梯度不为零的边界层	371
1. 精确解	371
1.1. Illingworth-Stewartson 变换	372
1.2. 自相似解	377
2. 近似方法	387
e. 激波与边界层干扰	394
第十四章 层流边界层控制	410
a. 控制边界层的方法	410
1. 壁面运动	412
2. 边界层加速(吹除)	412
3. 抽吸	413
4. 注射不同的气体	414
5. 通过采用适当的外形来防止转换。层流翼型	415
6. 冷却壁面	415
b. 边界层抽吸	415
1. 理论结果	415
1.1. 基本方程	415

1.2. 精确解	417
1.3. 近似解	427
2. 关于抽吸的一些实验结果	430
2.1. 增加升力	430
2.2. 减小阻力	432
c. 注射不同的气体(二组元边界层)	435
1. 理论结果	435
1.1. 基本方程	435
1.2. 精确解	438
1.3. 近似解	438
2. 实验结果	439
第十五章 非定常边界层	440
a. 非定常边界层计算的概述	440
1. 边界层方程	440
2. 逐次近似法	442
3. 关于周期性外部流动的林家翘方法	443
4. 定常流动受轻微扰动时的级数展开法	446
5. 相似解和半相似解	448
6. 近似解	448
b. 运动突然起动以后边界层的形成	449
1. 二维情形	450
2. 轴对称问题	454
c. 加速运动中边界层的形成	458
d. 起动过程的实验研究	460
e. 周期性的边界层流动	463
1. 静止流体中的振动柱体	463
2. 谐振的林家翘理论	469
3. 有很小谱扰动的外部流动	471
4. 圆管内的振动流动	473
f. 非定常可压缩边界层	478
1. 运动正激波波后的边界层	478
2. 变自由流速度和变表面温度的零攻角平板	483
参考文献	486

上册数值表目录

表 1.1 粘性系数的换算因子	4
表 1.2 水和空气的密度、粘性系数和运动粘性系数与温度的 关系	5
表 1.3 运动粘性系数	5
表 2.1 在平行流动中零攻角平板后缘处的湍流边界层厚度 δ	48
表 5.1 在解平面和轴对称驻点流动中出现的函数。平面情形 取自 L. Howarth ^[14] ; 轴对称情形取自 N. Froessling ^[8]	110
表 5.2 在壁面上和远离壁面处算出的函数值表。这些函数值 是描述旋转圆盘引起的流动所需要的, 取自 Sparrow 和 Gregg ^[32] 的计算结果	118
表 7.1 零攻角平板边界层的函数 $f(\eta)$, 取自 L. Howarth ^[16] ...	155
表 10.1 零攻角平板边界层近似理论的计算结果	226
表 10.2 层流边界层近似计算中的辅助函数, 取自 Holstein 和 Bohlen ^[5]	233
表 10.3 在二维驻点流动的情形下, 边界层参数的精确值和近 似值的比较	236
表 11.1 静止壁面上方有旋转流动情形下的速度分布函数, 取 自 J. E. Nydahl ^[81a]	252
表 12.1 物理常数	293
表 12.2 零攻角平板的无量纲传热系数 α_1 和无量纲绝热壁温 度 b , 根据式 (12.70) 和 (12.75).....	324
表 12.3 驻点附近计算传热系数的公式中的系数 A , 取自 H. B. Squire ^[131]	336

表 12.4 函数 $H(\Delta)$ 的数值	337
表 12.5 计算非等温壁面热边界层的函数 $F(\chi)$ 的值;取自 D. B. Spalding ^[120]	342
表 12.6 自然对流中直立热平板的传热系数(层流),按照文献 [93, 94, 109, 126]	353
表 13.1 在激波附近沿平板的压力分布函数 $F(X)$, 根据式 (13.89) 和 (13.90), 取自 N. Curle ^[24]	408
表 14.1 在有均匀抽吸的零攻角平板起始段内, 速度剖面的无 量纲边界层厚度 δ_1 和形状因子 δ_1/δ_2 , 取自 Iglisch ^[40]	420

目 录

下册数值表目录.....	vi
--------------	----

第三部分 转 换

第十六章 层流的起源 I	519
a. 层流向湍流转换的一些实验结果	520
1. 管道流动中的转换.....	520
2. 壁面边界层内的转换.....	523
b. 层流稳定性理论的原理	528
1. 引言.....	528
2. 小扰动方法的基础.....	529
3. Orr-Sommerfeld 方程.....	531
4. 特征值问题.....	533
5. Orr-Sommerfeld 方程的一般特性.....	535
c. 稳定性理论应用在零攻角平板边界层上的结果	538
1. 早期稳定性研究.....	538
2. 中性稳定性曲线计算.....	540
3. 平板的结果.....	542
d. 稳定性理论和实验的比较	548
1. 早期的转换测量结果	548
2. 稳定性理论的实验验证	551
e. 来流中的脉动对转换的影响	558
f. 结论	559
第十七章 湍流的起源 II	561
a. 压力梯度对沿光滑壁面的边界层转换的影响	562
b. 给定物体形状时确定失稳点位置	570
c. 抽吸对边界层转换的影响	580
d. 体积力对转换的影响	586

1. 凸壁上的边界层(离心力的影响).....	586
2. 非均质流体的流动(分层效应).....	588
e. 传热和可压缩性对转捩的影响	590
1. 引言.....	590
2. 不可压缩流动中传热对转捩的影响	590
3. 可压缩性效应	593
f. 边界层对三维扰动的稳定性	605
1. 两个同心旋转圆柱面之间的流动.....	605
2. 凹壁上的边界层	614
3. 三维边界层的稳定性	618
g. 粗糙度对转捩的影响.....	619
1. 引言	619
2. 单个的圆柱状粗糙元.....	620
3. 分布的粗糙度	625
h. 轴对称流动	626

第四部分 湍流边界层

第十八章 湍流基础	630
a. 引言	630
b. 平均运动和脉动	632
c. 附加的“表观”湍流应力	634
d. 由 Navier-Stokes 方程出发的表观湍流摩擦应力张 量的推导.....	635
e. 关于湍流脉动速度的一些测量	640
f. 湍流的能量分布	649
g. 风洞的湍流度	650
第十九章 湍流计算的理论假设	654
a. 基本方程	654
b. Prandtl 混合长度理论.....	655
c. 关于湍流切应力的另外一些假设	659
d. von Kármán 相似性假设	661

e. 普适的速度分布律	662
1. von Kármán 速度分布律	663
2. Prandtl 速度分布律	664
f. 理论假设的进一步发展	669
第二十章 管道湍流	672
a. 光滑管道的实验结果	672
b. 摩擦律与速度分布的关系	676
c. 很大 Reynolds 数下的普适速度分布律	679
d. 很大 Reynolds 数下光滑圆管的普适阻力定律	688
e. 非圆截面管道	691
f. 粗糙管道和等效砂粒粗糙度	695
g. 其他类型的粗糙度	704
h. 弯曲管道和扩压器中的流动	708
i. 管道中的非定常流动	713
j. 添加聚合物减阻	713
第二十一章 零压力梯度的湍流边界层; 平板; 旋转圆盘; 粗糙度	716
a. 光滑平板	717
1. 由 $1/7$ 次幂速度分布律导出的阻力公式	718
2. 根据对数速度分布律导出的阻力公式	722
3. 进一步的改进	725
4. 有限尺度效应; 拐角内的边界层	727
5. 具有抽吸和吹除的边界层	727
b. 旋转圆盘	729
1. “自由”圆盘	729
2. 外壳内的圆盘	732
c. 粗糙平板	735
1. 均匀粗糙平板的阻力公式	735
2. 单个粗糙元的测量	738
3. 从光滑表面到粗糙表面的过渡	741
d. 粗糙度的容许值	742

第二十二章 有压力梯度的不可压缩湍流边界层	751
a. 若干实验结果	751
b. 二维湍流边界层的计算	755
1. 概述	755
2. Truckenbrodt 积分方法.....	757
3. 基本方程	761
4. 关于计算平板湍流边界层的积分	763
5. 方法的应用	771
6. 关于有压力梯度的湍流边界层特性的评述	773
7. 有抽吸和引射的湍流边界层	775
8. 曲壁上的边界层	777
c. 翼型上的湍流边界层: 最大升力	778
d. 三维边界层	781
1. 旋成体上的边界层	781
2. 旋转物体上的边界层	783
3. 收缩段和扩张段的边界层	785
第二十三章 可压缩湍流边界层	788
a. 总论	788
1. 湍流传热	788
2. 可压缩流动的基本方程	789
3. 动量交换系数和热交换系数之间的关系	793
b. 速度分布与温度分布间的关系	795
1. 平板上的传热	795
2. 粗糙表面的传热	801
3. 可压缩流动中的温度分布	802
c. Mach 数的影响; 摩擦定律	804
1. 零攻角平板	805
2. 变压力	814
第二十四章 自由湍流, 射流和尾迹	817
a. 引言	817
b. 射流宽度增长和速度下降的估计	819
c. 例子	824

1. 速度间断的平滑化	824
2. 自由射流边界	826
3. 单个物体后的二维尾迹	829
4. 一排障碍物后的尾迹	834
5. 二维射流	836
6. 圆形射流	839
7. 二维沿壁面的射流	842
d. 自由湍流中的温度扩散	844
第二十五章 翼型阻力的确定	849
a. 概况	849
b. Betz 的实验方法	850
c. Jones 的实验方法	853
d. 翼型阻力的计算	856
e. 流动通过叶栅的损失	862
1. 概述	862
2. Reynolds 数的影响	866
3. Mach 数的影响	868
参考文献	872
参考书目	910
主题索引	925
缩写词	933
常用符号一览表	935

下册数值表目录

表 16.1	零攻角平板边界层 (Blasius 剖面) 中性扰动的波长 $\alpha\delta$, 及频率 $\beta\delta/U_\infty$ 随 Reynolds 数 R 的变化. (理论值根据 W. Tollmien ^[593] ; 数值结果引自 R. Jordinson ^[471] 和 D. R. Houston, 两者均为平行流. 见图 16.10 和 16.11) ...	543
表 17.1	有抽吸的速度剖面临界 Reynolds 数随无量纲抽吸体积流量系数 ξ 的变化, 根据 Ulrich ^[143]	584
表 20.1	圆管流动中平均速度对最大速度的比值与速度分布指数 n 的关系, 根据式 (20.7)	676
表 20.2	光滑圆管的阻力系数与 Reynolds 数的关系, 还可参看图 20.9	690
表 21.1	根据式 (21.14) 和 (21.15) 的对数速度剖面计算的平板阻力公式; 参看图 21.2 中的曲线 (3)	723
表 21.2	容许的突起物高度与 Reynolds 数的关系	743
表 21.3	关于容许粗糙度的计算例子, 根据图 21.16	746
表 22.1	计算无量纲动量厚度 R_1 , 无量纲能量厚度 R_2 , 以及形状因子等方程中各种量的一览表, 见方程 (22.11a, b)	763
表 22.2	计算动量厚度和能量厚度的显式方程中数值常数的一览表, 见式 (22.16), (22.17) 和 (22.19). 其中 b 见图 22.7 (a); β 取自图 22.7 (b)	765
表 23.1	计算传热系数的比拟式 (23.20) 和计算恢复因子的式 (23.27) 中的常数 a 和 b , 取自 H. Reichardt ^[751] 和 J. C. Rotta ^[811]	800
表 24.1	自由湍流问题中宽度增长和中心线上速度减小与距离 x 的幂律关系	823

第一部分 粘性流体运动的基本定律

第一章 有摩擦的流体运动的概述

a. 真实流体和理想流体

流体动力学领域内的大多数理论研究都基于理想流体，即无摩擦和不可压缩流体的概念。在这类理想流体的运动中，两个接触层之间没有切向力(切应力)的作用，而只有法向力(压力)的作用。也就是说，理想流体对其形状的改变并不出现内部的抵抗。人们在数学上非常深入地发展了理想流体运动的理论，在许多情况下用这种理论描述实际运动是令人满意的，例如表面波的运动或空气中液体射流的形成。但是，在说明物体的阻力方面，理想流体理论却完全失效。在这一点上，理想流体理论的结论是，在无限的流体中，匀速运动的物体不承受阻力(d'Alembert 佯谬)。

理想流体理论的这一不合理结果的原因在于：除了法应力外，实际流体内部各层之间还传递切应力，在浸没于流体中的固壁附近也是如此，真实流体中的切向力(即摩擦力)与称为流体粘性的这一性质有关。

由于没有切向力，一般说来，在理想流体与固壁之间的界面上存在着相对的切向速度差，即有滑移。相反，真实流体中分子间吸引力的存在，使得流体附着在固壁上并产生切应力。

切应力的存在和固壁上的**无滑移条件**构成理想流体与真实流体之间的本质差别。某些具有很大实际意义的流体，例如水和空气，其粘性系数很小。在许多实例中，这类**小粘性系数流体**的运动与理想流体的运动非常一致，这是由于在大多数情况下切应力非常小的缘故。基于这种理由，理想流体理论完全忽略粘性的存在，主要目的是使得运动方程组大为简化，从而能够建立起广泛的数

学理论,但是,重要的是要强调指出:即使在粘性系数很小的流体中,也和理想流体中不同,固壁上仍存在无滑移条件。在许多情况下,无滑移条件使理想流体和真实流体的运动规律产生很大差别,特别是,真实流体和理想流体在阻力数值之间的差别很大,其物理根源就在于固壁附近的无滑移条件。

本书研究小粘性系数流体的运动,因为这类问题有很大的实用价值。至于如何才能说明真实流体和理想流体之间这种既有部分一致,又有部分差异的状况,这在研究过程中将会逐渐清楚的。

b. 粘 性

借助于下面的实验,最能显示出粘性的本质。考虑两个非常长的平行平板之间的流体运动,其中一块平板静止,另一块平板则在自身平面内作等速运动(如图1.1所示)。设平板之间的距离为 h ,整个流体中的压力为常数。实验表明:流体附着在两个壁面上,所以下平板上流体的速度为零,上平板上流体的速度为该平板的速度 U 。而且,平板之间流体的速度分布是线性的,所以流体的速度正比于它到下平板的距离 y ,我们有

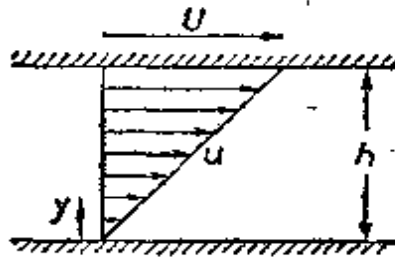


图 1.1 两平行平板间粘性流体的速度分布 (Couette 流)

$$u(y) = \frac{y}{h} U. \quad (1.1)$$

为了维持运动,必须对上平板施加一个切向力,此力与流体的摩擦力相平衡。从实验知道,这个力(平板单位面积上的作用力)正比于上平板的速度 U ,反比于距离 h 。单位面积上的摩擦力(摩擦切应力)记作 τ ,因此 τ 正比于 U/h ,通常我们也可以用 du/dy 来代替 U/h 。 τ 和 du/dy 之间的比例系数记作 μ ,它取决于流

体的性质。对于“稀的”流体，例如水或酒精， μ 是小的。但是对于很粘的液体来说，例如石油或甘油， μ 是很大的。这样，我们得到以下形式的流体摩擦力的基本关系：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.2)$$

其中 μ 是流体的一个特性参数，并且在很大程度上取决于流体的温度。它是流体粘性的度量。由式 (1.2) 给出的摩擦力定律称为 **Newton 摩擦力定律**。式 (1.2) 可以作为粘性系数的定义。但是必须强调指出，图 1.1 中所研究的例子是流体运动中特别简单的情形。这种简单情形的推广，将包含在 **Stoke 摩擦力定律** 中（参阅第三章）。粘性系数的量纲不难从式 (1.2) 中导出¹⁾。切应力用 $\text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}$ 来度量，速度梯度 du/dy 用 s^{-1} 来度量。因此

$$\mu = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right] = \text{Pa} \cdot \text{s},$$

其中方括号用来表示单位。上述单位不是粘性系数唯一的单位，甚至也不是最广泛使用的单位。表 1.1 中列出了它的各种单位以及换算因子。

式 (1.2) 相当于弹性体的 **Hooke 定律**。在弹性体的情况下，切应力正比于应变，即

$$\tau = G\gamma, \quad \text{其中} \quad \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (1.3)$$

这里 G 表示剪切模量， γ 是原来成直角的两直线之间夹角的改变量， ξ 表示沿横坐标方向的位移。虽然在弹性体中切应力正比于应变 γ 的大小，但是经验表明，它在流体中正比于应变率 $d\gamma/dt$ 。如果令

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\xi}{dt} \right),$$

因为 $\xi = ut$ ，也得到和前面同样的结果

1) 本书始终采用重力单位制，即工程单位制。依照国际协定， kp 和 lbf 分别表示力的单位；相应的质量单位分别为 kg 和 lb 。在部分表中，采用了国际单位制 (SI)*。

* $1\text{lb} = 0.453592\text{kg}$, $1\text{lbf} = 4.44822\text{N}$ 。——编者注

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

但是这种比拟是不完全的,因为流体中的应力取决于一个常数,即粘性系数 μ ,而在各向同性弹性体中,应力却取决于两个常数。

在摩擦力和惯性力相互影响的所有流体运动中,重要的是要考虑粘性系数 μ 与密度 ρ 之比,即运动粘性系数,记作 ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

表 1.1 粘性系数的换算因子*

a. 绝对粘性系数 μ

	kp · s/m ²	kp · h/m ²	Pa · s
kp · s/m ²	1	2.7778 × 10 ⁻⁴	9.8067
kp · h/m ²	3600	1	3.5304 × 10 ⁶
Pa · s	1.0197 × 10 ⁻¹	2.8325 × 10 ⁻³	1
kg/m · h	2.8325 × 10 ⁻³	7.8682 × 10 ⁻⁷	2.7778 × 10 ⁻⁴
lbf · s/ft ²	4.8824	1.3562 × 10 ⁻³	4.7880 × 10
lbf · h/ft ²	1.7577 × 10 ⁴	4.8824	1.7237 × 10 ³
lb/ft · s	1.5175 × 10 ⁻¹	4.2153 × 10 ⁻³	1.4882

kg/m · h	lbf · s/ft ²	lb · h/ft ²	lb/ft · s
3.5316 × 10 ⁴	2.0482 × 10 ⁻¹	5.6893 × 10 ⁻³	6.5898
127.1 × 10 ⁴	7.3734 × 10 ³	2.0482 × 10 ⁻¹	2.3723 × 10 ⁴
1	2.0885 × 10 ⁻²	5.8015 × 10 ⁻⁴	6.7197 × 10 ⁻¹
0.1724 × 10 ⁴	5.8015 × 10 ⁻⁴	1.6115 × 10 ⁻³	1.8666 × 10 ⁻⁴
620.8 × 10 ⁴	1	2.7778 × 10 ⁻⁴	3.2174 × 10
5.358 × 10 ³	3600	1	1.1583 × 10 ³
	3.1081 × 10 ⁻²	8.6336 × 10 ⁻⁶	1

b. 运动粘性系数 ν

	m ² /s	m ² /h	cm ² /s	ft ² /s	ft ² /h
m ² /s	1	3600	1 × 10 ⁴	1.0764 × 10 ¹	3.8750 × 10 ⁴
m ² /h	2.7778 × 10 ⁻⁴	1	2.778	2.9900 × 10 ⁻³	1.0764 × 10 ¹
cm ² /s(Stokes)	1 × 10 ⁻⁴	0.36	1	1.0764 × 10 ⁻³	3.8750
ft ² /s	9.2903 × 10 ⁻²	3.3445 × 10 ²	9.2903 × 10 ²	1	3600
ft ² /h	2.5806 × 10 ⁻²	9.2903 × 10 ⁻²	2.5806 × 10 ¹	2.7778 × 10 ⁻⁴	1

* 1ft = 0.3048m, 1in = 0.0254m.——编者注

数值：在液体情形下，粘性系数 μ 几乎与压力无关，而随着温度的增加以很大的速率下降。在气体情形下，作为一次近似，粘性系数可以认为与压力无关，但随温度增加。对于液体，因为密度 ρ 随温度只有微小的改变，所以运动粘性系数 ν 对温度的依赖关系

表 1.2 水和空气的密度、粘性系数和运动粘性系数与温度的关系

温 度 ℃	水			空 气 在0.099MPa的压力下(14.696lbf/in ²)		
	密度 ρ kg/m ³	粘性系数 μ Pa·s	运动粘性系 数 $\nu \times 10^6$ m ² /s	密度 ρ kg/m ³	粘性系数 μ μ Pa·s	运动粘性系 数 $\nu \times 10^6$ m ² /s
-20	—	—	—	1.39	15.6	11.2
-10	—	—	—	1.34	16.2	12.1
0	999.3	1795	1.80	1.29	16.8	13.0
10	999.3	1304	1.30	1.25	17.4	13.9
20	997.3	1010	1.01	1.21	17.9	14.8
40	991.5	655	0.661	1.12	19.1	17.1
60	982.6	474	0.482	1.06	20.3	19.2
80	971.8	357	0.367	0.99	21.5	21.7
100	959.1	283	0.295	0.94	22.9	24.4

与 μ 相同。但是对于气体，由于随着温度增加密度 ρ 显著减小，所以 ν 随着温度增加而迅速增加，表 1.2 列出了水和空气的 ρ ， μ ， ν

表 1.3 运动粘性系数

液 体	温 度	$\nu \times 10^6$ m ² /s
	℃	
甘 油	20	680
水 银	0	0.125
水 银	100	0.091
润 滑 油	20	400
润 滑 油	40	100
润 滑 油	60	30

的一些数据。

表 1.3 列出了另外若干有用的数据。

c. 可压缩性

可压缩性是液体或气体在外力作用下体积改变的一种度量，在这方面可以用方程

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1.5)$$

来定义体积改变的弹性模量 E ，其中 $\Delta V/V_0$ 表示由压力增量 Δp 所引起的体积的相对改变。液体的可压缩性非常小，例如水的 $E = 280000 \text{ lbf/in}^2$ ，这说明压力增加一个大气压 (14.7 lbf/in^2) 时，引起体积的相对改变约为 $1/20000$ ，即 0.005% 。其它液体也显示出类似的性质，所以在大多数情况下，液体的可压缩性可以忽略不计，其流动可以当作是不可压缩的。

在气体情形下，如果体积变化过程是等温的，很容易从完全气体定律¹⁾得出，其弹性模量 E 等于初始压力 p_0 。对于 NTP (标准大气压和冰点温度) 条件下的空气， $E = 14.7 \text{ lbf/in}^2$ 。这说明空气的可压缩性约为水的 20000 倍。其它气体也有类似的情况。

在流体流动问题中，为了回答是否需要考虑气体的可压缩性，必须研究由流体运动所引起的压力改变是否会导致体积的很大变化。而体积的变化又可以用密度的变化来估算。由于质量守恒，我们有 $(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \Delta \rho) = V_0 \rho_0$ ，所以 $\Delta \rho/\rho_0 = -\Delta V/V_0$ 。于是式 (1.5) 可以改写成

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (1.5a)$$

因而，如果密度的相对改变非常小，即 $\Delta \rho/\rho_0 \ll 1$ ，则气体的流动就可以认为是不可压缩的。根据 Bernoulli 方程 $p + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{常}$

1) 根据完全气体定律可得：由压力改变 Δp 引起的体积改变 ΔV 满足关系式 $(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = p_0 V_0$ ，所以 $\Delta p \approx -p_0 \Delta V/V_0$ 。

数 (w 是流速) 知道, 由流动引起的压力改变 Δp 与动压头 $q = \frac{1}{2} \rho w^2$ 的量级相同, 所以式 (1.5a) 变成

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{q}{E} \quad (1.6)$$

因此, 如果 $\Delta \rho / \rho_0$ 真的远小于 1, 那么从式 (1.6) 看出, 必定也有 $q/E \ll 1$. 于是, 如果动压头远小于弹性模量, 则说明气体的流动可以当作不可压缩流来处理, 而且具有很高的近似程度.

如果在上述方程中引入声速, 则可以用另一种方法来说明同样的结果. 根据 Laplace 方程, 声速为 $c^2 = E/\rho_0$. 因此从式 (1.6) 出发, 条件 $\Delta(\rho/\rho_0) \ll 1$ 也可以写成

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{\rho_0}{2} \frac{w^2}{E} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{w}{c} \right)^2 \ll 1.$$

流速 w 与声速 c 之比

$$M = \frac{w}{c} \quad (1.7)$$

称为 Mach 数. 上述讨论得出如下结论: 如果

$$\frac{1}{2} M^2 \ll 1 \quad (\text{近似地为不可压缩}) \quad (1.8)$$

也就是说, 如果 Mach 数远小于 1, 或者换句话说, 如果流速远小于声速, 则在讨论该气体的流动时, 可压缩性就可以忽略不计. 在声速约为 $c = 1100 \text{ft/s}$ 的空气中, 当流速 $w = 330 \text{ft/s}$ 时, 其密度的改变为 $\Delta \rho / \rho_0 = \frac{1}{2} M^2 = 0.05$. 这个数值可以认为是气体能够当作不可压缩流体来讨论的上限.

以后, 我们常常假设流体是不可压缩的, 因此, 所得结果只适用于小 Mach 数的情形. 但是在有些场合中, 特别是在第十二章、第十三章和第二十三章中, 我们的结果将扩展到包括可压缩流体.

d. 管流的 Hagen-Poiseuille 公式

针对一个有切向力的简单流动, 本章 b 中所述的初等摩擦力

定律可以应用于重要的和更为一般的情形，即等直径 ($D = 2R$) 圆截面的直管流动情形。由于附着的原因，壁面上速度为零，而在轴线上速度达到最大值 (图 1.2)。在以管轴为中心轴的各圆柱截面上，速度是相等的，同时各圆柱薄层之间相互滑移，速度均沿轴向。这类运动称为层流。在离开进口截面足够远的地方，截面上的速度分布就与沿流动方向的坐标无关了。

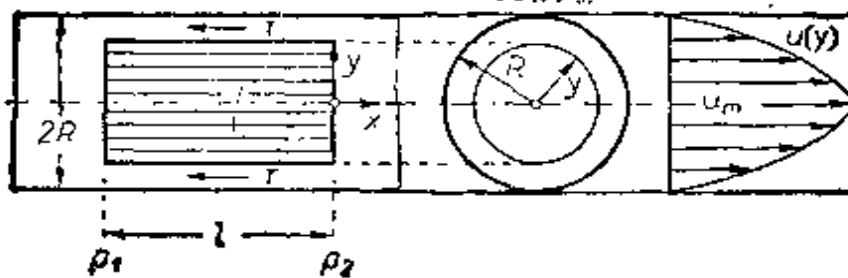


图 1.2 通过管道的层流

流体在轴向压力梯度的作用下运动，而在垂直于轴线的每个截面上可以把压力当作均匀的。由于摩擦效应，切应力相互作用于各层之间，它正比于速度梯度 du/dy 。因此，流体质点在压力梯度的作用下加速，而在摩擦切应力的作用下减速。除此之外，没有其它的作用力，特别是没有惯性力，因为沿每一条流线速度保持不变。为了建立起平衡条件，我们研究一个半径为 y 、长度为 l 的共轴圆柱体 (图 1.2)。 x 方向的平衡条件要求作用在圆柱体端面上的压力 $(p_1 - p_2)\pi y^2$ 等于作用在圆柱面上的切向力 $2\pi y l \cdot \tau$ 。由此得到

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2} \quad (1.9)$$

根据摩擦力定律，即式 (1.2)，在目前的情形下有

$$\tau = -\mu du/dy.$$

因为 u 随着 y 的增加而减小，所以式 (1.9) 给出

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \frac{y}{2},$$

积分后则得到

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left(C - \frac{y^2}{4} \right).$$

积分常数 C 由壁面无滑移的条件来确定。由于 $y = R$ 处有 $u = 0$ ，所以 $C = R^2/4$ ，最后得到

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - y^2). \quad (1.10)$$

因此速度沿半径方向呈抛物线分布（图 1.2），且轴上最大速度为

$$u_m = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2.$$

由于旋转抛物面所包围的体积为 $\frac{1}{2} \times$ 底面积 \times 高度，所以很容易

算出单位时间流过横截面的流体体积 Q 。因此，

$$Q = \frac{\pi}{2} R^2 u_m = \frac{\pi R^4}{8\mu l} (p_1 - p_2). \quad (1.11)$$

式 (1.11) 说明体积流量正比于单位长度上压力降 $(p_1 - p_2)/l$ 的一次方，同时正比于圆管半径的四次方。如果引入横截面上的平均速度 $\bar{u} = Q/\pi R^2$ ，则式 (1.11) 可以改写为

$$p_1 - p_2 = 8\mu \frac{l}{R^2} \bar{u}. \quad (1.12)$$

G. Hagen^[6] 首先得出式 (1.11)。不久之后，J. Poiseuille^[11] 也得到了这个关系式。这个方程通常称为管道中层流的 Hagen-Poiseuille 公式。

为了用实验来测定粘性系数 μ ，可以利用式 (1.11)。方法是在已知半径的细管中测定流量，并在固定的长度两端测定压力降。测出足够的的数据，就可以从式 (1.11) 来定出 μ 。

可以应用式 (1.10) 和 (1.11) 的这类流动，实际上只存在于半径和流速都比较小的情形。对于更大的速度和半径，流动的特性完全变了：压力降不再象式 (1.12) 那样正比于平均速度 \bar{u} 的一次方，而是近似地正比于 \bar{u} 的二次方。横截面上的速度变得更加均匀

了，规则的层流为在主流上叠加不规则的径向和轴向脉动速度的流动所代替。所以在径向将发生强烈的混合。在这种情形下，Newton 摩擦力定律式(1.2)不再适用了。此时流动已由层流变为湍流。后者我们将在第二十章中再详细讨论。

e. 相似性原理；Reynolds 数和 Mach 数

上节所讨论的这类流体运动是非常简单的，因为每个流体质点只在摩擦力和压力的影响下运动，惯性力处处为零。但是，在扩张槽或收缩槽中，流体质点除了受到压力和摩擦力的作用之外，还受到惯性力的作用。

在本节中，我们将力图回答这样一个很基本的问题，即在什么样的条件下，不同流体以同一的初始流向绕两个几何相似物体流动时，会显示出几何相似的流线。这些具有几何相似流线的流动称为动力相似流动，或相似流动。对于流体不同、流速不同、线尺度不同、但绕几何相似物体(例如两圆球)的两个流动，如果二者相似，显然应该满足下述条件：在所有几何相似的对应点上，作用在一流体质点上的各力，每一时刻都必须有一固定的比值。

现在我们来研究只出现摩擦力和惯性力的这类重要情形。我们不考虑由于体积变化而引起的弹性力，即假定流体是不可压缩的。我们也不考虑重力，所以不允许有自由表面，而在流体的内部，假定重力为浮力所平衡。在这些假设下，只有当所有对应点上惯性力与摩擦力之比相同时，才满足相似条件。在一个平行于 x 轴的运动中，单位体积惯性力的大小为 $\rho Du/Dt$ ，其中 u 是 x 方向的速度分量，而 D/Dt 表示随体导数。在定常流动的情形下，我们可以将它改写成

$$\rho \partial u / \partial x \cdot dx / dt = \rho u \partial u / \partial x,$$

其中 $\partial u / \partial x$ 表示速度随位置的变化。因此，单位体积的惯性力等于 $\rho u \partial u / \partial x$ 。关于摩擦力的表达式，很容易从 Newton 摩擦力定律(式(1.2))导出。若考虑一个流体微元，其运动方向与 x 方向一致(图 1.3)，我们发现切向力的合力等于

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz.$$

所以，单位体积的摩擦力等于 $\partial \tau / \partial y$ ，或根据式 (1.2)，它等于 $\mu \partial^2 u / \partial y^2$ 。

因此，相似性条件，即所有对应点上惯性力与摩擦力之比必须不变的条件，可以写成

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{摩擦力}} = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = \text{常数.}$$

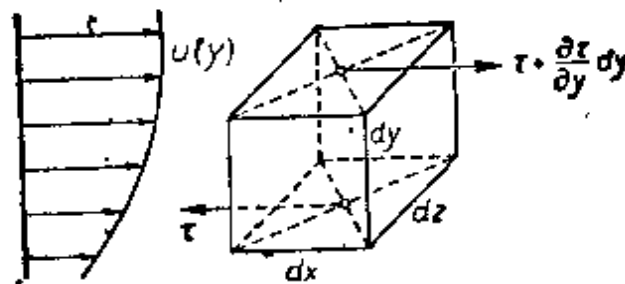


图 1.3 作用在流体微元上的摩擦力

现在有必要研究一下当流动参数发生变化时，这些力如何改变。这些流动参数包括密度 ρ 、粘性系数 μ 、特征速度（例如来流速度 V ）以及物体的特征长度（例如圆球的直径 d ）。

△ 在速度场中某点的速度 u 正比于来流速度 V ，速度梯度 $\partial u / \partial x$ 正比于 V/d ，类似地， $\partial^2 u / \partial y^2$ 正比于 V/d^2 。所以比值

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{摩擦力}} = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = \frac{\rho V^2 / d}{\mu V / d^2} = \frac{\rho V d}{\mu}.$$

因此，如果在两个流动中量 $\rho V d / \mu$ 具有相同的值，则满足相似性条件。由于 $\mu / \rho = \nu$ ，量 $\rho V d / \mu$ 也可以写成 $V d / \nu$ ，因为它是两个力的比值，所以是一个无量纲的数。这就是著名的 Reynolds 数 R 。于是，若两个流动的 Reynolds 数

$$R = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \quad (1.13)$$

相等，则这两个流动相似。O. Reynolds^[12] 针对圆管中流动的研究，首先阐明了这个原理，所以称之为 Reynolds 相似性原理。

通过量纲考虑:

$$\rho \left[\frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}^4} \right], \quad V \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right], \quad d \text{ [ft]}, \quad \mu \left[\frac{\text{lbf} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2} \right],$$

可以直接验证 Reynolds 数是无量纲的。因为

$$\frac{\rho V d}{\mu} = \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}^4} \cdot \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot \text{ft} \cdot \frac{\text{ft}^2}{\text{lbf} \cdot \text{s}} = 1,$$

由此证明 Reynolds 数确实是无量纲的。

指数法: 采用指数法来研究量纲而不考虑动力相似性条件, 也可以导出 Reynolds 原理。关于这一点, 我们利用下述论断: 即一切物理定律所具有的形式, 应与所采用的具体的单位制无关。

在目前所研究的情形下, 确定流动的物理量是: 来流速度 V , 物体特征长度 d , 以及密度 ρ 和粘性系数 μ 。现在我们要问, 是否存在这些量的具有下列形式的无量纲组合:

$$V^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta.$$

设 \mathbf{F} 表示力, \mathbf{L} 表示长度, \mathbf{T} 表示时间, 如果

$$V^\alpha d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta = \mathbf{F}^0 \mathbf{L}^0 \mathbf{T}^0,$$

就可以得到一个无量纲组合。因为一个无量纲量的任意次方仍然是无量纲量, 因此不失讨论的一般性, 可以指定四个指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 中的任何一个为 1。假定 $\alpha = 1$, 我们得到

$$V d^\beta \rho^\gamma \mu^\delta = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{T}} \mathbf{L}^\beta \left(\frac{\mathbf{F} \mathbf{T}^2}{\mathbf{L}^4} \right)^\gamma \left(\frac{\mathbf{F} \mathbf{T}}{\mathbf{L}^2} \right)^\delta = \mathbf{F}^0 \mathbf{L}^0 \mathbf{T}^0.$$

令该表达式两边 \mathbf{L} , \mathbf{T} 和 \mathbf{F} 的指数相等, 则得到三个方程:

$$\mathbf{F}: \quad \gamma + \delta = 0,$$

$$\mathbf{L}: \quad 1 + \beta - 4\gamma - 2\delta = 0,$$

$$\mathbf{T}: \quad -1 + 2\gamma + \delta = 0.$$

其解为

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1.$$

这表明存在着四个量 V, d, ρ 和 μ 的一个唯一的无量纲组合, 即 Reynolds 数 \mathbf{R} .

无量纲量: 对于具有(几何)相似边界的流动, 在研究其速度

场和各种力(法向力和切向力)时,为了包括不同 Reynolds 数的情形,可以把上述导出 Reynolds 数过程中所作的讨论加以推广. 设几何相似物体周围空间一点的位置用坐标 x, y, z 来表示,则比值 $x/d, y/d, z/d$ 就是其无量纲坐标. 我们以来流速度 V 为参考速度,可作出无量纲速度分量 $u/V, v/V, w/V$, 同时法应力 p 和切应力 τ 以动压头的两倍 (ρV^2) 为参考量,则得相应的无量纲量 $p/\rho V^2$ 和 $\tau/\rho V^2$. 于是,前面所阐明的动力相似性原理可以表述成另一种形式,即 Reynolds 数相同的两个几何相似系统,其无量纲量 $u/V, \dots, p/\rho V^2$ 和 $\tau/\rho V^2$ 只依赖于无量纲坐标 $x/d, y/d, z/d$. 然而,如果两个系统是几何相似的但不是动力相似的,也就是说,如果它们的 Reynolds 数不同,则上述无量纲量一定还依赖于两个系统的特征量 V, d, ρ, μ . 应用物理定律一定与单位制无关的原理,可以得出无量纲量 $u/V, \dots, p/\rho V^2, \tau/\rho V^2$ 只能依赖于 V, d, ρ 和 μ 的无量纲组合,这个无量纲组合是唯一的. 它就是 Reynolds 数 $R = Vd\rho/\mu$. 因此我们得出结论: 被比较的,两个不同 Reynolds 数的几何相似系统,其流场的无量纲量只能是三个无量纲空间坐标 $x/d, y/d, z/d$ 以及 Reynolds 数 R 的函数.

关于运动流体作用在浸没物体上的合力,可以用上述量纲分析作出一个重要论断. 作用在物体上的力是所有作用在物体上的法应力和切应力的面积分. 如果 P 表示该合力在任意一个给定方向上的分量,就可以把力的无量纲系数写成 $P/d^2\rho V^2$ 的形式. 然而,通常不是用面积 d^2 ,而是选用这个浸没物体的特征面积 A ,例如物体在流动方向上的迎风面积. 在圆球情形下,它等于 $\pi d^2/4$. 因此,力的无量纲系数变为 $P/A\rho V^2$. 量纲分析导致这样一个结论: 对于几何相似系统,这个系数只能依赖于由 V, d, ρ 和 μ 构成的无量纲组合,即只能依赖于 Reynolds 数. 合力平行于来流速度的分量称为阻力 D ,而垂直于该方向的分量称为升力 L . 如果选择动压头 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 而不用量 ρV^2 作为参考量,则升力和阻力的

无量纲系数为

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}. \quad (1.14)$$

因此,从上述分析得到这样的结论:对于几何相似的系统,即相对于来流有相同取向的几何相似物体,它们的无量纲升力系数和阻力系数都只是一个变量的函数,即只是 Reynolds 数的函数:

$$C_L = f_1(\mathbf{R}); \quad C_D = f_2(\mathbf{R}). \quad (1.15)$$

必须再次强调指出:只有当 Reynolds 相似性原理的前提得到满足时,即在流动中起作用的力只是摩擦力和惯性力时,从 Reynolds 相似性原理所得到的上述重要结论才是成立的. 在可压缩流体的情形下,弹性力是很重要的,而当运动具有自由面时,则必须把重力考虑进去,此时式 (1.15) 就不适用了. 在这样的情形下,有必要导出不同的相似性原理,其中包括无量纲的 Froude 数 $\mathbf{F} = V/\sqrt{gd}$ (考虑重力和惯性力), 以及无量纲的 Mach 数 $\mathbf{M} = V/c$ (考虑可压缩性).

就理论和实验流体力学这门学科而言,由式 (1.14) 和 (1.15) 所给出的相似性原理有非常重要的意义. 首先,无量纲系数 C_L , C_D 以及 \mathbf{R} 不依赖于单位制. 其次,应用相似性原理可以使实验工作大为简化. 在大多数情形下,不可能在理论上确定出函数 $f_1(\mathbf{R})$ 和 $f_2(\mathbf{R})$, 因而必须运用实验的方法.

假如我们想要确定某个规定形状物体的阻力系数 C_D , 例如圆球的阻力系数,如果不应用相似性原理,我们就需要对四个独立变数 V , d , ρ 和 μ 的不同值进行一系列的阻力测定. 这就要制定一个庞大的工作计划. 但是相似性原理告诉我们:对于不同直径的球,在不同来流速度和不同流体的条件下,其阻力系数只依赖于一个变数,即 Reynolds 数. 图 1.4 画出了圆柱阻力系数随 Reynolds 数变化的函数曲线,同时表明实验结果与 Reynolds 相似性原理之间很一致. 对于直径有很大差别的圆柱的阻力系数,其实验点落在同一条曲线上. 这个结论同样适用于图 1.5 中相对于 Reynolds

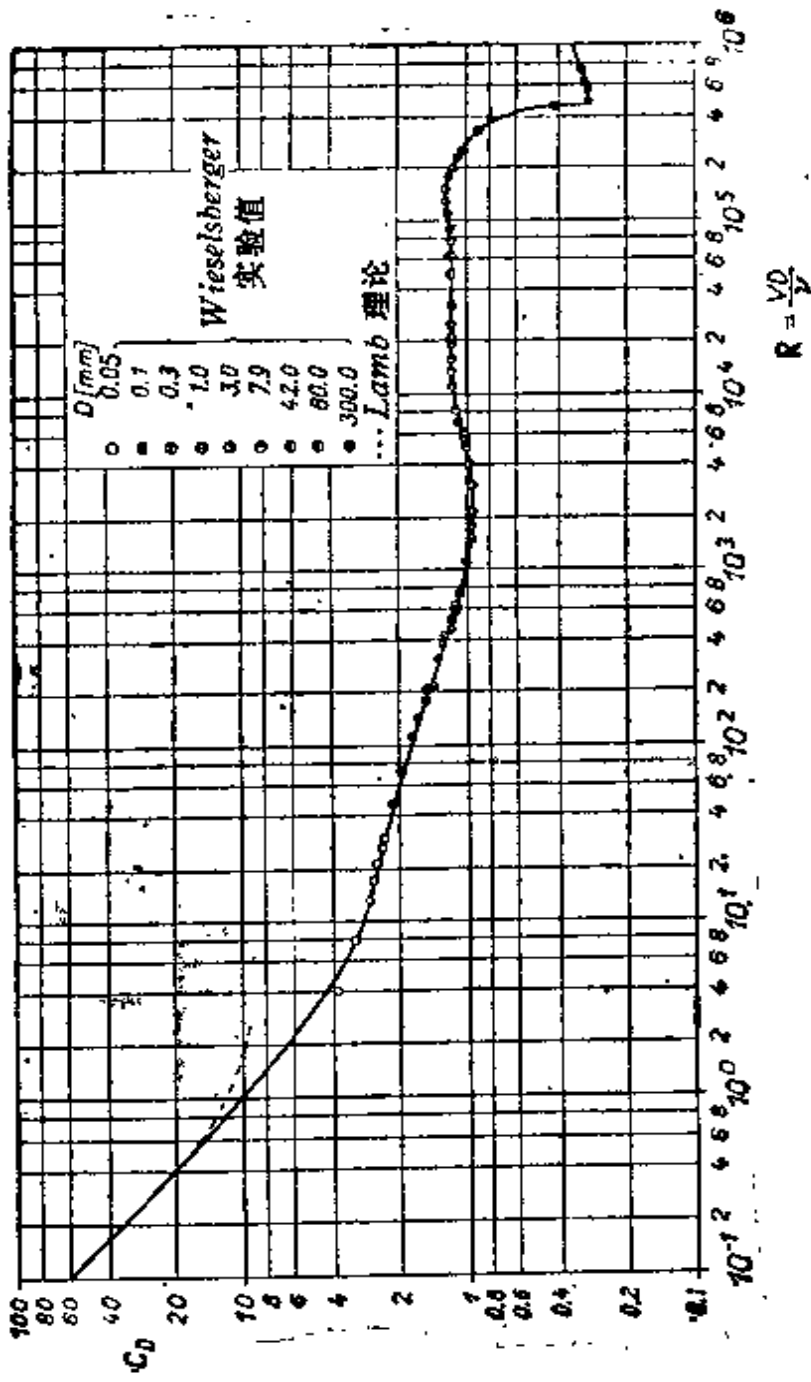


图 1.4 圆柱阻力系数与 Reynolds 数的关系

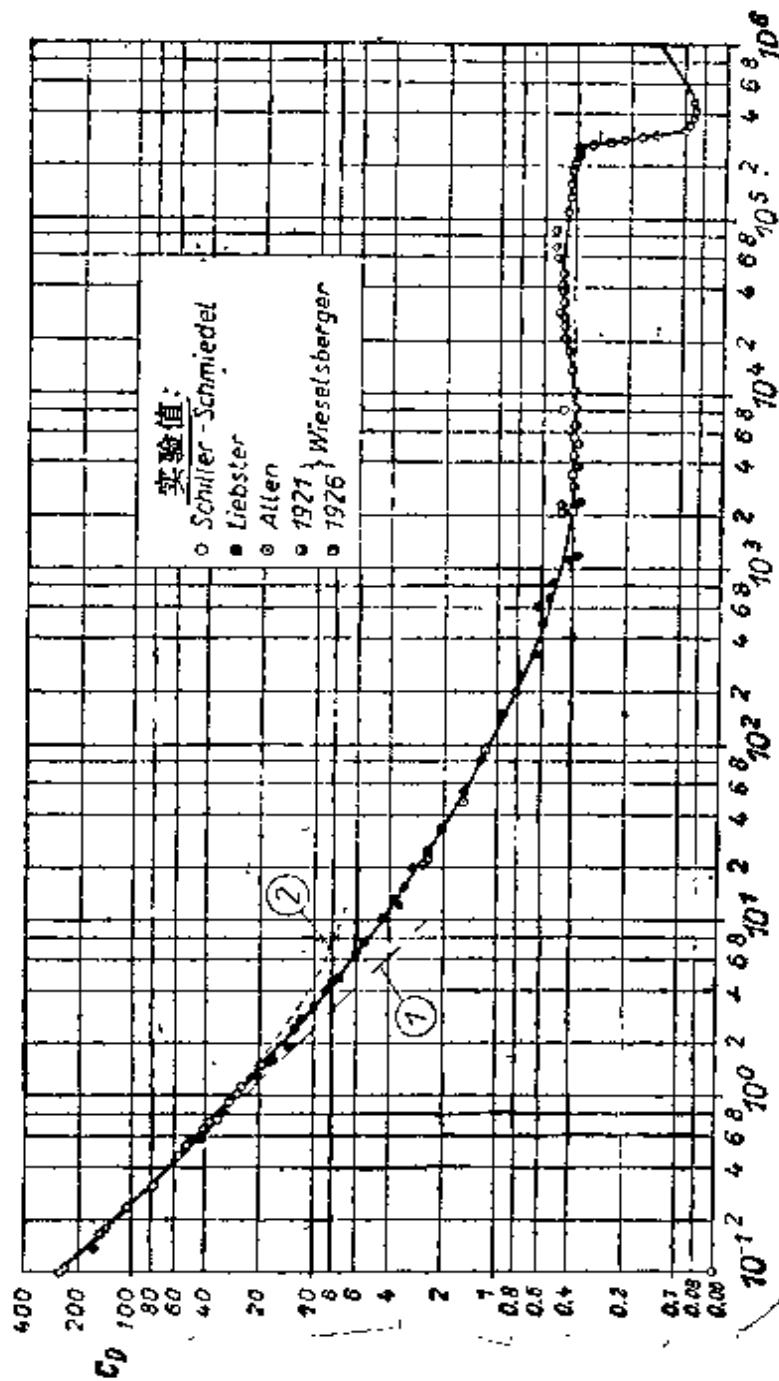


图 1.5 圆球阻力系数与 Reynolds 数的关系
 曲线 (1): Stokes 理论, 式 (6.10); 曲线 (2): Oseen 理论, 式 (6.13)

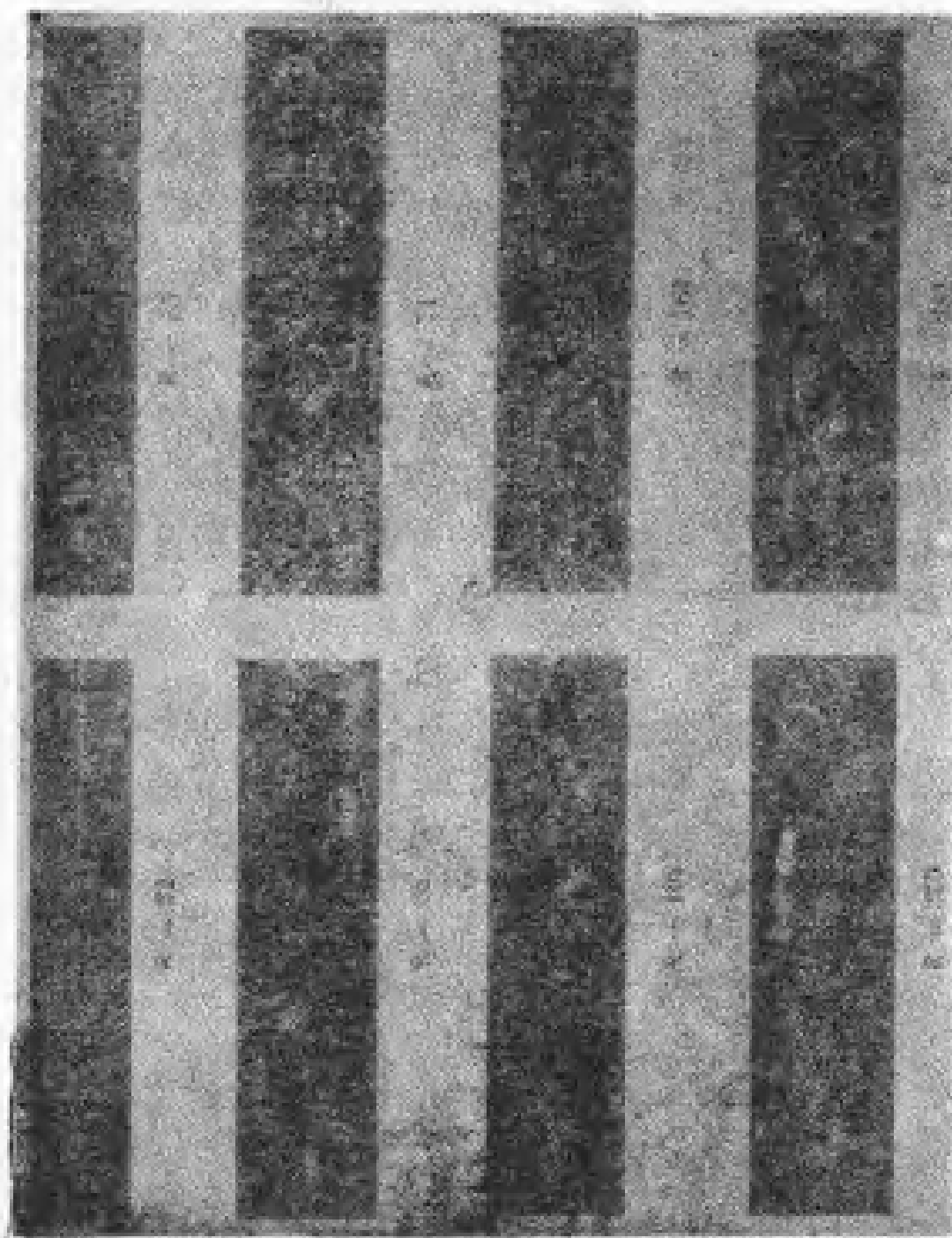


图 1.6 不同 Reynolds 下油腔圆柱的流场, 参照 Homann^[23]; 从层流到层流中涡流的转变, 从图 1.9 可以获得关于 $Re = 65$ 到 $Re = 201$ 的频率范围

数画出的圆球阻力系数的实验点。以后我们要比较详细地讨论阻力系数突然减小的问题。在圆柱情形下，它出现在 $R = 5 \times 10^5$ 左右，在圆球的情形下，它出现在 $R = 3 \times 10^5$ 左右。图 1.6 复制了 F. Homann^[7] 拍摄的油绕圆柱流动中流线的照片。这些照片给出了与 Reynolds 数有关的流场变化的清楚的概念。在小 Reynolds 数时，尾迹是层流的，但是，当 Reynolds 数增大时，首先形成非常规则的旋涡图象，即所谓的 Kármán 涡街。当 Reynolds 数更高时（这里未给出照片），旋涡的图象变得不规则了，并且在性质上已成为湍流。后来，S. Taneda^[14] 还拍摄了直至 $R = 3$ 的低 Reynolds 数时的这种照片。

在图 1.4 中可以看出，在 $R = 5 \times 10^5$ 和 10^6 之间的某个 Reynolds 数上，圆柱阻力系数达到最小值 $C_D \approx 0.3$ 。在这个 Reynolds 范围内，不存在规则的涡街。在超过 $R \approx 10^6$ 的极高 Reynolds 数时，正如从图 1.7 看到的那样，阻力系数以相当大的速率增加，图 1.7 是根据 A. Roshko^[13] 和 G. W. Jones, J. J. Cinotta 和

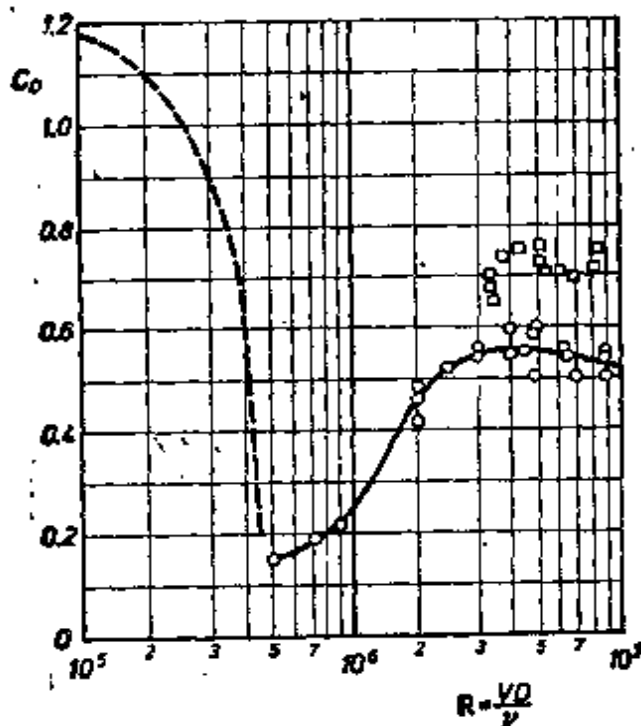


图 1.7 在极大 Reynolds 数以及 $M < 0.2$ 时圆柱的阻力系数，根据 A. Roshko^[13] 以及 G. W. Jones 和 J. J. Walker^[14] 的测量结果

R. W. Walker^[10] 的测量结果绘制的。当 $R = 10^7$ 时，阻力系数值达到 $C_D \approx 0.55$ 。根据上述作者的意见，当 $R > 3.5 \times 10^6$ 时，又重新建立起规则的涡街。

最近还进行了在极高 Reynolds 数时圆球阻力的研究^[11]。这里也像圆柱的情形那样，在 $R = 5 \times 10^5$ 左右，阻力系数有最小值 $C_D \approx 0.1$ ，在这以后，又显著地增加，然后在 Reynolds 数接近于 $R = 10^7$ 时，达到 $C_D \approx 0.2$ 。

圆球阻力随 Reynolds 数和 Mach 数变化的测量结果，已由 A. B. Bailey 和 J. Hiatt^[12] 以及 A. B. Bailey 和 R. F. Starr^[13] 等作了评论。

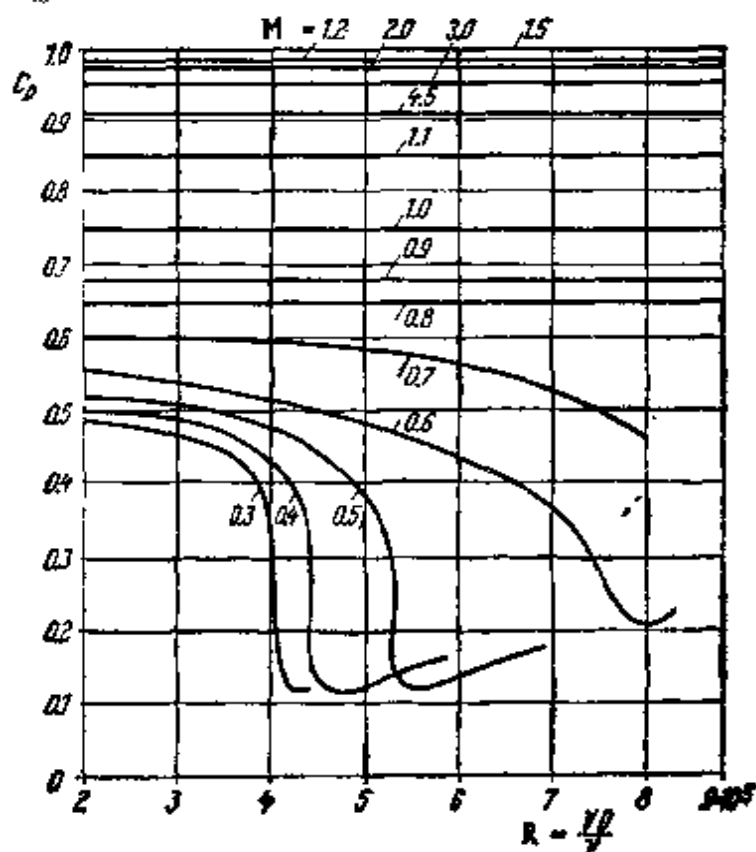


图 1.8 用 Reynolds 数和 Mach 数表示的圆柱阻力系数，根据 A. Naumann^[9,10] 的测量结果

压缩性的影响：在流体是不可压缩的假定下，我们进行了上述讨论，并由此发现，无量纲的因变量只是一个无量纲 Reynolds 数的函数。如果流体是可压缩的，那么它们还依赖于另一个无量

纲数,即 Mach 数 $M = V/c$ 。如本章 c 所述, Mach 数可以看成是流动介质可压缩性的一种度量。在可压缩性起重要作用的流动中,无量纲系数将同时依赖于两个参数 R 和 M , 于是式 (1.15) 应改为

$$C_L = f_1(R, M); \quad C_D = f_2(R, M). \quad (1.16)$$

图 1.8 中给出了上述函数关系的一个例子, 其中画出了圆球阻力系数 C_D 随 Reynolds 数 $R = VD/\nu$ 和 Mach 数 $M = V/c$ 变化的曲线。在 $M = 0.3$ 时, 对应的曲线实际上与图 1.5 中不可压缩流动的曲线重合。这表明直到 $M = 0.3$, Mach 数的影响是可以忽略不计的。另一方面, 在高 Mach 数时, Mach 数的影响却是很大的。关于这一点, 在图上涉及的范围内, 随着 Mach 数的增大, Reynolds 数的影响越来越小。

f. 理想流体理论和实验的比较

水和空气的运动是工程应用中最重要的情形。在这种情形下, 由于水和空气的粘性系数很小, 所以 Reynolds 非常大。因此有理由期望, 实验结果与完全忽略粘性影响的理论(即理想流体理论)之间能很好地吻合。不管怎么样, 因为理想流体理论已有大量的数学显解, 先把这种理论与实验加以比较, 看来总是有益的。

事实上, 对于某些类型的问题, 例如波的形成和潮汐的运动, 借助于理想流体理论就可以得到很好的结果¹⁾。本书所讨论的大多数问题研究固体通过静止流体的运动, 或是流体通过管道和渠道的运动。在这些情形下, 理想流体理论的用处是很有限的, 因为它的解不满足固壁上的无滑移条件, 而对于真实流体而言, 即使在很小的粘性系数时, 固壁上流体也是不滑移。理想流体中壁面上存在着滑移, 所以即使对于粘性系数很小的流体而言, 这一情况带来了如此根本的差别, 以致在某些情形下(例如非常细长的流线形物体), 两种解呈现出良好的一致性反而令人感到惊奇。理想流体理

1) 例如参阅 B. H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Dover, New York, 1945.

论和实验之间最大的矛盾是在阻力问题上。理想流体理论给出如下结论：当任意形状的物体在充满整个空间的静止流体中运动时，物体没有受到作用在运动方向上的力，即物体的阻力为零（d'Alembert 佯谬）。这个结论显然与观测到的事实相矛盾，因为当定常流动平行于流线体轴线流过该物体时，虽然阻力可能变得很小，但是在所有这样的物体上都能测到阻力。

作为实例，我们现在打算对绕圆柱的流动问题作出若干说明。图 1.9 中给出了理想流体的流线排列。根据对称性立即可以得出：沿运动方向的合力（阻力）等于零。在图 1.10 中，根据无摩擦

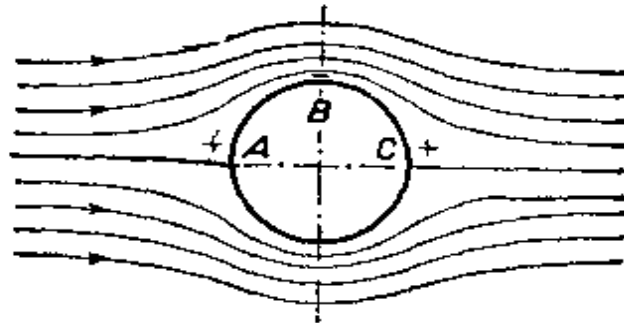


图 1.9 绕圆柱的无粘流

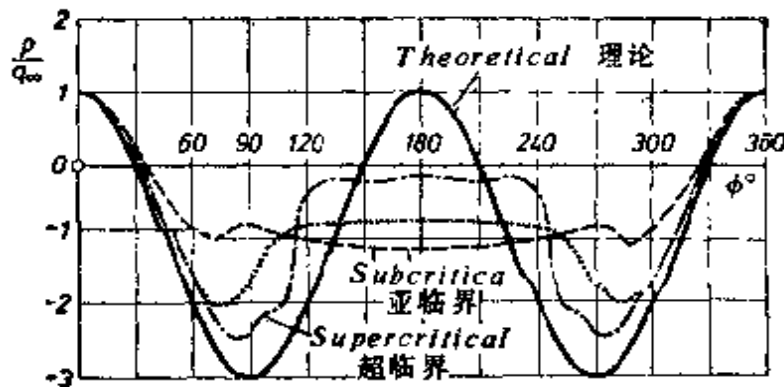


图 1.10 在亚临界 Reynolds 数和超临界 Reynolds 数范围内圆柱上的压力分布，根据 O. Flachsbart^[43] 和 A. Roshko^[15]。 $q_\infty = \frac{1}{2} \rho V^2$ 是

来流的动压头

- 无粘流
- $R = 1.9 \times 10^5$ } Flachsbart (1932)
- $R = 6.7 \times 10^5$ }
- $R = 8.4 \times 10^6$ Roshko (1961)

运动理论以及在三个不同 Reynolds 数值下的测量数据, 绘出了压力分布。在前缘, 所有测量的压力分布在一定的范围内与理想流体的压力分布相符。由于圆柱的阻力很大, 所以在后缘, 理论与测量结果之间的差异变得很大。在最低的亚临界 Reynolds 数 $R = 1.9 \times 10^5$ 时, 压力分布与位势流理论所给出的压力分布相差最大。对应于两个大 Reynolds 数 $R = 6.7 \times 10^5$ 和 $R = 8.4 \times 10^5$ 测量的压力分布, 要比最低 Reynolds 数下测量的压力分布更接近于位势理论曲线。下一章将详细地讨论压力分布随 Reynolds 数的这一巨大变化。我们在图 1.11 中复制了圆球子午线上的压力分布曲线。由此图看出, 对两个不同 Reynolds 数值测得的压力分布也显示出很大的差别, 并且也是较小的 Reynolds 数在大阻力系数的区域中, 而较大的 Reynolds 数在小阻力系数的区域中 (图 1.5)。在这种情形下, 对大 Reynolds 数所测得的压力分布曲线在物体周线的绝大部分上都非常接近于无粘流的理论曲线。

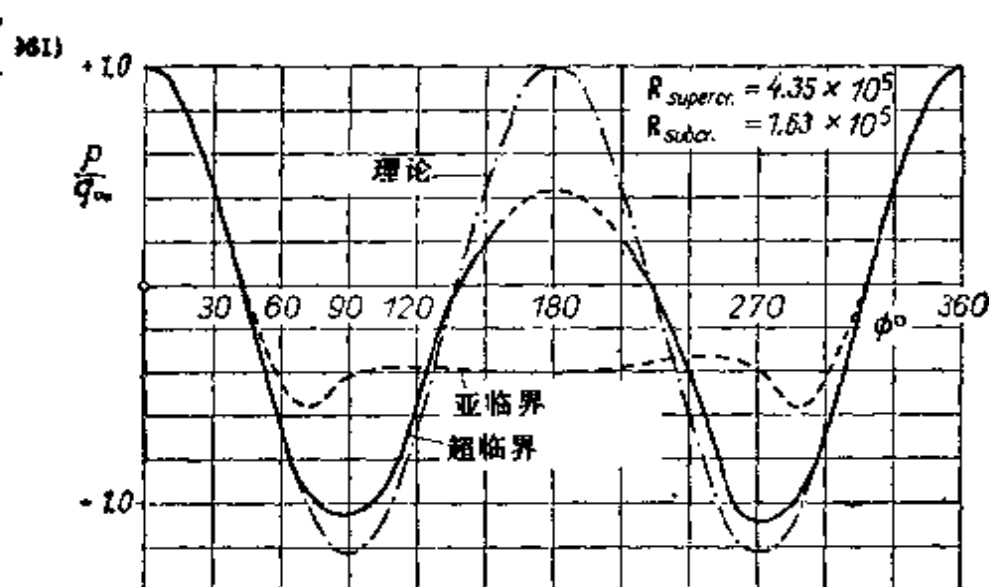


图 1.11 在亚临界 Reynolds 数和超临界 Reynolds 数范围内圆球上的压力分布, 根据 O. Flachsbart^[3] 的测量数据

对于流线体而言, 在流动平行于其轴线时, 理论计算的和实验测量的压力分布很一致^[5] (图 1.12)。在这里, 除了流线体后缘附近的一个很小的区域之外, 二者几乎在整个流线体的长度上都

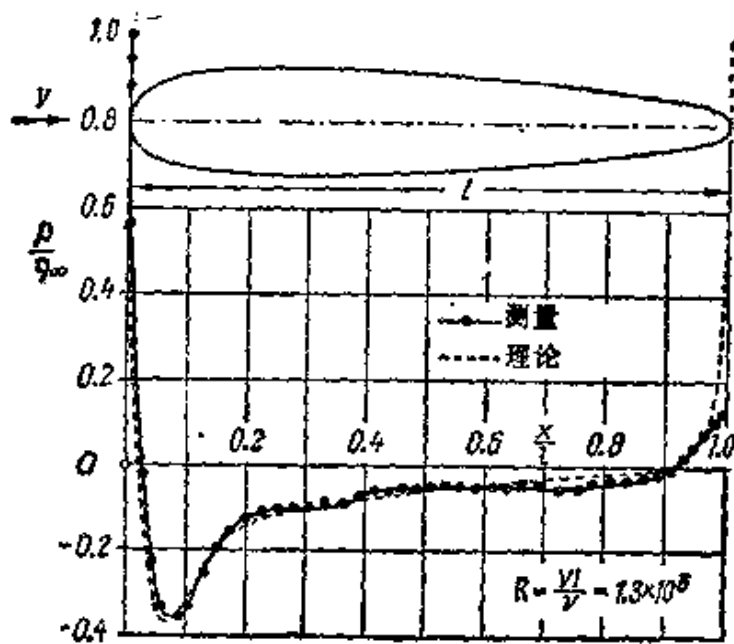


图 1.12 流线形旋成体的压力分布;理论与测量结果的比较,取自 Fuhrmann^[2]

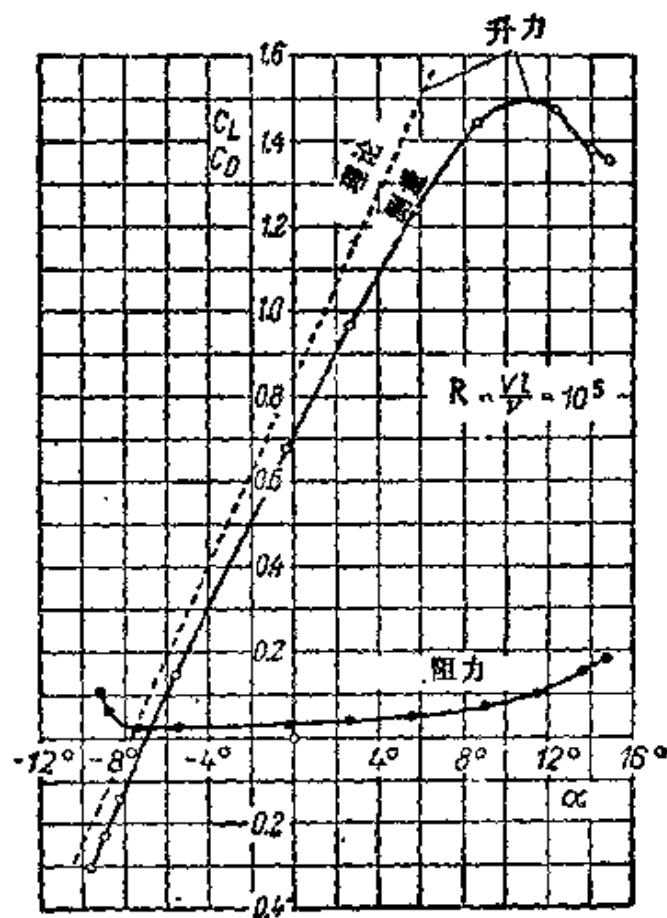


图 1.13 平面流中 Zhukovskii 翼型的升力系数和阻力系数,取自 Betz 的测量数据^[2]

一致。正如以后将要说明的那样，这种情形是沿下游方向压力逐渐增加的后果。

虽然，有关阻力计算，一般说来，理想流体理论不能得到有用的结果，但是由它可以非常成功地算出升力。根据 A. Betz^[2] 对无限翼展的 Zhukovskii 翼型的测量数据，在图 1.13 中画出了升力系数和攻角之间的关系，并将此关系与理论结果作出比较。在攻角 $\alpha = -10^\circ \sim 10^\circ$ 的范围内，可以看到二者很一致，而其中很小的差别可以用摩擦力的影响来解释。如图 1.14 所示，实验的压力分布和计算的压力分布也非常一致。图 1.13 和图 1.14 所显示出来的理论结果和实验结果之间的差异是边界层的位移作用所造成的；正如在第九章 § 中将要说明的，这种差异构成了边界层的高阶效应。

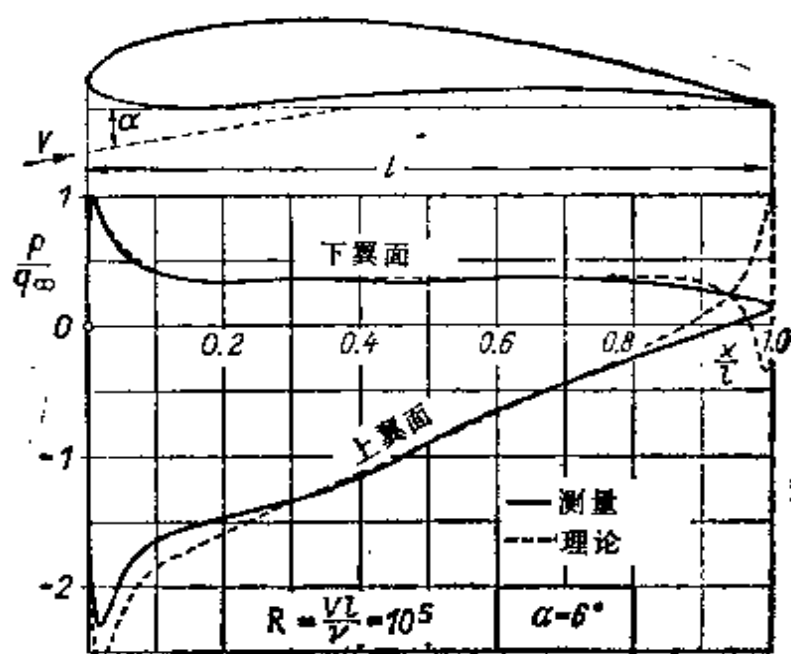


图 1.14 在升力相同时，Zhukovskii 翼型的理论压力分布与实验压力分布的比较，取自 A. Betz^[2]

第二章 边界层理论概述

a. 边界层概念

对于测量的压力分布与理想流体理论几乎一致的流体运动(如图 1.12 中绕流线体的流动或图 1.14 中绕翼型的流动),高 Reynolds 数时的粘性影响仅局限于紧贴壁面的薄层内。如果实际流体的无滑移条件不要求得到满足的话,那么实际流体与理想流体相比,两者的流场似乎没有什么明显的差别。然而,事实上流体要粘附于固壁上。这就意味着摩擦力阻滞了固壁附近薄层内流体的运动。在这个薄层内,流体的速度从固壁处的零(无滑移)逐渐增加到相应的无摩擦外流原有的值。我们要研究的这一薄层称之为**边界层**。边界层的概念是由 L. Prandtl^[25] 提出来的。

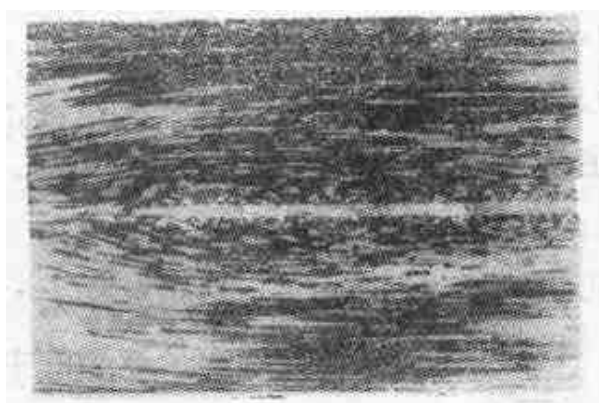


图 2.1 沿薄平板的运动(引自 Prandtl-Tietjens)

l = 平板长度; Reynolds 数 $R = Vl/\nu = 3$

图 2.1 是水沿着薄平板流动的照片,图上的流线是采用在水面撒微粒的办法显示的。照片上微粒踪迹的长度正比于流动的速度。我们发现,在固壁附近存在很薄的一层,层内的流速要比离固壁较远处的流速小得多。并且,沿着平板的顺流方向,边界层的厚度逐渐增加。图 2.2 绘出了这种平板边界层内的速度分布,不过该图已把边界层的厚度显著地夸大了。在平板前方,来流速度分

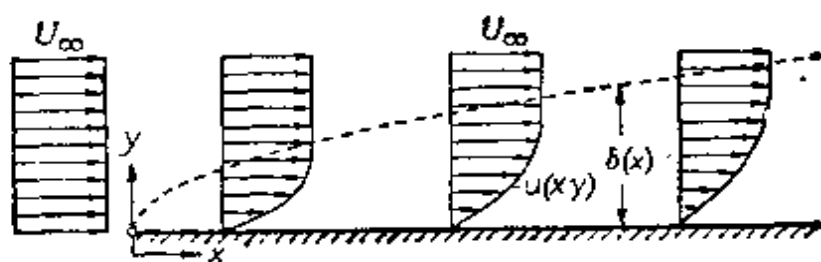


图 2.2 零攻角平板边界层的示意图, 平板平行于来流

布是均匀的。随着从前缘向下游方向距离的增加, 越来越多的流体受到影响, 受阻滞的薄层厚度 δ 也不断增加。显然, 边界层的厚度随粘性系数减小而减小。另一方面, 即使粘性系数非常小 (Reynolds 数很大), 由于边界层流动的横向速度梯度很大, 因此边界层内的摩擦切应力 ($\tau = \mu \partial u / \partial y$) 却相当大; 而在边界层之外, 摩擦切应力是很小的。这种物理图象启示我们, 为了便于作数学分析, 可以把小粘性流体的流场分成两个区域: 一个是壁面附近的薄边界层, 其中必须考虑摩擦; 另一个是边界层以外的区域, 其中由于摩擦产生的力很小, 可以忽略不计, 因此, 在这个区域中, 理想流体理论可以给出很好的近似结果。以后我们将会更详细地看到, 这样划分流场将给小粘性流体运动的数学理论带来相当大的简化。事实上, 正是在 Prandtl 引进了边界层概念之后, 才有可能对这种运动作理论上的研究。

现在, 我们先用纯物理概念, 而不是用数学来解释边界层理论的基本概念。从数学上研究边界层理论是本书的主要课题, 这些将放到以后各章去讨论。

边界层沿壁面整个浸湿长度都粘附在物体上, 然而边界层内受阻滞的流体质点并不总是保持在这个薄层之内。在某些情形下, 沿着顺流方向, 边界层厚度会显著增加, 而且边界层内的流动会变成倒流。这就使得受阻滞的流体质点被迫向外流动。这种现象意味着边界层从壁面分离。下面我们就叙述**边界层分离**。分离现象总是与物体尾迹中涡的形成以及能量的大量损失联系在一起的。它主要发生在钝体(如圆柱和圆球)附近。在这类物体后面, 存在一个急剧减速的流动区域(所谓尾迹), 其中压力分布和无摩

擦情形相比有很大偏离，正如从图 1.10 (圆柱)和图 1.11 (圆球)所看到的那样。这类物体之所以有大的阻力，可以用压力分布有大的偏离来加以解释，而压力分布的偏离又是由于边界层分离的结果。

边界层厚度的估算：未分离的边界层厚度可以容易地用下述方法估算出来。在边界层外面，由于粘性很小，相对于惯性力而言，摩擦力可以略去不计。但是在边界层内，它们的量级却是相当的。正如第一章 c 中所述，¹⁾单位体积的惯性力等于 $\rho u \partial u / \partial x$ 。对于长为 l 的平板，梯度 $\partial u / \partial x$ 正比于 U/l ，其中 U 为边界层外缘的速度。因此，惯性力具有 $\rho U^2/l$ 的量级。另一方面，²⁾单位体积的摩擦力等于 $\partial \tau / \partial y$ ，在假定流动为层流的情况下，它等于 $\mu \partial^2 u / \partial y^2$ 。在垂直于壁面的方向上，速度梯度 $\partial u / \partial y$ 的量级是 U/δ ，所以单位体积的摩擦力为 $\partial \tau / \partial y \sim \mu U / \delta^2$ 。从摩擦力与惯性力相当的条件，我们得到如下关系式：

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{\rho U^2}{l},$$

或者解出边界层厚度 δ ³⁾：

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu l}{U}}. \quad (2.1)$$

到目前为止，比例因子的值尚未确定。以后（第七章）我们将从 H. Blasius^[4] 给出的精确解推导出这个比例因子，并将证明它近似地等于 5。于是，对于层流边界层我们有

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu l}{U}}. \quad (2.1a)$$

若以平板长度 l 为参考长度，无量纲边界层厚度变为

$$\frac{\delta}{l} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} = \frac{5}{\sqrt{R_l}}, \quad (2.2)$$

其中 R_l 表示以平板长度 l 为特征长度的 Reynolds 数。从方程

1) 边界层厚度更严格的定义在本节末尾给出。

(2.1) 可以看出, 边界层厚度正比于 $\sqrt{\nu}$ 和 \sqrt{l} . 如果采用从平板前缘量起的距离变量 x 代替 l , 那么, 显然 δ 的增加与 \sqrt{x} 成正比. 另一方面, 随着 Reynolds 数增加, 边界层相对厚度 δ/l 以 $1/\sqrt{R}$ 的比例减小, 所以在无摩擦流动的极限情形下, 随着 $R \rightarrow \infty$, 边界层厚度变为零.

现在, 我们可以估算出壁面上的切应力 τ_0 , 进而估算出总的阻力. 根据 Newton 摩擦力定律 (1.2), 我们有

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0,$$

其中下标“0”表示壁面上(即 $y = 0$ 处)的值. 利用 $(\partial u / \partial y)_0 \sim U/\delta$ 的关系, 我们得到 $\tau_0 \sim \mu U/\delta$, 将方程 (2.1) 的 δ 值代入, 则有

$$\tau_0 \sim \mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu l}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{l}}. \quad (2.3)$$

因此, 壁面附近的摩擦切应力正比于 $U^{3/2}$.

正如第一章所解释的, 我们可以组成一个以 ρU^2 为参考量的无量纲应力, 即

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{R_l}}. \quad (2.3a)$$

该结果与第一章中量纲分析的结果是一致的, 那里曾预示, 无量纲切应力仅取决于 Reynolds 数.

平板的总阻力 D 等于 $bl\tau_0$, 其中 b 表示平板的宽度. 因此, 借助方程 (2.3), 我们得到

$$D \sim b\sqrt{\rho\mu U^3 l}. \quad (2.4)$$

由此看来, 层流摩擦阻力正比于 $U^{3/2}$ 和 $l^{1/2}$. 正比于 $l^{1/2}$ 意味着平板长度加倍时, 阻力并不加倍. 我们可以这样来理解这个结果: 因为愈往后缘, 边界层愈厚, 所以平板下游部分受到的阻力小于前面部分的阻力. 最后, 按照公式 (1.14), 并将式中的参考面积 A 换为浸湿面积 bl , 则可以写出无量纲阻力系数的表达式. 由方程

(2.4) 可以得出

$$C_D \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{R_l}}$$

根据 H. Blasius 精确解, 其比例因子为 1.328, 所以在平行流动中, 层流平板的阻力系数为

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R_l}} \quad (2.5)$$

下面举一个数值例子来说明上述估算。根据实验结果, 这里约定, 当 Reynolds 数 Ul/ν 不超过 $5 \times 10^5 \sim 10^6$ 时, 我们得到的是层流边界层。当 Reynolds 数更大时, 则边界层变成湍流边界层。现在我们来计算当空气 ($\nu = 0.144 \times 10^{-3} \text{ft}^2/\text{s}$) 以速度 $U = 48 \text{ft/s}$ 流过长 $l = 3 \text{ft}$ 的平板时, 平板末端处边界层的厚度。此时 $R_l = Ul/\nu = 10^6$, 由方程 (2.2) 得到

$$\frac{\delta}{l} = \frac{5}{10^3} = 0.005; \quad \delta = 0.18 \text{in.}$$

由公式 (2.5) 得出阻力系数 $C_D = 0.0013$ 。与圆柱阻力系数 (图 1.4) 相比, 这个值是非常小的, 因为在圆柱阻力系数中还包含有压差阻力。

边界层厚度的定义: 边界层厚度的定义在一定程度上是任意的, 因为从边界层内的速度过渡到层外的值是渐近地发生的。但是, 这实际上并不重要, 因为在离开壁面不远的地方, 边界层内的速度就已经非常接近于外部速度了。因此, 可以把边界层厚度定义为: 速度与外部速度相差 1% 处到壁面的距离。用这个定义, 公式 (2.2) 的数值因子为 5。有时我们不用边界层厚度而是用另一个量, 即**位移厚度** δ_1 (图 2.3), 其定义为

$$U\delta_1 = \int_0^{\infty} (U - u) dy. \quad (2.6)$$

位移厚度表示由于边界层的形成, 使外部流线移动的距离。在平行来流和零攻角平板情形下, 位移厚度大约是方程 (2.1a) 给出的边界层厚度 δ 的 $\frac{1}{3}$ 。

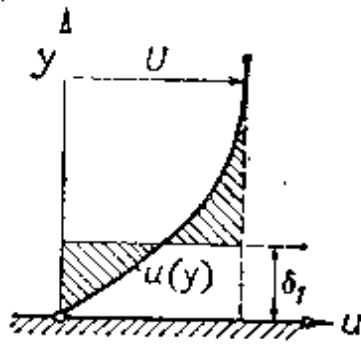


图 2.3 边界层的位移厚度 δ_1

b. 分离及涡的形成

处于平行流中和零攻角下的平板边界层是特别简单的，因为这时整个流场中的静压保持不变。由无摩擦流动的 Bernoulli 方程可知，既然边界层外面的速度保持不变，那么压力也就保持不变。再者，在任一距离 x 处，边界层横截面上的压力也明显地保持不变。因此，在同一距离 x 的横截面上，边界层内各点的压力与其相应的边界层外缘的压力大小相等。同样的结论亦可应用于具有任意外形的物体，这时边界层外缘的压力沿着固壁随弧长而变化。这一事实可以说成是：边界层外部的压力“施加”在边界层上。因此，在平板绕流情形下，整个边界层内的压力保持不变。

前面说过，边界层的分离现象与边界层内的压力分布密切相

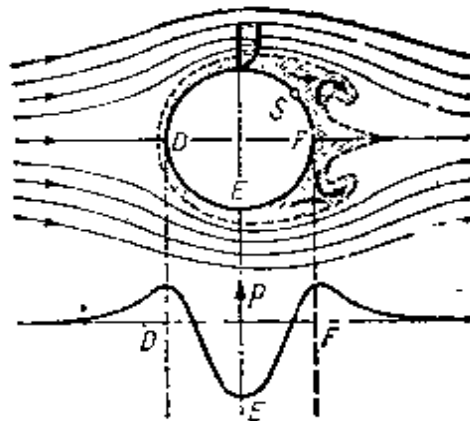


图 2.4 圆柱上边界层分离及涡的形成(示意图), S = 分离点

关。在平板边界层内不会出现倒流,所以也就不会发生分离。

为了阐明边界层分离这一非常重要的现象,让我们来研究绕钝体(例如圆柱体)的流动,见图 2.4。在无摩擦流动中,流体质点在从 D 到 E 的迎风面上是加速的,在从 E 到 F 的背风面上是减速的。因此从 D 到 E 压力下降,而从 E 到 F 压力增加。当流动突然开始时,最初瞬间的运动非常接近于无摩擦流动,并且只要边界层很薄,那么运动就一直保持这种性质。在边界层外缘,沿着 DE 压力向动能转化;反之,沿着 EF 动能向压力转化,所以流体质点到达 F 点时的速度与它在 D 点的速度相同。由于外部压力施加在边界层上,因此在边界层内贴近固壁运动的流体质点处于和边界层外的质点同样的压力场的影响之下。因为薄边界层内摩擦力很大,流体质点在从 D 到 E 的运动过程中,消耗了大量的动能,以致剩下的动能太小,不能克服从 E 到 F 的“压力势垒”。所以,这样的质点在 E 到 F 之间的升压区内不能走得很远,而终于被滞止下来。

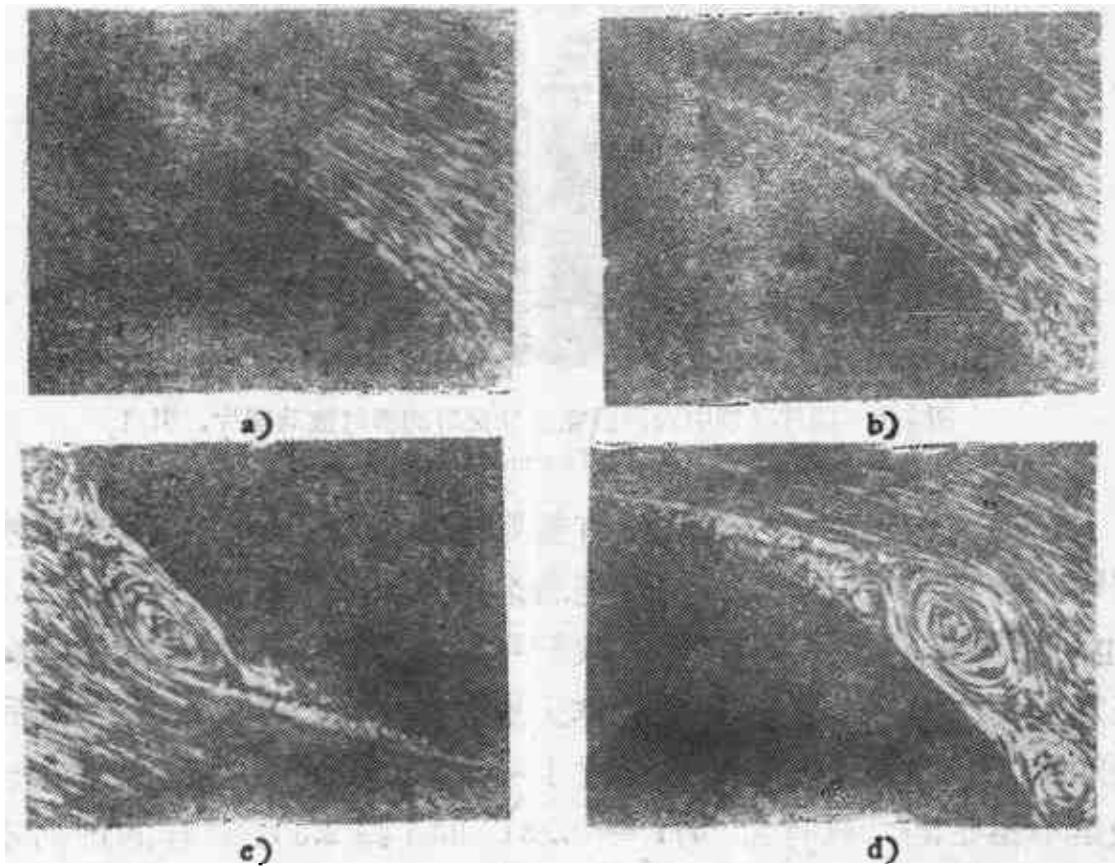


图 2.5 a, b, c, d 边界层分离随时间的发展。引自 Prandtl-Tietjens^[27]。
亦见图 15.5

然后，外部压力使它向相反方向运动。图 2.5 的一组照片表明流动开始时，在一个圆形物体下游附近流动随时间发展的过程。图中的流动是采用在水面撒铝粉的办法显示的。该图表明，沿物体表面压力(自左到右)是增加的。通过那些短的轨迹，可以很容易地辨认出边界层。图 2.5a 是在运动开始之后不久拍摄的，此时，倒流刚刚出现。图 2.5b 中倒流已向前伸展了一个相当大的距离，同时边界层明显增厚。图 2.5c 表明这种倒流是怎样形成涡的。图 2.5d 中涡的尺寸仍在进一步增大。不久涡就脱体，并随着流体向下游运动。这种情形完全改变了尾迹流场，与无摩擦流动相比，压力分布发生了根本性的变化。运动的最终状态可参看图 2.6。正如图 1.10 的压力分布曲线所示，在圆柱后面的旋涡区域内存在相当大的吸力，这种吸力使物体产生了很大的压差阻力。

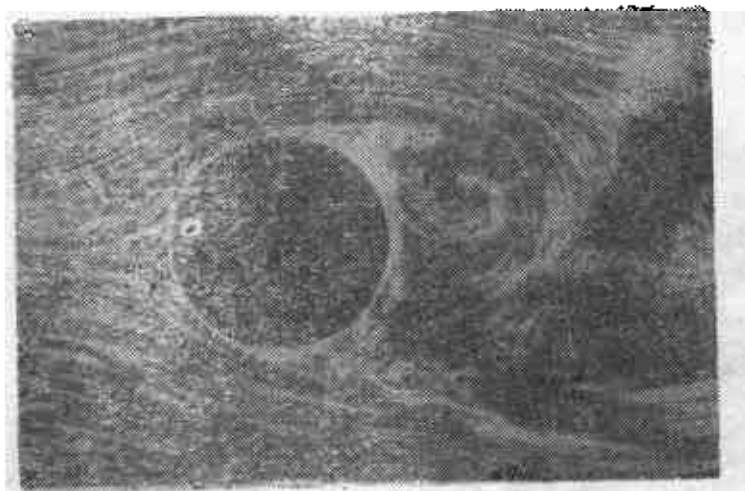


图 2.6 圆柱尾迹中边界层完全分离时的瞬时流动照片。引自 Prandtl-Tietjens^[21]

在远离物体处，可辨认出有规则的涡的图象。这些涡交替地按顺时针和逆时针运动。这就是著名的 Kármán 涡街^[20]，见图 2.7 (也可见图 1.6)。在图 2.6 中，我们可以看到一个顺时针运动的涡在加入到涡街以前，即将从物体上脱开的情形。Kármán 在其后继的论文^[21]中证明这样的涡街对于平行于自身的小扰动来说，一般是不稳定的。只有当 $h/l = 0.281$ 时(图 2.8)，这样的排列才是随遇平衡的。涡街以速度 w 运动，它比物体前方来流速度 U 要小。这可以看成是一种高度理想化的物体尾迹的运动图象。当物

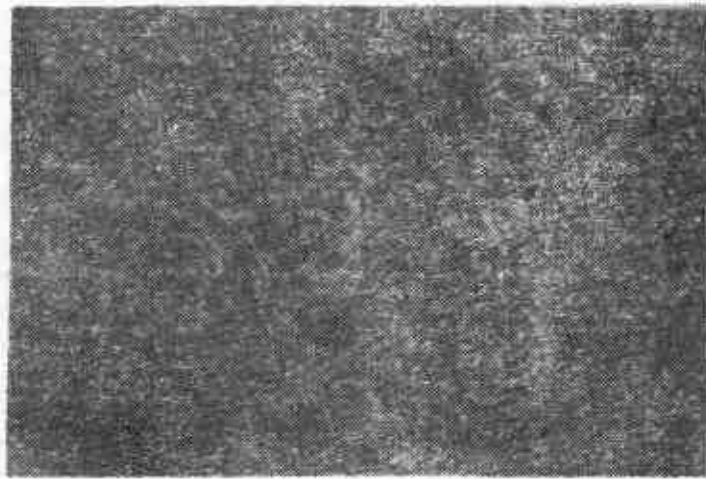


图 2.7 Kármán 涡街,引自 A. Timme^[54]

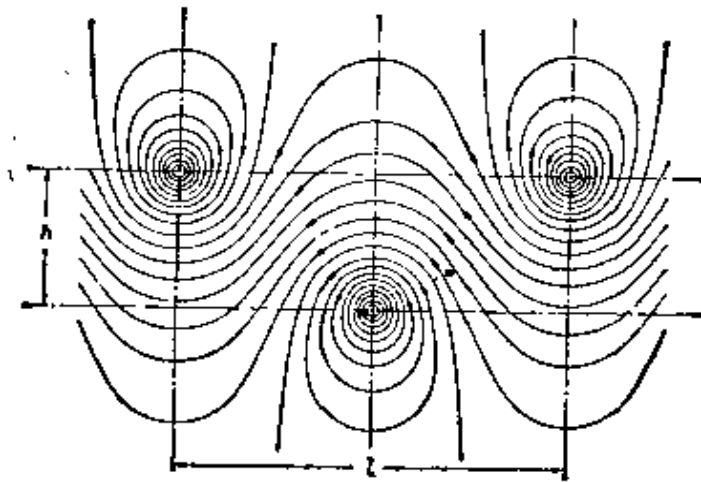


图 2.8 涡街中的流线 ($h/\lambda = 0.28$). 在无穷远处流体静止, 涡街向左运动

体在流体中运动时, 涡街速度场所具有的动能必然不断地增加, 基于这种阐述, 可以根据理想流体理论推导出阻力公式. 单位长度柱体上阻力的大小可以表示为

$$D = \rho U^2 h \left[2.83 \frac{u}{U} - 1.12 \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right],$$

式中宽度 h 和速度比 u/U 必须从实验获得.

W. W. Durgin 等人^[13]较近期的实验研究表明, 在一个加速的涡街中, 涡的纵向间距与横向间距之比有相当大的变化, 结果使有规则排列的涡转变为湍流尾迹.

圆柱: 对于涡从圆柱后面脱落进入 Kármán 涡街的频率, 最

初由 H. Blenk, D. Fuchs 和 L. Liebers^[3] 等人作了广泛的测量。只有在 Reynolds 数 VD/ν 约为 60—5000 的范围内才能观察到规则的 Kármán 涡街。当 Reynolds 数低于 60 时, 尾迹是层流的, 并且具有图 1.6 中前两张照片所显示的样式; 当 Reynolds 数高于 5000 时, 则是完全的湍流混合尾迹。测量表明, 在上述出现规则 Kármán 涡街的 Reynolds 数范围内, 无量纲频率

$$\frac{nD}{V} = S \quad (\text{Strouhal 数})$$

仅与 Reynolds 数有关, S 称为 Strouhal 数^[37]。根据 A. Roshko^[32] 所作的测量, 图 2.9 绘出了 S 随 Reynolds 数变化的关系, 也可参阅文献 [15]。对不同直径 D 的圆柱, 在不同速度 V 下测得的实验点很好地排列在一条曲线上。当 Reynolds 数较高时, Strouhal 数近似为常数, $S = 0.21$ 。从图 2.9 可以看出, 该 S 值可一直较好

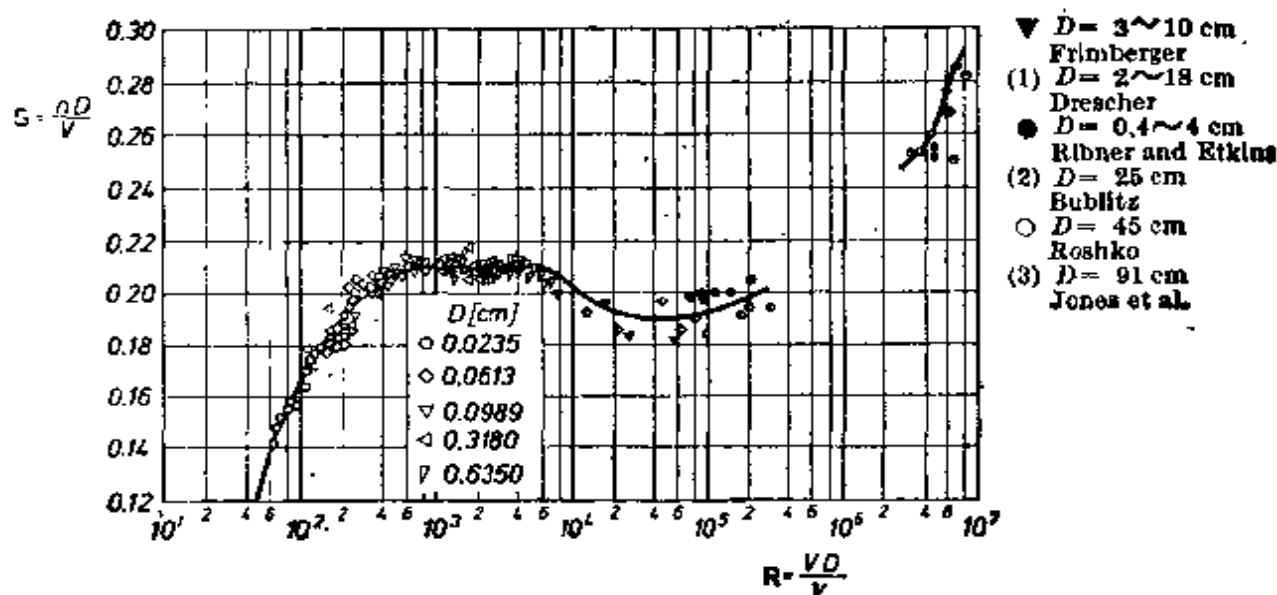


图 2.9 圆柱绕流中 Kármán 涡街的 Strouhal 数 S 随 Reynolds 数 R 的变化曲线。数据是由 A. Roshko^[31,32], H. S. Ribner, B. Etkins 和 K. K. Nelly^[30], F. F. Reitz 和 L. F. G. Simmons^[23] 以及 G. W. Jones 等人(第一章文献 [8]) 测量得到的。在 $R = 3 \times 10^1 \sim 3 \times 10^6$ 范围内(低阻超临界状态, 图 1.4), Kármán 涡街不再是规则的。仅在 $R > 4 \times 10^6$ 以后, 才再次形成有规则的图象; 与 $R = 10^3 \sim 3 \times 10^5$ 时 $S \approx 0.20$ 相比, 现在 Strouhal 数有较大的值, $S = 0.26 \sim 0.30$

地保持到 Reynolds 数 $R = 2 \times 10^5$, 这正是处于亚临界区域(也可参看图 1.4)。若 Reynolds 数继续增高, 例如 $R = 10^6$ 附近, 这种规则的涡街不再存在。但是根据 A. Roshko^[31] 的实验结果, 在极高 Reynolds 数 ($R > 3 \times 10^6$) 时, 这种规则的涡街又会重新出现, 此时 Strouhal 数为 $S = 0.27$ 左右。关于这一点, 亦可查阅 P. W. Bearman^[32] 的论文。当圆柱直径很小, 而且来流是中等速度时, 所产生的频率正处于声频范围内。例如由电线发出的那种熟悉的“风鸣声”, 就是这种现象的结果。当速度 $V = 10\text{m/s}$ (30.48ft/s), 电线直径为 2mm(0.079in) 时, 其频率为 $n = 0.21 \times (10/0.002) = 1050\text{s}^{-1}$, 相应的 Reynolds 数 $R \approx 1200$ 。

零攻角平板: 直到最近, H. J. Heinemann 等人^[18]才证实, 在其它情况下, 尤其是在细长体后面以及在可压缩流中也存在有规则的 Kármán 涡街。图 2.10 的照片显示出 Mach 数 $M_\infty = 0.61$ 时, 零攻角平板后面的这种有规则的涡街。图 2.11 中有一条 Strouhal 数随 Mach 数变化的曲线, 其中 Strouhal 数是以平板厚

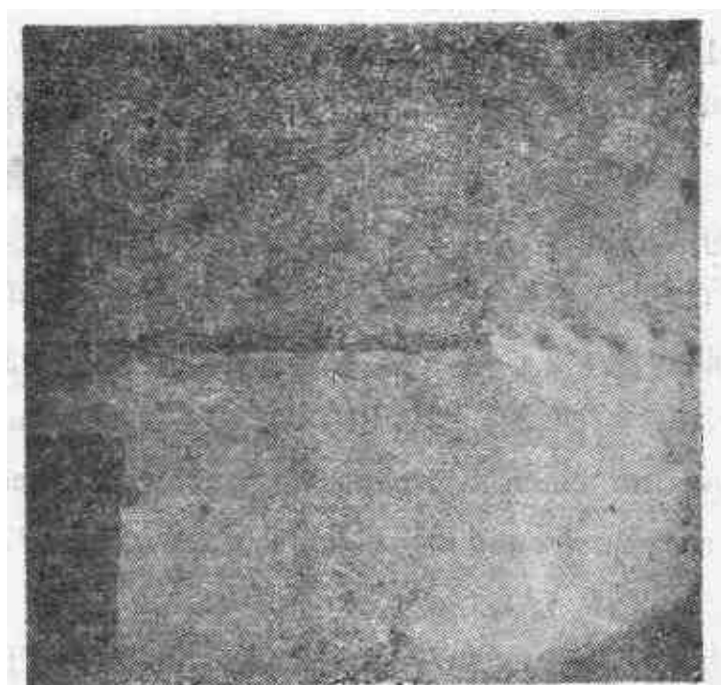


图 2.10 在 Mach 数 $M=0.61$, Reynolds 数 $R=Vl/\nu=6.5 \times 10^5$ 时, 零攻角平板后面的 von Kármán 涡街, 引自 H. J. Heinemann 等人^[18]。平板长 $l=60\text{mm}$, 厚度比 $d/l=0.05$ 。曝光时间约为 20 毫微秒 ($20 \times 10^{-6}\text{s}$)

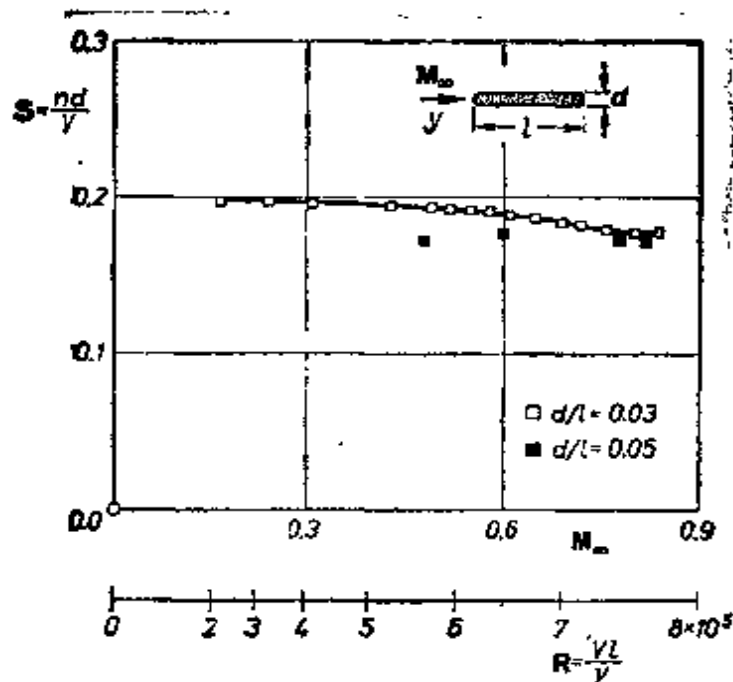


图 2.11 零攻角平板后面涡街的 Strouhal 数 $S = nd/V$ 随 M 数的变化, 引自 H. J. Heinemann 等人^[12]

度 d 计算的, 即 $S = nd/V$; Mach 数仅限于 $M = 0.2 \sim 0.85$ 的亚声速范围。该图表明, 这种情形与图 2.9 中圆柱情形一样, 也是 $S \approx 0.20$ 。以平板长度为参考量的相应的 Reynolds 数范围是 $R = Vl/\nu = 3 \times 10^5 \sim 8 \times 10^5$, 此时流动是层流的。

林家翘^[22]和 U. Domm^[41] 的两篇论文各自研究了 Kármán 涡街的理论。E. Wedemeyer^[38a] 从理论上探讨了垂直于来流的平板后面涡对的形成问题, 而 T. Sarpkaya^[33b] 则对大攻角下的平板进行了理论和实验研究 (见图 4.2); 在这方面也可参阅 L. Rosenhead^[32a] 较早期的论文。读者有兴趣的话, 还可以查阅 L. Prandtl 对 K. Friedrichs 的演讲所作评论的原文 (“Bemerkung über die ideale Strömung um einen Körper bei verschwindender Zähigkeit”, Lectures on aerodynamics and allied subjects, Aachen 1929, Springer, Berlin 1930, pp. 51, 52)。

分离: 边界层理论在解释分离现象时阐明, 除了有粘性阻力以外还有压差阻力(或型阻), 从而使该理论获得了成功。在有逆压梯度的区域内, 边界层分离的危险总是存在的, 尤其是在压力曲线陡增的地方(如在钝底物体的背面), 边界层分离的可能性也加大。

另外，上述论证也解释了图 1.12 所示的关于细长流线体的实验压力分布与无摩擦流动所计算的压力分布差别甚小的原因。在细长体绕流中，沿流向压力增加十分缓慢，以致不会发生分离，因此也就没有明显的压差阻力。总阻力中主要是粘性阻力，所以总阻力很小。

边界层内分离点附近的流线如图 2.12 所示。由于出现了倒流，所以边界层显著增厚；与此同时，边界层内的流体也要向外部区域流动。在分离点上，有一条以一定的角度与固壁相交的流线；而分离点本身，是由垂直于壁面的速度梯度为零的条件确定的：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{壁面}} = 0 \text{ (分离)}. \quad (2.7)$$

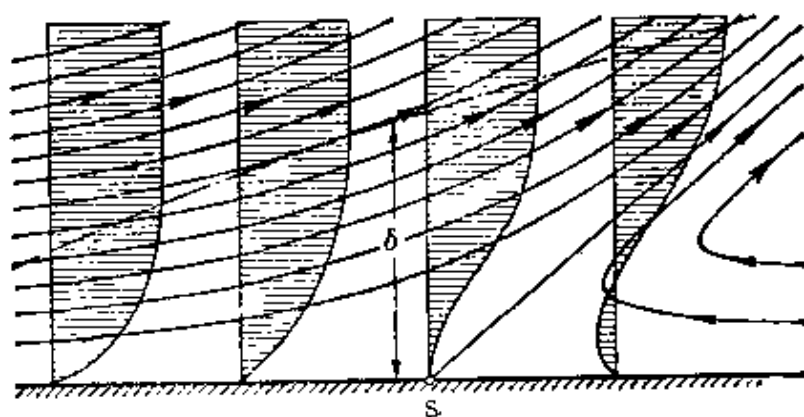


图 2.12 边界层内分离点附近的流动示意图。S = 分离点



图 2.13 在大扩张槽中有分离的流动，引自 Prandtl-Tietjens^[17]

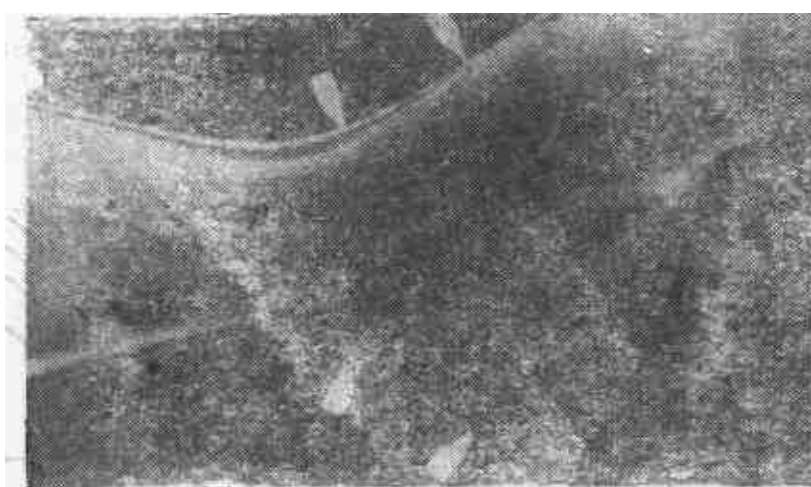


图 2.14 在大扩张槽的上壁有边界层抽吸时的流动

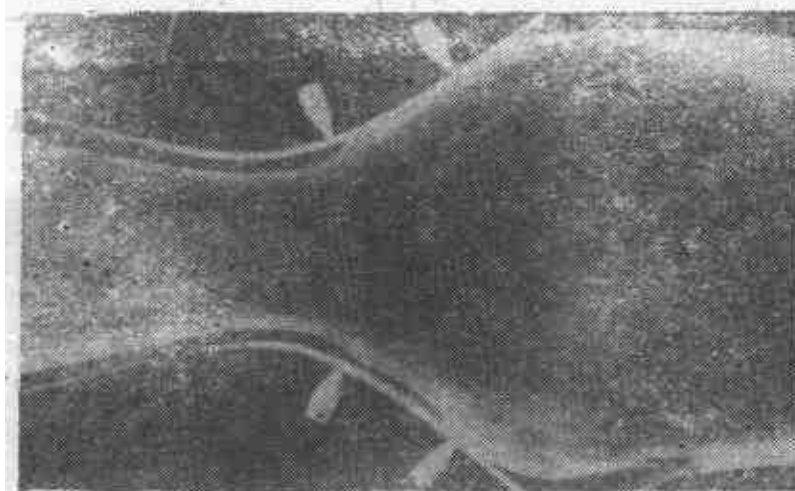


图 2.15 在大扩张槽的两壁均有边界层抽吸时的流动

度以及壁面附近的摩擦，而与壁面曲率等其它因素无关。第一张照片是流体垂直地流向固壁的运动(平面驻点流)。在对称平面上沿着通向驻点的流线,压力顺流向有相当大的增加,但是因为不存在壁面摩擦,所以并不产生分离。在直立的固壁上也不发生分离,因为这时在对称平面的两侧,边界层内的流动是沿着压力减小的方向进行的。现在,如果在垂直于固壁的对称平面上再放置一块薄板(见图 2.17),这时在它上面新形成的边界层内沿流动方向压力是增加的,因此在平板壁面上出现了分离。分离的影响范围对物体形状的微小变化是相当敏感的,尤其是在物形的变化强烈地影响到压力分布的时候,更是如此。图 2.18 的照片给出了一个很有启发性的实例。这是一组汽车模型的流场照片 (Volkswagen

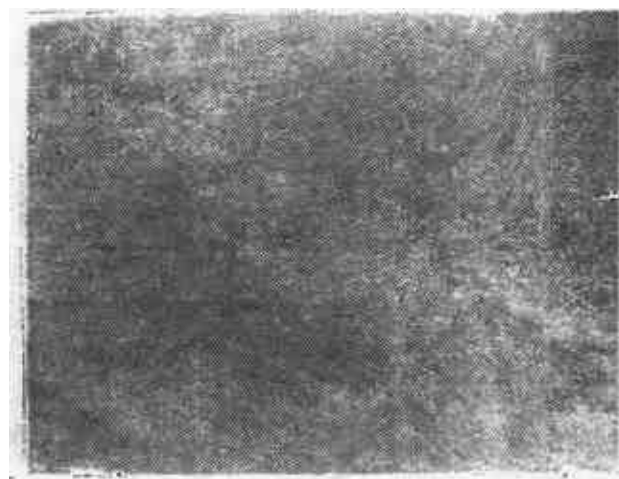


图 2.16 无分离的自由驻点流,由 Foettinger 摄影

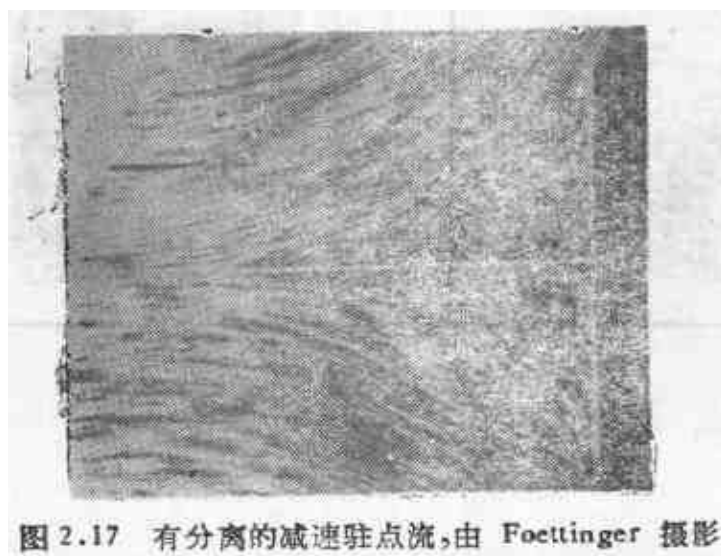


图 2.17 有分离的减速驻点流,由 Foettinger 摄影

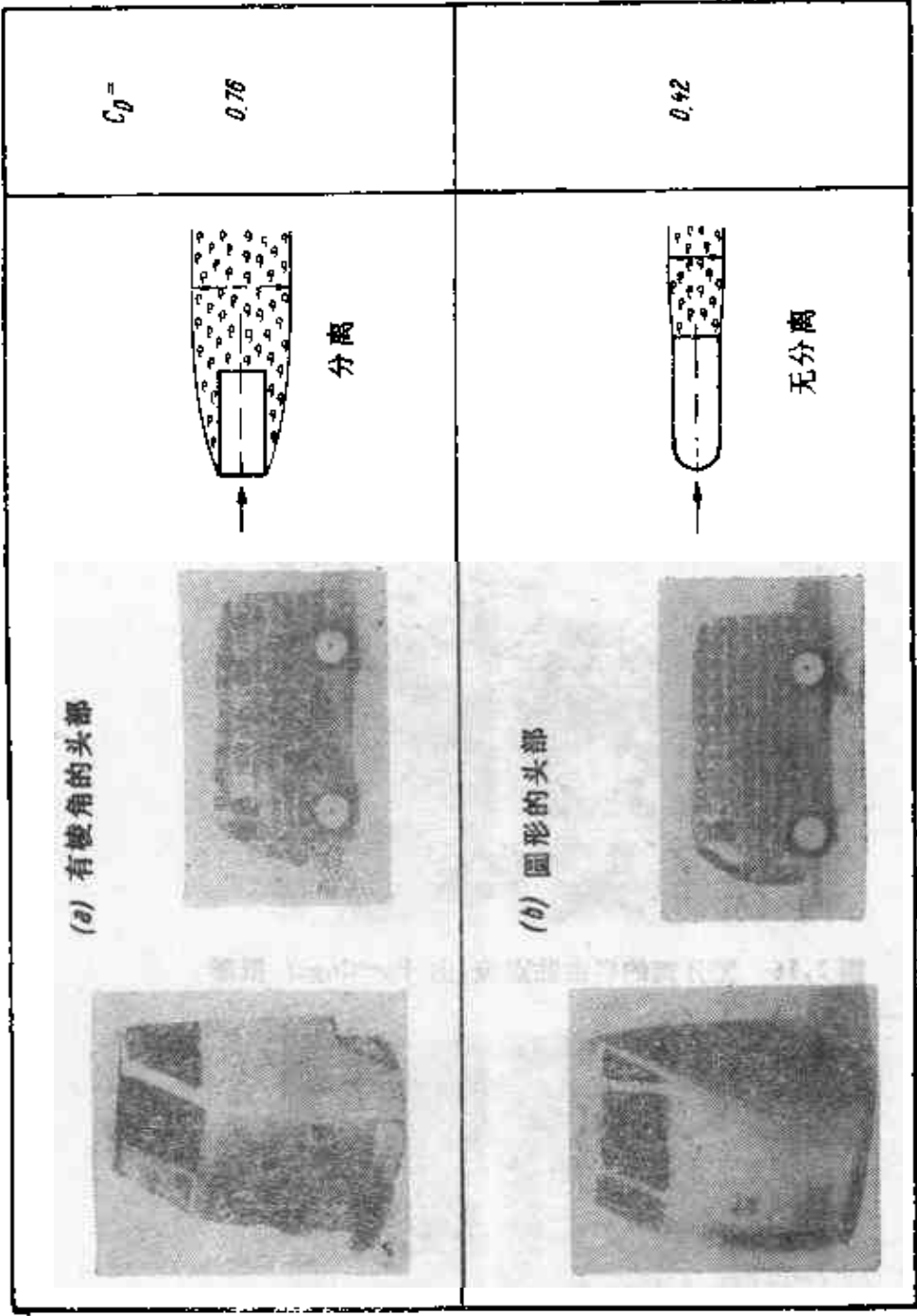
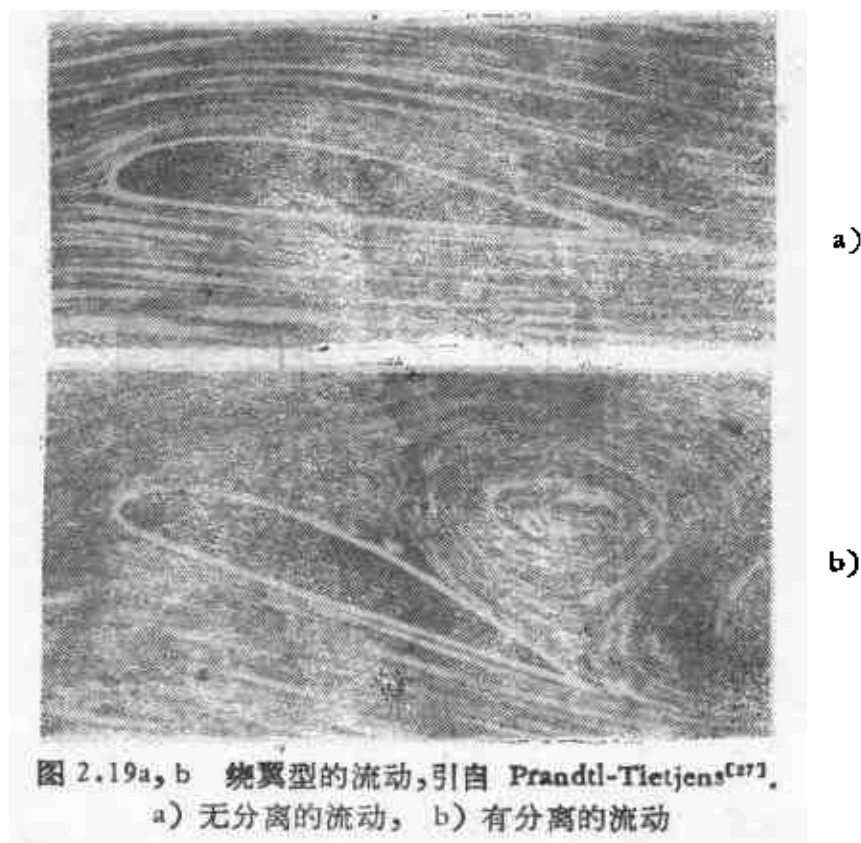


图 2.18 汽车模型 (Volkswagen 运货车) 的绕流, 取自 E. Moeller^[23].
 a) 有棱角的头部, 沿整个侧壁流动分离, 阻力系数大 ($C_D = 0.76$); b) 圆形的头部, 侧壁无分离, 阻力系数小 ($C_D = 0.42$)

运货车)^[24,35]。如果模型头部形状是平头带棱角的(图2.18(a)),气流绕过前面相当尖的拐角时会引起很大的吸力,随之沿侧壁压力有很大增加。这就导致了完全分离,并在身后形成宽大的尾迹。具有这种棱角外形的汽车,其阻力系数达 $C_D = 0.76$ 。若换成圆头外形(如图2.18(b)所示),则前端附近的大吸力和侧壁的分流都消失了。同时,阻力系数显著减小,其值为 $C_D = 0.42$ 。W. H. Hucho^[19]还在非对称流动条件下对这种车辆作了进一步的研究。

分离对于翼型的升力特性也是重要的。在小攻角(直至 10° 左右)时,翼型两边的流动都不产生分离,因而非常接近于无摩擦情形。关于这种情形(图2.19(a)的无分离流动)的压力分布已在图1.14中给出。随着攻角增加,翼型吸力面上的压力增加变得愈加急剧,所以在它上面存在着分离的危险。当攻角增大到 15° 左右时,分离终于发生了。分离点非常接近前缘。图2.19b显示,尾迹中有一个很大的“死水”区。产生升力的无摩擦流动图象完全被扰乱,而且阻力变得非常大。分离的开始与翼型最大升力的出现几乎同时发生。



结构物空气动力学：绕地面上各种非流线体（例如结构物和建筑物）的流动，要比绕流线体和飞机的流动复杂得多。复杂的主要原因在于地面的存在以及由此而在湍流风中产生的剪切力。这种剪切流动与结构物之间的相互作用，产生了同时并存的静载荷和动载荷^[8,9,10]。由于涡的形成和脱落产生脉动力，它可以引起结构物以其固有频率振动。

对一座孤立的长方体建筑物观察到的流动图象如图 2.20 所示。在建筑物的前方形形成一个附着涡，这是由于剪切来流($dV/dz > 0$) 中的边界层与地面的相互作用产生的。此外，在建筑物的尖角处有强涡脱落，并在建筑物后面产生复杂的尾迹。迄今为止，尚没有理论方法能够处理这种极其复杂的流动图象。因此，只有使用适当的缩尺模型在风洞中进行实验研究。

在本节结束之前，我们打算讨论这样一个很有说服力的例子，

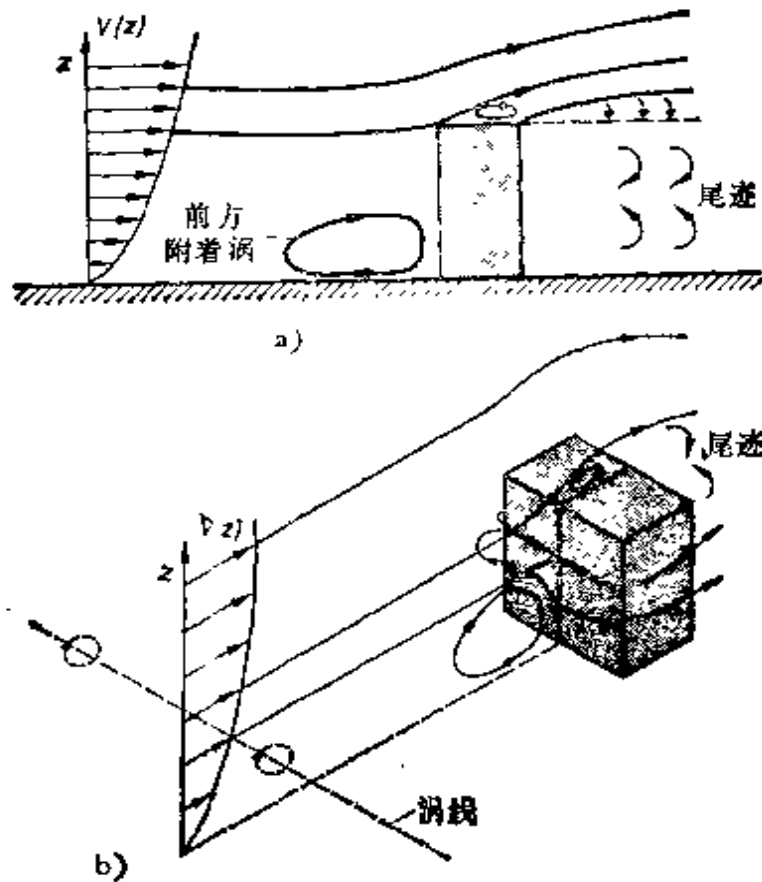


图 2.20 长方体结构物绕流图象的全视图^[24](示意图)

- a) 侧视图。在驻点区域有前附着涡，顶部为有分离的边界层；
- b) 迎风面和从顶部迎风角处脱落的涡

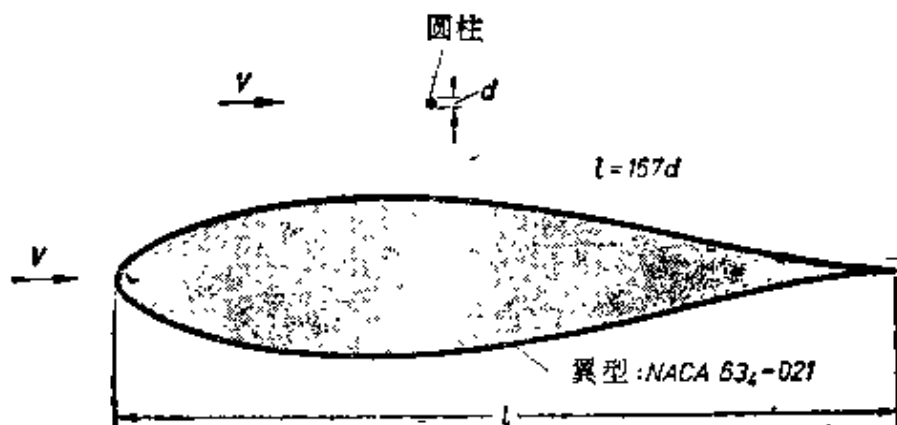


图 2.21 在相同速度的平行来流中(平行于翼型对称轴),当产生相同的阻力时,圆柱和翼型尺寸的相对大小.

翼型: 具有层流边界层的层流翼型 NACA63₄-021. $R_e = 10^6 \sim 10^7$ 时,阻力系数 $C_D = 0.006$, 参看图 17.14.

圆柱: $R_e = 10^6 \sim 10^7$ 时,阻力系数 $C_D = 1.0$, 参看图1.4. 因此,

翼型弦长 l 与圆柱直径 d 之比为 $l/d = 1.0/0.006 = 167$

这个例子表明,当边界层的分离能够完全消除,同时物体本身又具有低阻力外形时,可以非常有效地减小物体的阻力. 图 2.21 说明一个良好外形(流线体)对阻力的这种影响. 图中按比例绘制了一个对称翼型和一个圆柱体(细导线), 以保证它们在相同的来流速度下阻力相等. 当圆柱的阻力系数以其迎风面积为参考面积时, $C_D \approx 1$ (亦见图 1.4). 另一方面, 对于翼型, 以其横截面积为参



图 2.22 Reynolds 染色实验. 用染料注入水中显示流动. 引自 W. Dubs^[123]; a) 层流, $R = 1150$; b) 湍流, $R = 2520$

考面积的阻力系数却非常之小,其值为 $C_D = 0.006$ 。这种极低的翼型阻力是由于仔细地选择了剖面形状的结果,在翼型的整个浸湿长度上边界层几乎都保持为层流(层流翼型)。在这方面,读者可参阅第十七章,特别是图 17.14。

c. 管中和边界层中的湍流

在第一章 d 中,我们曾计算过速度分布为抛物线型的圆管内的典型流动。测量表明,这种流动仅仅在低 Reynolds 数或中等 Reynolds 数下才存在。层流的基本特征是:流体各层相互滑动,没有径向速度分量,所以压力降正比于平均流速的一次方。若把染料通过一个细管注入到流动中去,就能清楚地显示出这种流动特征,见图 2.22。在流动为层流(中等 Reynolds 数)时,可以看到整个管中染料清晰地呈一条细线(图 2.22a)。当流动速度不断增加时,有可能达到这样一个阶段:此时流体质点不再沿直线运动,即运动的规则性遭到破坏,有色的细线与流体混合,它的清晰轮廓变得模糊不清。最终,整个横截面上都成为有色的(图 2.22b),这时,有一种引起混合的、不规则的径向脉动叠加在轴向运动上。这种流动图象称为湍流。O. Reynolds^[29] 首先作了这种染色实验,他发现流态从层流向湍流转捩总是发生在一个确定的 Reynolds 数(临界 Reynolds 数)下。另外,临界 Reynolds 数的实际数值还依赖于实验装置的各个细节,特别是依赖于流体进入管子以前所受到的扰动量。如果用一个尽可能排除扰动的装置,则临界 Reynolds 数 $(\bar{u}d/\nu)_{crit}$ 能够达到 10^4 以上(\bar{u} 表示整个横截面上的平均速度)。在有尖锐入口的装置中,临界 Reynolds 数近似为

$$\left(\frac{\bar{u}d}{\nu}\right)_{crit} = R_{crit} \approx 2300 \text{ (管流)}. \quad (2.8)$$

可以认为该值是临界 Reynolds 数的下限。低于该值,即使有强烈的扰动也不会使流动转变为湍流。

在湍流范围内,压力降近似地与流速的平方成正比。在这种情形下,为了使管中的流量与层流时的流量相同,必须有大得多的

压力差。这是因为湍流混合现象消耗了大量的能量，从而使流动阻力显著增加。此外，在湍流情形下，横截面上的速度分布要比层流时均匀得多。这种情形也可以用湍流混合来解释：由于湍流混合，使得接近管轴的流体层和接近壁面的流体层之间进行着动量交换。工程应用中所遇到的大多数管道流动，其 Reynolds 数都非常高，以致大多是湍流。管道中湍流运动的规律将在第二十章详细讨论。

与管流相类似，当外部速度足够大时，沿壁面的边界层流动也会转变成湍流。边界层从层流向湍流转捩的实验研究首先是由 J. M. Burgers^[6]，B. G. van der Hegge Zijnen^[17] 以及 M. Hansen^[16] 等人完成的。从边界层厚度和壁面切应力的突然剧增，能够很清

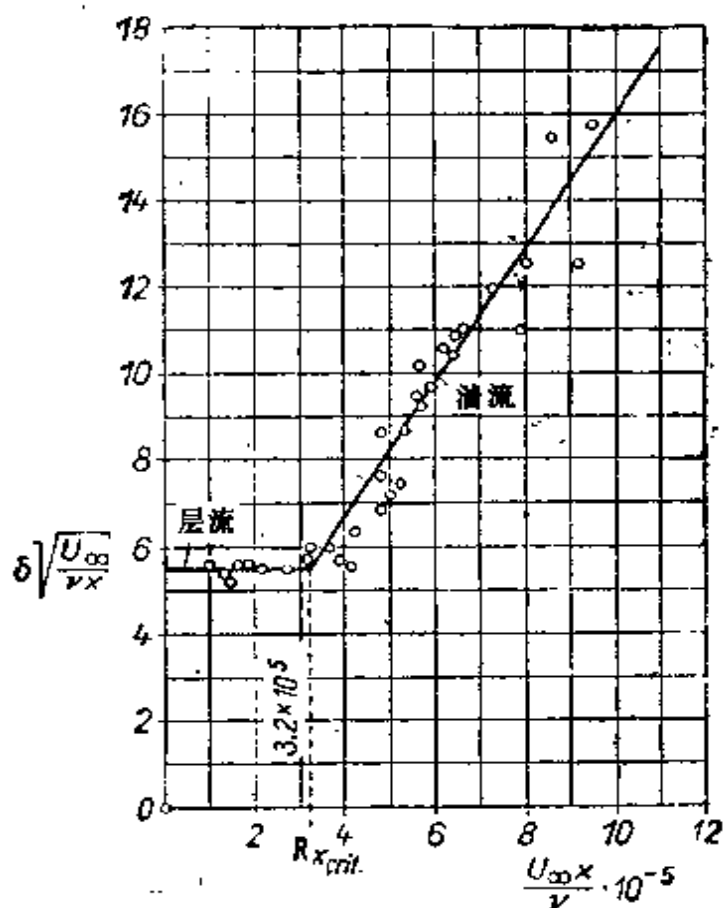


图 2.23 在平行流中，零攻角平板的边界层厚度随 Reynolds 数的变化曲线(以沿平板的流动坐标 x 为参考长度)。根据 Hansen^[16] 的测量结果

楚地辨认出边界层从层流向湍流的转捩。若用流动坐标 x 代替 l ，那么根据方程 (2.1)，层流边界层的无量纲边界层厚度 $\delta/\sqrt{\nu x/U_\infty}$ 是一常数，而且由方程 (2.1a) 可知，它近似地等于 5。图 2.23 是这个无量纲边界层厚度对 Reynolds 数 $U_\infty x/\nu$ 的变化曲线。由图可以清楚地看出，在 $R_x > 3.2 \times 10^5$ 以后，无量纲边界层厚度剧增。在壁面切应力曲线中也可以观察到相同的现象。这些量的突然增加表明流动已经从层流转变为湍流。由方程 (2.1a) 可知，以流动长度 x 为参考长度的 Reynolds 数 R_x 与以边界层厚度为参考长度的 Reynolds 数 $R_\delta = U_\infty \delta/\nu$ 之间的关系为

$$R_\delta = 5 \sqrt{R_x}.$$

因此临界 Reynolds 数为

$$R_{x_{crit}} = \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)_{crit} = 3.2 \times 10^5 \text{ (平板);}$$

相应地有 $R_{\delta_{crit}} \approx 2800$ 。平板边界层在接近前缘处是层流，到了下游变成湍流。转捩点的横坐标 x_{crit} 可以从已知的 $R_{x_{crit}}$ 值加以确定。在平板情形下，如同前面讨论过的管流情形一样， R_{crit} 的数值在很大程度上依赖于外流扰动量的大小，因而 $R_{x_{crit}} = 3.2 \times 10^5$ 应看成是下限。利用特殊无扰动的外流，已经可以使 $R_{x_{crit}}$ 达到 10^6 甚至更高的数值。

一个与从层流向湍流转捩有关的、特别值得重视的现象，发生在钝体(如圆柱或圆球)的绕流中。从图 1.4 和 1.5 可以看出，当 Reynolds 数 VD/ν 分别为 5×10^5 或 3×10^5 左右时，圆柱或圆球的阻力系数会突然地急剧下降。G. Eiffel^[14] 在圆球实验中首先观察到这一事实。这是由于转捩使得分离点向下游移动的结果。因为在湍流边界层情形下，湍流混合促使外流的影响进一步向下游扩展。对于层流边界层，分离点位于圆球的赤道附近。现在，由于上述原因分离点向下游移动了一段相当大的距离，从而使死水区显著减小，压力分布变得更象无摩擦流动的情形(图 1.11)。死水区的减小大大降低了压差阻力，这表现为阻力曲线 $C_D = f(R)$

的突变。L. Prandtl^[26] 采用在圆球赤道前不远处安装细线环的办法，证明了上述推理的正确性。这种办法使得边界层在较低的 Reynolds 数下人为地变为湍流，与未装细线环的情形相比，其阻力系数的减小发生得更早。图 2.24 和 2.25 是用烟显示的流动照片，它们分别表示具有大阻力系数的亚临界流动图象和具有小死水区、小阻力系数的超临界流动图象，超临界流动图象是用 Prandtl 的绊线方法取得的。上述实验令人信服地表明，圆柱和圆球阻力曲线的突变只能作为一种边界层现象来解释。其它具有钝底或修圆尾部的物体（例如椭圆柱）的阻力系数与 Reynolds 数之间的关系本质上也是类似的。随着长细比的增加，曲线的突变愈来愈不明显。对于流线体，曲线没有突变（如图 1.12 所示），因为这时没有发生明显的分离；在这种物体的后部，没有分离的边界层可以克服非常缓慢的压力增加。以后我们会详细知道，外部流动的压力分布对转捩点的位置有决定性的影响。在压力减小的区域，即大致从前端到最小压力点这一区域，边界层是层流的；在大多数情形下，从最小压力点向下游的整个压力增高的区域内，边界层是湍流的。在这方面值得指出的是，只有当边界层内的流动为湍流时，在压力增高的区域内才能避免分离。后面我们还将看到，层流边界层只能承受非常小的压力增高，所以即使是很细长的物体，也可能发生分离。特别是，这个论点对有类似于图 1.14 所示压力分布的翼型绕流也

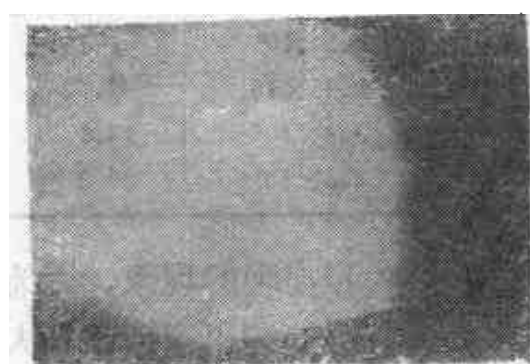


图 2.24 亚临界 Reynolds 时的圆球绕流，引自 Wieselsberger^[39]

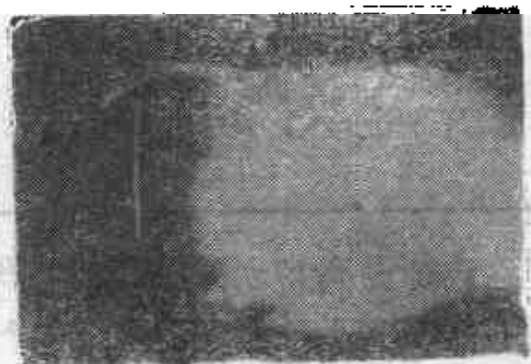


图 2.25 超临界 Reynolds 数时的圆球绕流，引自 Wieselsberger^[39]。超临界流动图象是靠安装细金属丝圈（绊线）获得的

是适用的。在这种情形下，吸力面上很可能发生分离。只有在湍流边界层情形，才能得到翼型绕流的光滑流动图象以增加升力。总而言之，正是由于存在湍流边界层，才可能造成细长体的低阻力和翼型的大升力。

边界层厚度：一般说来，由于湍流边界层中的能量损失较大，所以湍流边界层的厚度大于层流边界层的厚度。对于零攻角光滑平板的湍流边界层，其厚度沿流向的增长与 $x^{0.8}$ 成比例 (x 为从前缘量起的距离)。后面第二十一章将讲到，湍流边界层厚度的变化可以用公式表示为

$$\frac{\delta}{l} = 0.37 \left(\frac{U_{\infty} l}{\nu} \right)^{-1/5} = 0.37 (R_l)^{-1/5}. \quad (2.9)$$

它与层流边界层的公式 (2.2) 相对应。对于空气和水的几种典型流动，表 2.1 列出了用方程 (2.9) 计算的边界层厚度的数值。

表 2.1 在平行流动中零攻角平板后缘处的湍流边界层厚度 δ

U_{∞} = 自由流速度； l = 平板长度 ν = 运动粘性系数

	U_{∞} [ft/s]	l [ft]	$R_l = \frac{U_{\infty} l}{\nu}$	δ [in]
空气 $\nu = 150 \times 10^{-6} \text{ft}^2/\text{s}$	100	3	2.0×10^6	0.73
	200	3	4.0×10^6	0.64
	200	15	2.0×10^7	2.30
	500	25	8.3×10^7	2.90
	750	25	1.25×10^8	2.68
水 $\nu = 11 \times 10^{-6} \text{ft}^2/\text{s}$	5	5	2.3×10^6	1.19
	10	15	1.35×10^7	2.52
	25	150	3.4×10^8	13.1
	50	500	2.3×10^9	29.8

防止分离的方法：分离多半是一种不希望出现的现象，因为它要损耗很大的能量。由于这个原因，人们已经想出了许多种人工防止分离的方法。从物理观点上讲，最简单的方法就是让壁面随着流体一起运动，这样就可以减小壁面和流体之间的速度差，从而也就消除了边界层形成的起因。不过，在工程实践中要做到这

一点是非常困难的。然而，Prandtl¹⁾ 通过一个**旋转圆柱体**的实例，证明了这种方法是**非常有效的**。在壁面与流体同向运动的一侧，完全防止了分离；而在壁面与流体反向运动的一侧，分离也很轻微，所以，总体上就可以得到关于具有环量和大升力的理想流动的很好的实验近似。

防止分离的另一个非常有效的方法是**边界层吸除**。这种方法就是把边界层内减速的流体质点通过壁面上的狭缝吸进物体内部。只要有足够大的抽吸量，分离就能够防止。L. Prandtl 在有关边界层流动的开创性的基础研究中，曾对圆柱体使用了边界层吸除。在圆柱体背风面通过狭缝吸气几乎能完全消除圆柱绕流的分离。在图 2.14 和图 2.15 关于流经大扩张槽的例子中可以看到抽吸影响的情况。图 2.13 表明没有抽吸时，有很严重的分离。图 2.14 显示流动如何附着于有抽吸的一侧。由图 2.15 可以看出，当两侧都通过狭缝抽吸时，流动完全充满了槽的整个横截面。在后一种情形下，流线所呈现的图象非常类似于无摩擦流动的图象。后来，为了增加升力，边界层吸除被成功地应用于飞机机翼，由于在机翼上表面的后缘附近吸气，与无抽吸情形相比，使流动附着于翼面的攻角显著增大，从而失速被推迟，得到的最大升力值也大得多^[36]。

在简短地概述了具有很小摩擦力的流体运动的基本物理原理（即边界层理论）以后，我们将从粘性流体的运动方程出发，来阐述与这些现象有关的理论。我们按照下列顺序进行叙述：在 A 部分，从推导一般的 Navier-Stokes 方程入手，然后由 Navier-Stokes 方程出发，借助于因粘性系数值很小而可以引进的简化，导出 Prandtl 边界层方程。接着在 B 部分，针对层流情形叙述积分这些方程的方法。在 C 部分，我们将讨论湍流的起因问题，也就是说，我们将把它当作层流运动的稳定性问题来论述从层流向湍流转换的过程。最后在 D 部分，将叙述完全发展的湍流边界层理论。虽然，

1) Prandtl-Tietjens: Hydro-and Aerodynamics, Vol. II, Tables 7, 8 and 9.

层流边界层理论能够作为粘性流体的 Navier-Stokes 微分方程的演绎结果,然而,现在对湍流还不可能照此办理,因为湍流运动的机制太复杂,以致于不能用纯理论方法来处理。由于这个缘故,有关湍流的论文必然要大量地引用实验结果,并且,这方面的课题必然是以半经验理论的形式出现的。

第三章 可压缩粘性流体运动方程的推导 (Navier-Stokes 方程)¹⁾

a. 流体流动的基本运动方程和连续方程

我们现在来推导可压缩、粘性、Newton 流体的运动方程。在一般的三维运动情形下，流场由速度矢量

$$\boldsymbol{w} = iu + jv + kw,$$

压力 p 和密度 ρ 确定，其中 u, v, w 是速度的三个正交分量，所有的量都是坐标 x, y, z 和时间 t 的函数。为了确定这五个量，有五个方程：即连续方程(质量守恒)，三个运动方程(动量守恒)以及热力学状态方程 $p = f(\rho)$ ²⁾。

连续方程说明这样一个事实：对于单位体积而言，单位时间流进和流出的质量与密度的变化之间存在着平衡关系。在可压缩流体的非定常流动情形下，这个条件给出方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{w} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{w}) = 0. \quad (3.1)$$

对于不可压缩流体，由于 $\rho = \text{常数}$ ，所以连续方程简化为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0. \quad (3.1a)$$

这里的符号 $D\rho/Dt$ 表示随体导数，它由(非定常流中)局部贡献 $\partial\rho/\partial t$ 和(由平移产生的)对流贡献 $\boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \rho$ 两部分组成。

运动方程由 Newton 第二定律导出，这个定律说明质量和加速度的乘积等于作用在物体上的外力之和。在流体的运动中，必须考虑以下两类力：作用在流体质点上的力(重力)和作用在流体界面上的力(压力和摩擦力)。如果 $\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{g}$ 表示作用在单位体积上的重力 (\boldsymbol{g} = 重力加速度矢量)， \boldsymbol{P} 表示作用在单位体积界

1) 在第六版中，作者已请英译者对本章作了修订。

2) 如果状态方程中还包含温度作为一个附加变量时，则以热力学第一定律形式出现的能量守恒原理提供了另一个方程；参阅第十二章。

面上的力,则运动方程可以写成如下的矢量形式:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{P}, \quad (3.2)$$

其中

$$\boldsymbol{F} = iX + jY + kZ, \quad \text{体积力}, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{P} = iP_x + jP_y + kP_z, \quad \text{表面力}. \quad (3.4)$$

这里的符号 $D\boldsymbol{w}/Dt$ 表示随体加速度,它和密度的随体导数一样,由(非定常流中)局部贡献 $\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ 和(由平移产生的)对流贡献 $d\boldsymbol{w}/dt = (\boldsymbol{w} \cdot \text{grad})\boldsymbol{w}$ ¹⁾ 两部分组成:

$$\frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}.$$

体积力应看作是给定的外力,而表面力则依赖于由流体中速度场所引起流体变形的应变率.表面力系确定了应力状态.我们现在的任务是要说明应力和应变率之间的关系,不过应该注意,这个关系只能从经验给出.在以下的推导过程中,我们只限于讨论各向同性的 Newton 流体.对于这种流体,可以假设上述关系是线性的.所有的气体以及许多在边界层理论中具有重要意义的液体,特别是水,都属于这种流体.所谓流体是各向同性的,是指其应力分量和应变率分量之间的关系在所有的方向上都是相同的;所谓 Newton 流体是指上述关系是线性的,即流体服从 Stokes 摩擦力定律.在各向同性弹性体的情形下,实验表明,应力状态依赖于应变本身的大小.工程上的大多数材料都服从 Hooke 线性定律,它与 Stokes 定律有点类似.对于各向同性弹性体,应力和应变之间的关系中有两个表征材料性质的常数(例如弹性模量和 Poisson 比),而在各向同性的流体中,如我们将要在本章 e 中看到的那样,只要其中不出现弛豫现象,则应力和应变率之间的关系中只包含一个表征流体性质的常数(粘性系数 μ).

1) 为了能在任何坐标系中表示出矢量 $(\boldsymbol{w} \cdot \text{grad})\boldsymbol{w}$, 应该采用下述普遍关系式:

$$(\boldsymbol{w} \cdot \text{grad})\boldsymbol{w} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{w}^2 \right) - \boldsymbol{w} \times \text{curl}\boldsymbol{w},$$

其中 $\boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}$.

b. 变形体中一般应力系统

为了写出作用在界面上表面力的表达式，我们设想从流体中瞬时分割出一小块平行六面体 $dV = dx dy dz$ ，如图 3.1 所示，并设其左下方顶点与点 (x, y, z) 重合。在垂直于 x 轴、面积为 $dy \cdot dz$ 的两个表面上，作用着两个合应力(应力矢量=单位面积上的表面力)分别为

$$p_x \text{ 和 } p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx. \quad (3.5)$$

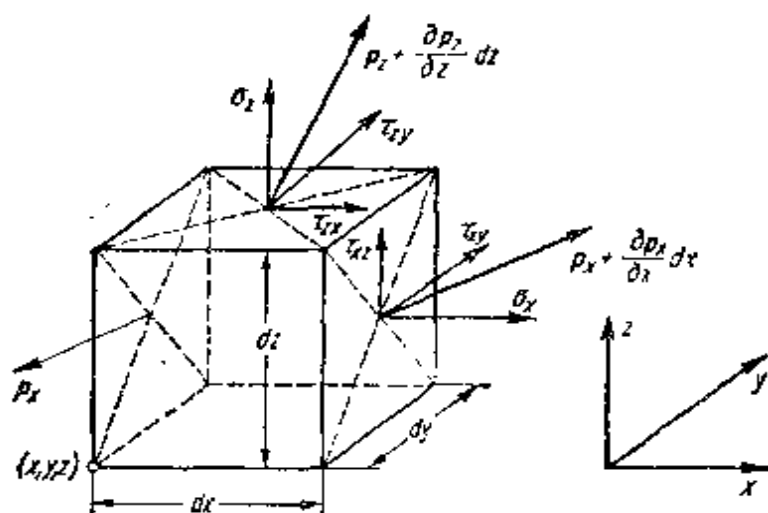


图 3.1 非均匀应力系统中应力张量表达式和没有局部力矩体分布时应力张量对称性的推导

(下标 x 表示该应力矢量作用在垂直于 x 方向的面积元上。)对于垂直于 y 轴和 z 轴的表面 $dx \cdot dz$ 和 $dx \cdot dy$ ，也可以分别得到类似的表示式。因此，表面力的三个净分量为

$$\text{在垂直于 } x \text{ 方向的平面上: } \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

$$\text{在垂直于 } y \text{ 方向的平面上: } \frac{\partial p_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

$$\text{在垂直于 } z \text{ 方向的平面上: } \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

于是得到单位体积上表面力的合力 \mathbf{P} 为

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

其中 \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z 都是矢量, 可以分解成垂直于各个表面的分量, 即法应力, 记作 σ 并带有表明方向的下标; 以及平行于各个表面的分量, 即切应力, 记作 τ . 切应力的符号必须带有两个下标: 第一个下标表示垂直于该平面的轴, 第二个下标表示该切应力所平行的方向. 根据这些符号, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_x &= i\sigma_x + j\tau_{xy} + k\tau_{xz}, \\ \mathbf{p}_y &= i\tau_{yx} + j\sigma_y + k\tau_{yz}, \\ \mathbf{p}_z &= i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

由此看出, 表述此应力系统需要九个标量. 这九个标量构成一个应力张量. 有时也将应力张量的九个分量的集合称为应力矩阵:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

应力张量及其相应的矩阵是对称的, 也就是说, 仅仅下标次序不同的两个切应力分量是相等的. 这一点可以根据流体微元的运动方程式来证明. 一般说来, 一个流体微元的运动可以分解成一个瞬时平移和一个瞬时转动. 对于我们的问题, 只需讨论后一种运动. 如果用 $\dot{\omega}(\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z)$ 表示流体微元的瞬时角加速度, 那么对于绕 y 轴的转动, 我们可以写出

$$\dot{\omega}_y dl_y = (\tau_{xz} dy dz) dx - (\tau_{zx} dx dy) dz = (\tau_{xz} - \tau_{zx}) dV,$$

其中 dl_y 是流体微元绕 y 轴的转动惯量. 由于转动惯量 dl 正比于平行六面体线尺度的五次方, 而体积 dV 正比于其线尺度的三次方, 一旦把流体微元向一点收缩时, 我们立即看出, 上述方程左端趋向于零的速度要比右端快. 因此, 如果 $\dot{\omega}_y$ 不会趋向于无限大的话, 最后有

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0.$$

对于其余两个轴, 也可以写出类似的方程. 由此就能证明应力张

量的对称性。从上述讨论可以清楚地看出，如果流体中出现正比于体积 dV 的局部力矩时，则应力张量就不再对称了，例如，在静电场中就可以出现这种情形。

由于

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (3.9)$$

应力矩阵 (3.8) 只有六个独立的应力分量，并且相对于主对角线是对称的：

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

从式 (3.6), (3.7) 和 (3.10) 可以算出作用在单位体积上的表面力：

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \mathbf{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots x \text{ 分量} \\ & + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots y \text{ 分量} \quad (3.10a) \\ & + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \dots\dots\dots z \text{ 分量.} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{yz \text{ 表面}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{zx \text{ 表面}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{xy \text{ 表面}} \end{aligned}$$

将表达式 (3.10a) 代入运动方程 (3.2)，并写成分量方程，则得到

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

如果流体是“无摩擦”的，则全部切应力均为零；此时运动方程中只出现法应力，而且三个法应力是相等的。我们定义其负值为流体中点 (x, y, z) 上的压力：

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

在这样一个**流体静应力系统**中，流体的压力等于其三个法应力的算术平均值的负值。因为在建立热力学状态方程时，就是在这种条件(流体处于静止)下测定各物理量的，所以这个压力就是状态方程中的热力学压力。在处于运动状态的**粘性流体**的情形中，引进三个法应力的算术平均值(三个法应力之和称为应力张量的迹)作为一个有用的数量也是有益的，其负值仍旧称为压力，但是它与热力学压力的关系还需进一步研究。此时，压力虽然不再等于垂直于表面的法应力，但是，根据定义

$$\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p, \quad (3.12)$$

它是应力张量的不变量，所以在坐标变换下具有不变性。我们将在本章 e 中知道，在不出现弛豫现象时，它仍旧等于热力学压力。

有三个方程的方程组 (3.11) 包含着六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ 。下一步的任务是要定出应力和应变率之间的关系，以使用速度分量 u, v, w 来表示出方程 (3.11) 中的应力分量。在这之前，我们将更详细地研究应变率系统，然后在本章 d 中给出它们之间的关系。

c. 流动中流体微元的应变率

当作为连续介质的流体流动时，一般说来，每一个流体微元都在时间过程中移向新的位置。在运动中，流体微元发生变形。当速度矢量 \mathbf{w} 作为时间和位置的函数 $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, z, t)$ 给定时，流体的运动是完全确定的。所以应变率分量与这个函数之间有运动学关系。流体微元的应变率依赖于其中相邻两点之间的**相对运动**。因此，我们研究两个相邻的点 A 和 B ，如图 3.2 所示。由于存在着速度场，所以在时间 dt 内，点 A 将经过一段距离 $s = \mathbf{w}dt$ ，移至点 A' ；但是，由于点 B 的速度不同，设点 B 离开点 A 的距离为 $\delta \mathbf{r}$ ，则点 B 经过一段距离 $s + \delta s = (\mathbf{w} + \delta \mathbf{w})dt$ 移至点 B' 。更确切地说，如果点 A 的速度分量值为 u, v, w ，那么，在邻近的点

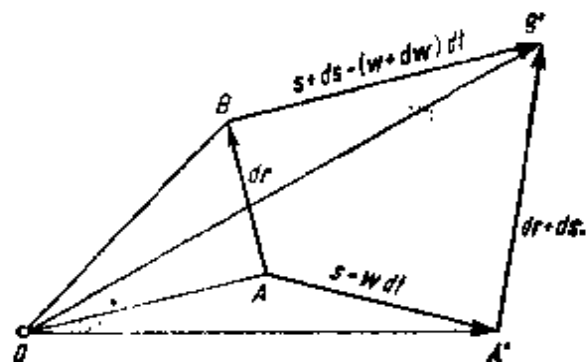


图 3.2 相对位移

B 上, 由 Taylor 级数展开式取到一阶项给出的速度分量为

$$\left. \begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ w + dw &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

因此, 点 B 相对于点 A 的运动就由下述当地速度场的九个偏导数的矩阵来描述, 即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.13a)$$

将方程 (3.13) 中的相对速度分量 du, dv, dw 重新整理成下述形式是有用的:

$$\left. \begin{aligned} du &= (\dot{\epsilon}_x dx + \dot{\epsilon}_{xy} dy + \dot{\epsilon}_{xz} dz) + (\eta dz - \zeta dy), \\ dv &= (\dot{\epsilon}_{yx} dx + \dot{\epsilon}_y dy + \dot{\epsilon}_{yz} dz) + (\zeta dx - \xi dz), \\ dw &= (\dot{\epsilon}_{zx} dx + \dot{\epsilon}_{zy} dy + \dot{\epsilon}_z dz) + (\xi dy - \eta dx). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

不难验证, 新符号具有下述意义:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \eta \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \zeta &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.15b)$$

不难看出,矩阵 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 是对称的,所以有

$$\dot{\epsilon}_{yx} = \dot{\epsilon}_{xy}; \quad \dot{\epsilon}_{zx} = \dot{\epsilon}_{xz}; \quad \dot{\epsilon}_{zy} = \dot{\epsilon}_{yz}, \quad (3.15c)$$

而 ξ, η, ζ 与矢量

$$\omega = \text{curl} \mathbf{w} \quad (3.15d)$$

的分量有关. 每一个新的项都可以给出一个运动学上的解释, 我们现在就来寻求这些解释.

由于我们的注意力集中在点 A 的邻域内, 同时兴趣主要在点 B 相对于点 A 的运动上面, 所以将点 A 放在原点, 并将 dx, dy, dz 解释成点 B 在 Descartes 坐标系中的坐标. 这样一来, 表达式 (3.14) 定义了一个相对速度场, 其分量 du, dv, dw 是空间坐标的线性函数. 为了理解矩阵 (3.15a) 和式 (3.15b) 中各项的意义, 我们来逐个加以解释.

图 3.3 中表示了一个这样的相对速度场, 即除了 $\partial u/\partial x$ 之外, 其余各项均为零, 并且假定 $\partial u/\partial x > 0$. 由于任何一点 B 对点 A 的相对速度为

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx,$$

所以,这个速度场中 $x = \text{常数}$ 的各个平面本身均作平移,其速度正比于它们到平面 $x = 0$ 的距离 dx 。在这样的速度场中,以 A, B 为顶点的平行六面体微元将作伸长变形,其表面 BC 以越来越快的速度离开表面 AD 。因此, $\dot{\epsilon}_x$ 代表该微元沿 x 方向的伸长速率。类似地, $\dot{\epsilon}_y = \partial v / \partial y$ 和 $\dot{\epsilon}_z = \partial w / \partial z$ 分别代表沿 y 方向和沿 z 方向的伸长速率。

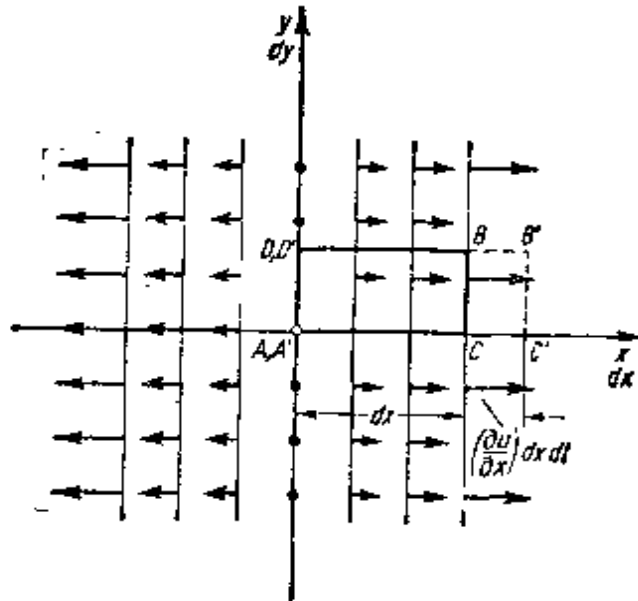


图 3.3 当 $\partial u / \partial x > 0$ 而其余各项均为零时流体微元的局部变形;
沿 x 方向的均匀伸长

现在,很容易想像出在矩阵 (3.13a) 或 (3.15a) 的主对角线上三个元素同时作用时流体微元的变形: 流体微元将沿三个方向膨胀。取到导数的一阶项,在流体微元三个边长同时改变时,其体积改变的相对速率为

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{\left\{ dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right\} \left\{ dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \right\} \left\{ dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \right\} - dx dy dz}{dx dy dz dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

但是,在这种变形过程中,因为图 3.1 中平行六面体流体微元顶点的所有直角保持不变,所以该流体微元始终维持原有形状。因此, $\dot{\epsilon}$ 是流体微元的当地瞬时体积膨胀系数。若流体是不可压缩的,当

然有 $\epsilon = 0$ 。在可压缩流体中,连续方程 (3.1) 表明

$$\epsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.17)$$

这就是说, 体积膨胀系数(即体积的相对改变)等于当地密度相对变化速率的负值。

当矩阵 (3.13a) 中有一个非对角线元素不为零时, 例如 $\partial u/\partial y > 0$, 则相对速度场呈现出另一种图象。此时, 相应的速度场是一种纯切变场, 如图 3.4 所示。以点 A 为顶点的流体矩形微元现在变形成一个平行四边形, 见图 3.4。点 A 处原有直角改变一个角度 $\gamma_{xy} = [(\partial u/\partial y)dydt]/dy$, 也就是说, 其变化速率为 $\partial u/\partial y$ 。当 $\partial u/\partial y$ 和 $\partial v/\partial x$ 都是非零的正值时, 由于两种运动的叠加, 点 A 处的直角将变形, 情况如图 3.5 所示。显然, 现在点 A 处直角的变形速率是矩阵 (3.15a) 非对角线元素

$$\dot{\epsilon}_{yx} = \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

的两倍。一般说来, 三个非对角线元素 $\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx}$, $\dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx}$ 和 $\dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy}$ 各自是一个直角的变形速率, 该直角所在的平面垂直于不出现其下标中的轴。这样的变形并不改变流体微元的体积, 只

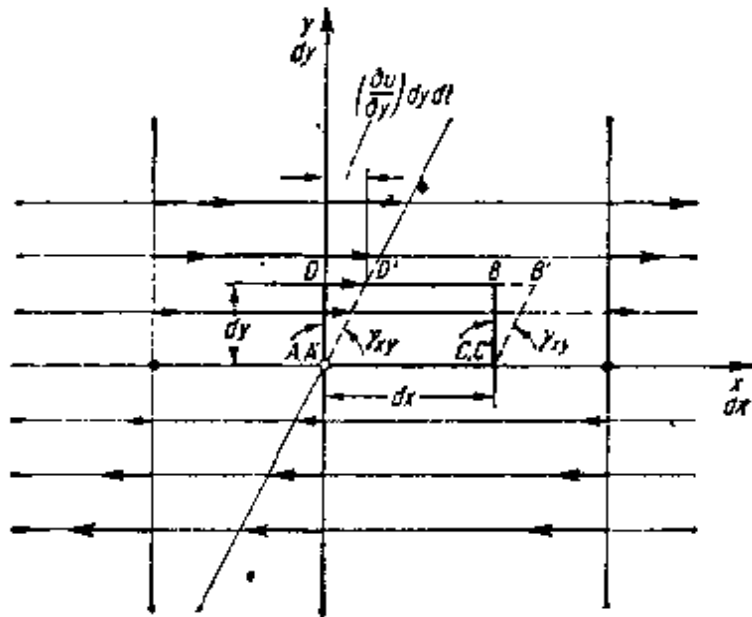


图 3.4 当 $\partial u/\partial y > 0$ 而其余各项均为零时流体微元的局部变形; 均匀切变

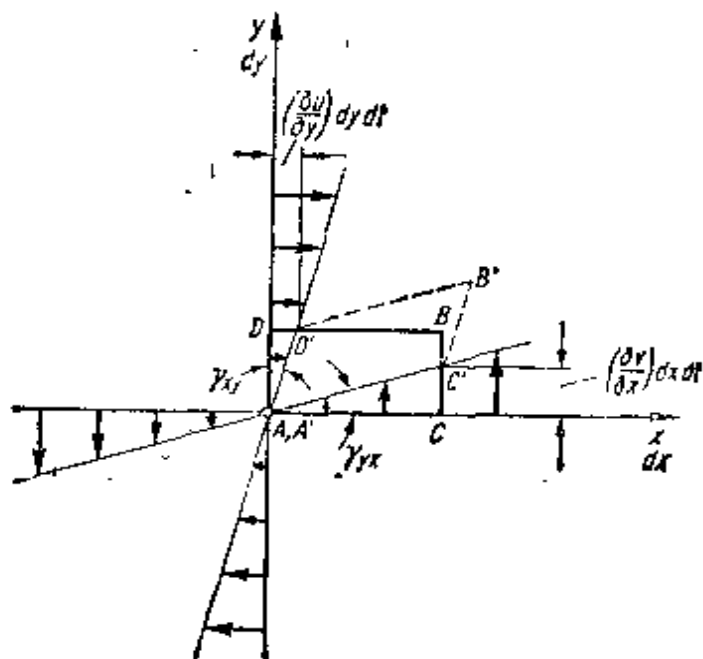


图 3.5 当 $\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \{(\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x)\} > 0$ 而其余各项均为零时流体微元的局部变形;形状变形(图中 $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$)

是改变了流体微元的形状。

在图 3.6 所示的 $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ 的特殊情形下, 情况又有所不同, 根据上面的讨论以及 $\dot{\epsilon}_{xy} = 0$ 的条件, 我们立即可以推断出点 A 处的直角保持不变。从图形上看也是很清楚的, 这时流体微元绕参考点 A 作转动。在此瞬时, 这一转动不发生形变, 所以能够把它描述成刚性转动。这个转动的瞬时角速度为

$$\frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{或} \quad -\frac{\partial u}{\partial y}$$

现在不难看出, 式 (3.15b) 中 $\frac{1}{2} \text{curl} \boldsymbol{w}$ (称为速度场的涡量) 的分量 ζ 是这一瞬时刚性转动的角速度, 此时

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx 0$$

在 $\partial v / \partial x \approx -\partial u / \partial y$ 的更为复杂的情形下, 流体微元既转动又变形, 我们仍旧可以把

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

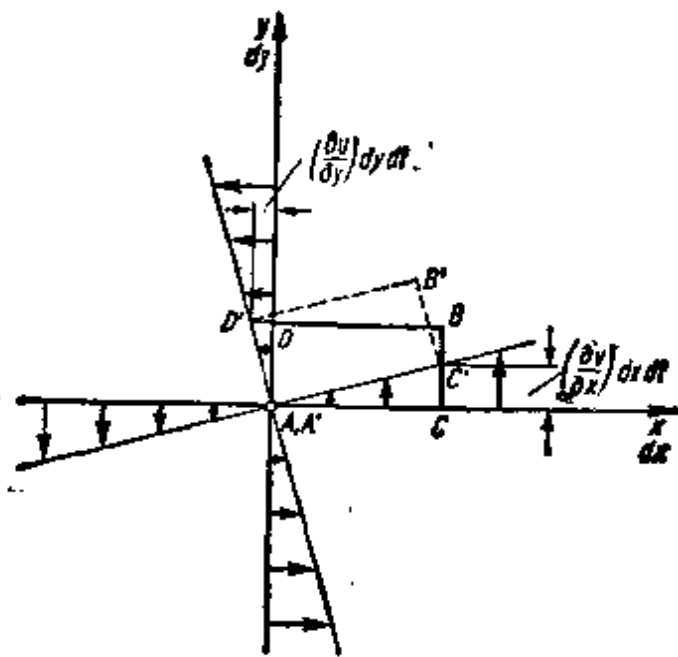


图 3.6 当 $\zeta = \frac{1}{2} \{(\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)\} \neq 0$ 时流体微元的局部变形; 瞬时刚性转动

解释为变形速率, 把

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

解释为流体微元参与刚性转动的角速度。

式 (3.13) 或完全等价的式 (3.14) 的线性性质意味着: 最一般的情形是上述所有简单情形的叠加。因此, 如果我们把注意力集中在流体中两个相邻的点 A 和 B 上, 且流体具有连续的速度场 $w(x, y, z)$, 则包围这两点的流体微元的运动, 可以唯一地分解成四种成分的运动:

- (a) 由速度 w 分量 u, v, w 所描述的纯平移;
- (b) 由 $\frac{1}{2} \text{curl} w$ 分量 ξ, η, ζ 所描述的刚性转动;
- (c) 由 $\epsilon = \text{div} w$ 所描述的体积膨胀, 其各轴向的线膨胀分别由 ϵ_x, ϵ_y 和 ϵ_z 给出;
- (d) 由具有混合下标的分量 ϵ_{xy} 等所描述的变形运动。

只有最后两种运动才使包围参考点 A 的流体微元产生真正的

变形,而前两种运动只使其位置发生普通的刚性位移。

矩阵 (3.15a) 的元素也是一个对称张量的分量, 这个张量称为**应变率张量**, 其数学性质类似于同样对称的应力张量。从弹性理论^[5,7]或张量代数^[11]的一般讨论中知道, 对于每一个对称张量, 都可以找到三个互相正交的主轴, 它们确定三个互相正交的主平面, 这三个主轴构成一个特别有用的 Descartes 坐标系。在这个坐标系中, 任何一个主平面上的应力矢量或瞬时运动都垂直于该平面, 也就是说平行于一个主轴。当采用这样一个特定的坐标系时, 矩阵 (3.10) 或 (3.15a) 就只保留了它们的对角线元素。如果我们用带横杠的符号来表示其各个分量, 我们就需要处理下述矩阵:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_z \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

最后应该指出, 上述坐标变换并不影响矩阵主对线元素之和, 因为早已提醒过, 这个和是该张量的不变量, 所以有

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z, \quad (3.19a)$$

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y + \bar{\epsilon}_z (= \dot{\epsilon} = \text{div} w). \quad (3.19b)$$

在这样的两个坐标系中来看(两坐标系都用加横杠来表示), 一个流体微元在互相垂直的三个方向上受力, 同时, 微元的各个表面也沿互相垂直的三个方向作瞬时移动, 如图 3.7a 和图 3.7b 所示。当然, 这里并没有说在其他的平面上不存在切应力, 也没有说流体微

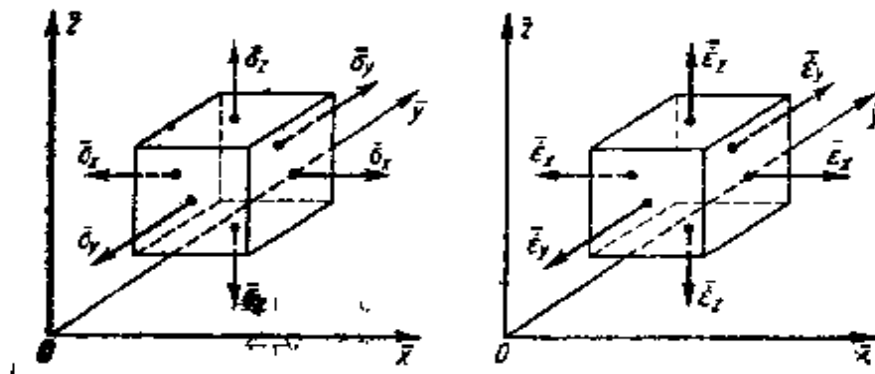


图 3.7 应力张量和应变率张量的主轴

元的形状保持不变。

d. 应力和应变率之间的关系

或许应该再次强调一下，表面力与流场之间的关系式必须通过对实验结果合理的解释来得出，并且我们的兴趣只限于各向同性的 Newton 流体。上节的讨论给我们提供了一个有用的数学框架，使得我们能够用更精确一点的方式来说明由实验所提出的要求。

△ 当流体处于静止时，此时形成一个均匀的流体静应力场（负的压力： $-p$ ），其压力和热力学的压力相同。当流体处于运动时，状态方程仍然可以确定出每一点的压力（“局部状态原理”^[4]），因此，最好是引入偏离的法应力

$$\sigma'_x = \sigma_x + p; \quad \sigma'_y = \sigma_y + p; \quad \sigma'_z = \sigma_z + p, \quad (3.20)$$

并将它们和原来定义的切应力结合在一起讨论。由这样六个量组成的对称应力张量称为偏离应力张量，因为在流体静止时，偏离应力张量的所有分量均为零，所以它完全是由流体的运动所引起的。根据前面的说明可知，偏离应力张量的分量只是由应变率张量的分量引起的，这就排除了速度分量 u, v, w 和涡量分量 ξ, η, ζ 对它的影响。这相当于说：流体微元的瞬时平动（运动成分（a））以及瞬时刚性转动（运动成分（b））中，除了表面上有流体静压力的分量之外，并不产生其他的表面力。显然，前面的说明只是一个局部的精细描述，即在有限的流体元作相当于刚体的一般运动时我们将观测到的情况。由此得出结论：偏离应力张量的分量 $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau_{xx}$ 只能表示成速度梯度分量 $\partial u/\partial x, \dots, \partial w/\partial z$ 的某种组合形式。现在就来确定这些关系。我们假定这些关系是线性的，并且为了保证各向同性，还必须假定它们在坐标系转动或坐标轴交换下保持不变。各向同性还要求在连续介质的每个点上，应力张量的主轴应该和应变率张量的主轴重合，否则将出现特殊的方向。为了达到我们的目的，最简单的方法是在连续介质内任意选定一点，并且设想已暂时选定上述张量的共同主轴组成局部

坐标系 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 。在这样的坐标系中,速度场的分量记作 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 。

现在很清楚,只有令三个法应力 $\bar{\sigma}'_x, \bar{\sigma}'_y, \bar{\sigma}'_z$ 均为两项之和,即其中一项正比于与它同向的应变率分量,另一项正比于这三个应变率之和,且两项各有不同的比例系数,这样才能保证各向同性。由此,我们直接用速度分量的空间导数写出这三个法应力:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}'_x &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \\ \bar{\sigma}'_y &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \\ \bar{\sigma}'_z &= \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

根据刚才说明的理由, u, v, w 和 ξ, η, ζ 不出现在这些表达式中。在每一个表这式中,后一项代表相应的线膨胀速率,它在实质上代表着形状的变化,而前一项代表体积的膨胀,也就是体积变化的速率,它在实质上代表着密度的变化。后一项中的系数 2 是非实质性的,以后将会看到,这仅仅是为了便于解释。为了保证各向同性,总共只有两个比例系数,即 λ 和 μ ,也就是说,在上述三个关系式中相应的系数必须相同。不难看出,任何两个坐标轴之间的交换,即三对量 $(\bar{u}, \bar{x}), (\bar{v}, \bar{y}), (\bar{w}, \bar{z})$ 中任何两对的交换,在各向同性的介质中上述关系保持不变。并且就满足所要求的性质而言,式 (3.21) 也是空间导数唯一可能的组合。如果读者还不能直接看出来,可查阅张量代数专著中更为严格的证明(例如文献 [11] 的第 89 页)。

借助于适当的线性变换公式,我们可以将式 (3.21) 中的关系改写成适用于经过一般转动的任何坐标系。我们打算列出其详细步骤,因为道理虽然很简单,但是直接写起来却很冗长。如果改用张量运算,就变得非常简单了。在参考文献 [3, 6, 7] 中可以找到直接适用的公式,而在参考文献 [11] 中给出了相应的张量运算的公式。上述推导给出

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma'_y &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma'_z &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (3.22a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.22b)$$

为了简洁起见,这里已用了 $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$ 。读者可以注意指标 x, y, z , 分量 u, v, w 和坐标 x, y, z 的排列规律¹⁾。

将这些关系式应用到图 1.1 所示的简单情形时,则重新得到式 (1.2),所以证实了下列事实:在简单切变的情形下,上述更普遍的关系式化为 Newton 摩擦力定律,因而它确实是 Newton 摩擦力定律的适当推广。同时,我们把系数 μ 看成就是第一章 b 中充分讨论过的流体的粘性系数,附带地也就说明了在式 (3.21) 中引入系数 2 的原因。第二个系数 λ 的物理意义还需要进一步讨论,但是我们要指出,在不可压缩的流体中,因为 $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$, 此时 λ 根本就不出现在这些关系式中,所以它不起作用,由此看出,只有在可压缩流体中, λ 才是重要的。

e. Stokes 假设

虽然,我们将要讨论的问题在一个半世纪以前就已经出现了,但是在 $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$ 不恒为零的流动中,对于式 (3.21) 或 (3.22a) 中第

1) 上述六个式子可以用 Descartes 张量符号合并成一个式子(利用 Einstein 求和约定)

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

其中 Kronecker 符号 δ_{ij} 为:当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$; 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$ 。

二个系数 λ 的物理解释还存在着争论, 尽管对于在实用方程中应给出的 λ 值并没有争论. 这个数值是用 G. G. Stokes 在 1845 年^[14] 提出的假设来确定的. 我们暂时不考虑 Stokes 假设成立的物理理由, 而先说明其结果. 根据 Stokes 假设, 有必要取

$$3\lambda + 2\mu = 0, \text{ 或 } \lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (3.23)$$

这就把可压缩流体中的系数 λ 与其粘性系数 μ 联系起来, 从而使可压缩流体中表征应力场特性的参数数目由两个减为一个, 也就是说变得与不可压缩流体所要求的参数数目相同.

将这样的值代入式 (3.22a), 就得到偏离应力的法向分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma'_y &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma'_z &= -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

切应力仍旧保持不变. 再利用式 (3.20), 就得到各向同性 Newton 流体的本构方程, 其最后的形式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.25b)$$

注意, p 为当地的热力学压力¹⁾。

作为一种纯粹的假设, 甚至是一种推测, 式 (3.23) 确实是可以接受的。因为正如读者在读完本书以后将会承认的那样, 将式 (3.25a, b) 代入方程 (3.11) 所得到的实用方程, 已经经受了非常大量的、甚至在一些相当严厉的条件下的实验检验。因此, 即使它不能代表精确的关系, 也一定是一个极好的近似。

偏离应力张量是运动中出现的仅有的应力分量, 代表着在等温流动中产生耗散的那些应力分量。在有温度场时, 还有由导热引起耗散的应力分量, 见第十二章。此外, 由于系数 λ 只出现在偏离应力的法向分量 $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ 中, 而这些偏离应力法向分量中还包含有热力学压力 (式 (3.20)), 这就清楚地表明: λ 的物理意义与流体微元以有限的速率改变其体积时的耗散机制有关, 还与总应力张量和热力学压力之间的关系有关。

f. 体积粘性系数和热力学压力

现在我们回到一般性讨论, 而且并不需要承认 Stokes 假设的有效性。但是, 由于切应力的物理意义和起因是很清楚的, 所以只限于不包含切应力的情形。因此, 我们考虑一个边界上作用有均匀法应力 σ 的流体系统, 例如图 3.8a 所示的圆球。在没有运动时, σ 和热力学压力 p 显然大小相等, 符号相反。把式 (3.21) 中的三个关系式加起来, 再利用式 (3.20), 就可求得

$$\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \quad (3.26)$$

同时发现, 我们前面所得到的那些等式就反映了这个关系, 这是早已指出过的。现在要问: 在一般流场中这个关系式是否还成立? 当系统准静态可逆地进行压缩时, 因为此时渐近地有 $\operatorname{div} \boldsymbol{w} \rightarrow 0$, 于是又回到了以前的情形。应该指出: 在这样的情形下, 热力学

1) 若用简洁的张量符号, 则可写成

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

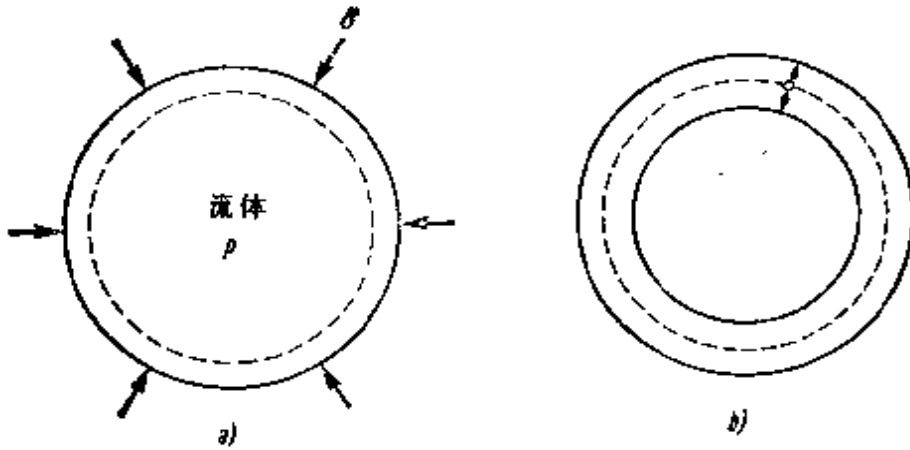


图 3.8 球状流体团的准静态压缩和振荡运动

可逆过程中单位体积膨胀或压缩所作的功率为

$$\dot{W} = p \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \quad (3.26a)$$

用热力学中习惯的符号来表示,即

$$\dot{W} = p \frac{dV}{dt}. \quad (3.26b)$$

在 $\operatorname{div} \boldsymbol{w}$ 有限而且流体以有限的速率进行压缩、膨胀或作振荡的情形下,只有当系数

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (3.27)$$

恒等于零 (Stokes 假设) 时, $\bar{\sigma}$ 和 $-p$ 之间才能保持相等, 否则就不相等。如果 $\mu' \neq 0$, 即使在图 3.8b 中整个气体球内保持温度不变, 这个圆球系统的振荡也会产生耗散。在以有限的速率进行膨胀或压缩的情形下, 也有相同的结论。由于这个缘故, 系数 μ' 称为流体的**体积粘性系数**: 像在形状变形中的切变粘性系数 μ 一样, 它具有这样的性质: 当温度均匀的流体以有限的速率改变体积时, 它决定流体的能量耗散。因此在可压缩、各向同性、Newton 流体中, 体积粘性系数就成为确定其本构方程中所必需的第二个特性参数, 也是除了 μ 之外所必须测量的物性参数。显然

$$\mu' = 0, \text{ 则 } p = -\bar{\sigma},$$

$$\mu' \neq 0, \text{ 则 } p \neq -\bar{\sigma}.$$

所以,承认 Stokes 假设等价于假定:即使在流体以有限的速率进行压缩或膨胀的情形下,热力学压力也等于法应力之和这个不变量的负三分之一。此外,它也等价于假定:一个大的球状系统的振荡运动如果是等温的,也就一定是可逆的。当 Stokes 假设用于连续系统的不可逆过程时,有关用热力学概念所作的更为详细的讨论,可参阅 J. Meixner^[8], I. Prigogine^[12] 以及 S. R. de Groot 和 P. Mazur^[11] 等人的专著。

为了确定在什么样的条件下可压缩流体的体积粘性系数为零,有必要求助于实验或求助于统计热力学的方法,统计热力学的方法可以使我们根据第一原理算出输运系数。直接测量体积粘性系数是很困难的,现在也没有明确的结果。对于稠密气体和液体的统计热力学的方法,至今还没有发展到使我们能够对这个问题作出完整的说明。但是在低密度的气体中,即在只需考虑分子的二体碰撞的条件下,体积粘性系数看来似乎恒等于零。在稠密的气体中,体积粘性系数的数值看来也很小。这就是说:在没有切变时,式(3.26a, b)仍可以描述连续系统所作的功,并且有很高的近似程度。同时,在常温条件下,甚至在一般的情形下,也只有通过偏离应力的参与才产生耗散。于是,我们再次得出 Stokes 假设,从而也就有式(3.26)。这个结论不适用于因局部偏离化学平衡态而出现弛豫过程的流体^[1,6]。例如,当流体中能够发生化学反应时,或在复杂结构的气体中,其平移和转动自由度与振动自由度之间可能出现比较缓慢的能量传递时,这种弛豫现象就会发生。因此,当可能出现弛豫过程时,热力学压力就不再等于应力张量迹的负三分之一。

有时,采用 Stokes 假设,即假定 Newton 流体的体积粘性系数为零时,似乎与我们的直观感觉相矛盾,例如图 3.8b 中的流体圆球,由于其边界振荡而出现压缩和膨胀的循环过程时,竟会没有能量耗散。情况正是这样,根据前面的讨论不难看出,在 Stokes 假设的条件下,其应力场引起的耗散部分确实为零。但是不应忘记,只有在振动过程中整个气体圆球的温度始终不变时才没有能

量耗散。而在通常的情形下这是不可能的，因为在振荡的气体圆球中会很快地出现温度场，从而在有温度梯度的地方将出现能量耗散^[5]。

g. Navier-Stokes 方程

利用式 (3.20)，我们把运动方程 (3.11) 中非粘性的压力项分离出来，从而得到

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} (3.28)$$

根据式 (3.24) 引入本构关系，我们得到用速度分量表示的表面力的合力，例如在 x 方向，借助于式 (3.10a) 得到

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ P_x &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad \times \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

类似地，可以得到关于 y 分量和 z 分量的相应的表达式。在一般的可压缩流体的情形下，因为 μ 随温度有相当大的变化（表 1.2 和表 12.1），同时速度和压力的变化以及由摩擦产生的热量又会引起温度显著地变化，所以必须把粘性系数看成是空间坐标的函数。粘性系数对温度的依赖关系 $\mu(T)$ 必须由实验来确定（参阅第十三章 a）。

如果将这些式子代入基本方程 (3.11), 则得到

$$\left. \begin{aligned}
 \rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{w} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\
 \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{w} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\
 \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{w} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

(3.29a, b, c)¹⁾

这些大家非常熟悉的微分方程构成了整个流体力学学科的基础, 通常称为 Navier-Stokes 方程。这里还需加上连续方程, 由方程 (3.1) 可知, 对于可压缩的流动, 连续方程有如下形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3.30)$$

上述各方程尚不能完全描述可压缩流体的运动, 因为压力和密度的改变会影响温度的变化, 所以必须再次把热力学原理考虑进去。首先, 我们根据热力学方程得到物性方程(状态方程), 这是联系压力、密度和温度的方程。对于完全气体而言, 其形式为

$$p - \rho RT = 0, \quad (3.31)$$

其中 R 为气体常数, T 为绝对温度。其次, 如果过程不是等温的, 还需要利用能量方程, 能量方程描写热能和机械能之间的平衡关系(热力学第一定律), 并提供一个关于温度分布的微分方程。在第十二章中, 将对能量方程进行更详细的讨论。整个方程组的最

1) 若用指标符号, 则这些方程可写成:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right\},$$

($i, j, k = 1, 2, 3$).

后一个方程由粘性系数的经验规律 $\mu(T)$ 给出。在通常情形下，粘性系数对压力的依赖关系可忽略不计。总括起来，如果认为力 X, Y, Z 是给定的，则共有关于七个变量 u, v, w, p, ρ, T, μ 的七个方程。

对于等温过程，则上述方程组化为五个未知量 u, v, w, p, ρ 的五个方程 (3.29a, b, c), (3.30) 和 (3.31)。

不可压缩流动：在不可压缩流体 ($\rho = \text{常数}$) 的情形下，即使温度是变化的，上述方程组也还可以进一步简化。首先，正如方程 (3.1a) 所早已表明的那样，我们有 $\text{div} \boldsymbol{w} = 0$ 。其次，一般说来，由于温度的变化在这种情形下很小，所以粘性系数可以取为常数¹⁾。

就流场的计算而言，状态方程和能量方程都变成是多余的了。这时可以认为流场与热力学方程无关。运动方程 (3.29a, b, c) 和 (3.30) 还可以简化，同时，若完整地写出加速度项，则运动方程有下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.32a, b, c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.33)$$

1) 气体要比液体更接近于满足这个条件。

因此,在已知体积力的情形下,问题归结为四个未知量 u, v, w, p 的四个方程。

如果用矢量符号,则对于不可压缩流动而言,其简化的Navier-Stokes 方程 (3.32a, b, c) 可以缩写为

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{F} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (3.34)$$

其中符 ∇^2 为 Laplace 算子: $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 。上述 Navier-Stokes 方程与 Euler 方程的差别仅在于多了粘性项 $\mu \nabla^2 \mathbf{w}$ 。

当规定了边界条件和初始条件之后,上述方程的解在物理上就完全确定了。在粘性流体的情形下,还必须满足固壁上的无滑移条件,即在壁面上,速度的法向分量和切向分量都必须为零:

$$\text{在壁面上, } v_n = 0; v_t = 0. \quad (3.35)$$

上述方程首先是由 M. Navier^[9] 在 1827 年和 S. D. Poisson^[10] 在 1831 年导出的,是在考虑分子间作用力的基础上得到的。后来 B. de Saint Venant^[11] 在 1843 年和 G. G. Stokes^[12] 在 1845 年导出了同样的方程,但是出发点不同,即基于与本章相同的假设:法应力和切应力都是变形速率的线性函数(与较早的 Newton 摩擦 Δ 力定律符合),以及热力学压力是法应力之和的负三分之一。

因为线性假设显然是完全任意的,所以不能先验地确信 Navier-Stokes 方程对流体的运动给出了真实的描述。因此必须对这些方程加以检验,当然这只能通过实验来完成。总之,在这方面应该指出:由于求解 Navier-Stokes 方程中所遇到的巨大的数学困难,至今还妨碍我们得到对流项与粘性项大体上相当时的单一的解析解。但是一些已知的解,例如以后要讨论的圆管中的层流和边界层流动,却与实验吻合得如此之好,以致很难对 Navier-Stokes 方程的普遍正确性发生怀疑。

柱坐标: 我们现在将 Navier-Stokes 方程变换到柱坐标中去,以备今后使用。如果设 r, ϕ, z 分别表示三维坐标系中的径向、横向和轴向的坐标, v_r, v_ϕ, v_z 表示沿相应方向的速度分量,那么,在

不可压缩流体流动的情形下，对方程(3.33)和(3.34)作变量变换^{13,113}导出下列方程：

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \\ = F_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.36c)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.36d)$$

应力分量取下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}; & \tau_{r\phi} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right]; \\ \sigma_\phi &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right); & \tau_{\phi z} &= \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right); \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

曲线坐标：使用适应于物体外形的曲线坐标往往是很方便的。在沿曲壁的二维流动的情形下，可选用这样一种坐标系，其

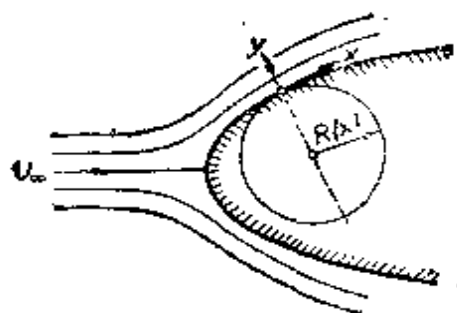


图 3.9 沿曲壁的二维边界层

横坐标 x 沿着壁面量度, 见图 3.9. 因此, 曲线坐标的网络由平行于壁面的曲线族和与它们垂直的直线族组成. 相应的速度分量分别记作 u 和 v . 在坐标 x 处的曲率半径记作 $R(x)$; 当壁面向外凸时, $R(x)$ 是正的, 而壁面向里凹时, 则 $R(x)$ 是负的. 已由 W. Tollmien⁽¹²⁾ 导出了相应形式的完整的 Navier-Stokes 方程, 该方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{vu}{R+y} \\ = - \frac{R}{R+y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{R+y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R+y)^2} + \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{R}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} v + \frac{Ry}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \quad (3.38a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{(R+y)^2} + \frac{R}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} u \right. \\ \left. + \frac{Ry}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \quad (3.38b)$$

$$\frac{R}{R+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R+y} = 0. \quad (3.38c)$$

应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \left(\frac{R}{R+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R+y} \right), \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R+y} + \frac{R}{R+y} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

同时涡量 [见式 (4.5)] 变为

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R+y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R+y} u \right). \quad (3.40)$$

第四章 Navier-Stokes 方程的 一般性质

以后各章要积分 Navier-Stokes 方程。在转入这个问题之前，本章先讨论 Navier-Stokes 方程的若干一般性质。在讨论中，我们只限于不可压缩的粘性流体。

a. 根据 Navier-Stokes 方程推导 Reynolds 相似性原理

迄今为止，还没有一般的解析方法可以用来积分 Navier-Stokes 方程，而只是在某些特殊情形下，得出了对所有粘性系数值都成立的解。例如圆管中的 Poiseuille 流动，或者两个平行壁面之间的 Couette 流动(其中一个壁面处于静止，而另一个壁面沿自身的平面作等速运动(见图 1.1))。基于上述原因，计算粘性流体运动的问题，总是先从极端情况着手，即一方面，求解有极大粘性的问题；另一方面，求解有极小粘性的问题，因为这样做，其数学问题可以得到相当大的简化。但是，对于中等粘性情形，并不能在这两种极端情形之间进行内插。

即使是对粘性很大和粘性很小的情形，仍然有很大的数学上的困难。为此，研究粘性流体的运动在很大程度上是从实验入手的。在这方面，Navier-Stokes 方程给出了一些非常有用的启示。这些启示指出：实验研究所需要的工作量可以大大减少。人们常常用**模型**来进行实验，也就是在风洞(或者其它适当的装置)中研究一个与实际物体几何相似，而尺寸缩小了的模型。这样就提出了关于流体运动**动力相似性**的问题。这个问题显然与下述问题直接有关：即由模型所得到的实验结果如何才能用来预测全尺寸物体的性能。

正如第一章中已经阐述的，如果两种流体运动具有几何相似的边界，并且它们的速度场是几何相似的，也就是说，如果它们有几何相似的流线，则这两种流体运动是动力学相似的。

在第一章，我们已经解答了在流动过程中只有惯性力和粘性力时的动力相似问题。从中可以看到，对于两个动力相似的运动，它们的 Reynolds 数必须相等 (Reynolds 相似性原理)。这个结论是通过对流体中各种力进行估算的方法得到的；现在，我们再从 Navier-Stokes 方程来直接推导这个结论。

△ Navier-Stokes 方程表示一种平衡条件，即对于每一个流体质点而言，它的彻体力(重力)和表面力，与惯性力之间是平衡的。表面力包括压力(法向力)和摩擦力(剪切力)。彻体力只在有自由表面或者密度分布不均匀的情形中才是重要的。在无自由表面的均匀流体的情形下，每一个质点的重力与它的流体静力学的浮力之间处于平衡，就象静止流体中的情形一样。因此，在均匀流体无自由表面的运动中，如果将压力理解为流体运动时的压力与静止时的压力之差，那就可以把彻体力消去。在以下的讨论中，我们只注重这种假设成立的那些情形，因为它们在实际应用中是最重要的。这时，Navier-Stokes 方程只包含压力、粘性力和惯性力。

在这些假设和约定下，定常不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程用矢量形式表示，可以简写为

$$\rho(\mathbf{w} \cdot \text{grad})\mathbf{w} = -\text{grad}p + \mu\nabla^2\mathbf{w}. \quad (4.1)^{1)}$$

上述微分方程必然与方程中出现的各个物理量(例如速度、压力等)所选用的单位无关。

现在，我们来研究以不同的流速绕两个几何相似但线尺度不同的物体的流动，例如绕两个圆球的流动；除了流速不同，两种流体的密度和粘性也可以不同。我们借助于 Navier-Stokes 方程来研究动力相似的条件。显然，对于两种具有几何相似边界的流动，
△ 如果通过适当地选取长度、时间和力的单位，可以将 Navier-Stokes

1) 见第 52 页的脚注。

方程 (4.1) 变换成完全相同的形式, 那么动力相似就成立. 现在, 只要在方程 (4.1) 中引入无量纲量, 就能够免去单位的选取. 把流动中的某些适当的特征量选为单位, 并且让所有其它的量以这些单位作为参考量, 用这样的办法就可以实现这一点. 例如, 可以把来流速度和圆球的直径分别选为速度和长度的单位.

令 V , l 和 p_1 表示这些特征参考量. 如果我们现在在 Navier-Stokes 方程 (4.1) 中引入下列无量纲比值:

$$\text{速度 } W = \frac{w}{V},$$

$$\text{长度 } X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad Z = \frac{z}{l},$$

$$\text{压力 } P = \frac{p}{p_1},$$

则得到

$$\rho \frac{V^2}{l} (W \cdot \text{grad})W = -\frac{p_1}{l} \text{grad}P + \frac{\mu V}{l^2} \nabla^2 W.$$

或者除以 $\rho V^2/l$, 则得到

$$(W \cdot \text{grad})W = -\frac{p_1}{\rho V^2} \text{grad}P + \frac{\mu}{\rho V l} \nabla^2 W. \quad (4.2)^{1)}$$

只有当用各自的无量纲变量所表示的解完全相同时, 所讨论的两种流体运动才能够是相似的. 这就要求: 这两种运动所对应的无量纲 Navier-Stokes 方程所有的项仅仅相差一个共同的因子. 量

$\frac{p_1}{\rho V^2}$ 表示压力与两倍动压头之比. 由于在不可压缩流动中, 压力的

变化不会引起体积的改变, 因此, 这个量对于两种运动的动力相似无关紧要. 然而第二个系数 $\rho V l / \mu$ 却是非常重要的. 如果两种运动要成为动力相似的, 那么这个系数必须取相同的值. 因此, 对于两种运动, 只要

$$\frac{\rho_1 V_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 l_2}{\mu_2},$$

1) 见第 52 页的脚注.

这两种流动就是动力相似的。这个原理是 O. Reynolds 在研究圆管中的流体运动时发现的,因此,就称之为 **Reynolds 相似性原理**。无量纲比值

$$\frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} = R \quad (4.3)$$

称为 Reynolds 数。前面已经介绍过,式中动力粘性系数 μ 与密度 ρ 之比,记作 $\nu = \mu/\rho$,称为流体的运动粘性系数。综上所述,我们可以这样来叙述:当流动的 Reynolds 数相等时,绕几何相似物体的流动是动力相似的。

这样,我们再一次推演了 Reynolds 相似性原理。这一次是从 Navier-Stokes 方程导出的。而以前是先根据对各种力的估算,再利用量纲分析推导出来的。

b. 作为 Navier-Stokes 方程的“解”的无摩擦流动

顺便值得提出的是,不可压缩无摩擦流动的解也可以看成是 Navier-Stokes 方程的精确解,因为在这种情形下,摩擦力项恒等于零。在不可压缩无摩擦流动的情形下,速度矢量可以表示为速度势的梯度:

$$\boldsymbol{w} = \text{grad}\Phi,$$

其中速度势 Φ 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

于是,也就有 $\text{grad}(\nabla^2\Phi) = \nabla^2(\text{grad}\Phi) = 0$, 即 $\nabla^2\boldsymbol{w} = 0$ 。

因此,对于位势流动,方程(4.1)中的摩擦项恒等于零,但是一般说来,这时关于速度的两个边界条件(3.35)就不能同时得到满足了。在位势流动中,如果沿边界的法向分量必须采用所规定的值,那么切向分量因此也就确定了,所以无滑移条件不能同时得到满足。基于这个原因,我们不能把位势流动看作是 Navier-Stokes 方程的有物理意义的解,因为它们不满足所规定的边界条件。然而,对以上所述有一个重要的例外情形,这个例外情形出现在固壁处于运动状态的时候,或者无须应用无滑移条件的时候。最简单的特殊情形是绕旋转圆柱的流动。如本章 f 节页中将详细阐明的那样,这时位势解确实是 Navier-Stokes 方程的有意义的解。有关这方面的详细情况,读者可以参看 G. Hamel^[4] 和 J. Ackeret^[4] 的文章。

下面几节仅限于研究平面(二维)流动,因为只有对这类流动才能说明 Navier-Stokes 方程的某些一般性质。另一方面,在有实际意义的问题中,平面流动是最大的一类。

c. 作为涡量输运方程的 Navier-Stokes 方程

在 x, y 平面上,二维非定常流动情形的速度矢量变为

$$\boldsymbol{\omega} = iu(x, y, t) + jv(x, y, t).$$

方程组 (3.32) 和 (3.33) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4a, b, c)$$

这给出了关于 u , v 和 p 的三个方程。

现在, 我们引入涡矢量, $\text{curl } \boldsymbol{\omega}$, 对于二维流动, 它只剩下一个 z 轴方向的分量:

$$\frac{1}{2} \text{curl } \boldsymbol{\omega} = \omega_z = \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

Δ 无摩擦运动是无旋的, 所以在这些情形下, $\text{curl } \boldsymbol{\omega} = 0$. 从方程 (4.4a, b) 中消去压力项, 我们得到

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (4.6)$$

或者用缩写形式

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (4.7)$$

这个方程称为**涡量输运(或涡量传递)方程**. 它说明由当地项和对流项组成的涡量的随体变化等于由摩擦引起的涡量耗散率. 方程 (4.6) 加上连续方程 (4.4c) 组成关于两个速度分量 u 和 v 的方程组.

最后, 通过引入流函数 $\phi(x, y)$, 我们就可以把具有两个未知量的两个方程变换成只含一个未知量的一个方程. 令

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (4.8)$$

可以看出, 这时连续方程自动满足. 另外, 根据方程 (4.5), 涡量变为

$$\omega = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi, \quad (4.9)$$

涡量输运方程 (4.6) 变为

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} = \nu \nabla^4 \psi, \quad (4.10)$$

在这个形式中，涡量输运方程只包含一个未知量 ψ 。方程 (4.10) 的左边与 Navier-Stokes 方程一样为惯性项，而右边为摩擦项。这是一个关于流函数 ψ 的四阶偏微分方程。一般说来，由于它是非线性的，因而求解也是非常困难的。

利用数值积分，V.G. Jenson^[3] 对于圆球绕流问题求出了涡量输运方程 (4.10) 的解。图 4.1 画出了对于不同 Reynolds 数所得

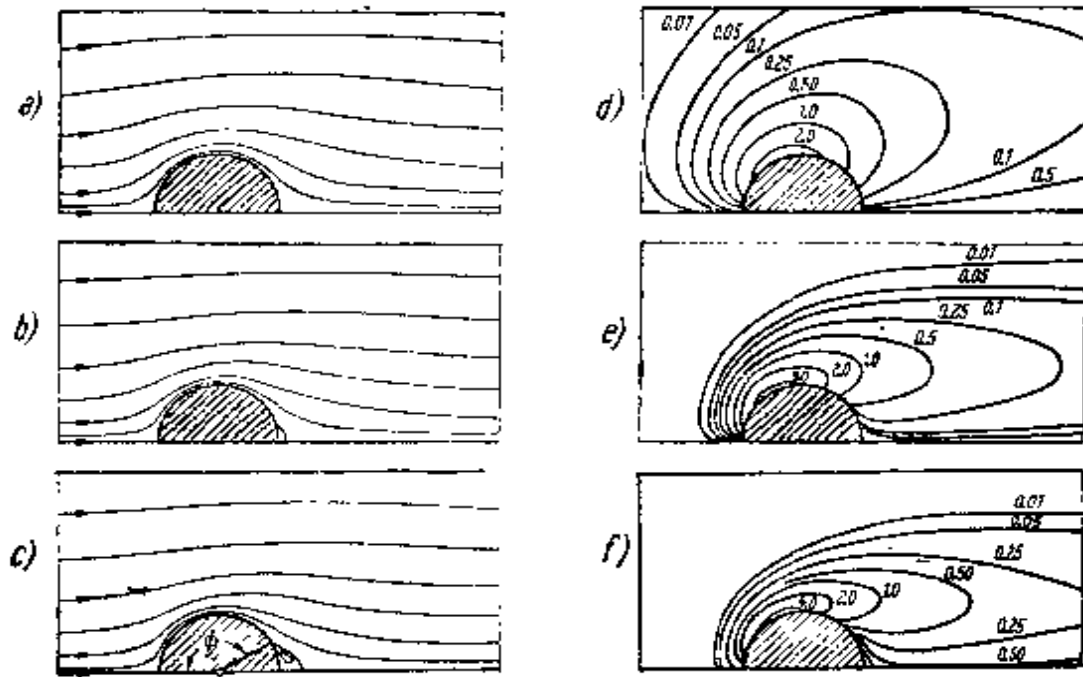


图 4.1 在不同 Reynolds 数 $R = VD/\nu$ 下，V.G. Jenson^[3] 根据涡量输运方程 (4.10) 得到的圆球粘性绕流的流动图象。

a, b, c 为流线图象；d, e, f 为 $\omega D/V = \text{常数}$ 的涡量分布

a, d $R = 5$, $C_D = 8.0$, 无分离

b, e $R = 20$, $C_D = 2.9$, 在 $\phi = 171^\circ$ 处分离

c, f $R = 40$, $C_D = 1.9$, 在 $\phi = 148^\circ$ 处分离

1) 这个方程有时称为流函数 ψ 的 Poisson 方程。

到的流动图象，图上还画出了流场的涡量分布曲线。图 4.1a 和 4.1d 的 Reynolds 数最小， $R = 5$ ，它对应于粘性力大大超过惯性力的情形，这样的流动可以称为蠕动流（见本章 d 节和第六章）。在这种情形下，整个流场是有旋的，圆球前后的流线图象几乎相同。随着 Reynolds 增大，在圆球的背风区形成一个有迴流的分离区。同时，旋涡也渐渐地向圆球下游区域集中。在迎风区，流动几乎变成无旋的。这里所讨论的由 Navier-Stokes 方程求得的流动图象，使我们可以了解流动特征随 Reynolds 数增加而发生的变化。但即使在达到图 4.1c 和 4.1f 所示的最大 Reynolds 数 $R = 40$ 时，边界层的图象也还没有完全形成。

M. Coutanceau 和 R. Bouard 的两篇文章^[1c, 1d]叙述了对圆柱体尾迹所作的非常广泛的实验研究，其 Reynolds 数范围为 $5 < R < 40$ ，并且包括定常流动和非定常流动两种情形。

现代高效能电子计算机的发展，已经有可能用纯数值方法求解绕简单几何体流动的 Navier-Stokes 方程。为了做到这一点，要用差分方程代替微分方程。对此所使用的数值方法将在第九章 i 节中加以说明。这里我们不再深入讨论这个问题，只是引用一个有趣的结果。图 4.2 显示了 J.E. Fromm 和 F. H. Harlow^[3] 计算的绕一个与来流垂直的矩形平板的流动图象。在平板的背后形成了类似于圆柱体后面所形成的涡街（见图 1.6 和 2.7）。图 4.2a 是实验测定的流线图象，而图 4.2b 则是计算得到的流场，两者的 Reynolds 数均为 $Vd/\nu = 6000$ 。尽管在这个 Reynolds 数范围内流动只获得一个振荡特征（图 1.6），但是，这两个流动图象还是符合得相当好。对 Navier-Stokes 方程获得这种数值解的尝试，最早可以追溯到 A. Thom^[6]。他在低 Reynolds 数 ($R = 10 \sim 20$) 的情况下，对圆柱体完成了这种计算。后来，这些计算做到 $R = 100$ ^[2]。随着 Reynolds 数增大，这种数值积分的困难程度也急剧增加。在这方面，值得参考的有 A. Thom 和 C. J. Apelt 的综述性文章^[7]，以及 C. J. Apelt^[2a]，D. N. de G. Allen 和 R. V. Southwell^[1b]，H. B. Keller 和 H. Takami^[5a] 等人的工作。

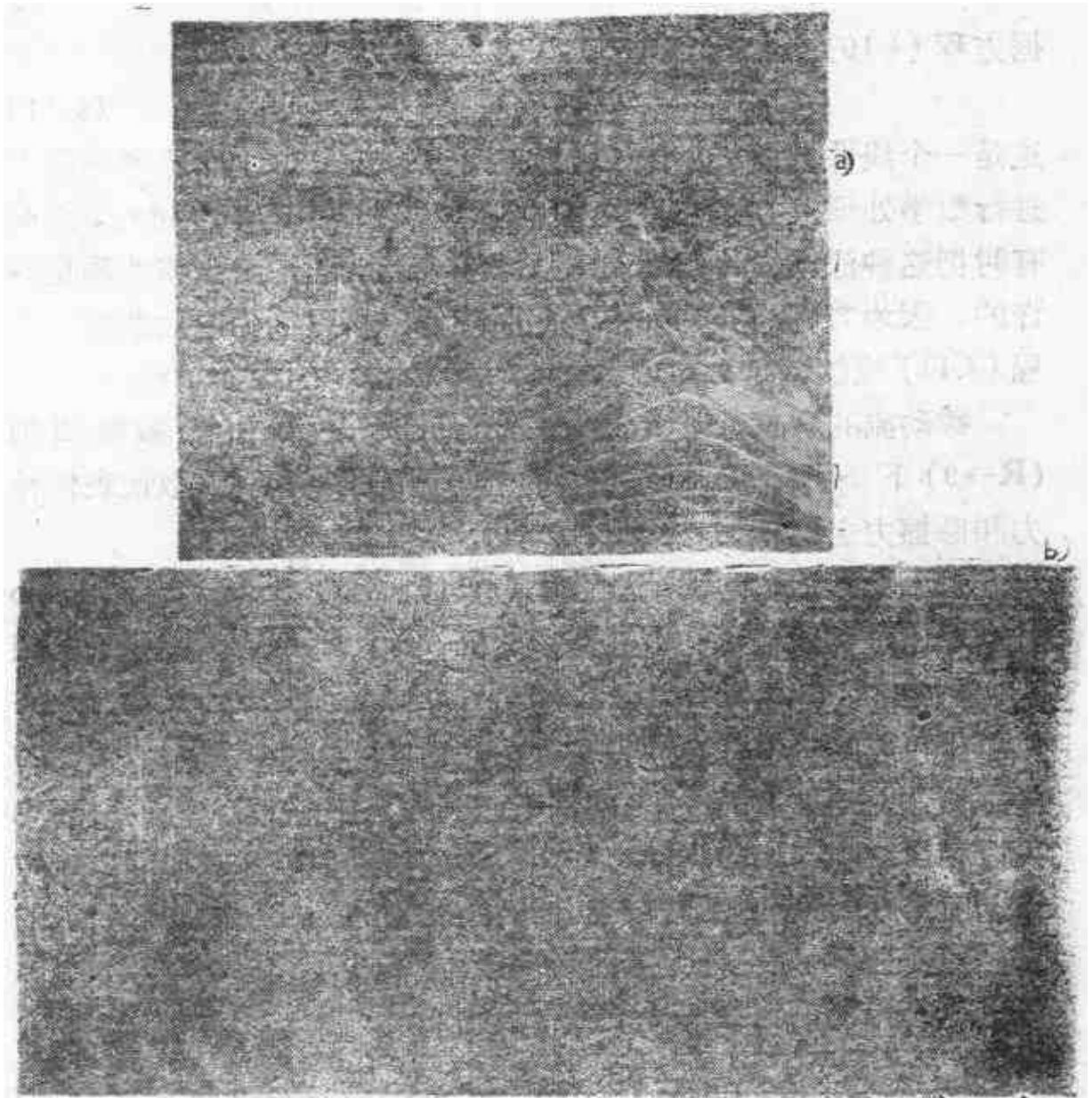


图 4.2 与来流垂直的矩形平板 ($H/d = 3.6$) 后面的流动图象, Reynolds 数 $R = VH/\nu = 6000$, 引自 J. E. Fromm 和 F. H. Harlow^[3]. (H 为板的高度, d 为板的厚度)

a) 实验测定的流线图象

b) $R = tV/H = 2.78$ 时 (t 为自运动开始的时间) 用 Navier-Stokes 方程进行数值积分计算的流动图象. 数值积分是在 IBM7090 计算机上完成的

d. 粘性很大 (Reynolds 数很小) 时的极限情形

在极慢运动或者粘性系数很大的运动中, 粘性力远大于惯性力, 因为后者具有速度平方的量级, 而前者只与速度成线性关系. 因此, 作为初步近似, 惯性项相对于粘性项而言可以略去不计. 根

据方程 (4.10) 我们得到

$$\nabla^4 \phi = 0. \quad (4.11)$$

这是一个线性方程，这个方程比起完整的方程 (4.10) 显然更易于进行数学处理。方程 (4.11) 描述的流动以极小的速度进行，因此有时把这种流动称为**蠕动流**。从数学观点来看，略去惯性项是允许的，因为方程的阶数并未因此而降低。所以简化以后的微分方程 (4.11) 能够满足和完整方程 (4.10) 同样多的边界条件。

蠕动流的解也可以看成是在 Reynolds 数很小的极限情形 ($R \rightarrow 0$) 下 Navier-Stokes 方程的解，因为 Reynolds 数代表惯性力和摩擦力之比。

对于粘性流体的蠕动流方程 (4.11)，G. G. Stokes 和 H. Lamb 分别求出了圆球情形和圆柱情形的解。Stokes 解可以应用于雾滴在空气中的下落运动，或者小球在粘油中的运动。这时速度很小，以至于可以略去惯性力而仍有很好的精度。另外，**润滑流体动力学理论**，即在轴颈和轴承之间很窄的间隙中润滑油的运动理论，也可以利用这个简化的运动方程作为它的出发点。在以后的实例中可以看出，即使速度不是很小，但极小的间隙高度和油的相当大的粘性，也可以保证粘性力远大于惯性力。不过，除了润滑理论之外，蠕动流理论的应用领域是十分有限的。

e. 粘性很小 (Reynolds 数很大) 时的极限情形

从实用观点出发，这第二种极端情形，即在方程 (4.10) 中粘性力远小于惯性力的情形具有更大的重要性。因为两种最重要的流体，即水和空气，粘性都很小，一般说来，所研究的问题又总是发生在比较高的速度下，这正是 Reynolds 数很大 ($R \rightarrow \infty$) 时的极限情形。在这种情形下，微分方程 (4.10) 的数学简化过程需要非常慎重。这里不允许简单地略去全部粘性项，即方程 (4.10) 右边的项。如果这样做的话，会使方程从四阶降为二阶，那么简化方程的解也就不能满足原来方程的全部边界条件。以上概述的问题在本质上属于**边界层理论**的范畴。现在，在惯性力远大于粘性

力的特殊情形(即 Reynolds 数很大的极限情形)下, 我们打算简短地讨论有关 Navier-Stokes 方程求解的一般方法。

对于粘性很小(也就是与惯性项相比摩擦项很小)的极限情形, 下述类比可以用来说明 Navier-Stokes 方程解的性质。在流动的流体中, 热物体附近的温度分布 $\theta(x, y)$ 可以用下列微分方程来描述(见第七章):

$$\rho c \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \quad (4.12)$$

式中 ρ , c 和 k 分别表示流体的密度, 比热和导热系数; θ 是当地温度和远离物体处的温度之差。若远离物体处的温度 T 为常数, 且等于 T_∞ , 则 $\theta = T - T_\infty$ 。方程 (4.12) 中的速度场 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 假定是已知的。物体边界上的温度记作 T_0 , $T_0 \geq T_\infty$ 是事先规定的。一般说来, T_0 是空间位置和时间的函数, 但是就最简单的情形而论, 可以认为 T_0 不随位置和时间而变。从物理观点 Δ 来看, 方程 (4.12) 代表微元体积的热平衡。左边代表对流热交换量, 而右边是传导热交换量。式中略去了流体内产生的摩擦热。如果 $T_0 > T_\infty$, 那么这个问题就是要确定(受冷却的)热物体周围的温度场。查看一下就可以发现, 方程 (4.12) 与涡量 ω 的方程 (4.6) 具有相同的形式。事实上, 如果用温度差来代替涡量, 用称为热扩散系数的比值 $k/\rho c$ 来代替运动粘性系数 ν , 那么这两个方程就变成全完一样了。远离物体处的边界条件 $\theta = 0$ 对应于远离物体处的未受扰动平行流的条件 $\omega = 0$ 。因此, 我们可以预料这两个方程的解, 即围绕物体的涡量分布和围绕物体的温度分布在性质上将是类似的。

现在, 在一定程度上我们可以直观地看出围绕物体的温度分布。在速度为零(流体处于静止状态)的极限情形下, 热物体的影响将向四周均匀地延伸。当速度很小时, 物体周围的流体仍然会在所有的方向上受到它的影响。可是随着流动速度增加, 可以明显地看到, 受物体高温影响的范围愈来愈缩小到紧靠物体的狭窄区域内, 以及物体后面受热流体的尾迹中, 见图 4.3。

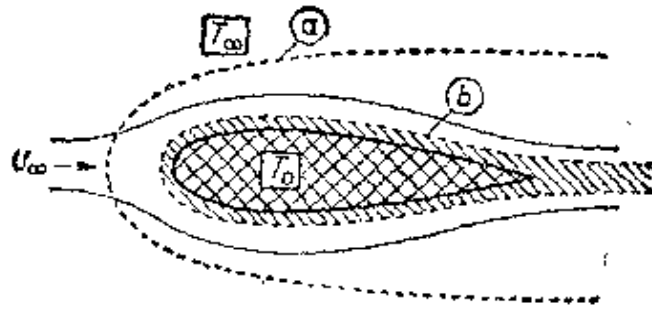


图 4.3 流体中物体附近的温度分布和涡量分布之间的类比。
a), b) 增温区域的界线: a) 流速较小, b) 流速较大

如上所述, 方程 (4.12) 中的解必定与涡量方程的解具有类似的性质。当速度很小时(粘性力远大于惯性力), 物体周围的整个流动区域内都存在旋涡。反之, 当速度很大时(粘性力远小于惯性力), 我们可以预料: 在这个流场中, 旋涡将局限在沿物体表面的薄层中和物体后面的尾迹中, 而流场的其余部分实际上仍然是无旋的(见图 4.1)。因此, 在粘性力很小(即 Reynolds 数很大)的极限情形下, 可以认为 Navier-Stokes 方程的解是这样构成的, 它允许把流场分成一个无旋的外部区域和一个贴近物体的薄层连同物体后面的尾迹区域。在第一个区域里可以认为流动满足无摩擦的流动方程, 因此可以利用位势流理论进行计算; 而在第二个区域里存在着旋涡, 因此必须利用 Navier-Stokes 方程进行计算。只有在称为**边界层**的第二个区域里, 粘性力才是重要的, 即粘性力和惯性力有相同的量级。本世纪初, L. Prandtl 将这个边界层概念引入流体力学学科; 业已证明这是卓有成效的。把流场划分为无摩擦的外部流动和本质上为粘性的边界层流动, 使得 Navier-Stokes 方程所固有的数学上的困难减小到这样的程度, 以至于大量的问题都可以进行积分。叙述这些积分方法正是后面各章所介绍的边界层理论的主题。

根据对 Navier-Stokes 方程现有的解的数值分析, 也能够直接证明在 Reynolds 数很大时的极限情形下存在一个薄边界层, 粘性力的影响集中在这一薄层内。第五章我们将回过头来讨论这个

问题。

前面讨论过的粘性力远远超过惯性力的极限情形(蠕动流,即 Reynolds 数很小的运动),可以使 Navier-Stokes 方程在数学上大为简化。在略去惯性项之后,方程的阶数没有降低,但是它们变成线性方程。然而,对于惯性力远大于粘性力(边界层,即 Reynolds 数很大)的第二种极限情形,数学上要比蠕动流情形困难得多。因为,如果我们简单地把 $\nu = 0$ 代入 Navier-Stokes 方程 (3.32), 或者代入流函数方程 (4.10), 就会因此而消去了最高阶的导数项,用这种降了阶的简化方程不能同时满足完整微分方程的全部边界条件。当然,这并不意味着这种略去了粘性项的简化方程的解会失去它们的物理意义。实际上,在 Reynolds 数很大的极限情形下,简化方程的解与完整的 Navier-Stokes 方程的完全解几乎处处相吻合,不相吻合的区域仅仅局限于壁面附近的一个薄层——边界层内。这样, Navier-Stokes 方程组的完全解可以认为是由两个解组成的,一个是由 Euler 运动方程得到的所谓“外部”解,另一个是在贴近壁面的薄层内才有效的所谓“内部”解或边界层解。“内部”解满足所谓的边界层方程,这些方程是由 Navier-Stokes 方程通过坐标放大以及 R 趋于无穷大的极限情形导出的,正如第七章中将要证明的那样。外部解和内部解必须利用下述条件使之相互匹配:即必定有一个对两种解都适用的重叠区域。

f. R 趋于无穷大的数学解释¹⁾

因为以上的论述构成了边界层理论的基本原理之一,所以通过引证由 L. Prandtl 首先给出的一个数学类比来解释这些基本思想也许是值得的²⁾。

让我们来研究由微分方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (4.13)$$

所描述的质点阻尼振动。式中 m 表示振动质量, c 是弹簧常数, k 是阻尼因子, x 是从

1) 感谢 Klaus Gersten 教授对本书的修改意见。

2) L. Prandtl, Anschauliche und nützliche Mathematik. Lectures delivered at Göttingen University in the Winter-Semester of 1931/32.

平衡位置量起的长度坐标, t 是时间. 假设初始条件是

$$t = 0 \text{ 时, } x = 0. \quad (4.14)$$

与运动粘性系数 ν 很小时的 Navier-Stokes 方程相类似, 这里我们考虑质量 m 很小的极限情形, 因为这样也使得方程 (4.13) 中的最高阶项变得很小.

方程 (4.13) 满足初始条件 (4.14) 的完全解有如下形式:

$$x = A\{\exp(-ct/k) - \exp(-kt/m)\}; \quad m \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

式中 A 是待定常数, 其值可由第二个初始条件确定.

如果在方程 (4.13) 中令 $m = 0$, 我们得到简化方程

$$k \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (4.16)$$

它是一阶的, 其解为

$$x_0(t) = A \exp(-ct/k). \quad (4.17)$$

由于适当地选择了可调的常数, 这个解与完全解的第一项是相同的. 不过, 这个解并不能满足初始条件 (4.14); 因而, 它代表的只是时间 t 为很大时的解 (“外部”解). 时间 t 很小时的解 (“内部”解) 满足另一个微分方程, 这个方程也可以从方程 (4.13) 导出. 为了做到这一点, 我们引进一个新的 “内部” 变量

$$t^* = t/m, \quad (4.18)$$

把自变量 t “放大”. 用这种方法, 方程 (4.13) 变换成

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} + k \frac{dx}{dt^*} + mcx = 0. \quad (4.19)$$

在 $m = 0$ 的极限情形下, 我们导出控制 “内部” 解的微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} + k \frac{dx}{dt^*} = 0. \quad (4.20)$$

这个方程的解是

$$x_1(t^*) = A_1 \exp(-kt^*) + A_2. \quad (4.21)$$

尽管作了简化, 但微分方程 (4.20) 仍然是二阶方程; 只要选取

$$A_1 = -A_2, \quad (4.22)$$

就可以满足初始条件 (4.14). 常数 A_2 的值是通过与 “外部” 解 (4.17) 相匹配得出的. 在重叠区域内, 也就是时间值为中等大小时, 式 (4.17) 和 (4.21) 的解必须相吻合. 因此, 必定有

$$\lim_{t^* \rightarrow \infty} x_1(t^*) = \lim_{t \rightarrow 0} x_0(t),$$

或者用文字表述为: “内部” 解的 “外” 限必等于 “外部” 解的 “内” 限. 由条件 (4.23) 可以立即导出

$$A_2 = A. \quad (4.24)$$

所以内部解为

$$x_1(t^*) = A\{1 - \exp(-kt^*)\}. \quad (4.25)$$

当时间 t 为小值时, 把完全解 (式 (4.15)) 的首项展开, 并且只保留展开式中的第一项, 也就是说通过令

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp(-ct/k) = 1, \quad (4.26)$$

也可以得到同样的形式。式(4.17)表示的外部解和式(4.25)表示的内部解，只要它们各自在自己所适用的区域内使用，这两个解加在一起就构成了完全解。在 t 为有限值时，如果 $m \rightarrow 0$ ，式(4.15)趋向于外部解；而 t^* 为常数时，式(4.15)趋向于内部解。把两个局部解加在一起，就给出了在全部 t 值范围内都适用的组合形式的完全解。但是要记住，由表达式(4.23)所示的公共项只能计入一次。因此按照这个规定，应该从总和中减去一个公共项，即

$$x(t) = x_0(t) + x_i(t^*) - \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t^*) = x_0(t) + x_i(t^*) - \lim_{t \rightarrow 0} x_0(t). \quad (4.27)$$

对于 $A > 0$ 的情形，由式(4.15)绘图表示的完全解画在图 4.4 上。曲线 (a) 对应于外部解(4.17)。曲线 (b)、(c) 和 (d) 表示随着 m 从 (b) 减小到 (d) 时完整的微分方程(4.13)的几个解。

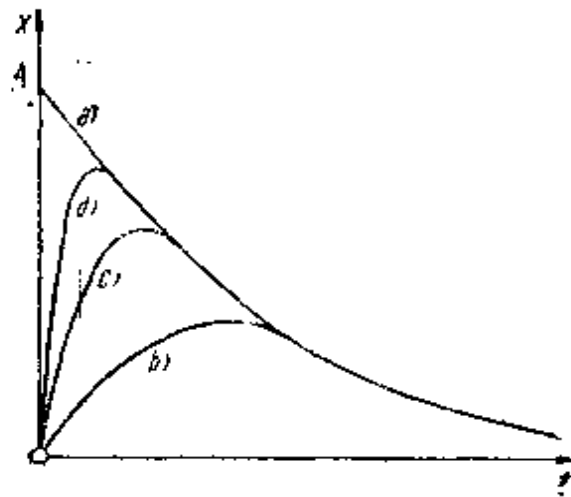


图 4.4 振动方程(4.13)的解

(a) $m = 0$ 时简化方程(4.16)的解；(b)、(c)、(d) 表示不同 m 值时完整的微分方程(4.13)的解。当 m 极小时，解 (d) 获得边界层特征

如果我们把这个例子与 Navier-Stokes 方程作比较，那么就可以断定：完整的方程(4.13)类似于粘性流体的 Navier-Stokes 方程，而简化方程(4.16)则对应于理想流体的 Euler 方程。初始条件(4.14)所起的作用类似于实际流体的无滑移条件。Navier-Stokes 方程的解能够满足无滑移条件，但 Euler 方程的解却不能满足这个条件。缓慢变化的解类似于不必满足无滑移条件的无摩擦解（位势流动）。快速变化的解代表由于出现粘性而确定的边界层解，粘性只是在贴近壁面的狭窄区域（边界层）内才不为零。应当注意，只有加上这个边界层解，第二个边界条件（壁面上无滑移）才能够得到满足，从而整个解在物理上才是真实的。

上述简单的例子与前一节所讨论的问题显示出相同的数学特征。即对于粘性很小（Reynolds 数很大）的情形，当我们讨论趋于极限的过程时，不允许简单地略去 Navier-Stokes 方程中所有的粘性项。只有在解的主要组成部分（外部解）当中才能这样做。

以后，我们会更详细地说明：当 $R \rightarrow \infty$ 时，在求解过程中无需继续保留这种完整的 Navier-Stokes 方程。为了在数学上简单起见，将证明可以略去其中的某些项，特别是那些很小的粘性项。然而，值得注意的是：并不是所有的粘性项都是可以略去的，因为这样会使 Navier-Stokes 方程降阶。

第五章 Navier-Stokes 方程的精确解

求解 Navier-Stokes 方程的精确解的问题,一般都会遇到难以克服的数学困难。这主要是因为方程是非线性的,因而不能应用叠加原理的缘故;在无粘性的位势流动问题中,这个原理非常有用。但是,在某些特殊情形下,主要是当二次对流项自然消失时,还是能求出精确解的。在这一章里,我们要集中讨论几个精确解。顺便还要指出,在粘性系数很小的情形下,许多精确解具有**边界层结构**,就是说,粘性的影响局限于靠近壁面的薄层内。

关于 Navier-Stokes 方程解法的综合评述,已经由 R. Berker^[4]给出。

a. 平行流动

平行流动是一种特别简单的流动。如果只有一个速度分量不为零,所有的流体质点都沿着同一方向流动,这种流动就称为平行流动。例如:如果速度分量 v 和 w 处处为零,则由连续方程立即 Δ 得出 $\partial u / \partial x \equiv 0$, 这意味着速度分量 u 不能依赖于 x 。所以,对于平行流动,有

$$u = u(y, z, t); \quad v \equiv 0; \quad w \equiv 0, \quad (5.1)$$

另外,由 Navier-Stokes 方程(3.32)中 y 方向和 z 方向的方程¹⁾,还可以直接得出 $\partial p / \partial y = 0$, $\partial p / \partial z = 0$, 所以压力只依赖于 x 。另外,在 x 方向的方程中,所有的对流项都等于零。因此

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.2)$$

1) 在以下论述中,术语“压力”表示总压力与流体静力学压力(静止压力)之差。这就使体积力消失了,因为它们与流体静力学压力相平衡。

这是一个关于 $u(y, z, t)$ 的线性微分方程。

1. 直槽内的平行流动和 Couette 流动 对于有两个平行平直壁面的直槽内的定常流动问题 (图 5.1), 可以得到方程 (5.2) 的一个非常简单的解, 令 $2b$ 表示壁面之间的距离, 则方程 (5.2) 可写为

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.3)$$

其边界条件可写为: 在 $y = \pm b$ 处, $u = 0$ 。因为 $\partial p / \partial y = 0$, 所以由式 (5.3) 可以看出, 流动方向的压力梯度等于常数。因此, $dp/dx = \text{常数}$, 而且方程的解是

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2), \quad (5.4)$$

所得到的速度剖面 (图 5.1) 是抛物线的。

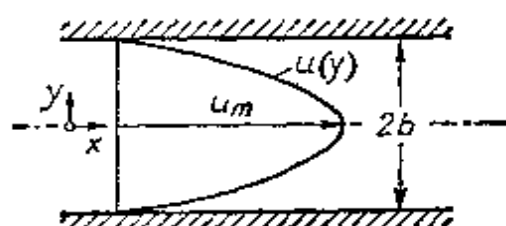


图 5.1 具有抛物线速度分布的平行流动

方程 (5.3) 的另一个简单解, 是对两个平行平板之间的所谓 Couette 流动得出的; 其中一个平板是静止的, 另一个在它自身的平面内以速度 U 运动 (图 5.2)。根据边界条件

$$y = 0: u = 0; \quad y = h: u = U,$$

我们得到解

$$u = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (5.5)$$

这个解绘在图 5.2 中。特别是, 在零压力梯度情形下我们有

$$u = \frac{y}{h} U. \quad (5.5a)$$

这种特殊情形称为简单的 Couette 流动, 或简单的剪切流动。Co-

△ Couette 流动的一般情形, 是这种简单流动和两个平直壁面之间流动的叠加。其速度剖面的形状取决于无量纲压力梯度

$$P = \frac{h^2}{2\mu U} \left(-\frac{dp}{dx} \right).$$

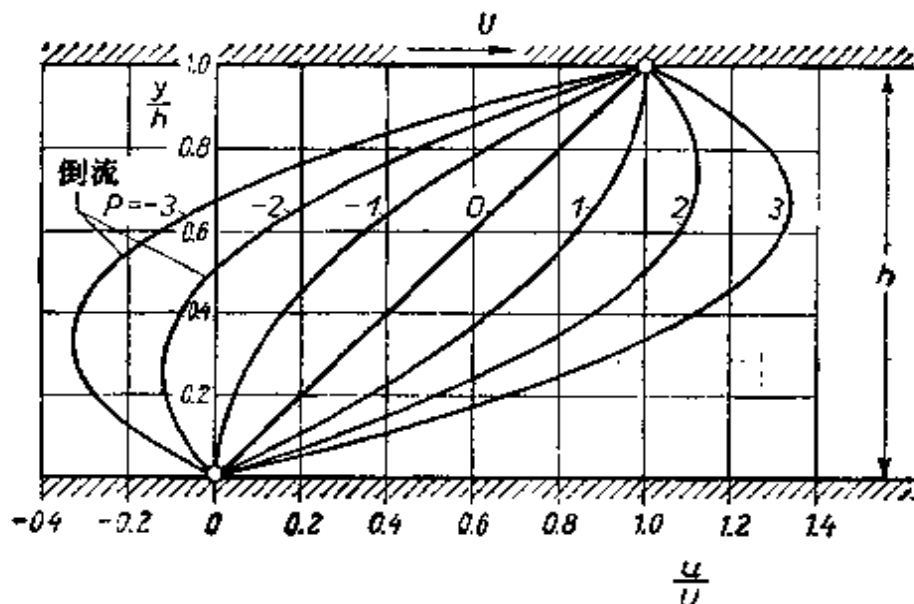


图 5.2 两个平行平板之间的 Couette 流动

$P > 0$, 压力沿平板运动方向降低; $P < 0$, 压力升高; $P = 0$, 零压力梯度

△ 当 $P > 0$ 时, 即当压力沿运动方向降低时, 在槽的整个宽度上速度都是正的。当 P 为负值时, 在槽的部分宽度上速度可以成为负的, 即在靠近静止壁面的地方可能出现倒流, 而且由图 5.2 可以看出, 这出现在 $P < -1$ 时。在这种情形下, 运动较快的流体层对壁面附近流体质点的拖曳作用, 不足以克服逆压梯度的影响。这种有压力梯度的 Couette 流动, 在润滑的流体动力学理论中有一定的重要性。在轴颈与轴承之间狭窄间隙内的流动, 与有压力梯度的 Couette 流动大体相同(参看第六章 c)。

2. 圆管流动的 Hagen-Poiseuille 理论 圆截面直管中的流动是旋转对称流动, 它与上述直槽内的二维流动相对应。将 x 轴选在管轴上(图 1.2), 令 y 表示由管轴向外度量的径向坐标, θ 周向和径向的速度分量都为零; 平行于管轴的速度分量记作 u , 它仅依赖于 y 。同时, 在每个横截面上压力为常数。这样在用柱坐标表

示的方程(3.36)的三个 Navier-Stokes 方程中,只留下一个轴向方程,它简化为

$$\mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx}, \quad (5.6)$$

其边界条件是: 在 $y = R$ 处, $u = 0$ 。方程(5.6)的解给出速度分布

$$u(y) = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2), \quad (5.7)$$

其中 $-dp/dx = (p_1 - p_2)/l =$ 常数是压力梯度, 并看作是给定的。这里, 作为 Navier-Stokes 方程精确解所得到的解(5.7), 与用初等方法得到的解(1.10)相一致。横截面上的速度按旋转抛物面的形式分布, 管轴上的最大速度是

$$u_m = \frac{R^2}{4\mu} \left(- \frac{dp}{dx} \right).$$

平均速度 $\bar{u} = \frac{1}{2} u_m$, 即

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dx} \right), \quad (5.8)$$

因而流动的体积流量为

$$Q = \pi R^2 \bar{u} = \frac{\pi R^3}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dx} \right). \quad (5.9)$$

尽管对 dp/dx , R , μ 的任意值, 也就是对 \bar{u} , R , μ 的任意值, 上述公式都构成 Navier-Stokes 方程的精确解, 但实际上只是在 Reynolds 数 $\mathbf{R} = \bar{u}d/\nu$ (d 是圆管直径) 小于所谓临界 Reynolds 数时, 才出现上述解所描述的层流。根据实验结果, 大约

$$\left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \right)_{\text{crit}} = \mathbf{R}_{\text{crit}} = 2300.$$

当 $\mathbf{R} > \mathbf{R}_{\text{crit}}$ 时, 流动图象就完全不同了, 它将变成为湍流的。我们将在第二十章中比较详细地讨论这种类型的流动。

压力梯度与平均流速之间的关系, 在工程应用上一般都用管

流阻力系数 λ 来表示。我们令压力梯度正比于动压头来定义这个阻力系数，也就是按方程¹⁾

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \quad (5.10)$$

使压力梯度正比于平均流速的平方来定义 λ 。代入式 (5.8) 的 dp/dx 表达式后，我们得到

$$\lambda = \frac{2d}{\rho \bar{u}^2} \frac{8\mu \bar{u}}{R^2} = \frac{32\mu}{\rho \bar{u} R}$$

即

$$\lambda = \frac{64}{R}, \quad (5.11)$$

其中

$$R = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} = \frac{\bar{u} d}{\nu} \quad (5.12)$$

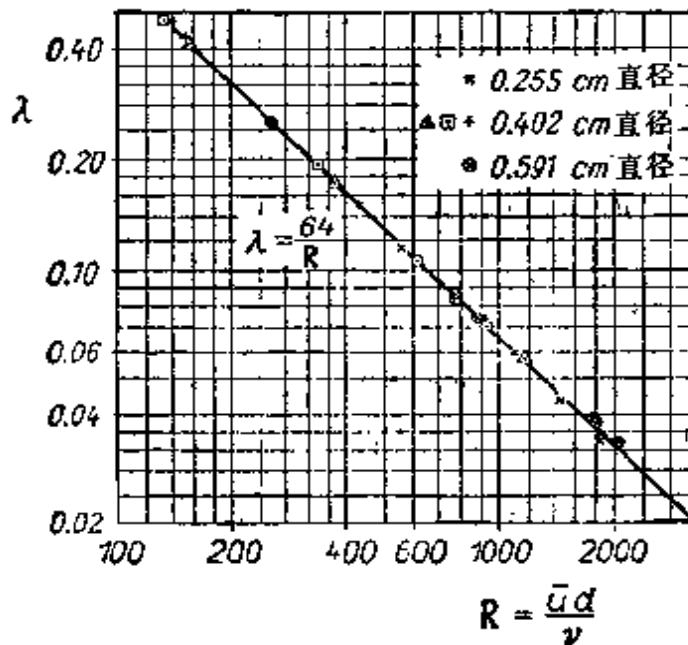


图 5.3 圆管中的层流；阻力系数 λ 随 Reynolds 数的变化关系(由 Hagen 测量),引自 Prandtl-Tietjens

1) 这个 $dp/dx \sim \bar{u}^2$ 的二次律很适合于湍流。尽管在层流范围内 $dp/dx \sim \bar{u}$ ，但是仍然把上述二次律作为层流定律。因此，对于层流， λ 不再是常数了。

这里 R 表示由圆管直径和平均流速计算的 Reynolds 数。图 5.3 画出了 G. Hagen^[10] 测量的实验点, 由图可见, 圆管压力损失的层流方程 (5.11) 与层流的实验结果极为吻合。由此可以推断, Hagen-Poiseuille 的抛物线速度分布, 代表了与实验结果相吻合的 Navier-Stokes 方程的解^[22]。对于圆环截面的管道问题, 也能得出 Navier-Stokes 方程的精确解^[20]。关于偏心环截面的管道中的层流和湍流问题, 在文献[38]中从理论上进行了讨论, 该文也有一些实验结果。

3. 两个同轴旋转的圆柱面之间的流动 另一个给出 Navier-Stokes 方程简单精确解的例子, 是两个同轴旋转的圆柱面之间的流动; 这两个柱面以各自不同的角速度匀速旋转。我们分别用 r_1 和 r_2 表示内、外柱面的半径。类似地, 用 ω_1 和 ω_2 表示这两个角速度。对于平面极坐标情形, Navier-Stokes 方程 (3.36) 简化为

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr}; \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) = 0, \quad (5.14)$$

其中 u 表示周向速度。边界条件是: 在 $r = r_1$ 处, $u = r_1 \omega_1$, 在 $r = r_2$ 处, $u = r_2 \omega_2$ 。方程 (5.14) 满足这些边界条件的解是

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right]. \quad (5.15)$$

方程 (5.13) 可以确定由这种运动引起的径向压力分布。

内柱面静止、外柱面旋转的情形具有一定的实际意义。在这种情形下, 外柱面传给流体的转动力矩为

$$M_2 = 4\pi\mu h \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \omega_2, \quad (5.16)$$

其中 h 是柱面的高。流体作用在内柱面上的力矩 M_1 具有相同的数值。这里所讨论的装置, 常常用来测定粘性系数。测量出外柱面的角速度和作用在内柱面上的力矩, 就能通过式 (5.16) 计算出粘性系数。

现在打算就下面两种特殊情形，分别给出这两个柱面之间的环形区域内的速度分布。情形 I 是内柱面旋转、外柱面静止；情形 II 是内柱面不动，外柱面旋转。这两种流动都称为 Couette 流动。用 $\kappa = r_1/r_2$ 表示两个半径之比，用 $s = r_2 - r_1$ 表示圆环的宽度，另外，用 $x = r/r_2$ 表示流动的相对半径（图 5.4），我们

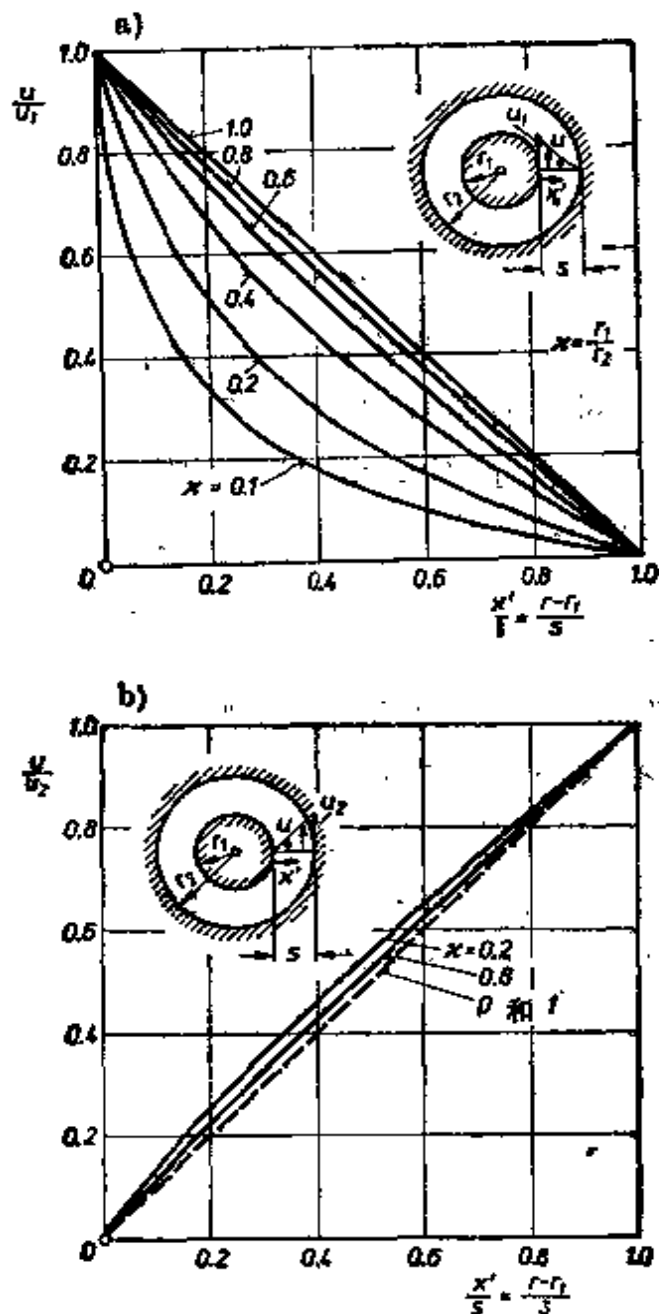


图 5.4 两个同轴旋转的圆柱面之间圆环内的速度分布，用式 (5.15a, b) 计算。

a) 情形 I: 内柱面旋转；外柱面静止 ($\omega_2 = 0$)。 (b) 情形 II: 内柱面静止 ($\omega_1 = 0$)；外柱面旋转。 $r_1 =$ 内柱面半径， $r_2 =$ 外柱面半径

可以得到

$$(I) \frac{u}{u_1} = \frac{\kappa}{1-\kappa^2} \frac{1-x^2}{x} \quad (\text{内柱面旋转; 外柱面静止}), \quad (5.15a)$$

$$(II) \frac{u}{u_2} = \frac{\kappa}{1-\kappa^2} \left(\frac{x}{\kappa} - \frac{\kappa}{x} \right) \quad (\text{内柱面静止; 外柱面旋转})$$

(5.15b)

这里, $u_1 = r_1\omega_1$ 是内柱面的圆周速度, $u_2 = r_2\omega_2$ 是外柱面的圆周速度. 图 5.4 绘出了这两种速度分布, 它们是用离开内柱面的无量纲距离

$$\frac{x'}{s} = \frac{r-r_1}{s}$$

表示的. 值得指出的是, 在情形 I 中, 速度随两个半径之比 $\kappa = r_1/r_2$ 剧烈变化; 而对于情形 II, 速度几乎与此无关. 当 $\kappa = r_1/r_2 \rightarrow 1$ 时, 这两种情形都趋向于 Couette 流动的线性速度分布, 就象图 1.1 中绘出的在两个平板间出现的情形一样. 对于情形 II, 当无内柱面时, 即 $r_1 = 0$ 或 $\kappa = 0$ 时, 其方程也给出同样的极限分布. 在这种情形下, 流体在外柱面里象刚体一样转动. 因此, 可以看出, 在 $\kappa = 0$ 和 $\kappa = 1$ 这两种渐近情形下, 情形 II 都得出线性的速度分布. 根据这种特性就不难理解, 为什么对于其他中间的 κ 值, 速度分布与直线相差这样小.

△ 在单个圆柱于无限流体中旋转的特殊情形 ($r_2 \rightarrow \infty$, $\omega_2 = 0$) 下, 式 (5.15) 给出 $u = r_1^2\omega_1/r$, 而流体传给圆柱的转动力矩变为 $M_1 = 4\pi\mu hr_1^2\omega_1$. 流体中的这种速度分布, 与无粘流动中强度为 $\Gamma_1 = 2\pi r_1^2\omega_1$ 的线涡周围的速度分布相同, 即

$$u = \frac{\Gamma_1}{2\pi r}$$

所以可以看出, 线涡附近的无粘流动是 Navier-Stokes 方程的解 (参看第四章 b). 关于这一点, 讲一讲 Navier-Stokes 方程的一个非定常精确解的例子, 即描述在粘性作用下旋涡衰减过程的例子, 或许是有启发的. 如 C. W. Oseen^[21] 和 G. Hamel^[21] 导出的, 周

向速度分量 u 对径向距离 r 和时间 t 的分布由下式给出:

$$u(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \{1 - \exp(-r^2/4\nu t)\}.$$

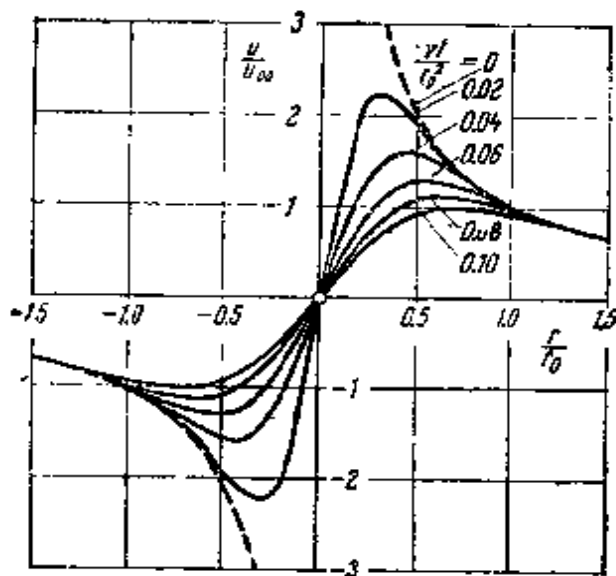


图 5.5 由粘性作用引起的涡丝附近不同时刻的速度分布
 Γ_0 = 在时间 $t = 0$ 粘性刚起作用时涡丝的环量; $u_{\infty} = \Gamma_0/2\pi r_0$

图 5.5 中绘出了这个速度分布曲线。这里 Γ_0 表示在时间 $t = 0$ 时,即假设粘性刚起作用时涡丝的环量。A. Timme^[40] 对这个过程进行了实验研究。对于旋涡内的速度分布不同于位势理论所给出的速度分布的情形, K. Kirde^[17] 进行了分析研究。

4. 突然加速的平板壁面; Stokes 第一问题 我们现在着手计算几个非定常的平行流动问题。¹⁾ 由于对流加速项恒等于零, 所以粘性力与当地加速度相互作用。这种流动的最简单情形是当运动由静止突然开始时出现的。我们将从平板附近的流动问题开始, 这个平板由静止突然加速, 然后在自身平面内以速度 U_0 匀速运动。这是 Stokes 在关于摆的著名论文中所解决的问题之一^[35]。选取 x 轴沿壁面指向 U_0 方向, 我们就得到简化的 Navier-Stokes 方程

1) 一些作者把这个问题叫做“Rayleigh 问题”; 没有理由用这个名称, 因为可以发现, 这个问题在文献 [35] 中已进行过充分讨论, 并得到了解决。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.17)$$

在整个空间压力不变,并且边界条件是

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0: u = 0, \text{ 对于所有 } y; \\ t > 0: \text{ 在 } y = 0 \text{ 处, } u = U_0; \text{ 在 } y = \infty \text{ 处, } u = 0. \end{aligned} \right\} (5.18)$$

微分方程 (5.17) 与热传导方程相同。这里,相应的热传导问题是:在 $t = 0$ 的瞬间壁面突然加热到其温度超过环境温度时,热量在 $y > 0$ 的空间内的传递。利用代换

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad (5.19)$$

偏微分方程 (5.17) 可以化为常微分方程。若进一步假设

$$u = U_0 f(\eta), \quad (5.20)$$

我们就得到下述 $f(\eta)$ 的常微分方程:

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (5.21)$$

和边界条件:当 $\eta = 0$ 时, $f = 1$; 当 $\eta = \infty$ 时, $f = 0$ 。方程的解是

$$u = U_0 \operatorname{erfc}\eta, \quad (5.22)$$

其中

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}\eta &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = 1 - \operatorname{erf}\eta \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta; \end{aligned}$$

补余误差函数 $\operatorname{erfc}\eta$ 已经制成函数表¹⁾。图 5.6 绘出了速度分布曲线。可以注意到,不同时刻的速度剖面是“相似的”,即通过改变坐标轴的尺度,可以将它们化为相同的曲线。当 $\eta = 2.0$ 时,式 (5.22) 中的补余误差函数值约为 0.01,考虑到边界层厚度 δ 的定义,我们得到

1) 例如,见 Sheppard, "The Probability Integral", British Assoc. Adv. Sci.: Math. Tables, vol. vii (1939) 和 Works Project Administration, "Tables of the Probability Function", New York, 1941.

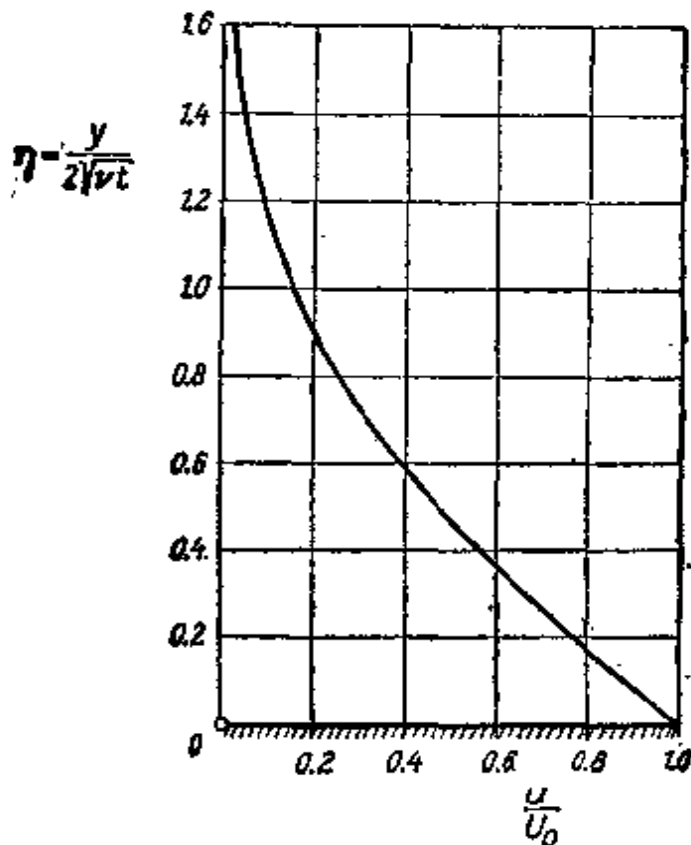


图 5.6 突然加速的平板上面的速度分布

$$\delta = 2\eta_0 \sqrt{\nu t} \approx 4\sqrt{\nu t}. \quad (5.23)$$

可见, δ 正比于运动粘性系数与时间乘积的平方根。

E. Becker^[31] 把这个问题加以推广, 以包括更一般的加速度变化率, 以及诸如抽吸、引射和可压缩性效应之类的情形。

5. Couette 流动的形成 一般说来, 若采用更复杂的边界条件, 则导出方程 (5.21) 的代换式 (5.19), 不能导出所谓热传导方程 (5.17) 的解。但是, 由于式 (5.17) 是线性的, 所以可以用 Laplace 变换, 或者用在所研究固体热传导方面发展起来的更直接的方法, 得到该方程的解。在热传导方面所得到的许多结果 (例如, 关于无限或半无限固体中温度的变化), 都可以直接加以转换并用来作为粘性流动问题的解。因此, 前面曾研究过的突然加速壁面的边界层形成的问题, 还可用来对下述情形进行求解: 这个壁面沿着与另一静止平板相平行的方向运动, 并离开一个距离 h 。这就是 Couette 流动形成的问题, 即速度剖面如何随时间变化, 并逐渐趋向于图 1.1 中线性分布的问题。微分方程和前面的方程 (5.17) 一样, 但边界条件变了, 它们现在是

$t \leq 0$: 若 $0 \leq y \leq h$, 对所有 y 有 $u = 0$;

$t > 0$: 在 $y = 0$ 处, $u = U_0$; 在 $y = h$ 处, $u = 0$ 。

方程 (5.17) 满足这些边界条件和初始条件的解, 可以用补余误差函数的级数形

式得出：

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc}[2n\eta_1 + \eta] - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc}[2(n+1)\eta - \eta] \\ &= \operatorname{erfc}\eta - \operatorname{erfc}(2\eta_1 - \eta) + \operatorname{erfc}(2\eta_1 + \eta) - \operatorname{erfc}(4\eta_1 - \eta) \\ &\quad + \operatorname{erfc}(4\eta_1 + \eta) - \dots + \dots, \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中 $\eta_1 = h/2\sqrt{\nu t}$ 表示两个壁面之间的无量纲距离。图 5.7 中绘出了这个解。最初的那些速度剖面差不多仍是相似的，并且只要边界层没有扩展到静止壁面，就一直如此。随后的那些速度剖面不再是“相似的”，并渐近地趋向于定常状态的线性分布。

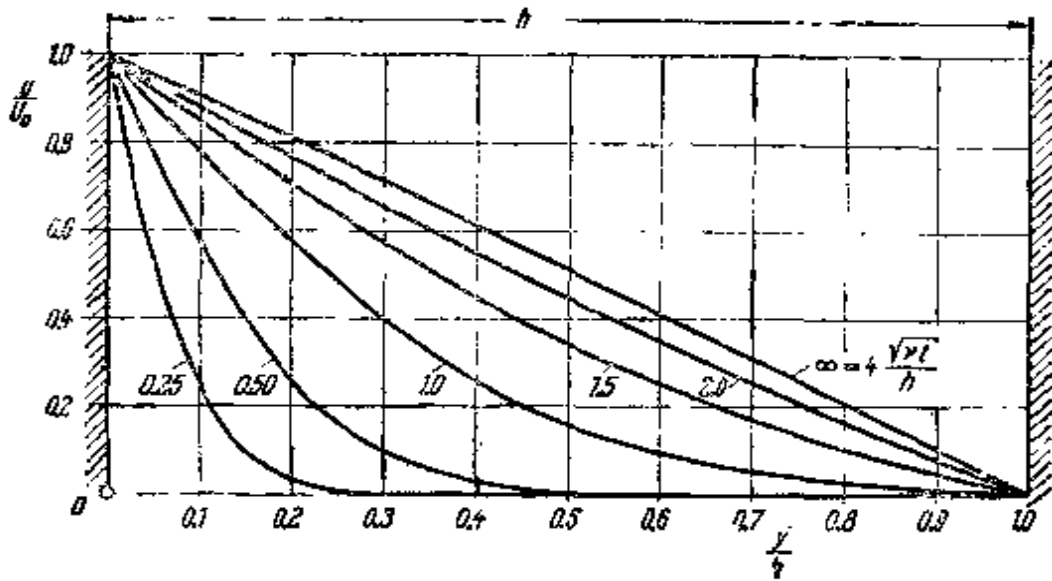


图 5.7 Couette 流动的形成

对于两个壁面最初在定常流动中是静止的，然后其中之一突然加速到给定的恒定速度的情形，J. Steinheuer^[33] 导出了非定常 Couette 流动的精确解。为了得到这个解，必须用 Fourier 级数求解方程 (5.17)，这个方程与一维热传导方程相同。这种解的一个特殊情形是：运动壁面突然停止时所得到的解，它代表 Couette 流动的衰减。

6. 由静止开始的管内流动 管内的流体加速问题与上述例子密切相关。假定在 $t < 0$ 时，流体在无限长的圆管内是静止的。在 $t = 0$ 的瞬间，沿圆管突然加上一个压力梯度 dp/dx ，并且它不随时间变化。流体将在粘性力和惯性力的影响下开始运动，而且速度剖面将渐近地趋向 Hagen-Poiseuille 流动的抛物线分布。这个问题导致一个含有 Bessel 函数的微分方程。F. Szymanski^[37] 给出了该问题的解。图 5.8 中绘出了不同时刻的速度剖面。值得指出的是，在最初阶段，靠近管轴的速度几乎不随半径变化。粘性的影响仅限于邻近壁面的薄层内。只是在运动的稍后阶段，粘性的影响

才到达圆管的中心,并且速度剖面渐近地趋向定常流动的抛物线分布, W. Mueller^[20] 给出了横截面为圆环的相应解。

W. Gerbers^[21] 解出了压力梯度突然消失时的类似问题。

这里所讨论的在整个管长上的流体加速问题,必须与在定常流动中圆管进口段的流体加速问题仔细地加以区分。当流体沿着圆管流动时,最初在进口截面上的矩形速度剖面,随着 x 增加逐渐变化,同时在粘性的影响下逐渐趋向 Hagen-Poiseuille 抛物线的速度分布,这时,由于 $\partial u / \partial x \neq 0$, 所以流动不是一维的,速度依赖于 x 和半径。H. Schlichting^[22] 讨论了这个问题,他给出直槽二维流动的解,而 L. Schiller^[23] 和 B. Punni^[24] 讨论了轴对称流动(圆管)的问题。还可参看第九章 i 和第十一章 b。

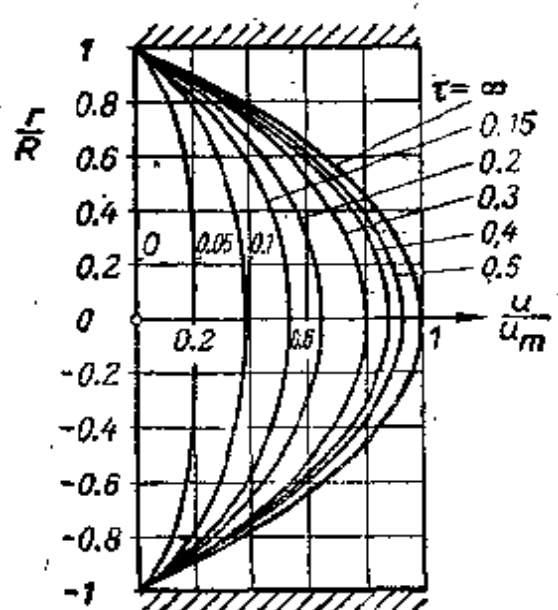


图 5.8 圆管中加速流动的速度剖面,由 F. Szymanski^[25] 给出: $\tau = \nu t / R^2$

7. 振动平板附近的流动; Stokes 第二问题 在这一节要讨论在自身平面内做简谐振动的无限长平板附近的流动。首先是 G. Stokes^[26], 后来是 Lord Rayleigh^[27] 讨论了这个问题。设 x 表示平行于运动方向的坐标, y 表示垂直于壁面的坐标。由于在壁面上无滑动的条件,壁面上的流体速度必然等于壁面速度。假定壁面运动给定为

$$y = 0: u(0, t) = U_0 \cos nt, \quad (5.25)$$

我们可以断定,流体速度 $u(y, t)$ 是方程 (5.17) 和边界条件 (5.25) 的解,如前所述,根据热传导理论,这个解是已知的。对于目前所讨论的问题

$$u(y, t) = U_0 e^{-ky} \cos(nt - ky). \quad (5.26)$$

不难证明,如果

$$k = \sqrt{\frac{n}{2\nu}}$$

则式 (5.26) 就是所要求的解。令 $\eta = ky = y\sqrt{n/2\nu}$, 我们有

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta} \cos(nt - \eta). \quad (5.26a)$$

因此,速度剖面 $u(y, t)$ 具有阻尼谐振形式,其振幅是 $U_0 e^{-\eta\sqrt{n/2\nu}}$ 其中距离为 y 的流体层对壁面运动有一个相位滞后 $y\sqrt{n/2\nu}$ 。图 5.9 表示几个不同时刻的运动,离开距离为 $2\pi/k = 2\pi\sqrt{2\nu/n}$ 的两层流体,同相位振动。可以把这个距离看做是一种运动的波长:有时称之为粘性波的穿透深度。壁面所带动的流体层,其厚度的量级为 $\delta \sim \sqrt{\nu/n}$, 当运动粘性系数降低或频率增高时,其厚度要减小¹⁾。

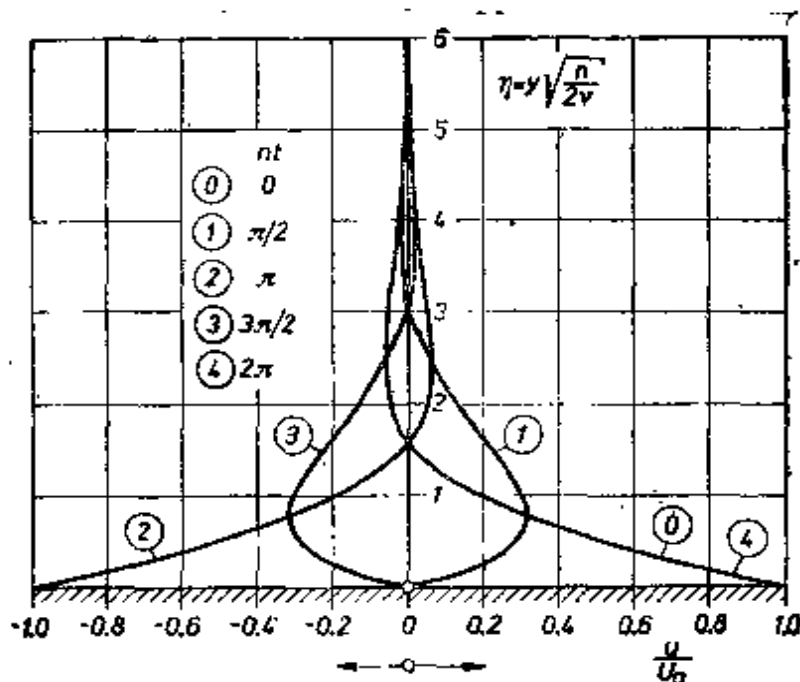


图 5.9 振动壁面附近的速度分布 (Stokes 第二问题)

1) 式 (5.26a) 的解也表示地球内的温度分布,这是由于地球表面温度的周期变化,比如说,日复一日的或一年四季的周期变化引起的。

8. 一种一般类型的非定常解 在速度分量与纵向坐标 x 无关的特殊情形下, 可以得到 Navier-Stokes 方程具有边界层特性的一般类型的非定常解. 对于平面流动, 方程组 (3.32) 为下述形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.27b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.27c)$$

如果现在规定, 壁面上的恒定速度 $v_0 < 0$ (抽吸), 我们就会注意到, 速度分量为 $v = v_0$ 的流动直接满足式 (5.27c), 同时压力 p 与 y 无关. 相应地, 我们设 $-(1/\rho)(\partial p/\partial x) = dU/dt$, 其中 $U(t)$ 表示远离壁面的自由流动速度, 这样就得到如下 $u(y, t)$ 的微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{dt} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.28)$$

根据 J. T. Stuart^[32] 的结果, 对于任意的外部流动速度

$$U(t) = U_0[1 + f(t)], \quad (5.29)$$

都存在方程 (5.28) 的精确解. 这个解是

$$u(y, t) = U_0[\zeta(y) + g(y, t)], \quad (5.30)$$

其中

$$\zeta(y) = 1 - e^{\frac{v_0 y}{\nu}}. \quad (5.31)$$

将最后这三个方程代入式 (5.28), 可以得到未知函数 $g(y, t) = g(\eta, T)$ 的偏微分方程; 这个方程的形式为

$$\frac{\partial g}{\partial T} - 4 \frac{\partial g}{\partial \eta} = f'(T) + 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}, \quad (5.32)$$

其边界条件是

$$\eta = 0, \quad g = 0; \quad \eta = \infty, \quad g = f.$$

上式已经引进了下述无量纲变量:

$$\eta = \frac{y(-v_0)}{\nu}; \quad T = \frac{t v_0'}{4\nu}. \quad (5.33)$$

J. Watson^[42] 已经求出方程 (5.32) 的解, 他使用了 Laplace 变换, 并且仅限于函数 $f(t)$ 的几种特殊形式. 一般说来, 它已经包括了下述外部流动 $U(t)$:

- a) 阻尼和非阻尼振动,
- b) 由一个速度值到另一个值的阶梯型变化,
- c) 由一个值到另一个值的线性增加.

在外部流动与时间无关的特殊情形下, 即 $f(t) = 0$, 方程 (5.32) 有简单解 $g(\eta, T) = 0$. 这就使由式 (5.30) 得到的速度剖面, 和以后由式 (14.6) 给出的渐近抽吸速度剖面成为一样的.

b. 其他的精确解

上面几个一维流动的例子是非常简单的，因为使方程成为非线性的对流加速度项处处恒等于零。现在，我们准备着手研究几个保留了对流项的精确解，因而必须涉及到非线性方程。不过，我们仅限于讨论定常流动问题。

9. 平面驻点流动 (Hiemenz 流动) 这类流动的第一个简单例子，如图 5.10 所示，是产生一个驻点的平面(即二维)流动。在位于 $x = y = 0$ 的驻点附近，无摩擦位势流动的速度分布由下式给出：

$$U = ax; \quad V = -ay,$$

其中 a 表示常数。这是一个平面位势流动的例子。流动沿着 y 轴射向位于 $y = 0$ 的平板壁面，然后在壁面上分成两股流动，并沿相反方向离开。粘性流动一定附着在壁面上，而位势流动却沿着壁面滑动。在位势流动中，压力由 Bernoulli 方程给出。如果 p_0 表示驻点压力，而 p 是任意点的压力，则在位势流动中有

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho(U^2 + V^2) = \frac{1}{2} \rho a^2(x^2 + y^2).$$

对于粘性流动，现在假设

$$u = xf'(y); \quad v = -f(y), \quad (5.34)$$

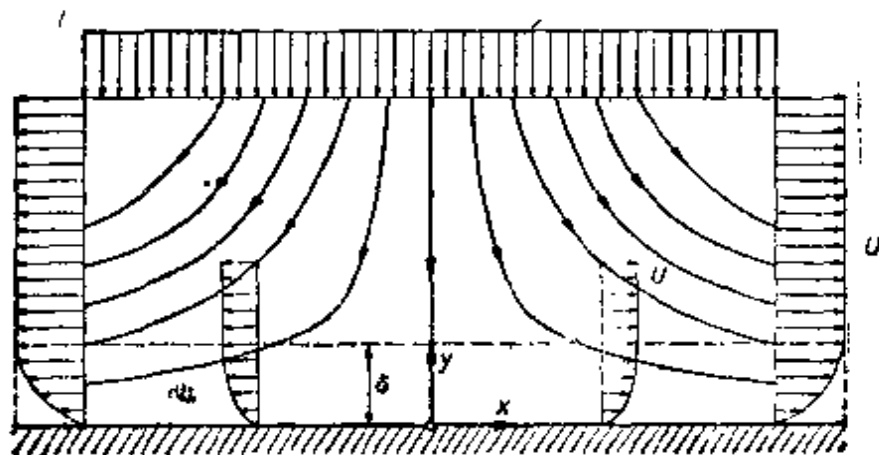


图 5.10 平面驻点流动

和

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^2 [x^2 + F(y)]. \quad (5.35)$$

在这些假设下,连续方程(4.4c)恒满足,而平面流动的两个 Navier-Stokes 方程 (4.4a, b) 足以确定函数 $f(y)$ 和 $F(y)$. 将式 (5.34) 和 (5.35) 代入式 (4.4a, b), 我们得到关于 f 和 F 的两个常微分方程:

$$f'' - ff'' = a^2 + \nu f''', \quad (5.36)$$

$$ff' = \frac{1}{2} a^2 F' - \nu f''. \quad (5.37)$$

f 和 F 的边界条件,是由在壁面 ($y = 0$) 上 $u = v = 0$, 在驻点上 $p = p_0$, 以及远离壁面处 $u = U = ax$ 得到的. 所以

$$y = 0: f = 0, f' = 0, F = 0; \quad y = \infty: f' = a.$$

方程 (5.36) 和 (5.37) 是关于 f 和 F 的两个微分方程. $f(y)$ 和 $F(y)$ 可以确定速度分布和压力分布. 由于在第一个方程中不出现 $F(y)$, 所以可以先确定出 $f(y)$, 然后再由第二个方程求解 $F(y)$. 非线性微分方程 (5.36) 不能以封闭的形式求解. 为了用数值方法求解这个方程,最好消去常数 a^2 和 ν . 其方法是设

$$\eta = \alpha y; \quad f(y) = A\varphi(\eta).$$

因此

$$\alpha^2 A^2 (\varphi'^2 - \varphi\varphi'') = a^2 + \nu A\alpha^3 \varphi''',$$

式中的“撇”现在表示对 η 求导数. 如果我们设

$$\alpha^2 A^2 = a^2; \quad \nu A\alpha^3 = a^2,$$

即

$$A = \sqrt{\nu a}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{\nu}},$$

方程的系数全部恒等于 1. 所以

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y; \quad f(y) = \sqrt{a\nu}\varphi(\eta). \quad (5.38)$$

现在,关于 $\varphi(\eta)$ 的微分方程具有简单形式:

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad (5.39)$$

其边界条件是

$$\eta = 0: \varphi = 0, \quad \varphi' = 0; \quad \eta = \infty: \varphi' = 1.$$

平行于壁面的速度分量为

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{a} f'(y) = \varphi'(\eta).$$

微分方程(5.39)的解,首先在 K. Hiemenz 的一篇论文^[12]中给出,后来由 Howarth^[14]加以改进,图 5.11 中绘出了这个解(同时参看表 5.1)。曲线 $\varphi'(\eta)$ 在 $\eta = 0$ 附近开始线性增加,然后渐近地趋近于 1。大约在 $\eta = 2.4$ 时,我们有 $\varphi' = 0.99$,即在那里只

表 5.1 在解平面和轴对称驻点流动中出现的函数。平面情形取自 L. Howarth^[14]; 轴对称情形取自 N. Froessling^[11]

平 面				轴 对 称			
$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y$	φ	$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{u}{U}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}$	$\sqrt{2} \cdot \zeta = \sqrt{\frac{2a}{\nu}} z$	φ	$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{u}{U}$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$
0	0	0	1.2326	0	0	0	1.3120
0.2	0.0233	0.2266	1.0345	0.2	0.0127	0.1755	1.1705
0.4	0.0881	0.4145	0.8463	0.4	0.0487	0.3311	1.0298
0.6	0.1867	0.5653	0.6752	0.6	0.1054	0.4669	0.8910
0.8	0.3124	0.6859	0.5251	0.8	0.1799	0.5833	0.7563
1.0	0.4592	0.7779	0.3980	1.0	0.2695	0.6811	0.6283
1.2	0.6220	0.8467	0.2938	1.2	0.3717	0.7614	0.5097
1.4	0.7967	0.8968	0.2110	1.4	0.4841	0.8258	0.4031
1.6	0.9798	0.9323	0.1474	1.6	0.6046	0.8761	0.3100
1.8	1.1689	0.9568	0.1000	1.8	0.7313	0.9142	0.2315
2.0	1.3620	0.9732	0.0658	2.0	0.8627	0.9422	0.1676
2.2	1.5578	0.9839	0.0420	2.2	0.9974	0.9622	0.1175
2.4	1.7553	0.9905	0.0260	2.4	1.1346	0.9760	0.0798
2.6	1.9538	0.9946	0.0156	2.6	1.2733	0.9853	0.0523
2.8	2.1530	0.9970	0.0090	2.8	1.4131	0.9912	0.0331
3.0	2.3526	0.9984	0.0051	3.0	1.5536	0.9949	0.0202
3.2	2.5523	0.9992	0.0028	3.2	1.6944	0.9972	0.0120
3.4	2.7522	0.9996	0.0014	3.4	1.8356	0.9985	0.0068
3.6	2.9521	0.9998	0.0007	3.6	1.9769	0.9992	0.0037
3.8	3.1521	0.9999	0.0004	3.8	2.1182	0.9996	0.0020
4.0	3.3521	1.0000	0.0002	4.0	2.2596	0.9998	0.0010
4.2	3.5521	1.0000	0.0001	4.2	2.4010	0.9999	0.0006
4.4	3.7521	1.0000	0.0000	4.4	2.5423	0.9999	0.0003
4.6	3.9521	1.0000	0.0000	4.6	2.6837	1.0000	0.0001

差百分之一就达到了最终值。如果把离开壁面的这个相应距离看做是边界层厚度,记作 $y = \delta$, 则得

$$\delta = \eta_0 \sqrt{\frac{\nu}{a}} = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{a}}. \quad (5.40)$$

所以,和以前一样,在小运动粘性系数时,受粘性影响的流体层也是很薄的,其厚度正比于 $\sqrt{\nu}$. 这时,压力梯度 $\partial p / \partial y$ 正比于 $\rho a \sqrt{\nu a}$, 在小运动粘性系数时,它也很小.

更值得注意的是,无量纲速度分布 u/U 以及根据式 (5.40) 得到的边界层厚度均与 x 无关,即它们沿壁面方向无变化.

上面所讨论的这种流动,不仅出现于平板壁面附近,而且也存在于绕任意柱体的二维流动中,只要柱体在驻点附近是钝头的.在这种情形下,若驻点附近的这部分弯曲物面能用切平面代替的话,则上述的解在驻点附近的小邻域内也是适用的.

J. Watson^[42] 研究了由于加上平板横向运动而引起的非定常流动图象,平板的横向运动规律,可以是任意的时间函数.更早的时候, M. B. Glauert 解出了平板做横向简谐振动的特殊情形 (见第十五章中文献 [14]).

9a. 二维非定常驻点流动 N. Rott^[43] 所研究的非定常、二维流动问题,是对上述问题的推广.我们讨论图 5.10 中的二维驻点流动问题,它以 $y=0$ 的壁面为界.假设远离壁面的速度指向壁面,而壁面本身又在自身平面内做简谐振动.在所得到的流动图象中,速度在远处 ($y \rightarrow \infty$) 仍然是定常的,而在壁面附近具有非定常特性,其图象与图 5.9 中振动壁面附近的流动图象 (Stokes 第二问题) 属于同一类型.依照文献 [28a], 可以通过以下假设来积分非定常的 Navier-Stokes 方程 (4.4a, b, c). 按照式 (5.34) 中用过的方法,设

$$u(x, y, t) = ax\varphi(\eta) + by(\eta)\exp(i\omega t) \quad (5.40a)$$

$$v(y) = -(a\nu)^{1/2}\varphi(\eta). \quad (5.40b)$$

关于压力,设

$$p = p_0 - (1/2)\rho a^2 x^2 - \rho \nu a F(\eta). \quad (5.40c)$$

这里,根据式 (5.38), $\eta = y(a/\nu)^{1/2}$ 表示离开壁面的无量纲距离, b 是壁面在自身平面内振动的固定振幅,而 ω 是振动的圆频率.

将上述假设 (5.40a, b, c) 代入 Navier-Stokes 方程 (4.4a, b, c), 这个问题就化简为求解下列方程组:

$$\varphi'''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + i = 0, \quad (5.40d)$$

$$g'' + g'\varphi - g(\varphi' - ik) = 0, \quad (5.40e)$$

$$\varphi\varphi' = F' - \varphi'' \quad (5.40f)$$

这里 $k = \omega/a$ 表示壁面振动的无量纲频率。只要将速度分量 u 表示为式 (5.40a) 的定常项 φ' 和非定常项 g 之和, 就可以由 x 方向的非定常 Navier-Stokes 方程 (4.4a) 导出微分方程 (5.40d) 和 (5.40e)。函数 $\varphi(\eta)$ 满足边界条件

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \text{ 和 } \varphi'(\infty) = 1.$$

比较方程 (5.39) 和 (5.40d) 表明, 这个函数与定常流动问题中著名的 Hiemenz 解相同。函数 g 满足边界条件

$$g(0) = 1 \text{ 和 } g(\infty) = 0.$$

由式 (5.40d) 和 (5.40e) 可以看出, 在这种情形下, 定常分量与所叠加的非定常分量无关。由于函数 $\varphi(\eta)$ 是已知的 (表 5.1), 所以 x 方向速度分量非定常部分 g 的微分方程 (5.40e) 容易求解。关于这个问题的进一步的细节, 可以在文献 [28a] 中找到, 读者还可以查阅 M. Glauert (第十五章中文献 [14]) 和 J. Watson (第十五章中文献 [65]) 的文章。

10. 三维驻点流动 用类似的方法可以得到三维驻点流动, 即轴对称流动的 Navier-Stokes 方程精确解。流体垂直射到壁面上, 然后沿各个方向呈放射状流开。这种情形出现在零攻角旋成体的驻点附近。

为了求解这个问题, 我们将采用柱坐标 r, φ, z , 并假定壁面位于 $z = 0$, 驻点位于坐标原点, 同时流动沿负 z 轴方向。无摩擦流动的径向速度分量和轴向速度分量, 将分别记作 U 和 W , 而粘性流动的相应分量, 将记作 $u = u(r, z)$ 和 $w = w(r, z)$ 。根据式 (3.36), 旋转对称的 Navier-Stokes 方程可写为

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

因为 $v_\varphi = 0$, $\partial/\partial\varphi = 0$, 并已令 $v_r = u$, $v_z = w$ 。其边界条件是

$$z = 0: u = 0, w = 0; z = \infty: u = U. \quad (5.41a)$$

对于无摩擦流动情形, 可以写出

$$U = ar; \quad W = -2az, \quad (5.42)$$

其中 a 是常数。立即可以看出，这样的解满足连续方程。如果仍将驻点压力记作 p_0 ，我们求出理想流动的压力：

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho(U^2 + W^2) = \frac{1}{2} \rho a^2(r^2 + 4z^2).$$

在粘性流动情形下，设速度和压力分布的解为如下形式：

$$u = rf'(z); \quad w = -2f(z), \quad (5.43)$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^4[r^2 + F(z)]. \quad (5.44)$$

不难证明，式(5.43)形式的解恒满足连续方程，而运动方程则导致下述两个 $f(z)$ 和 $F(z)$ 的方程：

$$f'^2 - 2ff'' = a^2 + \nu f''', \quad (5.45)$$

$$2ff' = \frac{1}{4} a^2 F' - \nu f''. \quad (5.46)$$

$f(z)$ 和 $F(z)$ 的边界条件由式(5.41a)得出，它们是

$$z = 0: f = f' = 0, \quad F = 0; \quad z = \infty: f' = a.$$

经过与平面问题相类似的相似变换，象前面一样， f 和 F 两个方程中的第一个方程(5.45)就可以不出现常数 a^2 和 ν ，于是

$$\zeta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} z, \quad f(z) = \sqrt{a\nu} \varphi(\zeta).$$

关于 $\varphi(\zeta)$ 的微分方程可以简化为

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad (5.47)$$

其边界条件是

$$\zeta = 0: \varphi = \varphi' = 0; \quad \zeta = \infty: \varphi' = 1.$$

F. Homann^[11] 首先以幂级数形式给出方程(5.47)的解。图 5.11 同时给出了轴对称情形和平面情形下 $\varphi' = u/U$ 的曲线。表 5.1 给出的 φ' 值取自 N. Frossling^[12] 的文章。

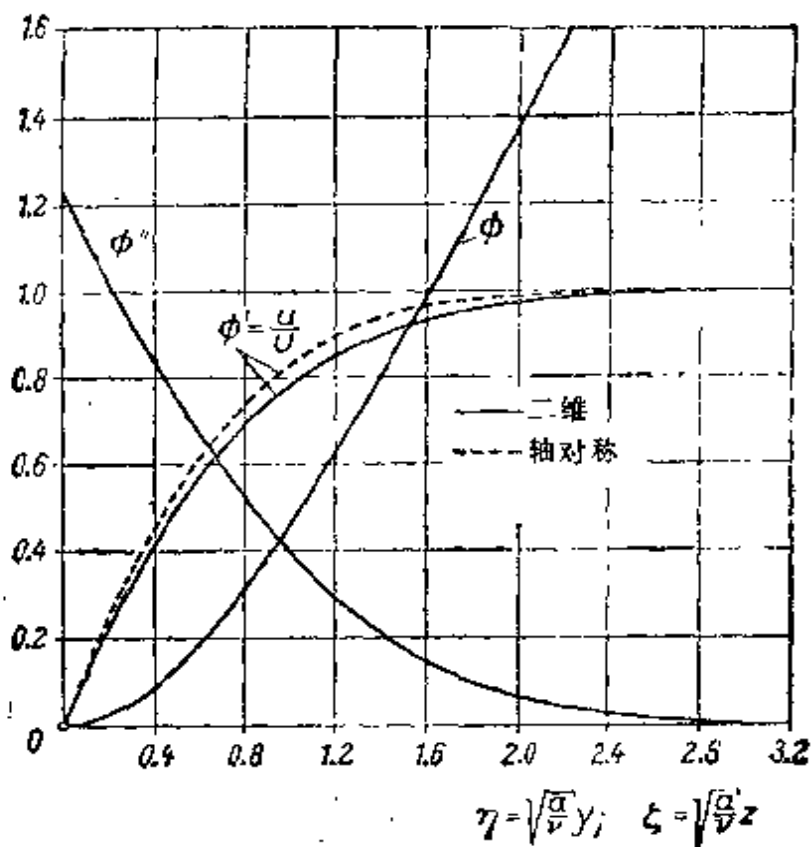


图 5.11 平面和旋转对称流动在驻点附近的速度分布

11. 旋转圆盘附近的流动 旋转平盘附近的定常流动, 提供了 Navier-Stokes 方程精确解的另一个例子; 圆盘在本来处于静止的流体中, 绕垂直于自身的轴线以等角速度 ω 旋转. 靠近圆盘的流体层, 通过摩擦作用由圆盘带动着转动, 并且由于离心力的作用向外抛开. 这时沿转轴方向流向圆盘的流体下来补充, 它同样又被圆盘带动, 并向离心力方向抛开. 由此可见, 这种情形确实是一种三维流动, 即存在径向 r 、周向 φ 和轴向 x 三个方向的速度分量. 这些分量将分别用 u , v 和 w 表示. 图 5.12 中绘出了这个流场的轴测示意图. 首先, 我们对无限大的旋转平面问题进行计算. 然后, 在忽略边缘影响的条件下, 很容易把这个结果推广到有限直径 $D = 2R$ 的圆盘.

考虑到旋转的对称性, 及本问题所使用的符号, 我们可以将 Navier-Stokes 方程 (3.36) 写为

$$\left. \begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \\
 u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}, \\
 u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}, \\
 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

根据壁面上的无滑移条件, 给出以下边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 z=0: u=0, v=r\omega, w=0, \\
 z=\infty: u=0, v=0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

我们将从估计圆盘所“带动”的流体层的厚度 δ 入手^[23]. 显然, 由

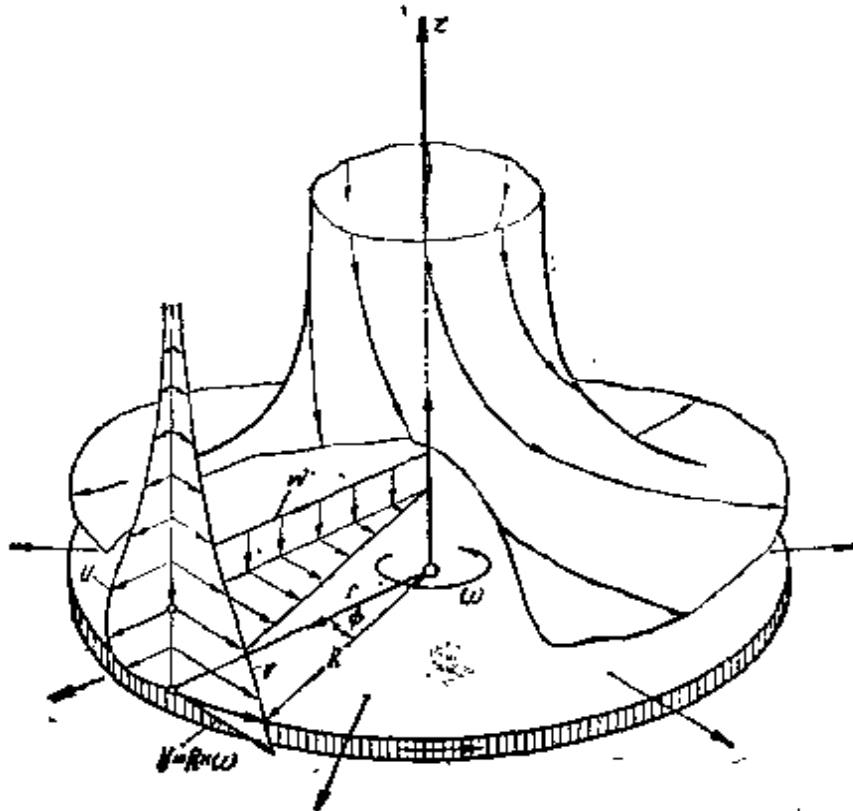


图 5.12 在静止流体中旋转圆盘附近的流动
速度分量: u -径向的, v -周向的, w -轴向的. 由于粘性作用, 圆盘带动了流体层. 薄层内的离心力引起沿径向向外的二次流动

于摩擦作用而随圆盘转动的流体层的厚度，随粘性系数的减小而减小；只要对照一下前面一些例子的结果，就可以肯定这一点。在旋转层内离开转轴距离为 r 的流体质点上，单位体积所受的离心力等于 $\rho r \omega^2$ 。因而在面积为 $dr \cdot ds$ 、高为 δ 的体积上，离心力等于 $\rho r \omega^2 \delta dr ds$ 。同一流体微元还受到切应力 τ_w 的作用，这个力与流体滑动的方向相反，且与周向速度成一角度，比如说 θ 。这时，切应力的径向分量必定等于离心力，因此

$$\tau_w \sin \theta dr ds = \rho r \omega^2 \delta dr ds$$

或

$$\tau_w \sin \theta = \rho r \omega^2 \delta.$$

另一方面，切应力的周向分量，必须正比于壁面上的周向速度梯度。这个条件给出

$$\tau_w \cos \theta \sim \mu r \omega / \delta.$$

从这两个方程中消去 τ_w ，我们得到

$$\delta^2 \sim \frac{\nu}{\omega} \tan \theta.$$

若紧贴壁面流动中的滑动方向与半径无关，则圆盘所带动的流体层的厚度为

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

这与第 106 页上在振动壁面情形下所得到的结果相同。另外，我们可以将壁面上的切应力写成

$$\tau_w \sim \rho r \omega^2 \delta \sim \rho r \omega \sqrt{\nu \omega}.$$

转动力矩等于壁面上的切应力与面积和力臂的乘积，它变为

$$M \sim \tau_w R^3 \sim \rho R^3 \omega \sqrt{\nu \omega}, \quad (5.50)$$

R 表示圆盘半径。

为了便于积分方程组 (5.48)，引进离开壁面的无量纲距离 $\zeta \sim z/\delta$ ，因此写成

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (5.51)$$

另外,对速度分量和压力作如下假设:

$$u = r\omega F(\zeta), \quad v = r\omega G(\zeta), \quad w = \sqrt{\nu\omega} H(\zeta), \quad (5.52)$$

$$p = p(z) = \rho\nu\omega P(\zeta).$$

将这些等式代入式(5.48),我们得到一组关于函数 F, G, H 和 P 的四个联立常微分方程:

$$\left. \begin{aligned} 2F + H' &= 0, \\ F^2 + F'H - G^2 - F'' &= 0, \\ 2FG + HG' - G'' &= 0, \\ P' + HH' - H'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

根据式(5.49)可以得到边界条件,它们是

$$\zeta = 0: F = 0, G = 1, H = 0, P = 0;$$

$$\zeta = \infty: F = 0, G = 0.$$

Th. von Kármán^[49] 用近似方法给出方程(5.53)的第一个解,后来 W. G. Cochran^[7] 用数值积分方法计算出更精确的值¹⁾*, 它

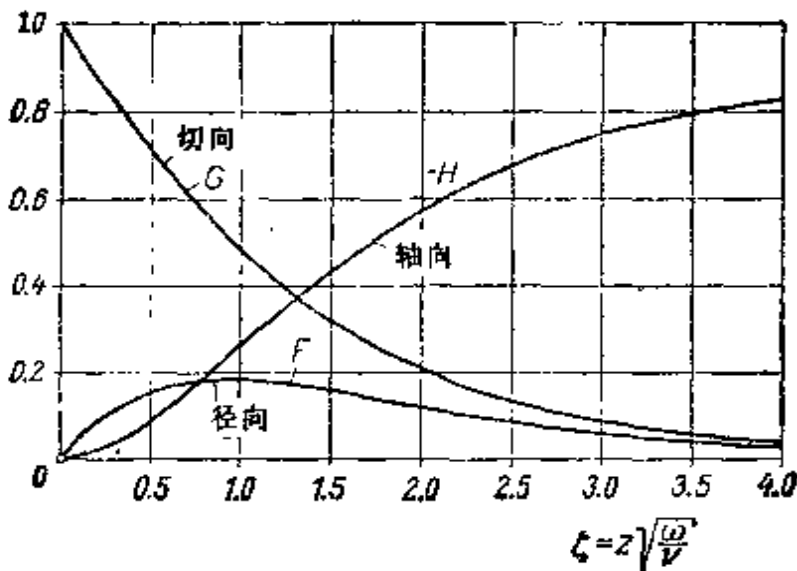


图 5.13 圆盘附近的速度分布;圆盘在本来处于静止的流体中转动

1) 这个解是这样得到的: 在 $\zeta = 0$ 附近取幂级数形式, 对于大的 ζ 值取渐近级数形式, 然后对适中的 ζ 值将它们连接起来。

* 这句话是参照本书第六版第 95 页译出的。——中译者注

们画在图 5.13 中。表 5.2 中所列的解的初值是 E. M. Sparrow 和 J. L. Gregg^[32] 给出的。

在目前所讨论的问题中,正如含有驻点的例子一样,首先由连续方程和平行于壁面的运动方程计算出速度场,然后由垂直于壁面的运动方程求出压力分布。

表 5.2 在壁面上和远离壁面处算出的函数值表。 这些函数值是描述旋转圆盘引起的流动所需要的。取自 Sparrow 和 Gregg^[32] 的计算结果

$\xi = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$	F'	$-G'$	$-H$	P
0	0.510	0.6159	0	0
∞	0	0	0.8845	0.3912

由图 5.13 看出,周向速度降到圆盘速度一半的地方,离开壁面的距离为 $\delta_{0.5} \approx \sqrt{\nu/\omega}$ 。从这个解我们注意到,当 $\delta \approx \sqrt{\nu/\omega}$ 很小时,速度分量 u 和 v 只在厚度为 $\sqrt{\nu/\omega}$ 的薄层内才有可观的值。垂直于圆盘的速度分量 w 总是很小的,其量级为 $\sqrt{\nu\omega}$ 。如果设壁面是静止的,而认为流体在远离壁面处旋转,则紧邻壁面的流线对周向的倾斜角为

$$\tan \varphi_0 = - \left(\frac{\partial u / \partial z}{\partial v / \partial z} \right)_{z=0} = - \frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{0.510}{0.616} = 0.828,$$

即

$$\varphi_0 = 39.6^\circ.$$

尽管以上的计算,严格地说,只适用于无限大的圆盘,然而,如果圆盘的半径 R 远大于它所带动的流体层厚度 δ , 则对于有限圆盘也可以利用同样的结果。现在来估计圆盘的转动力矩。在半径为 r 处,宽度为 dr 的环形圆盘微元对力矩的贡献是 $dM = -2\pi r dr r \tau_{z\varphi}$, 因此,对于单面浸湿的圆盘,力矩为

$$M = -2\pi \int_0^R r^2 \tau_{z\varphi} dr.$$

这里 $\tau_{z\varphi} = \mu(\partial v / \partial z)_0$ 表示周向切应力分量。由式 (5.52) 得到

$$\tau_{z\varphi} = \rho r \nu^{1/2} \omega^{3/2} G'(0).$$

所以,对于双面浸湿的圆盘,力矩为

$$2M = -\pi \rho R^4 (\nu \omega^3)^{1/2} G'(0) = 0.616 \pi \rho R^4 (\nu \omega^3)^{1/2}. \quad (5.54)$$

通常总是引进如下的无量纲力矩系数:

$$C_M = -\frac{2M}{\frac{1}{2} \rho \omega^4 R^5}. \quad (5.55)$$

这给出

$$C_M = -\frac{2\pi G'(0) \nu^{1/2}}{R \omega^{1/2}},$$

或者,定义用半径和边缘速度计算的 Reynolds 数

$$R = \frac{R^2 \omega}{\nu},$$

并引用数值 $-2\pi G'(0) = 3.87$, 最后得到

$$\boxed{C_M = \frac{3.87}{\sqrt{R}}}. \quad (5.56)$$

图 5.14 画出了这个方程的图线 [曲线 (1)], 并与实验结果^[39]进行了比较. 在 Reynolds 数增高到大约 $R = 3 \times 10^5$ 以前, 理论与实验之间都一直吻合得很好. 当 Reynolds 数更高时, 流动则变为湍流的, 它们的具体情形将到第二十一章再加以讨论. 图 5.14 中的曲线 (2)、(3) 是根据湍流理论得出的. G. Kempf^[26] 和 W. Schmidt^[31] 进行的更早的测量, 与理论结果也还比较符合. 在得到上述解以前, D. Riabouchinsky^{[26], [27]} 在非常仔细的测量基础上, 建立了旋转圆盘转动力矩的经验公式. 这些公式与后来得出的理论公式非常一致.

在半径为 R 的圆盘的一面上, 由于离心作用而向外排出的液体流量是

$$Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u dz.$$

计算表明

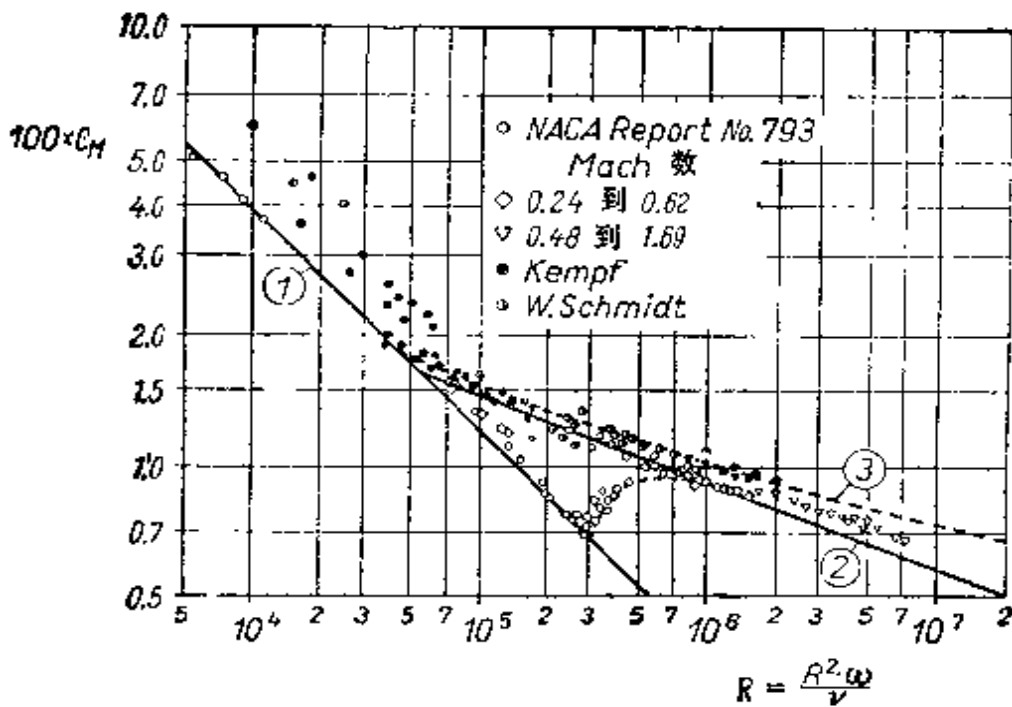


图 5.14 旋转圆盘上的转动力矩；曲线(1)根据方程(5.56)，层流；
曲线(2)和(3)根据式(21.30)和(21.33)，湍流

$$Q = 0.885\pi R^2 \sqrt{\nu\omega} = 0.885\pi R^3 \omega R^{-1/2}. \quad (5.57)$$

沿轴向流向圆盘的流体流量应与此大小相等。另外，值得注意的是，跨过圆盘所带动的流体层，其压力差具有 $\rho\nu\omega$ 的量级，就是说，在小粘性系数情形下，它是非常小的。压力分布只依赖于离开壁面的距离，而不存在径向压力梯度。

M. G. Rogers 和 G. N. Lance^[26] 研究了上述问题的普遍形式。他们假设，在无穷远处流体以角速度 $\Omega = s\omega$ 旋转。利用这个假设，方程(5.53)中的第二个方程变为

$$F^2 + F'H - G^2 - F'' + s^2 = 0,$$

同时函数 $G(\zeta)$ 的第二个边界条件，应该用 $G(\infty) = s$ 来代替。关于这个问题，应当与第十一章 a 所给出的在固定圆盘上方旋转的流动问题加以比较。同向旋转 ($s > 0$) 情形的数值解，可以在文献[26]中找到。当反向旋转 ($s < 0$) 时，如果容许有垂直于圆盘的均匀抽吸，则只有在 $s < -0.2$ 时，才能得到有物理意义的解。

封闭罩内的旋转圆盘问题,将在第二十一章予以讨论.

特别值得注意的是,旋转圆盘的解以及驻点流动的解,首先都是 Navier-Stokes 方程的精确解,其次,在上一章讨论的意义上说,它们属于**边界层类型**的解. 在粘性系数很小的极限情形下,这些解表明,粘性的影响只扩展到固壁附近很薄的薄层内,而在其余的整个区域里,实际上,流动与相应的理想(位势)情形是一样的. 这些例子进一步证明了边界层厚度的量级是 $\sqrt{\nu}$. 前面所讨论的一维流动例子,也显示了同样的边界层特性. 关于这个问题,读者也许愿意参阅 G. K. Batchelor 的文章^[2]以及 K. Stewartson 的文章^[34],前者对于间隔一定距离的两个同轴转动的圆盘问题讨论了 Navier-Stokes 方程的解. 将上述的解推广到均匀抽吸情形的是 J. T. Stuart (第四章中文献[92])以及 E. M. Sparrow 和 J. L. Gregg (见文献[32]的第3页);后一篇论文还包括对同质引射的分析. H. K. Kuiken^[35]讨论过很强引射的极限情形.

12. 收缩槽和扩张槽内的流动 另一类 Navier-Stokes 方程的精确解,可以用以下方法得到: 假设过平面内一点的直线族是流动的流线. 设一条条直线上的速度各不相同,就是说,假设速度是极角 φ 的函数. 这样,可以把那些沿着它速度为零的射线,看做是收缩槽或扩张槽的固壁. 假设在每条射线上,各点的速度与到原点的距离成反比,这样就能满足连续方程. 因此,径向速度 u 的形式为 $u \sim F(\varphi)/r$, 或者,若 F 为无量纲量,则

$$u = \frac{\nu}{r} F(\varphi).$$

周向速度处处为零. 将这种形式代入极坐标下的 Navier-Stokes 方程(3.36),并从 r 方向和 φ 方向的方程中消去压力,则可以得到下述关于 $F(\varphi)$ 的常微分方程:

$$2FF' + 4F' + F'' = 0.$$

积分一次,得到方程

$$F^2 + 4F + F' + K = 0. \quad (5.58)$$

常数 K 表示壁面上的径向压力梯度, $K = -(1/\rho)(\partial p/\partial r)(r^3/\nu^2)$. 当 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = -\alpha$ 时,即在壁面上, $F = 0$; 而当 $\varphi = 0$ 时, $F' = 0$. G. Hamel^[11] 给出方程(5.58)的解. 函数 F 可以用显式表示为 φ 的椭圆函数.

我们现在不去讨论推导的细节,只简要地概述一下解的性质. 根据 K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[19] 对于收缩槽和扩张槽在不同 Reynolds 数下流动所作的数值计算,图 5.15 中绘出了一族速度剖面. 收缩槽的速度分布和扩张槽的速度分布彼此很

不相同。在扩张槽中,当 Reynolds 数不同时,速度分布也明显不同。在收缩槽中,图中最高 Reynolds 数 ($R = 5000$) 时的速度分布,在中心的大部分区域内几乎不变,而在接近壁面的地方急剧下降到零。因此,在这种情形下,它呈现出清晰的“边界层特性”。

在扩张槽中,速度剖面的形状明显地受 Reynolds 数的影响。在中心线上,每一条速度分布曲线都比表征平行壁面流动的抛物线更为弯曲。在最高 Reynolds 数下,速度分布(曲线 7)的特征是:它显示出两个倒流区。这样,速度在四个点上都为零。由于壁面能放在这任意一点上,所以可能观察到,在 10° 夹角下有两个对称倒流区的这种速度分布,或者在 6.9° 夹角下只有一个非对称倒流区的速度分布。实际上,已经观察到了这种非对称的速度分布,并且这种倒流标志着分离的开始。

在上面提到的文章中, G. Hamel 给自己提出了计算其流线与位势流线相同的

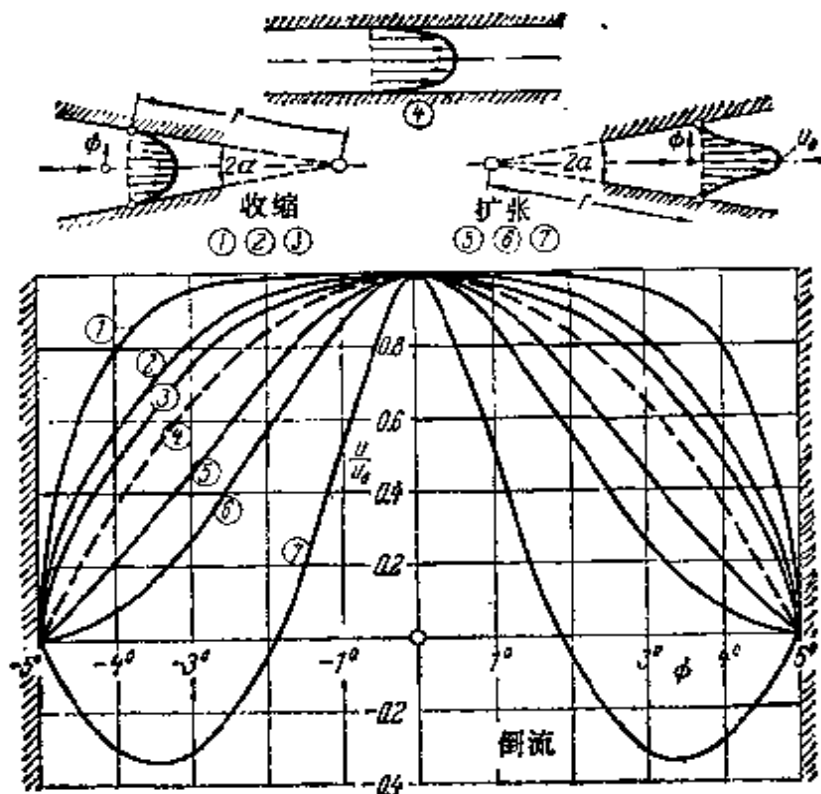


图 5.15 收缩槽和扩张槽内的速度分布;根据 G. Hamel^[11] 及 K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[19]

夹角 $2\alpha = 10^\circ$ Reynolds 数 $R = u_0 r / \nu$

收缩槽

扩张槽

曲线 1: $R = 5000$

曲线 5: $R = 684$

曲线 2: $R = 1342$

曲线 6: $R = 1342$

曲线 3: $R = 684$

曲线 7: $R = 5000$

曲线 4 指的是平行壁面槽 (Poiseuille 抛物线速度分布,参看图 5.1)

所有三维流动问题。这个问题的解由形状为对数螺线的流线组成。这里讨论的径向流动问题,以及在第五章3中讨论的位势旋涡流动问题,都是这个一般解的特例。

前面这个精确解的例子,再次显示了流动的边界层特性。特别是在收缩槽的情形下,证实了靠近壁面存在一个薄层,以及粘性影响集中于该薄层内的事实。另外,计算还证实了,这里边界层厚度也随 $\sqrt{\nu}$ 增加。扩张槽还显示出另外一种现象,即倒流以及由此产生的分离。这是边界层流动的一个基本特性,以后我们将根据边界层流动方程详细讨论这个问题。它的存在完全为实验所证实。

更早, H. Blasius^[9] 根据第一原理,即借助 Navier-Stokes 方程,研究了小夹角扩张管道的二维流动和轴对称流动问题。关于这个问题,已经证明:层流流动若不发生分离只能承受很小的压力增加。在半径为 $R(x)$ 的扩张圆管内,求出避免在壁面上出现倒流的条件是 $dR/dx < 12R$ (分离条件),其中 $R = \bar{u}d/\nu$ 表示以圆管内平均流动速度及圆管直径为参考的 Reynolds 数。后来, M. Abramowitz^[11] 又扩充了这些扩张管道的计算,并且发现:当 Reynolds 数增高或扩张角减小时,分离点从管道入口向下游移动。

13. 结束语 这里所举例子结束了对 Navier-Stokes 方程精确解的讨论,接下去的课题将要处理近似解。在前面的讨论中,所谓精确解是指 Navier-Stokes 方程的这样一种解,即方程中的所有各项,只要在这个问题中不恒等于零,就都予以考虑时所得到的解。在下一章我们要讨论 Navier-Stokes 方程的近似解,也就是在微分方程中略去各个小量级项以后所得到的解。如在第四章已经提过的,粘性系数很大和粘性系数很小这两种极限情形,具有特别的重要性。在极慢运动中,即所谓蠕动流中,粘性力远大于惯性力,而在边界层运动中粘性力很小。在第一种情形下,允许将惯性项全部略去;但是,在边界层理论中却不能这样简化,因为如果根本不考虑粘性项,那就不能满足在固壁上无滑移这个物理上的基本条件。

对于很高 Reynolds 数的二维层流流动,即其中包含粘性影响且具有边界层特性的流动, K. W. Mangler^[12] 提出了一种求解 Navier-Stokes 方程的一般理论。在 Prandtl 边界层理论中(详见第七章),采用流动中的真实物体外形,并且只在邻接壁面的薄层内才考虑粘性影响。相比之下,这种新方法是一种间接方法。这种理论不是采用真实物体外形,而是规定出一个围绕物体的所谓位移外形。这种位移外形考虑了位移效应对外部流动和尾迹的影响。这样我们就能确定出绕位移外形的无摩擦外部流动;下一步,再借助于很高 Reynolds 数时对 Navier-Stokes 方程的渐近处理方法,计算摩擦层内的流场,这步计算最终得出物体的真实外形。这种新方法的显著特点在于:在分离点之后还可以进行边界层计算。这与 Prandtl 边界层大不相同;边界层理论至

多只能应用到分离点。此外，这种新理论在某些情形下，甚至在复杂流动图象的计算中也获得了成功，这种复杂流动图象存在于分离点之后的倒流区以及再附区。

上面是为代替 Prandtl 边界层理论而提出的一种供选择的理论，对这一理论所作的简短叙述，想必至此也就够了。在本书后面各章中所阐述的边界层理论，是以 Prandtl 的思想体系为基础的。

第六章 极慢运动

a. 极慢运动的微分方程

在本章我们打算讨论 Navier-Stokes 方程的几个近似解, 这些解都能在粘性力远大于惯性力的极限情形下成立。由于惯性力与速度的平方成正比, 而粘性力只与速度的一次方成正比, 所以不难断定: 只要速度很小, 或者更一般地说, 只要 Reynolds 数很小, 就可以得到粘性力起主要作用的流动。如果将惯性项从运动方程中完全略去, 则所得到的解对于 $R \ll 1$ 的情形是适用的。这个事实也可以由无量纲的 Navier-Stokes 方程 (4.2) 导出, 因为与粘性项相比, 可以看出式中的惯性项乘上了一个因子 $R = \rho V L / \mu$ 。就此而论, 我们可以说, 在每一具体情形下, 都必须详细检查构成 Reynolds 数的那些量。但是, 在实际应用中, 除了某些特殊情形外, 这种很低 Reynolds 数的流动 (有时又称为蠕动流) 并不是太常见的¹⁾。

由式 (3.34) 可以看出, 如果略去惯性项, 不可压缩流动的 Navier-Stokes 方程可以化为如下形式:

$$\text{grad } p = \mu \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (6.1)$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0, \quad (6.2)$$

或者用展开式, 则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

1) 例如圆球在空气中下落的情形 (空气 $\nu = 160 \times 10^{-6} \text{ft}^2/\text{s}$), 当直径 $d = 0.04 \text{in}$ ($= 0.00333 \text{ft}$) 和速度 $V = 0.048 \text{ft/s}$ 时, 我们得到 $R = Vd/\nu = 1$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.4)$$

这组方程还必须补充与完整的 Navier-Stokes 方程相同的边界条件，即在壁面上流体无滑移的条件，也就是速度的法向分量和切向分量均为零：

$$\text{在壁面上} \quad v_n = 0, v_t = 0. \quad (6.5)$$

若对式(6.1)两边取散度，同时注意到右边的算子 div 和 ∇^2 可以交换次序运算，则立即可以得到蠕动流的一个重要性质。这样，由式(6.2)我们有

$$\text{div grad } p = \nabla^2 p = 0. \quad (6.6)$$

所以蠕动流的压力场满足位势方程，因而压力 $p(x, y, z)$ 是一个位势函数。

如果引进流函数，其定义是 $u = \partial\psi/\partial y$ 和 $v = -\partial\psi/\partial x$ ，则二维蠕动流方程在形式上就会变得特别简单。正如在第四章所说明的，以及由式(6.3)看出的，如果从式(6.3)的前两个方程中消去压力，则流函数必然满足方程

$$\nabla^4 \psi = 0.$$

因此，平面蠕动流的流函数是双位势(双调和)函数。

在本章的后面几节中，我们要讨论三个蠕动流的例子：1. 平行流绕圆球的流动；2. 润滑的流体动力学理论；3. Hele-Shaw 流动。

b. 平行流绕圆球的流动

Stokes 在研究了平行流绕圆球流动的问题^[17]之后，给出了最早的著名蠕动流解。我们将叙述他计算的结果，而不讨论该理论的数学细节。我们将采用 Prandtl 的叙述方法^[12]。一个半径为 R 的圆球置于沿 x 轴的速度为 U_∞ 的均匀平行流动中，其球心与坐标原点相重合(图 6.1)。对于这种情形，方程(6.3)和(6.4)的解可以用如下压力和速度分量的方程来表示：

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{\infty} \left[\frac{3}{4} \frac{R x^2}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{R}{r} \left(3 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 1 \right], \\ v &= U_{\infty} \frac{3}{4} \frac{R x y}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right), \\ w &= U_{\infty} \frac{3}{4} \frac{R x z}{r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right), \\ p - p_{\infty} &= -\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty} R x}{r^3}. \end{aligned} \right\} (6.7)$$

为了简洁起见,式中已经引进了 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. 不难证明,这些表达式满足式(6.3)和(6.4),并且在球面上各点速度均为零. 球面上的压力为

$$p - p_{\infty} = -\frac{3}{2} \mu \frac{x}{R^2} U_{\infty}. \quad (6.7a)$$

压力的最大值和最小值分别出现在 P_1 和 P_2 点,其值是

$$p_{1,2} - p_{\infty} = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R}. \quad (6.7b)$$

图 6.1 绘出了沿圆球子午线,以及沿横坐标轴 x 的压力分布. 圆球上的切应力分布也可以用上述公式来计算. 可以看出,在 A 点切应力有最大值,此时 $\tau = \frac{3}{2} \mu U_{\infty} / R$, 且等于 P_1 点的压力增

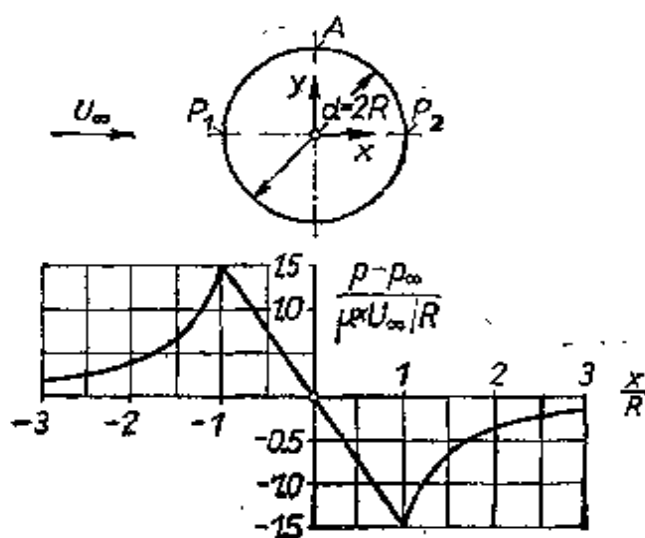


图 6.1 在均匀平行流动中圆球周围的压力分布

加或 P_2 点的压力减少。如果在整个球面上对压力分布和切应力积分，就可以得到圆球的总阻力：

$$D = 6\pi\mu RU_{\infty}. \quad (6.8)$$

这就是非常著名的圆球阻力 **Stokes 公式**。可以证明，三分之一的阻力是由压力分布产生的，而其余的三分之二是由切应力产生的。更值得注意的是，阻力与速度的一次方成正比。如果象高 Reynolds 数情形那样，用动压头 $\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2$ 和迎风面积作参考量来构成阻力系数，也就是，如果设

$$D = C_D \pi R^2 \left(\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \right), \quad (6.9)$$

那么

$$C_D = \frac{24}{R}; \quad R = \frac{U_{\infty} d}{\nu}. \quad (6.10)$$

图 1.5 中画出了 Stokes 公式与实验结果之间的比较。由图可以看出，方程只能用于 $R < 1$ 的情形。圆球前后的流线图象应该是相同的，因为如果倒转来流的方向，即如果改变式(6.3)和(6.4)中各速度分量和压力的符号，这个方程仍转换为其本身。图 6.2 画出

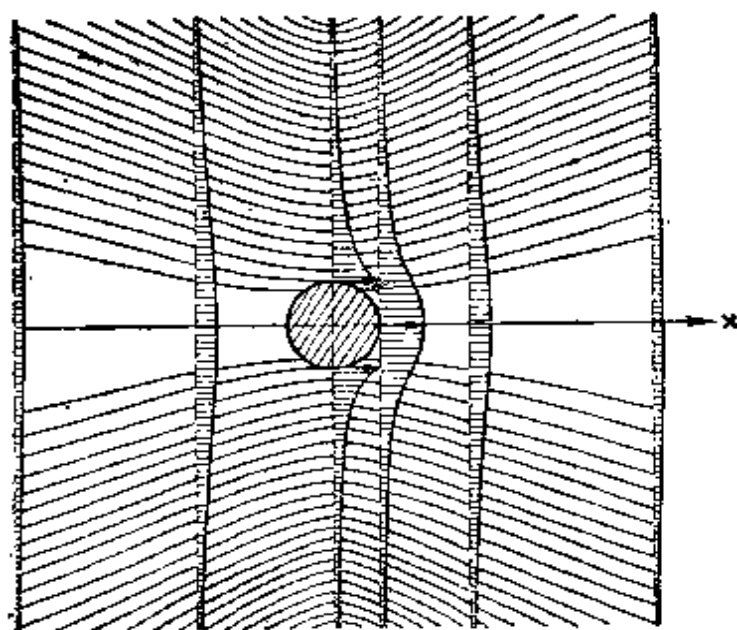


图 6.2 在平行流动中圆球 Stokes 解的流线和速度分布

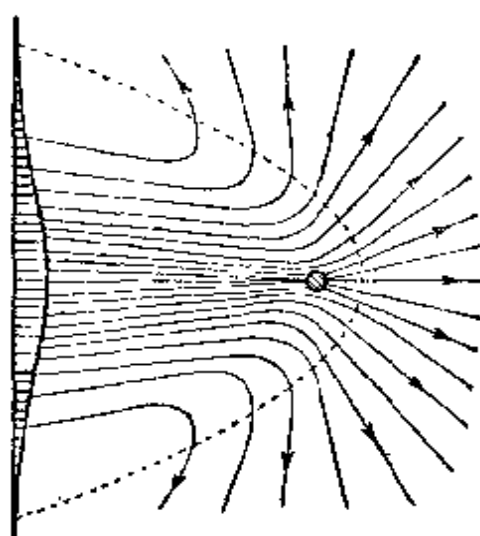


图 6.3 在绕圆球流动中，根据 Oseen 解得到的流线

了粘性流体绕圆球流动的流线。它们是这样画出的：如果在一个观察者面前，圆球以等速度 U_∞ 被拖动，则出现在他面前的流线就是这样的。这张图还画出了几个横截面上的速度剖面，可以看出，圆球拖着很宽的流体层和它一起运动，该层向两侧延伸各达一个直径以上。而在很高 Reynolds 数时，则边界层变得非常薄。

Oseen 的改进解：Oseen 将 Stokes 解作了改进^[11]，他部分地考虑了 Navier-Stokes 方程中的惯性项。他假设速度分量都可以表示为一个常数加上一个扰动项。这样

$$u = U_\infty + u'; \quad v = v'; \quad w = w', \quad (6.11)$$

其中 u' 、 v' 和 w' 都是扰动项，并且相对于来流速度 U_∞ ，它们都是小量。但是应当注意，在直接与圆球邻近的地方并非如此。利用假设(6.11)，将 Navier-Stokes 方程(3.32)中的惯性项分为两组，如

$$U_\infty \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad U_\infty \frac{\partial v'}{\partial x}, \dots$$

$$\text{和 } u' \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad u' \frac{\partial v'}{\partial x}, \dots$$

第二组是二阶小量，与第一组相比可以略去。所以可以由 Navier-Stokes 方程得到下述运动方程：

$$\left. \begin{aligned} \rho U_{\infty} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \nabla^2 u', \\ \rho U_{\infty} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \nabla^2 v', \\ \rho U_{\infty} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \nabla^2 w', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

其边界条件与 Navier-Stokes 方程的边界条件相同,然而和 Stokes 方程一样, Oseen 方程也是线性的。

现在的流动图象在圆球前后就不一样了。只要研究一下方程 (6.12) 就可以看出这点, 因为如果改变速度和压力的符号, 方程不再转换为其本身, 这与 Stokes 方程 (6.3) 不同。图 6.3 画出了 Oseen 方程的流线。这里同样假设观察者对于远离圆球的流动是静止的, 同时假想圆球以等速度 U_{∞} 被拖动。圆球前面的流动与 Stokes 给出的流动很相似, 而在圆球后面流线却靠得更紧些, 这意味着这里的速度比 Stokes 情形要大。另外, 在圆球后面有一些质点跟着它一起运动, 实际上, 这和大 Reynolds 数时由实验所观察到的情形一样。

改进了的阻力系数表达式, 现在成为

$$C_D = \frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16} R \right); \quad R = \frac{U_{\infty} d}{\nu}. \quad (6.13)$$

实验结果表明, Oseen 方程大约在 $R = 5$ 以下是适用的, 见图 1.5 中的曲线(2)。

c. 润滑的流体动力学理论

另一个粘性力起主要作用的流动例子, 是在轴承润滑油内出现的现象。从实用观点出发, 这些现象是非常重要的。两个机械部件以高速相对运动时(例如轴颈与轴承), 它们之间的间隙充满了运动的油层, 这中间可以产生非常大的压力差。因此, 旋转的轴颈被油膜稍稍抬起, 从而避免了运动部件金属之间的接触。这类

运动的基本特点,可以用滑块在金属导板上滑动的例子来理解(图 6.4),其中重要的是它们彼此要倾斜一个很小的角度 δ . 我们假设滑动面在运动的横向上尺寸非常大,致使这个问题是一个二维问题¹⁾. 为了获得定常状态,我们假设滑块是静止的,而平面导板相对于滑块以等速度 U 运动. 取 x 轴沿运动方向, y 轴垂直于导板平面. 同时假设与滑块的长度 l 相比,滑块与导板之间的楔形区域的高度 $h(x)$ 非常小.

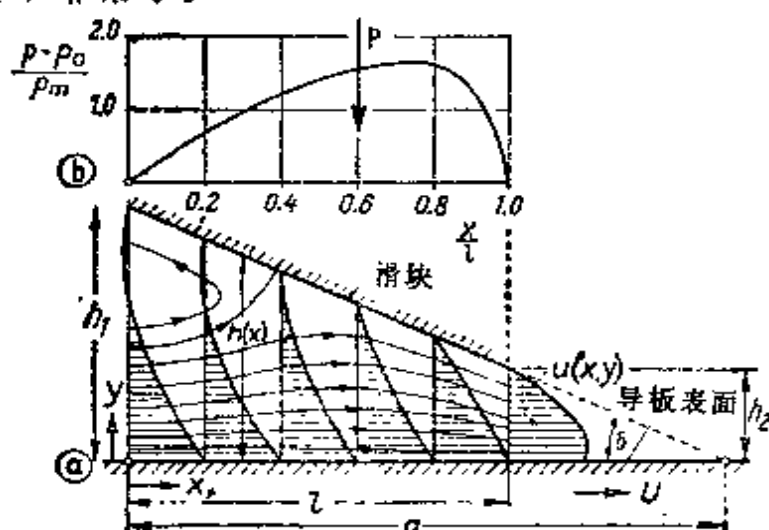


图 6.4 轴承内的润滑: a) 滑块与平面导板表面之间楔形区内的流动; b) 滑块上的压力分布, $a/l = 1.57$

这种运动是第五章 1 中所讨论的有压力梯度的两个平行平板之间运动的更一般的例子. 它们的根本差别在于, 这里两个壁面之间倾斜成一个角度. 因此, 对流加速度 $u\partial u/\partial x$ 显然不等于零. 尽管如此, 对粘性力和惯性力的估算直接表明, 在所有有实际意义的情形中, 粘性力都是主要的. 由于在 x 方向的运动方程中, 最大粘性项等于 $\mu\partial^2 u/\partial y^2$, 因此我们可以作如下估算:

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = \frac{\rho U^2 / l}{\mu U / h^2} = \frac{\rho U l}{\mu} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

只要约化 Reynolds 数

$$R^* = \frac{U l}{\nu} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \ll 1, \quad (6.14)$$

1) 润滑的二维理论是 O. Reynolds 首先建立的, 参看 Phil. Trans. Roy. Soc. (1886), Pt. I; 另见 Ostwalds Klassiker No. 218, p. 39.

与粘性力相比，我们就可以略去惯性力。还可以用一个数值例子来加以说明：

$$U = 30\text{ft/s}; l = 4\text{in} = 0.333\text{ft};$$

$$\nu = 4 \times 10^{-4}\text{ft}^2/\text{s}; h = 0.008\text{in}.$$

这个算例得出用滑块长度作参考量的 Reynolds 数 $Ul/\nu = 25000$ ，但是约化 Reynolds 数 $R^* = 0.1$ 。

对于目前所讨论的情形，蠕动物流的微分方程(6.3)还可以进一步简化。因为分量 v 相对 u 是小量，所以可将 y 方向的方程整个略去。另外，在 x 方向的方程中，因为 $\partial^2 u / \partial y^2$ 是大量，在量级上是 $\partial^2 u / \partial x^2$ 的 $(l/h)^2$ 倍，所以可将 $\partial^2 u / \partial x^2$ 略去。压力分布必须满足滑块两端 $p = p_0$ 的条件。与平行的滑动壁面之间的流动情形相比，这里沿运动方向的压力梯度 $\partial p / \partial x$ 不再是常数，但是沿 y 方向的很小压力梯度可以略去。利用这些简化，微分方程(6.3)就化为

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.15)$$

而微分形式的连续方程，可以用这样的条件来代替：通过每个截面的体积流量都必须等于常数，即

$$Q = \int_0^{h(x)} u dy = \text{常数}. \quad (6.16)$$

边界条件是：

$$y = 0: u = U; x = 0: p = p_0 \quad (6.17)$$

$$y = h: u = 0; x = l: p = p_0.$$

若方程(6.15)满足边界条件(6.17)，则它的解类似于式(5.5)，即

$$u = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2} \frac{p'}{\mu} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (6.18)$$

其中 $p' = dp/dx$ 表示压力梯度；这个解必须通过满足连续方程(6.16)及压力边界条件的方法来确定。将(6.18)代入(6.16)，我们首先得到

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3 p'}{12\mu},$$

或者，解出 p' ：

$$p' = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3} \right). \quad (6.19)$$

因此经过积分，得到

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q \int_0^x \frac{dx}{h^3}. \quad (6.20)$$

代入 $x = l$ 处 $p = p_0$ 的条件，我们得到

$$Q = \frac{1}{2} U \int_0^l \frac{dx}{h^2} / \int_0^l \frac{dx}{h^3}. \quad (6.21)$$

这样，只要给定楔形区的形状函数 $h(x)$ ，就可以知道流量。式(6.19)给出压力梯度，而式(6.20)给出滑块上的压力分布。

在式(6.20)中出现的量

$$b_1(x) = \int_0^x dx/h^2 \text{ 和 } b_2(x) = \int_0^x dx/h^3, \quad (6.22)$$

仅取决于滑块与平面导板之间间隙的几何形状。它们的比值

$$c(x) = b_1(x)/b_2(x) \quad (6.23)$$

具有长度的量纲，它在润滑理论中起重要作用。对于整个润滑层，这个值

$$H = c(l) = \left(\int_0^l dx/h^2 \right) / \left(\int_0^l dx/h^3 \right), \quad (6.24)$$

有时称为特征厚度。借助于 H ，连续方程(6.21)可以缩写为

$$Q = \frac{1}{2} UH, \quad (6.25)$$

由此，它的物理意义是明显的。现在压力可以写成

$$p(x) = p_0 + 6\mu U b_1(x) - 12\mu Q b_2(x), \quad (6.26)$$

同时，压力梯度成为

$$p' = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{H}{h} \right). \quad (6.27)$$

式(6.27)表明，在润滑层厚度等于特征厚度的地方 ($h = H$)，压力具有最大值或最小值。

人们往往希望维持正的压力差 $p - p_0$ ，而上面的方程可以用来导出这个条件。设在 $x = 0$ 处 $p = p_0$ ，且厚度 H 位于 $x = x_H$ 处，由此我们必然有

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < x_H \text{ 处, } h(x) > H, \text{ 这意味着 } p' > 0, \\ x_H < x < l \text{ 处, } h(x) < H, \text{ 这意味着 } p' < 0. \end{array} \right\} \quad (6.28)$$

这些条件导致一个楔形的形状,它沿流动方向是收缩的,并且容许有正负两种局部梯度 dh/dx . 由于 H 依赖于整个润滑层的形状,所以与位势流动不同,在一个截面上,压力梯度的方向不能单独由该截面的 dh/dx 来确定.

在 $h(x) = \delta(a - x)$ 的平面楔形区情形下,其中 a 和 δ 都是常数(图 6.4),我们最后得到

$$Q = U\delta \frac{a(a-l)}{2a-l},$$

而压力分布

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \frac{x(l-x)}{h^2(2a-l)}. \quad (6.29)$$

如果润滑层的形状用间隙的进口宽度 h_1 和出口宽度 h_2 来描述(图 6.4),这些关系会变得稍微简单些. 现在特征宽度等于调和平均值

$$H = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}, \quad (6.30)$$

而正压力差条件,式(6.28),要求润滑层必须是收缩的. 利用这种符号,压力分布可以由下式给出:

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \frac{l}{h_1^2 - h_2^2} \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2}, \quad (6.31)$$

压力的合力可以通过积分计算,这时我们得到

$$P = \int_0^l p dx = \frac{6\mu Ul^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1} \right], \quad (6.32)$$

其中 $k = h_1/h_2$. 切应力的合力可以用类似的方法来计算:

$$F = - \int_0^l \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0 dx = \frac{\mu Ul}{(k-1)h_2} \left[4 \ln k - \frac{6(k-1)}{k+1} \right]. \quad (6.33)$$

指出这点是有趣的^[9],就是大约在 $k = 2.2$ 时,压力的合力具有最大值,其值为

$$P_{\max} \approx 0.16 \frac{\mu U^2}{h_2^2},$$

此时

$$F = F_1 \approx 0.75 \frac{\mu U l}{h_2}.$$

摩擦系数 F/P 正比于 h_2/l , 并且可以让它非常小。

可以证明, 压力中心的坐标 x_c 等于

$$x_c = \frac{1}{2} l \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{k^2 - 1 - 2k \ln k}{(k^2 - 1) \ln k - 2(k-1)^2} \right]. \quad (6.34)$$

在滑块与导板之间倾角很小 ($k \approx 1$) 的情形下, 按照式(6.29), 压力分布几乎是抛物线分布, 同时特征厚度和压力中心的位置都非常接近于 $x = \frac{1}{2} l$ 处. 设 $h_m = h \left(\frac{1}{2} l \right)$, 我们可以得到压力差为

$$p_m = \mu U \frac{l^2}{(2a - l) h_m^2}. \quad (6.35)$$

如果把这个结果与绕圆球的蠕动流结果(式(6.7b))加以比较, 我们会注意到, 滑块情形下的压力差更大, 大到 $(l/h_m)^2$ 倍. 因为 l/h_m 的量级是 500 到 1000 ($l = 4$, $h_m = 0.004$ 到 0.008 in), 所以可以看出, 这种压力差将取很大的值¹⁾. 在缓慢的粘性运动中出现这样高的压力, 是润滑剂中的这类流动所特有的性质. 同时我们认识到, 两个固体表面之间所形成的角度, 是这类流动的一个基本特征.

对于平面滑块问题, 图 6.4 中给出了压力分布、速度分布以及流线的形状. 应当注意, 如图 5.2 给出的沿壁面运动方向压力增高的直槽情形一样, 现在在升压区内的静止壁面附近也有倒流出现. W. Froessel^[9] 计算了有限宽度滑块和球面滑块的压力分布及其所支承的推力, 并通过实验证实了这些计算.

1) 数值例子: $U = 10$ m/s; $\mu = 0.04$ kg/m·s; $l = 0.1$ m; $a = 2l = 0.2$ m; $h_m = 0.2$ mm. 由此 $\mu U / (2a - l) = 1.33$ N/m²; $p_m = 1.33 \times 500^2 = 0.33$ MPa ($= 3.3$ bar).

在许多情形下,如果滑块的宽度是有限的,那么早先所作的流动是二维的假设就不适宜了,因此必须考虑存在 x 方向的分量 w ; 这里 x 在图 6.4 中垂直于纸面。现在,式(6.19)前面的方程必须补充上

$$Q_x = \int_0^h w dy = \frac{1}{2} hW - \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.36)$$

同时连续方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy = 0 \quad (6.37)$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial z} (hW) \right]. \quad (6.38)$$

这个方程称为 **Reynolds** 润滑方程。这里 W 表示在给定的 x 处 x 方向边界上的速度分量。

在轴颈和轴承的情形下,它们之间一定要有偏心率,以便形成一个变高度的楔形区;如要产生推力,这个楔形区是完全必要的。在上述原理以及严格的二维理论上, A. Sommerfeld^[16]、L. Guembel^[6] 以及 G. Vogelpohl^[20, 21] 等非常详尽地发展了有关理论。图 6.5 画出了轴颈与轴承之间狭窄间隙内的压力分布;它在润滑楔形区最狭窄的截面附近,具有非常显著的最大值。因此,沿轴颈旋转方向收缩的那部分间隙,对承载能力作出了最重要的贡献。这样分布的压力的合力平衡了轴承上的载荷。上述理论已经推广到包括有限宽度的轴承问题^[1, 2],当时人们发现,由于沿侧向压力减小,所以这种轴承所支承的推力大大下降。大部分理论计算是在粘性系数不变的假设下作出的。实际上,通过摩擦产生的热量增高了润滑油的温度。由于粘性系数随温度上升而急剧下降(表 1.2),所以推力也大幅度地下降。在更近的年代, F. Nahme^[10] 扩充了润滑的动力学理论,以包括粘性随温度变化的影响(参看第十二章)。

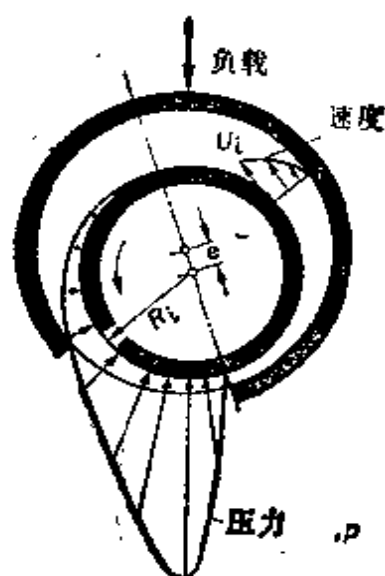


图 6.5 在轴承中偏心转动的轴颈表面的压力分布(简图)
 e = 轴颈在轴承内的偏心

在高速、高温(低粘性系数)的情形下,根据式(6.14),约化 Reynolds 数 R^* 的值可以接近或者超过 1. 这就是说,惯性力变得与粘性力相当,因而这个理论的可靠性就值得怀疑了. 通过一种逐次近似法,可能改进这个理论,并将它推广到高 Reynolds 数的情形. 忽略了的惯性项可以由一次近似结果计算出来,并把它当作外力加以引用,从而得到二次近似解. 这个过程相当于绕圆球流动的 Oseen 的改进解法. W. Kahlert 已经完成了这种计算^[21]. 他发现在平面滑块或圆轴承问题中,对于约化 Reynolds 数高达约 $R^* = 5$ 时所得到的解,其惯性修正也不超过百分之十. 在 G. Vogelpohl 所著的一本书^[22]和一篇更早的文章^[23]中有理论与实验结果的比较.

湍流. 增加载荷,因而也增加轴承周向速度的现代发展趋势,导致了这样一种情形: 即现在出现于润滑油膜内的惯性力,在运行中开始起重要作用. 在一定的条件下,这使层流 Couette 流动变得不稳定,进而发展成为湍流.

早在 1923 年, G. I. Taylor 就研究了这样一种轴承问题,其中轴颈在轴衬内共轴旋转,从而使润滑间隙是等厚度的间隙. 这种不稳定性和向湍流转换,是由无量纲的 Taylor 数 T 控制的:

$$T = \frac{U_j d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_j}} \quad (6.39)$$

这里 R_j 和 U_j 分别表示共轴轴颈($e = 0$)的半径和周向速度,而 d 是间隙的宽度.

一旦出现不稳定之后, 间隙内的流动就发展成规则相间的蜂窝状的旋涡, 它们交错地沿相反方向旋转. 这些涡的轴线与圆周的方向是一致的, 如图 17.32 以及图 17.33 的照片所示. 在 Taylor 数的某个范围内, Taylor 涡内的流动仍然是层流的. 当 Taylor 数大大超过稳定极限时, 才出现向湍流的转换. 这三种流态(如在第十七章 f 和在图 17.34 中将要重复的)的特征如下:

- $T < 41.3$ 层流 Couette 流;
- $41.3 < T < 400$ 呈蜂窝状 Taylor 涡的层流;
- $T > 400$ 湍流.

当流动变得不稳定时, 作用在旋转圆柱上的转动力矩急剧增加, 因为储存于二次流中的动能必须由功来补偿.

如果轴承被加载, 并且间隙的宽度沿周向变化, 一般说来也会出现同样的流动现象, 只是流动的细节变得更复杂. 还曾试图用 Prandtl 混合长理论计算轴承间隙内的湍流(见第十九章, 式(19.7)). 这些课题的提出已经吸引了广泛的研究者, 诸如 D. F. Wilcock^[19], V. N. Constantinescu^[2,3,4]等. E. A. Saibel 和 N. A. Macken^[14,21]曾写出两篇综合报导, 其中有许多参考文献.

d. Hele-Shaw 流动

在隔开一个很小间距 $2h$ 的两个平行平板之间的流动情形下, 可以得到三维蠕动流方程 (6.3) 和 (6.4) 的另一个值得注意的解. 如果把一个任意截面的柱体嵌入这两个平板之间, 使其与平板成直角, 并完全充满平板之间的间隔, 则所得到的流线图象就与绕同样形状柱体的位势流动图象相同. H. S. Hele-Shaw^[7] 曾用这种方法在实验上得到绕任意物体的位势流动的流线图象. 不难证明, 根据式 (6.3) 和 (6.4) 得到的蠕动流解, 与相应的位势流动有同样的流线.

我们选择一个坐标系, 其原点在两个平板之间的中心, 并使 x, y 平面平行于平板, z 轴垂直于平板. 假设物体置于平行于 x 轴的速度为 U_∞ 的流动中. 在远离物体的地方, 如第五章 1 中所讨论的矩形二维管道中的流动一样, 速度分布是抛物线的. 因此

$$x = \infty: \quad u = U_\infty \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

方程 (6.3) 和 (6.4) 的解可以写为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right); \quad v = v_0(x, y) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right); \quad w \equiv 0, \\ p &= -\frac{2\mu}{h^2} \int_{x_0}^x u_0(x, y) dx = -\frac{2\mu}{h^2} \int_{y_0}^y v_0(x, y) dy, \end{aligned} \right\} (6.40)$$

这里 $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ 及 $p_0(x, y)$ 分别表示绕同一物体的二维位势流动的速度分布和压力分布。因此 u_0 , v_0 及 p_0 满足下列方程:

$$\left. \begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.40a, b, c)$$

首先,由解(6.40)我们立即注意到,这个解满足连续方程和 x 方向的运动方程。根据 u_0 和 v_0 有势的特性可以得出,这个解也满足 x 方向和 y 方向的运动方程。因为函数 u_0 和 v_0 满足无旋条件

$$\partial u_0 / \partial y - \partial v_0 / \partial x = 0,$$

因而也满足位势方程 $\nabla^2 u_0 = 0$ 和 $\nabla^2 v_0 = 0$, 其中 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 。

方程(6.3)中的前两个方程,可以简化为 $\partial p / \partial x = \mu \partial^2 u / \partial z^2$ 及 $\partial p / \partial y = \mu \partial^2 v / \partial z^2$; 然而可以看出,式(6.40)也满足这些方程。因此,式(6.40)是蠕动流方程的解。另一方面,式(6.40)所代表的流动,与绕该物体的位势流动有相同的流线,并且在所有平行的流体层 ($z = \text{常数}$) 上,流线都是相同的。可以看出,式(6.40)满足平面 $z = \pm h$ 上的无滑移条件,但是不满足物体表面上的无滑移条件。

在 Hele-Shaw 运动中,正如润滑油的运动情形一样,惯性力与粘性力之比由约化 Reynolds 数

$$R^* = \frac{U_\infty L}{\nu} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \ll 1$$

给出,其中 L 表示在 x, y 平面上物体的特征线性尺度。如果 R^* 超过 1, 惯性力就变得重要了,而且运动将偏离简单解(6.40)。

式(6.40)给出的解,可以用圆球 Stokes 解或极慢运动解中所使用的同样方法加以改进。由一次近似解将惯性项计算出来,再作为外力代入方程,从而得到一个改进解。对于绕圆柱的 Hele-Shaw 流动问题,这个解已由 F. Riegels^[13]作出。

当 $R^* > 1$ 时,平行于壁面的各个流体层上的流线就不一致

了。由于物体的存在，两个平板附近的慢速质点比中心附近的快速质点偏转得更多些。这就使流线显得有些模糊，而且这种现象在物体尾部比物体前部更加显著(图 6.6)。

蠕动流问题的解本来是局限于很小 Reynolds 数的，然而如前所述，原则上能用逐次近似法将它的应用范围扩大到更大的 Reynolds 数。但是在所有情形下，这种计算变得如此复杂，以致于要想进行一步以上的逼近都是不切实际的。因此，不能用此方法到达中等 Reynolds 数的区域。在中等 Reynolds 数的区域内，整个流场的惯性力与粘性力大小相当，实际上，还没有广泛地利用解析方法研究过这个区域。

因此，对另一种很大 Reynolds 数的极限情形，取得积分 Navier-Stokes 方程的可能性更加有用。这就将我们引向边界层理论，它将构成以下各章的主题。

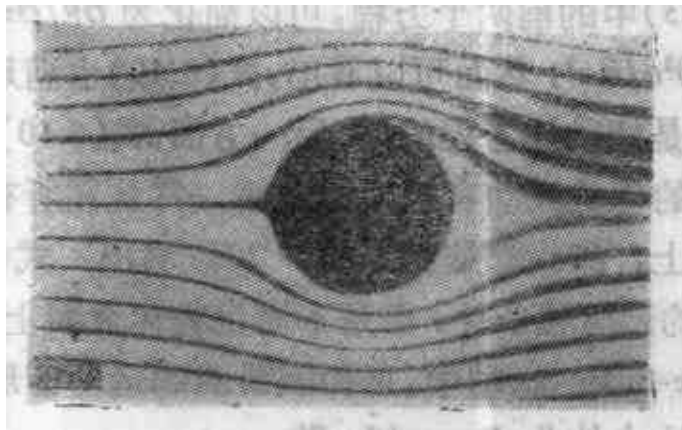


图 6.6 $R^* = 4$ 时绕圆柱的 Hele-Shaw 流动。根据 Riegels^[19]

第二部分 层流边界层

第七章 二维不可压缩流动的边界层方程；平板边界层

a. 二维流动中边界层方程的推导

现在来研究第二种极限情形，即粘性系数很小或 Reynolds 数很大的情形。1904 年，Prandtl^[21] 对流体运动这门学科作出了重大贡献。当时他澄清了在高 Reynolds 数情形下粘性对流动的主要影响，并且阐明：为了得到这种情形的近似解，应该如何简化 Navier-Stokes 方程。我们通过一个具体例子来说明这些简化，它会使整个问题的物理图象变得很清楚。下面应该记住，在流体的大部分区域中，惯性力起着主导作用，而粘性力的影响是极小的。

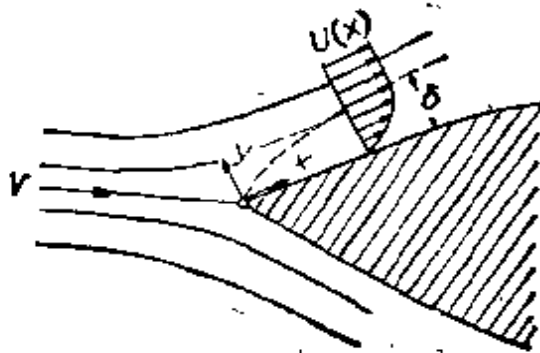


图 7.1 沿壁面的边界层流动

为了简单起见，我们研究粘性系数很小的流体绕横截面细长的柱体的二维流动(图 7.1)。这时除了紧贴表面的邻域之外，流体速度均为来流速度 V 的量级，其流线图象和压力分布均与无粘(位势)流动的情形相差甚微。但是详细的研究表明，它和位势流动不同，此时流体在壁面上并无滑移，而是附着壁面上。速度从壁面上的零值到来流速度 V 的过渡发生在称为边界层的一个很薄的薄层

内。因此，需要研究以下两个区域，尽管两者的划分并不十分明显：

1. 紧贴在物体表面的一个非常薄的薄层(边界层)，其中垂直于壁面的速度梯度 $\partial u/\partial y$ 非常大。在这个区域中，尽管流体的粘性系数 μ 很小，切应力 $\tau = \mu(\partial u/\partial y)$ 却可以有大的值，以致很小的粘性系数仍起主要作用。
2. 在其余的区域中，没有这样大的速度梯度，所以粘性的影响不重要。在这个区域中，流动是无摩擦的位势流动。

通常可以说，边界层厚度随粘性系数的增大而增大，或者更一般地说，边界层厚度随 Reynolds 数的增大而减小。从第五章所研究的 Navier-Stokes 方程的几个精确解可以看出，边界层厚度正比于运动粘性系数的平方根：

$$\delta \sim \sqrt{\nu}.$$

当上述简化引进 Navier-Stokes 方程时，可以认为边界层厚度远小于物体的某个特征线尺度 L ：

$$\delta \ll L.$$

按照这种方法从边界层方程得到的解是渐近解，它适用于 Reynolds 数很大的情形。

现在来讨论 Navier-Stokes 方程的简化问题。为此，我们将对此方程中各项的量级作出估计。在图 7.1 所示的二维问题中，先假设壁面是平面，并且取作 x 方向， y 轴垂直于壁面。现在将 Navier-Stokes 方程改写成无量纲的形式。我们以来流速度 V 为参考速度，以物体的特征长度 L 为参考线尺度， L 的选取要保证无量纲导数 $\partial u/\partial x$ 在所讨论的区域内不大于 1，压力则用 ρV^2 来无量纲化，而时间用 L/V 来无量纲化。此外，表达式

$$\mathbf{R} = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

表示 Reynolds 数，假定它是很大的。在上述假定下，并对无量纲量沿用它们对应的有量纲量的同样符号，我们就可以从平面流动的 Navier-Stokes 方程(3.32)或(4.4)得到：

连续性:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.1)$$

x 方向:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7.2)$$

y 方向:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (7.3)$$

边界条件为: 流体与壁面之间没有滑移, 即在 $y = 0$ 处有 $u = v = 0$, 以及 $y \rightarrow \infty$ 时有 $u = U$.

根据前面所作的假设, 无量纲边界层厚度 δ/L 远小于 1 (无量纲边界层厚度仍记作 δ , 所以 $\delta \ll 1$).

为了能够略去一些小项, 从而对方程进行应有的简化, 我们现在来估计各项的量级. 因为 $\partial u/\partial x$ 的量级为 1, 于是从连续方程看出, $\partial v/\partial y$ 的量级也是 1. 因此, 根据壁面上有 $v = 0$ 的条件, 进一步得出边界层中 v 的量级为 δ . 所以, $\partial v/\partial x$ 和 $\partial^2 v/\partial x^2$ 的量级也是 δ , 而且 $\partial^2 u/\partial x^2$ 的量级也是 1. (这些量级均标在方程 (7.1) — (7.3) 的各项下面.)

此外, 我们将假设非定常加速度 $\partial u/\partial t$ 的量级与对流项 $u\partial u/\partial x$ 的量级相同. 这意味着排除了像在非常强的压力波中所出现的那种很突然的加速. 根据前面的论证, 尽管 $1/R$ 很小, 至少在紧贴壁面的邻域内, 总有某些粘性项的量级与惯性项相同. 因此在壁面附近, 某些速度的二阶导数必然变得很大. 如前所述, 这些二阶导数只可能是 $\partial^2 u/\partial y^2$ 和 $\partial^2 v/\partial y^2$. 因为横穿厚度为 δ 的边界层时, 平行于壁面的速度分量由壁面上的零值增加到外流

中的数值 1, 所以有

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \text{ 和 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2},$$

而 $\partial v/\partial y \sim \delta/\delta \sim 1$, $\partial^2 v/\partial y^2 \sim 1/\delta$. 如果将这些值代入方程 (7.2) 和 (7.3), 则由第一个运动方程得出: 只有当 Reynolds 数为 $1/\delta^2$ 的量级时, 即当

$$\frac{1}{R} = \delta^2 \quad (7.4)$$

时, 边界层中的粘性力才能和惯性力的量级相同. 在 Reynolds 数很大的情形下, 第一个方程, 即连续方程保持不变. 第二个方程现在可以简化, 即相对于 $\partial^2 u/\partial y^2$ 可以略去 $\partial^2 u/\partial x^2$. 从第三个方程, 我们可以推出 $\partial p/\partial y$ 为 δ 的量级, 再对该方程沿边界层厚度进行积分, 可得出横穿边界层的压力增量的量级为 δ^2 , 即压力的这一增量是很小的. 所以, 压力沿着横穿边界层的方向几乎是不变的; 我们可以认为压力就等于其在边界层外缘上的值. 这个值可由无摩擦流动来决定. 因此, 压力可以说成是由外流“施加”给边界层的. 于是, 就边界层流动而论, 压力可以当作已知函数, 并且只依赖于坐标 x 和时间 t .

在边界层的外缘, 速度平行于壁面的分量 u 变得与外流的速度 $U(x, t)$ 相等. 由于这里没有大的速度梯度, 所以当 R 很大时, 方程 (7.2) 中的粘性项趋于零, 因此, 对于外部流动可得

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.5)$$

式中符号表示有量纲的量.

在定常流动的情形下, 因为压力只依赖于 x , 方程得到进一步简化. 为了强调这一点, 我们将压力的导数写成 dp/dx , 所以

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (7.5a)$$

还可以将上式写成通常的 Bernoulli 方程的形式

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{常数}. \quad (7.6)$$

外流的边界条件和无摩擦流动的边界条件几乎一样。由于边界层厚度很小，并且边界层外缘的横向速度分量 v 也很小 ($v/V \sim \delta/L$)，因此，在目前的情况下，壁面附近垂直的速度分量极小，所以绕物体的无粘性位势流动是实际外流的一个很好的近似。根据已知的位势流动，只要把 Bernoulli 方程应用于沿壁面的流线上，就可以得到边界层中沿 x 方向的压力梯度。

综上所述，我们现在能够写出简化了的 Navier-Stokes 方程，即所谓的 **Prandtl 边界层方程**。我们再回到有量纲量的形式，于是得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.8)$$

以及边界条件

$$y = 0: u = v = 0; y = \infty: u = U(x, t). \quad (7.9)$$

这里认为位势流速度 $U(x, t)$ 是已知的；借助于方程 (7.5)，由 $U(x, t)$ 可以确定出压力分布。另外，当 $t = 0$ 时，在所讨论的整个 x, y 区域上还必须规定一个合适的边界层流动。

在定常流动情形下，上述方程组简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.11)$$

边界条件为

$$y = 0: u = v = 0; y = \infty: u = U(x). \quad (7.12)$$

此外，必须给定起始截面上的速度剖面，例如，在 $x = x_0$ 处规定出函数 $u(x_0, y)$ 。于是问题就归结为，在给定的位势流动的条件下，对一给定的速度剖面计算它以后的变化。

前面所得到的数学上的简化是相当大的，它和蠕动流情形的区别在于保留了 Navier-Stokes 方程的非线性特性，同时在二维流动问题中，完全省略了原来关于 u, v, p 的三个方程中的一个，即

省略了垂直于壁面的运动方程。因此，未知函数减少了一个，只剩下关于两个未知数 u 和 v 的两个联立方程的方程组。现在压力不再是未知函数，它可以由绕物体的位势流动的解通过 Bernoulli 方程算出。此外，在剩下的这个运动方程中，也已略去了一个粘性项。

最后应该指出：由式(7.4)对边界层厚度的估计表明

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{R}} = \sqrt{\frac{\nu}{VL}}. \quad (7.13)$$

于是证实了由 Navier-Stokes 方程精确解所推断的 $\delta \sim \sqrt{\nu}$ 的结论。式(7.13)中尚未给出数值系数。在零攻角平板的情形下，当 L 表示离平板前缘的距离时，可以得出该系数等于 5。

上述推导是对平板而言的，但是，不难把它们推广到曲壁的情形^[6]。当进行这一工作时，我们发现：在曲率不发生突然变化的条件下，例如曲壁没有尖缘的条件下，方程(7.10)——(7.12)仍然适用。

上面的讨论一开始就作了如下的假设：粘性对流动的影响主要只限于很薄的薄层内。但是应该指出，文献[24]曾试图用纯数学的方法，即不采用物理上似乎是合理的概念，由 Navier-Stokes 方程导出边界层方程。

b. 边界层分离

根据前面的讨论，即在尚未讨论方程的积分方法之前，我们已有可能得出一些重要的结论。要回答的第一个重要问题是，确定出在什么样的情况下才能使某些在边界层内减速下来的流体输入主流，或者换句话说，要找出壁面上流动会发生分离的条件。当沿壁面存在着逆压梯度的区域时，由于被减速了的流体质点的动能很小，所以一般说来，它们在升压区域内不能走得太远。因此，边界层由壁面向外偏转，从而分离出去，并进入主流(图 7.2)。通常，分离点后面的流体质点顺着压力梯度的方向运动，因而沿着与外流相反的方向运动。分离点定义为紧贴壁面的那层流体中顺流和倒流的分界点，即

$$\text{分离点: } \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (7.14)^{1)}$$

为了回答是否会出现和在什么地方出现分离的问题，通常必

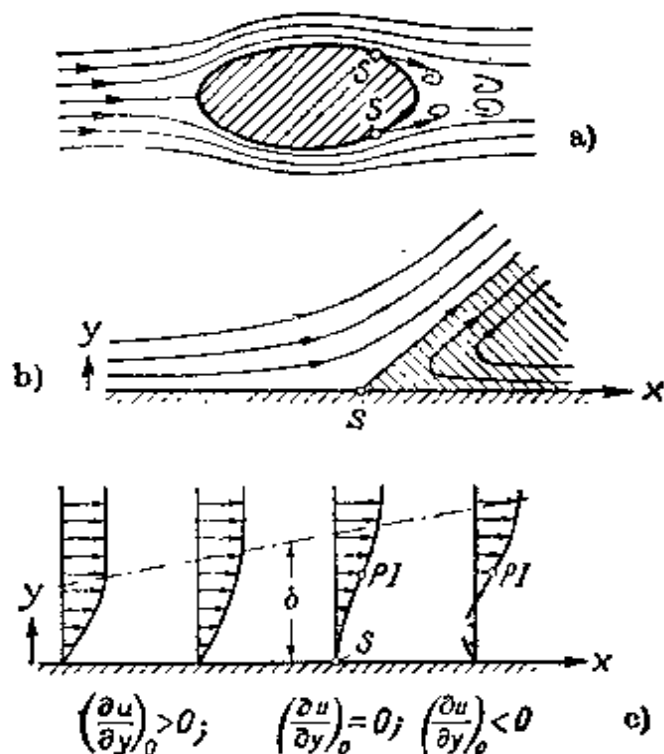


图 7.2 边界层的分离. a) 有分离的绕物体流动(S 为分离点); b) 分离点附近的流线形状; c) 分离点附近的速度分布(PI 为拐点).

△ 需先对边界层方程进行积分.一般说来,边界层方程只适用于分离点以前.在分离点下游的一个很小的距离内,边界层就变得很厚,以致在边界层方程推导中所作的假设不再适用.在物体具有钝尾的情形下,分离后的边界层把位势流动从壁面推开一个可观的距离,而且由于外流依赖于与分离有关的各种现象,所以作用在边界层上的压力分布必须由实验来确定.

△ 在定常流动中,分离只能发生在减速的流动中($dp/dx > 0$).这个事实可以借助于边界层方程,很容易从讨论压力梯度 dp/dx 和速度分布 $u(y)$ 之间的关系中得出.由方程(7.11)及边界条件 $u = v = 0$,可以得出在 $y = 0$ 处有

1) 可以看出: 分离点处的速度剖面在壁上有垂直的切线. 分离点下游的速度剖面将表明壁面附近有倒流区域,见图 7.2c.

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}, \quad (7.15)$$

同时,再对 y 微分,则有

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0. \quad (7.16)$$

在紧贴壁面的邻域中,速度剖面的曲率只依赖于压力梯度,而且壁面上速度剖面的曲率随压力梯度的变号而变号. 对于压力下降的流动(加速流动, $dp/dx < 0$),由方程(7.15)得出 $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$,所以在整个边界层的厚度上 $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ (图 7.3). 在压力增加的区域中(减速流动, $dp/dx > 0$),壁面附近有 $(\partial^2 u / \partial y^2) > 0$. 但是,在任何情形下,由于离开壁面的距离较大时总有 $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$,所以其中一定存在着 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ 的点. 这个点就是边界层中速度剖面上的拐点¹⁾(图 7.4).

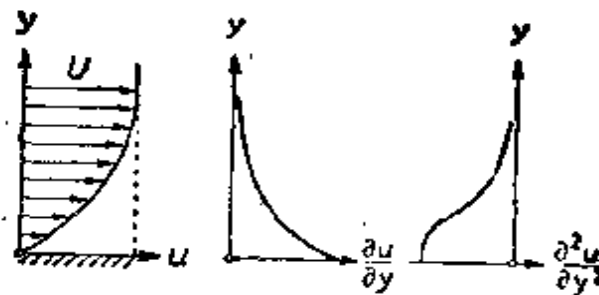


图 7.3 顺压区域中边界层的速度分布

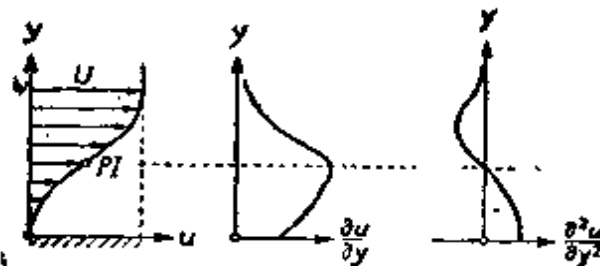


图 7.4 逆压区域中边界层的速度分布: $P1 =$ 拐点

由此可见,在减速的位势流动区域中,边界层的速度剖面上总会出现一个拐点. 因为在分离点上具有零斜率的速度剖面必有拐

1) 对于边界层的稳定性(从层流到湍流的转换)而言,速度剖面上出现拐点是重要的,见第十六章.

点,由此可见,分离只可能发生在位势流动减速的情形中.

c. 积分边界层方程的说明

为了积分边界层方程,不论是非定常情形的方程(7.7)和(7.8),还是定常情形的方程(7.10)和(7.11),通常引入流函数 $\psi(x, y, t)$ 比较方便. $\psi(x, y, t)$ 定义为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (7.17)$$

因而使连续方程得到满足. 将上述 $\psi(x, y, t)$ 代入方程(7.7), 我们得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (7.18)$$

这是一个关于流函数的三阶偏微分方程. 边界条件要求在壁面上流体没有滑移, 即在壁面上 $\partial \psi / \partial y = \partial \psi / \partial x = 0$. 此外, $t = 0$ 时的初始条件给出整个区域上的速度分布为 $u = \partial \psi / \partial y$. 如果将这个流函数的方程与完整的 Navier-Stokes 方程(4.10)作比较, 就可以看出, 边界层假定已将方程从四阶降为三阶.

d. 表面摩擦力

对边界层方程进行积分, 可以求得速度分布, 并确定出分离点的位置. 再通过简单的积分步骤, 即在整个物体的表面上对壁面切应力积分, 就可以计算物体表面的粘性阻力(表面摩擦力). 壁面上的切应力为

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

对于二维运动情形, 粘性阻力为

$$D_f = b \int_{s=0}^l \tau_0 \cos \phi ds, \quad (7.19)$$

其中 b 表示柱体的高度; ϕ 为表面切线与来流速度 U_∞ 之间的夹角, s 是沿物体表面度量的坐标(图 7.5). 积分是沿整个物面进

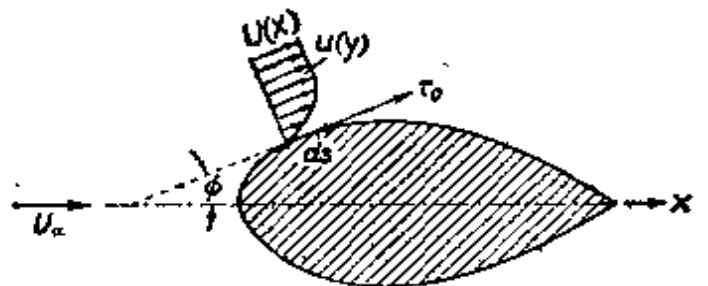


图 7.5 计算表面摩擦力的图例

行的,如果不出现分离,则从前缘驻点积到后缘,因为 $\cos\phi ds = dx$, 其中 x 是沿平行于来流速度方向度量的坐标,所以还可以写成

$$D_f = b\mu \int_{x=0}^l \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad (7.20)$$

和前面一样,这个积分区域是从前缘到后缘的整个浸湿表面.为了计算表面摩擦力,必须知道壁面上的速度梯度,而这一速度梯度只能通过积分边界层微分方程得到.如果在后缘的前面出现分离,则式(7.20)只在分离点以前有效.此外,如果层流边界层转捩成湍流边界层,则式(7.20)只在转捩点以前适用.在转捩点以后是湍流摩擦力,这留到第二十二章再讨论.

如果出现分离,则压力分布与无摩擦位势流动的理想情形有很大不同,并将引起压差阻力或型阻.因此,边界层理论除了可以解释表面摩擦力之外,还能解释型阻.但是,单纯地借助于边界层理论,并不能计算出型阻的数值.不过,在第二十五章中将给出型阻的粗略估计.

e. 平板边界层

在下一章中,我们将导出边界层微分方程的若干一般性质.但是,在此之前,现在先来研究一个特殊的例子是恰当的,以便更加熟悉这些方程.应用边界层方程最简单的例子是关于沿薄平板的流动.在历史上,它是说明 Prandtl 边界层理论应用的第一个例子, H. Blasius^[2] 在 Goettingen 完成的博士论文中研究了这个问题.设平板平行于 x 轴,前缘在 $x = 0$ 处,且在下游方向是无限长的(图 7.6).现在来讨论定常流动,其来流速度为 U_∞ ,且平行于 x 轴.在这种情形下,位势流动是匀速的,所以 $dp/dx = 0$.边界层方程(7.10)至(7.12)变为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.22)$$

$$y = 0; u = v = 0; y = \infty; u = U_{\infty}. \quad (7.23)$$

△ 因为所讨论的系统没有特征长度，所以有理由假定：在离开前缘

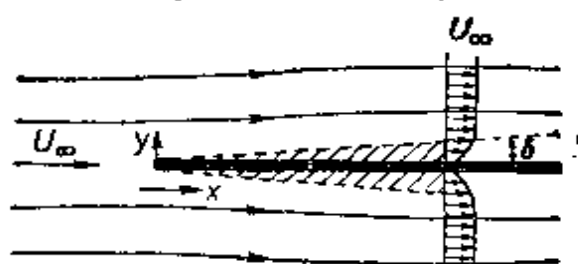


图 7.6 零攻角薄平板的边界层

的不同距离上，速度剖面彼此是相似的。这意味着通过对 u 和 y 选取合适的比例系数，就可以使得不同距离 x 上的速度曲线 $u(y)$ 变得相同¹⁾。将 u 和 y 的比例系数分别取成来流速度 U_{∞} 和边界层厚度 $\delta(x)$ 是很自然的。应该指出，后者随流动距离 x 的增加而增加。因此，边界层中速度剖面的相似性原理可以写成： $u/U_{\infty} = \phi(y/\delta)$ ，其中函数 ϕ 在离开前缘所有的距离 x 上都必须相同。

现在可以来估计边界层厚度。根据前面(第五章)所研究过的 Navier-Stokes 方程的精确解，例如在平板突然加速的情形下，可以求得 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ ，其中 t 是从运动开始后所经过的时间。就目前所讨论的问题而论， t 可以用流体质点从前缘运动到点 x 所花的时间来代替。对于边界层外的流体质点来说，也就是 $t = x/U_{\infty}$ ，所以可取 $\delta \sim \sqrt{\nu x/U_{\infty}}$ 。现在引入新的无量纲坐标 $\eta \sim y/\delta$ ，于是

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}}. \quad (7.24)$$

如本章 c 已经指出的那样，可以通过引入流函数 $\phi(x, y)$ 来积分连续方程，令

$$\phi = \sqrt{\nu x U_{\infty}} f(\eta), \quad (7.25)$$

其中 $f(\eta)$ 为无量纲的流函数。于是，速度分量变成

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{\infty} f'(\eta), \quad (7.26)$$

1) 在第八章中，将从更一般观点来讨论速度剖面的仿射性或相似性问题。更严格的理论表明，紧靠前缘后面的邻域必须排除在外，见 157 页。

其中带撇表示对 η 的导数。类似地，横向速度分量为

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (7.27)$$

写出方程(7.22)的其余各项并将其代入，则得

$$-\frac{U_\infty^2}{2x} \eta f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x} (\eta f' - f) f'' = \nu \frac{U_\infty^2}{x\nu} f'''. \quad (7.28)$$

简化后得到下述常微分方程：

$$ff'' + 2f''' = 0 \quad (\text{Blasius 方程}). \quad (7.28)$$

从式(7.23)以及式(7.26)和(7.27)可以看出，边界条件为

$$\eta = 0: f = 0, f' = 0; \eta = \infty: f' = 1. \quad (7.29)$$

在这个例子中，通过相似性变换，即变换式(7.24)和(7.25)，已经将两个偏微分方程(7.21)和(7.22)变换成一个关于流函数的常微分方程。这个常微分方程是三阶的非线性方程。所以，三个边界条件(7.29)足以完全确定出方程的解。

求解微分方程(7.28)的解析计算是十分冗长的。H. Blasius 求出了这样的解：在 $\eta = 0$ 附近此解表示成级数展开；在 η 很大时表示成渐近展开，再将这两种形式的解在适当的 η 值处进行配匹。L. Prandtl^[22]对这种方法已作了详尽的描述。随后，L. Bairstow^[23]和 S. Goldstein^[23]用稍微修改过的方法求解同一方程。稍早一点，C. Toepfer^[27]利用 Runge-Kutta 数值方法求解了 Blasius 方程(7.28)。同时，L. Howarth^[26]以更高的精度再次求解了这个方程，表 7.1 中引用的 f, f' 和 f'' 的数值，就是取自他的文章。在这方面，读者还可参阅由 D. Meksyn^[29]给出的新的积分方法。

在图 7.7 中可以看到纵向速度分量 $u/U_\infty = f'(\eta)$ 的变化曲线。将它与图 5.10 中驻点附近的速度剖面进行比较，可以看出，平板边界层的速度剖面在壁面上的曲率很小，然后在离壁面较远的地方有相当急剧的转向，以达到渐近值。在壁面上，速度曲线有一个拐点，因为 $y = 0$ 时有 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ 。

在边界层中，由式(7.27)所给出的横向速度分量画于图 7.8 中。这里值得指出的是：在边界层的外缘，亦即当 $\eta \rightarrow \infty$ 时，这

个分量并不为零,而是

$$v_{\infty} = 0.8604U_{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{xU_{\infty}}}$$

这说明在边界外缘有向外的流动,它是由于当流体沿壁面流动时,

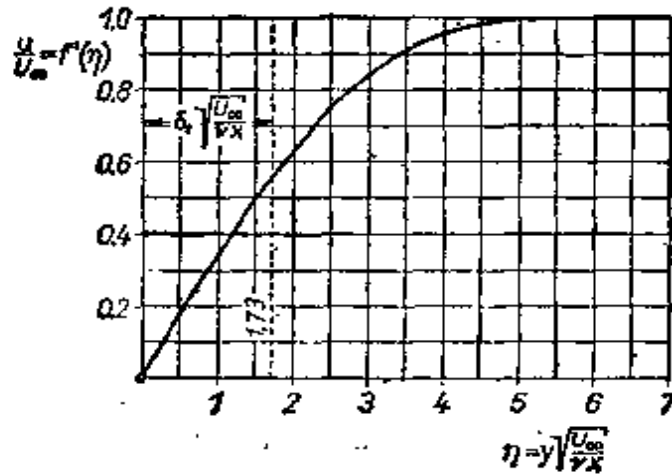


图 7.7 平板边界层中速度分布,取自 Blasius 的文章^[21]

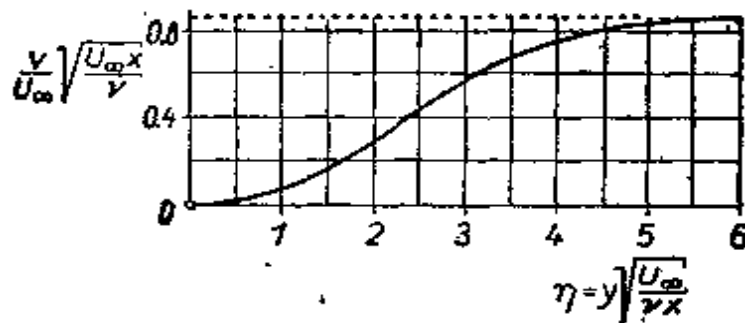


图 7.8 平板边界层中横向速度分量

增长着的边界层厚度使流体从壁面向外排移的结果。在目前的情形下,由于压力梯度为零,所以没有边界层分离。

J. Steinheuer^[22]发表了求解 Blasius 方程的系统的评论。尤其是在各种各样的边界条件下,他对 $\eta < 0$ 的积分区域内解的特性进行了讨论。他弄清了原来存在着三组解,并且在 $\eta \rightarrow -\infty$ 时的渐近性质是各不相同的,除了平板层流边界层之外,可以给出具有物理意义的解包括:两平行气流之间的层流,它的一个特殊情形是二维的半射流(见第九章 b);有垂直抽吸或吹除的层流(见第十四章 b);以及以同向或反向平行于气流运动的壁面上所形成的

层流边界层。

表面摩擦力：由前面的数据，很容易定出表面摩擦力。根据式(7.19)，对平板的一个侧面而言，我们得到

$$D = b \int_{x=0}^l \tau_0 dx \quad (7.30)$$

其中 b 为平板宽度， l 为其长度。现在，壁面上的切应力可以表示为

$$\tau_0(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(0) = \alpha \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad (7.31)$$

由表 7.1 查出 $f''(0) = \alpha = 0.332$ ，因此，无量纲切应力为

$$\frac{1}{2} c_f' = \frac{\tau_0(x)}{\rho U_\infty^2} = 0.332 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{0.332}{\sqrt{R_x}}, \quad (7.32)$$

从而根据式(7.30)，求得平板一侧的表面摩擦力为

$$D = \alpha \mu b U_\infty \int_{x=0}^l \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2abU_\infty \sqrt{\mu \rho l U_\infty},$$

而对于两侧浸湿的平板，其表面摩擦力为

$$2D = 4abU_\infty \sqrt{\mu \rho l U_\infty} = 1.328b \sqrt{U_\infty^3 \mu \rho l}. \quad (7.33)$$

值得注意的是：这里的表面摩擦力与速度的二分之三次方成正比。而在蠕动流中，其表面摩擦力只与速度的一次方成正比。另外，阻力随平板长度的平方根而增加。上述特性可以解释为：因为下游区域中边界层越来越厚，所以相应的切应力越来越小，因此，平板下游部分对总阻力的贡献小于前缘附近部分的贡献。照例，引进无量纲的阻力系数，它定义为

$$c_f = \frac{2D}{\frac{1}{2} \rho A U_\infty^2},$$

其中 $A = 2bl$ 表示润湿表面的面积，由式(7.33)推出公式

$$\boxed{c_f = \frac{1.328}{\sqrt{R_l}}}. \quad (7.34)$$

在这里， $R_l = U_\infty l / \nu$ 表示由平板长度和来流速度构成的 Reynolds

表 7.1 零攻角平板边界层的函数 $f(\eta)$, 取自 L. Howarth^[16]

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.45627	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913
3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88826	0.98269	0.02948
4.8	3.08534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134
5.4	3.68094	0.99616	0.00793
5.6	3.88031	0.99748	0.00543
5.8	4.07990	0.99838	0.00365
6.0	4.27964	0.99898	0.00240
6.2	4.47948	0.99937	0.00155
6.4	4.67938	0.99961	0.00098
6.6	4.87931	0.99977	0.00061
6.8	5.07928	0.99987	0.00037
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
7.2	5.47925	0.99996	0.00013
7.4	5.67924	0.99998	0.00007
7.6	5.87924	0.99999	0.00004
7.8	6.07923	1.00000	0.00002
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.2	6.47923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000
8.6	6.87923	1.00000	0.00000
8.8	7.07923	1.00000	0.00000

数。由 H. Blasius 首先导出的这个平板摩擦力定律, 只在层流的范围内适用, 即在 $R_1 = U_\infty l / \nu < 5 \times 10^5 \sim 10^6$ 的范围内适用。

它由图 21.2 中的曲线(1)表示。在湍流区域中 ($R_t > 10^6$)，阻力远大于式(7.34)所给出的值。

边界层厚度：要确切地定义出边界层的厚度是不可能的，因为边界层的粘性影响是逐渐地向外减小的，其平行的速度分量 u 是渐近地趋向于位势流动的值，(函数 $f(\eta)$ 渐近地趋向于 1)。如果把边界层厚度规定为 $u = 0.99$ 处的距离，则由表 7.1 查得 $\eta \approx 5.0$ 。因此，上述规定的边界层厚度为

$$\delta \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (7.35)$$

一个有物理意义的边界层厚度是**位移厚度** δ_1 ，它已由式(2.6)引入，见图 2.3。位移厚度是这样一个距离，它是由于边界层内速度减小而使外部位势流场向外移出的距离。由于摩擦的影响使得体积流量的减少为 $\int_{y=0}^{\infty} (U_\infty - u) dy$ ，所以 δ_1 定义为

$$U_\infty \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U_\infty - u) dy,$$

或

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \quad (7.36)$$

利用式(7.26)所给出的 u/U_∞ 可得

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_{\eta=0}^{\infty} [1 - f(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [\eta_1 - f(\eta_1)],$$

这里 η_1 表示边界层以外的某一点。利用表 7.1 中的 $f(\eta)$ 值，得 $\eta_1 - f(\eta_1) = 1.7208$ ，所以

$$\delta_1 = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (\text{位移厚度}). \quad (7.37)$$

距离 $y = \delta_1$ 示于图 7.7 中。这就是由于壁面附近摩擦力作用所产生的外部位势流动流线的移动距离。由式(7.35)给出的边界层厚度 δ 是 u 达到 $0.99U_\infty$ 时所对应的距离，它大致是位移厚度的三倍。

由此还可以计算以后要用到的**动量厚度** δ_2 。与位势流动相

比, 边界层中动量损失为 $\rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy$, 所以这一新的厚度可以定义为

$$\rho U_{\infty}^2 \delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy,$$

或

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy. \quad (7.38)$$

对零攻角平板的数值计算给出

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_{\eta=0}^{\infty} f'(1 - f')d\eta,$$

或

$$\delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (\text{动量厚度}). \quad (7.39)$$

△ 这里应该指出: 由于在平板前缘附近不满足 $|\partial^2 u / \partial x^2| \ll |\partial^2 u / \partial y^2|$ 的假设, 所以边界层理论不再适用. 因此边界层理论只适用于 Reynolds 数 $R = U_{\infty} x / \nu$ 大于某个数值以后的区域. 平板前缘附近的关系只能从完整的 Navier-Stokes 方程来求解, 因为前缘是个奇点. G. F. Carrier 和林家翘^[5]以及 B. A. Boley 和 M. B. Friedman^[3]为进行这方面的计算作出了努力.

实验研究: 为了检验上述边界层理论, 首先 J. M. Burgers^[4]和 B. G. van der Hegge Zijnen^[15], 接着 M. Hansen^[14]进行了测量. 后来, J. Nikuradse^[20]报告了非常细致和全面的测量, 并且发现: 前缘形状以及外部流动中可能存在的微小压力梯度, 对边界层的形成影响很大. J. Nikuradse 在空气气流中进行平板测量时, 对这些可能的影响进行了仔细的修正. 图 7.9 中画出了层流边界层中的速度分布, 这是根据 Nikuradse 在离开前缘几个不同的位置上所测量的结果. 这些测量证明了边界层理论的预言: 在离开前缘的所有位置 x 上, 速度剖面都是相似的. 速度剖面的形状与理论计算结果极为一致. 图 2.19 中已给出了无量纲. 边界层厚度 $\delta \times \sqrt{U_{\infty} / \nu x}$ 与以流动长度 x 构成的 Reynolds 数之间的关系曲线. 只

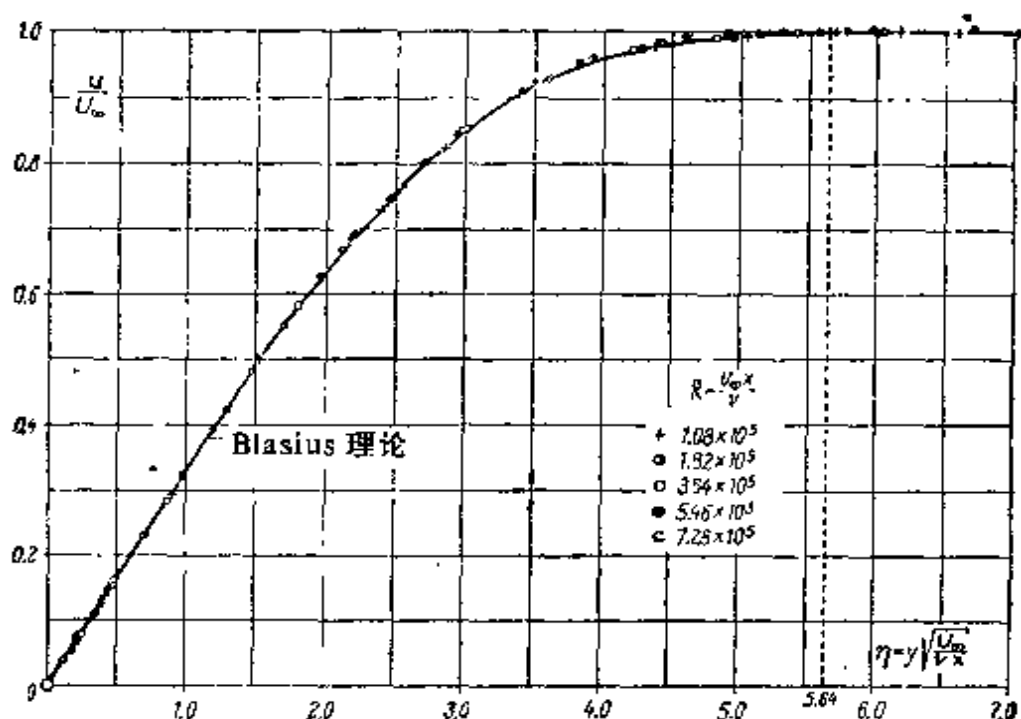


图 7.9 零攻角平板层流边界层中的速度分布,根据 Nikuradse 的测量^[20]

要边界层是层流的,这一无量纲厚度就保持不变,其数值接近于式 (7.35) 所给出的值。当 Reynolds 数 $U_{\infty}x/\nu$ 很大时,边界层不再是层流的了,而发生了向湍流的过渡。如果注意到图 2.19 中边界层厚度随着离前缘距离的增加而有显著的增加,就可以承认这一点。根据 B. G. van der Hegge Zijnen 和 M. Hansen 所作的测量,层流到湍流的转换发生在 $U_{\infty}x/\nu = 300000$ 。这相当于以位移厚度为参考长度的 Reynolds 数 $U_{\infty}\delta_1/\nu = 950$ 。在第十四章中将要介绍的最近测量已经证明:在空气气流中尽量消除扰动,“临界”Reynolds 数的值就能大大提高。用这种方法有可能使该临界值高达 $U_{\infty}x/\nu = 3 \times 10^6$ 左右。

平板边界层的层流摩擦力定律也经受了仔细的实验验证。通过速度剖面在壁面上的斜率和式 (7.31),可以间接确定出壁面上当地的切应力。近来 H. W. Liepmann 和 S. Dhawan^[21] 通过作用在一小块板面上的力直接测量了切应力。这块小板是这样安装的,它可以相对于主板作少许移动。他们非常仔细的测量结果绘于图

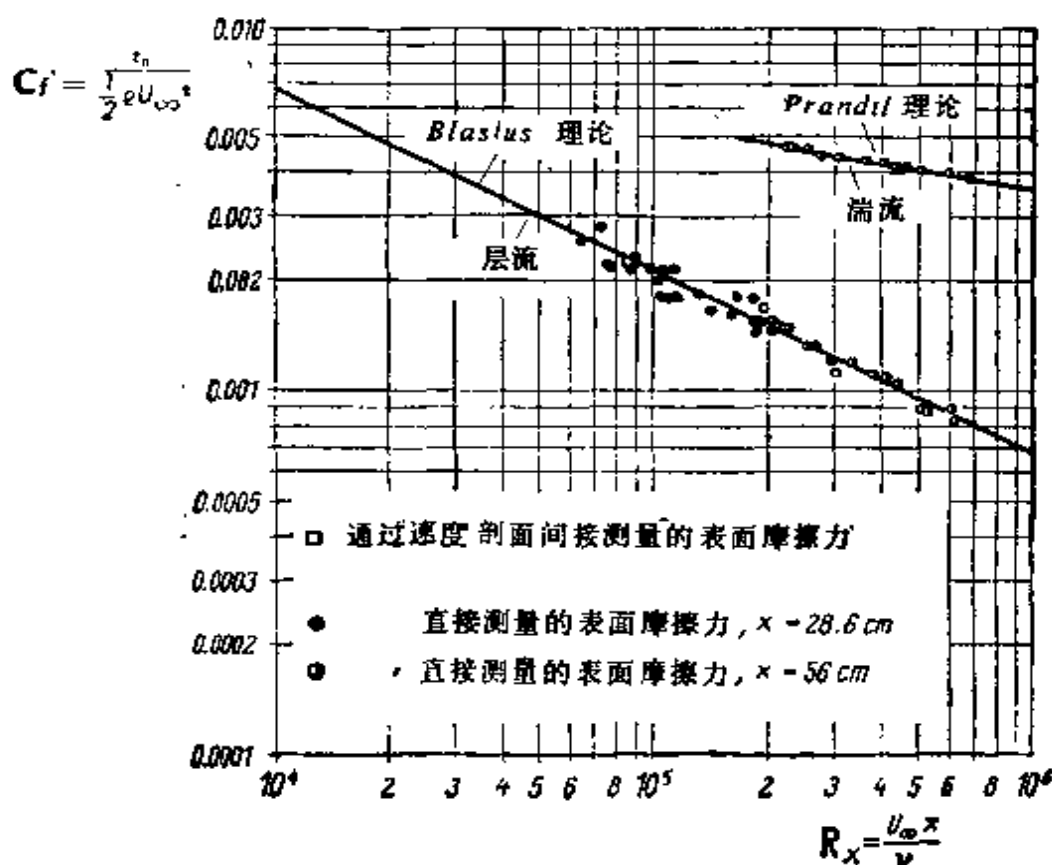


图 7.10 不可压缩流体中零攻角平板局部的表面摩擦力系数, 根据 Liepmann 和 Dhawan^{[6], [7]}对切应力的直接测量来确定的理论: 层流根据式(7.32); 湍流根据式(21.12)

7.10 中, 该图给出了局部表面摩擦力系数 $c_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ 对 Reynolds 数 $R_x = U_\infty x / \nu$ 的关系曲线。在 $R_x = 2 \times 10^5 - 6 \times 10^5$ 的范围内, 层流和湍流都有可能。可以看出, 直接测量和间接测量的结果极为一致。在层流范围内的测量结果是对 Blasius 公式(7.32), 即对公式 $c_f = 0.664 / \sqrt{R_x}$ 的一个极好的证明。在湍流范围内, 测量结果和 Prandtl 的理论公式, 即和公式(21.12)也颇为吻合。公式(21.12)将在第二十一章中导出。

图 7.9 和图 7.10 已经证明: 在 Reynolds 数 $R_x > 10^5$ 的范围内, 对于零攻角平板层流边界层中的速度分布和切应力, 理论计算和实验结果完全一致。这就从物理观点上明确地证实了边界层近似的正确性。尽管如此, 对于边界层理论中这些简化的正确性, 一些数学家还是花了很大精力来建立“数学上的证明”; 在这方面, 读

者可参阅 H. Schmidt 和 K. Schroeder^[24]的工作。

f. 高阶边界层理论¹⁾

在本章 a 中,通过对完整的运动方程中各项的量级估计,已经得到边界层方程。不过,边界层方程还可以用更为一般的理论来导出。为了得出大 Reynolds 数的 Navier-Stokes 方程解的渐近展开,我们可以建立一种摄动方法,其中取

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U_\infty R_0}{\nu}}} \quad (7.40)$$

为摄动参数。由此导致所谓奇异摄动法。结果是将所求解的渐近展开分成外部展开(外部流动)和内部展开(边界层流动)。利用匹配渐近展开方法,就能够得出整个解的渐近展开。

这一渐近展开的首项正好是边界层方程的解。而且,摄动计算继续下去,使得我们可以计算渐近展开的以后各项,因而扩展由 Prandtl 建立的经典边界层理论。这样,我们就建立了高阶边界层理论。渐近展开的第二项是特别重要的,可以看成是对经典理论的修正,代表着边界层的二阶效应。

M. Van Dyke^[9], K. Gersten^[10] 以及 K. Gersten 和 J. F. Gross^[11] 等人发表的文章中广泛介绍了高阶边界层理论。此外,文献[8]对匹配渐近展开方法作了详细说明。这种方法的基本思想可以追溯到 L. Prandtl; 第四章 f 已通过简单的数学例子大体说明了这些基本思想。

在下文中,我们针对在二维不可压缩流动中的应用,简要地阐述大 Reynolds 数的渐近解理论。这种讨论的主要目的是为了扩展 Prandtl 的边界层理论,从而导出高阶边界层方程。详细的推导过程可参阅 M. Van Dyke 的论文^[9]。

我们从第三章 a 中正交曲线坐标系(见图 3.9)的 Navier-Stokes 方程出发。所有的长度均以合适的长度 R_0 为单位来量度(例如选用驻点曲率半径),同时速度以 U_∞ 为参考单位,超压以 ρU_∞^2 为参考单位,壁面的几何形状用当地的曲率半径 $R(x)$ 来描写,壁面的无量纲曲率半径为

$$K(x) = R_0/R(x). \quad (7.41)$$

外部展开: 为了求解方程组(3.35),我们采用下面的渐近展开:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) &= U_1(x, y) + \varepsilon U_2(x, y) + \dots \\ v(x, y, \varepsilon) &= V_1(x, y) + \varepsilon V_2(x, y) + \dots \\ p(x, y, \varepsilon) &= P_1(x, y) + \varepsilon P_2(x, y) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

将式(7.42)代入方程(3.35),并按 ε 的幂次整理各项。由此,可得出关于一阶解 $U_1(x, y), V_1(x, y), P_1(x, y)$, 二阶解 $U_2(x, y), V_2(x, y), P_2(x, y)$ 等一系列方程组。到二阶解为止,仍不用计算 ε^3 项,即 Navier-Stokes 方程中的摩擦力项。因此,一阶解和二阶解对应于无粘流动,或者,如果只研究均匀来流的流场,甚至对应于位势流动。

一阶解满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0: & V_1(x, 0) = 0, \\ y \rightarrow \infty: & U_1 + V_1^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

位势流动方程的解 $U_1(x, y), V_1(x, y)$ 给出壁面上的速度 $U_1(x, 0)$, 并由 Bernoulli 方

1) 这一节应归功于 K. Gersten 教授。

解得壁面压力

$$P_1(x, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} U_1^2(x, 0). \quad (7.44)$$

二阶解满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0: \quad \nabla_2^2(x, 0) &= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} [U_1(x, 0) \cdot \delta_1(x)], \\ y \rightarrow \infty: \quad U_2^2 + \nabla_2^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

其中 $\delta_1(x)$ 为位移厚度, 其定义类似于式(7.36), 也可参见式(7.51).

位势流动方程的解也给出壁面上切向速度分量的分布 $U_2(x, 0)$, 以及压力

$$P_2(x, 0) = -U_1(x, 0) \cdot U_2(x, 0). \quad (7.46)$$

一般说来, 所得到的解并不满足壁面上无滑移的条件. 因此, 这些解在壁面附近不适用, 它们称为“外部解”或者“外部渐近展开”.

内部展开: 为了得到壁面附近适用的解, 必须采用特殊的办法. 我们在这里不用离开壁面的距离 y 为坐标, 而引入一个新的放大的坐标

$$N = y/\varepsilon. \quad (7.47)$$

N 称为内部变量, 这样选取变量是为了防止在 x, N 坐标系中的一阶方程失去某些粘性项.

对于壁面附近(边界层中)的解, 我们仍然采用渐近展开, 即

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) &= u_1(x, N) + \varepsilon u_2(x, N) + \dots, \\ v(x, y, \varepsilon) &= v_1(x, N) + \varepsilon v_2(x, N) + \dots, \\ p(x, y, \varepsilon) &= p_1(x, N) + \varepsilon p_2(x, N) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

将上式代入方程组(3.35), 并按 ε 的幂次整理, 就可得到下列各方程组.

一阶边界层方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial N} &= 0, \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial N} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial N^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p_1}{\partial N}. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} N=0: \quad u_1 &= 0, \quad v_1 = 0, \\ N \rightarrow \infty: \quad u_1 &= U_1(x, 0). \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

方程(7.49)正好就是 Prandtl 边界层方程(7.10)和(7.11)变换到坐标 x, N 中的形式. 此外还有 $p_1(x) = p_1(x, 0)$.

有了解 $u_1(x, N)$, 就可以计算位移厚度 $\delta_1(x)$, 其定义为

$$\delta_1 = \varepsilon \int_0^\infty \left(1 - \frac{u_1(x, N)}{U_1(x, 0)}\right) dN. \quad (7.51)$$

由于一阶方程(7.49)不显含 Reynolds 数, 所以 $u_1(x, N), v_1(x, N)$ 也一定与 Reynolds 数无关. 这就证明了层流分离点的位置与 Reynolds 数无关.

二阶边界层方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial N} &= K \left(N \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \right), \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial N} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial N} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial N^2} \\ &= K \left(N \frac{\partial^2 u_1}{\partial N^2} + \frac{\partial u_1}{\partial N} - N v_1 \frac{\partial u_1}{\partial N} - u_1 v_1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial N} = K u_1^2.$$

其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} N=0: u_2 &= 0, v_2 = 0, \\ N \rightarrow \infty: u_2 &= U_2(x, 0) - K U_1^2(x, 0) N, \\ p_2 &= P_2(x, 0) + K U_1^2(x, 0) N. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

内部解的外边界条件(即 $N \rightarrow \infty$ 的边界条件)和外部解的内边界条件(例如关于 $V_1(x, 0)$ 的表达式(7.45))由内外解的匹配得出,可参阅文献[7].

二阶边界层方程组(7.52)和(7.53)也不显含 Reynolds 数. 然而它包含一阶解, 并且比一阶方程组的项数要多, 但它是线性微分方程组. 由于这个缘故, 我们又能将整个解分成几个部分解之和. 习惯上都把这个解分成曲率项和位移项, 但是, 我们不在此作进一步讨论.

因为二阶理论计及壁面的曲率, 因此在壁面的垂直方向上出现了压力梯度. 由于这个缘故, 壁面上的压力与外部流动加在边界层上的压力不同. 我们沿边界层厚度方向进行积分, 得到壁面上的压力系数如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} c_{pw} &= p(x, 0, \varepsilon) \\ &= P_1(x, 0) + \varepsilon \left\{ P_2(x, 0) + K \int_0^\infty [U_1^2(x, 0) - u_1^2(x, N)] dN \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

当壁面呈凸形($K > 0$)时, 壁面上的压力大于外加压力.

二阶近似的局部切应力分布为

$$\frac{1}{2} c_f = \frac{\tau_0(x)}{\rho U_\infty^2} = \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial N} \right)_{N=0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial N} \right)_{N=0} + O(\varepsilon^3). \quad (7.55)$$

二阶边界层也影响到外部流动. 在 K. Gersten 的文章^[11]中, 计算了包括二阶边界层影响的位移厚度.

例: 零攻角平板. 在零攻角不渗透的平板情形下, 用式(7.37)可算出位移厚度 δ_1 . 根据方程(7.45), 外部流动的边界条件为

$$V_2(x, 0) = 0.8604/\sqrt{x}, \quad (7.56)$$

这里已将平板长度选为参考长度. 在上述边界条件下, 二维位势流动方程的解为

$$\left. \begin{aligned} U_2(x, y) &= -\frac{0.8604}{r} \sqrt{\frac{r-x}{2}}, \\ V_2(x, y) &= \frac{0.8604}{r} \sqrt{\frac{r+x}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.58)$$

相应的流线为抛物线, 其焦点在原点, 顶点在 x 轴上. 由此可见, 在目前的特殊情形下, 壁面上的速度 $U_2(x, 0)$ 变为零, 因而方程组(7.52)和(7.53)的解是平凡解. 所以我们得出结论: 在平板情形下, 表面摩擦力的二阶修正为零. 然而不能作出这样的结论: 二阶阻力系数也为零. 原因在于: 由式(7.57)所决定的二阶外部流动对动量项有贡献. 将沿整个平板的动量积分计算一下, 就可以证明这一点, 同时还可以发现这一个贡献等价于阻力的增加. I. Imai^[17]已经进行了这种计算. 他求出平板的阻力系数为

$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{R_L}} + \frac{2.326}{R_L} \quad (7.59)$$

其中 $2.326 = \pi \times (0.8604)^2$ 。公式(7.59)中的修正项(第二项)与第一项相比,在 $R_L = 10^3$ 时为 5.5%, 在 $R_L = 10^6$ 时降为 0.2%。

公式(7.59)中第二项不代表表面摩擦力。根据观测,这可解释为前缘流动的奇异性所引起的压差阻力。据推测,尽管平板厚度非常小,但是前缘出现的无限大超压会产生出一个有限的力。关于这一点,以后将与第九章 i 中的抛物线情形进行比较。

严格地说,上述绕平板流动的分析只限于半无限平板。在有限长度平板的情形下,切应力在后缘上游的一定距离内是要修正的。但是,抛物型的 Prandtl 边界层方程不能计及这一“后缘效应”。

根据 K. Stewartson 的文章^[228],我们有可能控制这类后缘效应,或者一般说来,通过 Prandtl 边界层概念的推广,可以表示为 Prandtl 方程奇异性(例如前缘、后缘、分离点)的那些效应。这可通过引进“多层结构”边界层的思想(即“三层”概念)来进行。

对于平板的情形, K. Stewartson^[228]和 A. F. Messiter^[18b]求得的表面摩擦力系数可以表示为

$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{R_L}} + \frac{2.668}{(R_L)^{3/4}} \quad (7.60)$$

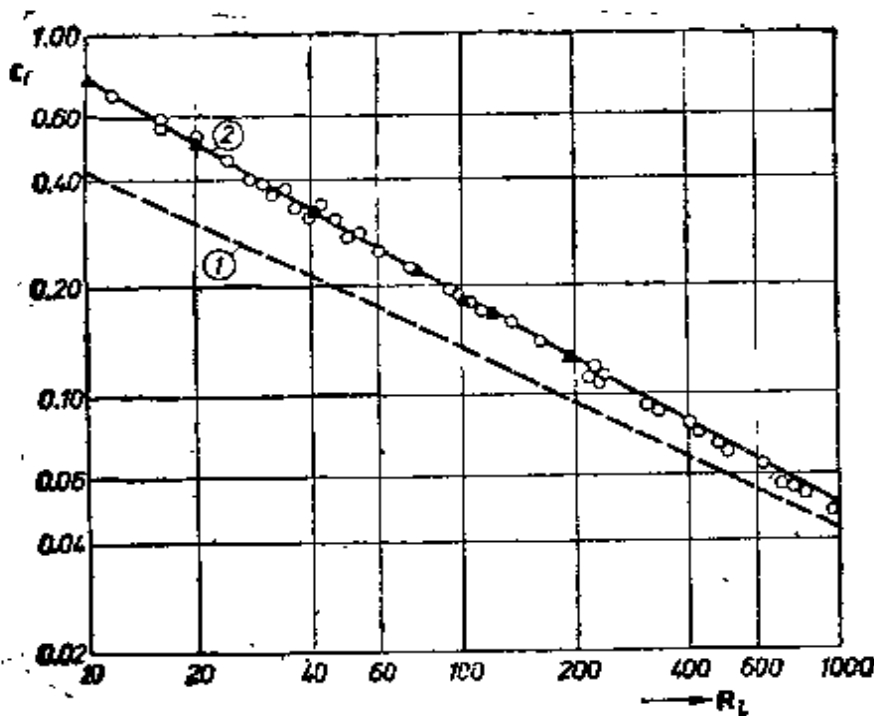


图 7.11 零攻角有限长平板的表面摩擦力系数
 (1)根据 H. Blasius 理论, 方程(7.34)
 (2)根据 A. F. Messiter 理论^[18b], 方程(7.60)
 ▲根据 Dennis 理论 (Navier-Stokes 方程的解)
 ○根据 Z. Janour 实验^[303]

这里已计及后续的影响,但是未计及位移的影响.

图 7.11 是根据 R. E. Melnik 和 R. Chow 的文章^[136]画出的. 这个图表明,由方程(7.60)计算的 c_f 与由完整的 Navier-Stokes 方程所得到的结果以及 Reynolds 数低到 $R_f = 10$ 的测量结果均极为一致. 当 $R_f = 40$ 时,方程(7.60)给出 $c_f = 0.361$,它超过精确值 $c_f = 0.311$ 不到 20%.

在第九章 j 中,我们将回头来讨论求二阶边界层方程的精确解问题.

第八章 边界层方程的一般性质

在转到下一章计算边界层流动的另外一些例子之前，我们打算首先讨论一下边界层方程的若干一般性质。在讨论中只限于二维定常不可压缩边界层。

尽管与 Navier-Stokes 方程相比，边界层方程有了很大程度的简化，但从数学上看，求解这些方程依然很难，以致于对它们还不能作出很多的一般说明。首先，值得注意的是：对于坐标而言，Navier-Stokes 方程是椭圆型的，而 Prandtl 的边界层方程是抛物型的。其次，由于在边界层理论中采用了一些简化假设，使得在垂直于边界层的方向上可以认为压力是不变的；而沿着壁面又可以认为压力是由外部流动“施加”的，因而压力成为一个给定的函数。由此省略了垂直于流动方向的运动方程。这种省略从物理上可以这样来说明：就横向运动而论，边界层内流体质点的质量为零，同时不经受摩擦阻力。显然，由于在运动方程中引入了这种带有根本性的变化，所以我们一定可以预料到：它们的解会出现某些数学上的奇异性，因而不能期望观察到的现象与计算结果总是吻合的。

a. 边界层特性对 Reynolds 数的依赖关系¹⁾

随着 Reynolds 数增大，在推导边界层方程时所作的一些假设，将以更高的精度得到满足。因此，可以把边界层理论看作是在很大 Reynolds 数下对 Navier-Stokes 方程的渐近积分方法²⁾。这个论述引导我们去讨论 Reynolds 数与所研究的具体物体上的边界层特性之间的关系。我们记得，在推导边界层方程时使用了无量纲

1) 参看第七章 f 和第九章 j。

2) 这一节的论证在第七章 f 节关于高阶近似中已经进行过讨论。为了更好地理解起见，这里作了进一步的论述。

量:各个速度都参照自由流速度 U_∞ , 各个长度都参照物体的特征长度 L . 若把所有的无量纲量都用一撇来表示, 例如 $u/U_\infty = u'$, $\dots, x/L = x', \dots$, 对于二维定常流动情形, 就可以得到如下方程:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (8.2)$$

$$y' = 0: u' = v' = 0; \quad y' = \infty: u' = U'(x');$$

也可以参看方程 (7.10) — (7.12). 式中 R 表示用参考量组成的 Reynolds 数

$$R = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

由方程 (8.1) 和 (8.2) 可以看出, 如果物体的形状和它的位势运动 $U'(x')$ 是给定的, 那么这种边界层的解只取决于一个参数, 就是 Reynolds 数 R . 采用进一步的变换, 还可以从方程 (8.1) 和 (8.2) 中消去 Reynolds 数. 如果我们令

$$v'' = v' \sqrt{R} = \frac{\nu}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}, \quad (8.3)^{1)}$$

$$y'' = y' \sqrt{R} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}, \quad (8.4)^{1)}$$

那么方程 (8.1) 和 (8.2) 变换成

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0, \quad (8.6)$$

其边界条件是: 在 $y'' = 0$ 处, $u' = 0, v'' = 0$; $y'' = \infty$ 处, $u' = U'$. 这些方程现在不含 Reynolds 数, 因此, 这个方程组的解, 即函数 $u'(x', y'')$ 和 $v''(x', y'')$ 也就与 Reynolds 数无关. Reynolds 数的变化引起边界层的仿射变换, 其间横向坐标和横向速

1) 这个变换与方程 (7.47) 和 (7.48) 采用的变换完全相同.

度都放大 $R^{-1/2}$ 倍。换句话说,对于一个给定的物体,无量纲速度分量 u/U_∞ 和 $(v/U_\infty) \cdot (U_\infty L/\nu)^{1/2}$ 是无量纲坐标 x/L 和 $(y/L) \cdot (U_\infty L/\nu)^{1/2}$ 的函数;而且,这些函数不再依赖于 Reynolds 数。

这个关于 Reynolds 数的相似性原理,其实用价值在于:对于一个给定物形的边界层问题,用上述无量纲变量只需求解一次就足够了。只要边界层是层流的,这样的解对于任何 Reynolds 数都是适用的。特别是,由此还能得出分离点的位置与 Reynolds 数无关。当 Reynolds 数增加时,通过分离点的流线与物体之间的夹角(图 7.2)按 $1/R^{1/2}$ 的比率单调地减小。

此外,在 Reynolds 数趋向于极限($R \rightarrow \infty$)的过程中,分离会一直保持下来。因此,在物体形状使流动出现分离的情形下,边界层理论与无摩擦位势理论呈现出完全不同的流动图象,即使是在 $R \rightarrow \infty$ 的极限情形下也是这样。这就证实了第四章中曾着重强调过的结论,即趋向无摩擦流动的极限情形不可能通过微分方程本身来实现;那样做只能在解的主要组成部分(外部解)中可以得到有物理意义的结果。

b. 边界层方程的“相似”解

求解边界层方程引起的另一个非常重要的问题,是要研究在什么样的条件下两个解才是“相似”的。这里,我们把“相似”解定义为这样的解:对于这些解而言,速度分量 u 有如下性质,即位于不同坐标 x 上的两个速度剖面 $u(x, y)$, 其不同之处仅在于 u 和 y 各相差一个比例因子。所以,在这种“相似”解的情形下,如果在用比例因子进行无量纲化的坐标上画出速度剖面 $u(x, y)$, 则所有 x 值上的速度剖面都是相同的,有时也把这种速度剖面称为仿射的,因为在所有截面上无量纲的 $u(x)$ 都随着 y 从 0 变化到 1, 因此, x 截面上的当地位势速度 $U(x)$ 显然就是 u 的比例因子。而 y 的比例因子(用 $g(x)$ 表示)必然和当地的边界层厚度成比例。所以,“相似性”的必要条件可以简化为,对于两个任意截面 x_1 和 x_2 , 速度分量 $u(x, y)$ 必须满足下列方程:

$$\frac{u\{x_1, [y/g(x_1)]\}}{U(x_1)} = \frac{u\{x_2, [y/g(x_2)]\}}{U(x_2)} \quad (8.7)$$

上一章研究的沿零攻角平板的边界层就具有这种“相似性”的特征。自由流速度 U_∞ 是 u 的比例因子；而 y 的比例因子则是 $g = \sqrt{\nu x/U_\infty}$ ，这个量与边界层厚度成比例。在 u/U_∞ 对 $y/g = y\sqrt{U_\infty/\nu x} = \eta$ 的曲线图上，所有的速度剖面都是一样的(图 7.7)。类似地，第五章中关于二维和三维驻点流动情形所提供的例子，按现在的意义来说，它们的解也是“相似”的。

对于解的数学性质来说，寻找“相似”解是特别重要的。正如以后我们会更详细看到的那样，在存在“相似”解的情形下，可以把偏微分方程组简化成常微分方程组，显然，这就使问题在数学上得到相当大的简化。在这方面，也可以用平板边界层来作为例子。我们记得，采用相似性变换 $\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$ (即式(7.24))以后，我们曾得到一个关于流函数 $f(\eta)$ 的常微分方程，即方程(7.28)，它代替了原来的偏微分方程。

现在，我们研究存在这种“相似”解的位势流动的类型。这个问题先后由 S. Goldstein^[4] 和 W. Mangler^[9] 进行过详细的讨论。他们都是从考虑平面定常流动的边界方程组入手的，这些方程就是(7.10), (7.11)和(7.5a)。现在它们可以写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

边界条件是：在 $y = 0$ 处， $u = v = 0$ ； $y = \infty$ 处， $u = U$ 。通过引入流函数 $\phi(x, y)$ 可以把连续方程与

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

结合起来。这样，运动方程变为

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \quad (8.9)$$

其边界条件是：在 $y = 0$ 处， $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ； $y = \infty$ 处， $\frac{\partial \phi}{\partial y} = U$ 。为了讨论“相似性”问题，我们引进无量纲量，如同本章中所做的那样。所有的长度用参考长度 L 来无量纲化，而所有的速度都用参考速度 U 进行无量纲化。这样做的结果，在方程中出现了 Reynolds 数

$$R = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

同时， y 坐标和无量纲比例因子 $g(x)$ 有关。所以我们可以令

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y\sqrt{R}}{Lg(x)} \quad (8.10)$$

坐标的因子 \sqrt{R} 已经在式(8.4)中出现过。利用代换

$$f(\xi, \eta) = \frac{\phi(x, y)\sqrt{R}}{LU(x)g(x)}, \quad (8.11)$$

可以使流函数无量纲化。因此，速度分量变成

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} = Uf', \\ -\sqrt{R} \nu &= \sqrt{R} \frac{\partial \phi}{\partial x} = Lf \frac{d}{dx}(Ug) + Ug \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

其中 f' 上的一撇表示对 η 求导数，而 g' 上的一撇表示对 x 求导数。现在根据式(8.12)可以直接看出，如果流函数 f 只依赖于一个变量 η (见式(8.10))，从而可以删去 f 对 ξ 的依赖关系，那么速度剖面 $u(x, y)$ 在前面所定义的意义就是相似的。并且，在这种情形下，关于流函数的偏微分方程，即方程(8.9)，必然简化成一个关于 $f(\eta)$ 的常微分方程。现在我们只要着手研究使方程(8.9)产

1) F. Schultz-Grunow^[46, 152] 所提出的变换

$$\eta^* = \frac{1}{2A} \ln(1 + 2A\eta),$$

可以把含有自相似解的若干问题归并到零攻角平板的问题中去。如果把 $A = \delta/2R$ 选为曲率参数，那么这些变换可以应用于具有钝前缘或尖前缘以及具有引射或抽吸的沿纵向弯曲的壁面流动(见第十四章)。上述变换精确到曲率的二阶量，这意味着包含了所有 A 的一次方的项。

生这种简化的条件，那么就可以得到存在这种“相似”解时位势流动 $U(x)$ 所必须满足的条件。

现在，如果把式(8.10)和(8.11)所定义的无量纲变量引进方程(8.9)中，那么我们得到下列关于 $f(\xi, \eta)$ 的微分方程：

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f^2) = \frac{U}{U_\infty} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (8.13)$$

其中 α 和 β 是下列 x 的函数的缩写：

$$\alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx} (Ug); \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 U', \quad (8.14)$$

式中 $U' = dU/dx$ 。方程(8.13)的边界条件是：在 $\eta = 0$ 处， $f = 0$ 和 $f' = 0$ ； $\eta = \infty$ 处， $f' = 1$ 。

只有当 f 和 f' 都与 ξ 无关的时候，也就是当方程(8.13)的右边为零的时候才存在“相似”解。同时，方程(8.13)右边的系数 α 和 β 必须与 x 无关，即它们必须是常数。这后一个条件和式(8.14)一起，给出了关于位势速度 $U(x)$ 和关于坐标的比例因子 $g(x)$ 的两个方程，因此它们是可以计算的。由此可见，如果边界层流动存在相似解，那么流函数 $f(\eta)$ 必然满足下列常微分方程：

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f^2) = 0. \quad (8.15)$$

其边界条件是

$$\eta = 0: f = 0, f' = 0; \quad \eta = \infty: f' = 1. \quad (8.16)$$

V. M. Falkner 和 S. W. Skan^[2]首先给出了这个方程，后来，D. R. Hartree^[6]详细研究了 this 方程的解。我们将在下一章里再来讲述这一点。

现在，余下的问题是根据式(8.14)来确定 $U(x)$ 和 $g(x)$ 。首先，我们由式(8.14)得到

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{d}{dx} (g^2 U).$$

因此，如果 $2\alpha - \beta \neq 0$ ，则有

$$\frac{U}{U_\infty} g^2 = (2\alpha - \beta) \frac{x}{L}. \quad (8.17)$$

其次，我们由式(8.14)还可以得到

$$\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} g g' U.$$

因此,

$$(\alpha - \beta) \frac{U'}{U} = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \frac{g'}{g} = \beta \frac{g'}{g}.$$

对上式积分, 得到

$$\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{(\alpha-\beta)} = K g^\beta, \quad (8.18)$$

其中 K 是任意常数. 从方程(8.17)和(8.18)中消去 g , 就得到位势流动的速度分布

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \left[(2\alpha-\beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha-\beta}} \quad (8.19)$$

和

$$g = \sqrt{(2\alpha-\beta) \frac{x}{L}} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.20)$$

请记住, $2\alpha - \beta = 0$ 的情形已经排除在外.

△ 由式(8.14)可以看出, 上述结果与 α 和 β 的任何公因数无关, 因为它可以包含在 g 中. 因此, 只要 $\alpha \neq 0$, 就可以令 $\alpha = +1$, 而不失其一般性. 另外, 为了方便起见, 引入一个新的常数 m 来代替 β , 即令

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad (8.21)$$

用这种方式, 解的物理含意会变得更加清楚. 于是有

$$\beta = \frac{2m}{m+1},$$

因此, 当 $\alpha = 1$ 时, 位势流动的速度分布和关于坐标的比例因子 g 变为

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{(1+m)} \left(\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \right)^m, \quad (8.22)$$

$$g = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{x}{L} \frac{U_\infty}{U}}. \quad (8.23)$$

同时, 关于坐标的变换公式(8.10)变为

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{\nu x}} \quad (8.24)$$

由此可以推断，当位势流动的速度分布与弧长的某一幂次成正比时（弧长是从驻点量起的沿壁面的长度），就可以得到边界层方程的相似解。事实上，在楔的驻点附近就会出现这样的位势流动，楔的夹角等于 $\pi\beta$ ，如图 8.1 所示。借助于位势理论不难证明，这时有

$$U(x) = Cx^m, \quad (8.25)$$

其中 C 为常数，楔角因子 β 和指数 m 之间的关系，已经由式(8.21)精确地给出。

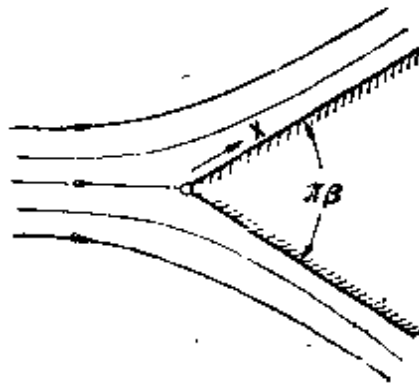


图 8.1 绕楔的流动。在前缘附近位势速度分布为 $U(x) = Cx^m$

$\alpha = 1$ 的特殊情形：(a) 如果 $\beta = 1$ ，则有 $m = 1$ ，那么式(8.22)变成 $U(x) = ax$ 。这正是二维驻点流动情形，第五章 b9 中已经讨论过这种情形，并且得到了 Navier-Stokes 方程的精确解。当 $\alpha = 1$ ， $\beta = 1$ 时，微分方程(8.15)变换成早已讨论过的方程(5.39)。如果令 $U/x = a$ ，那么关于坐标的变换公式(8.24)就与我们已经熟悉的公式(5.38)完全一样。

(b) 当 $\beta = 0$ 时，则有 $m = 0$ ，因此 $U(x)$ 是常数，并且等于 U_∞ 。这正是零攻角平板的情形。由公式(8.24)可得到 $\eta = y \sqrt{U_\infty/2\nu x}$ 。这个值与式(7.24)中所引用的值只相差一个系数 $\sqrt{2}$ 。根据方程(8.15)得到相应的微分方程为 $f''' + ff'' = 0$ 。它和以前导出的方程(7.28)相比，只在第二项上相差一个系数 2。当变换到有相同定义的 η 时，这两个方程就变得完全相同了。

在下一章中将研究 m 为其它数值时的解。

$\alpha = 0$ 的情形：到现在为止，对于 $\alpha = 0$ 的情形还未予以考虑。根据公式(8.19)不难推断，对于所有的 β 值，这种情形都导致位势流动 $U(x)$ 与 $1/x$ 成正比。这正是二维汇或二维源的情形（取决于 U 的正负号），也可以解释为具有平直壁面的扩张槽或收缩槽内的流动。这类流动也将在第九章中详细讨论。

前面曾排除在外的另一种情形，即 $2\alpha - \beta = 0$ 的情形，会出现 $U(x)$ 正比于 e^{px} 的相似解，其中 p 是正的或负的常数。不过，我们不准备讨论这个问题。

H. Schub^[15] 研究了包括非定常边界层的相似解的存在问题。而关于可压缩边界层的相似解问题将在第十三章 d 中进行讨论。

c. 边界层方程转换成热传导方程

1927年，R. von Mises^[10] 发表了关于边界层方程的一种著名的变换。这种变换比原来的形式能更清楚地显示出方程的数学特性。von Mises 用流函数 ϕ 和长度坐标 x 作为自变量，来代替 Descartes 坐标的 x 和 y 。把

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

代入方程(7.10)和(7.11)，并且用新坐标 $\xi = x$ 和 $\eta = \phi$ 来代替 x 和 y ，这样得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + u \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

因此，由方程(7.11)得到

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} = \nu u \frac{\partial}{\partial \phi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \phi} \right).$$

此外，引进“总压头”

$$g = p + \frac{1}{2} \rho u^2, \quad (8.26)$$

其中,已略去小量 $\frac{1}{2} \rho v^2$. 将符号 ξ 还原成 x , 则得到

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}. \quad (8.27)$$

也可以设

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho} [g - p(x)]}.$$

方程(8.27)是关于总压 $g(x, \psi)$ 的微分方程,其边界层条件是:

1) 对应于 $\psi = 0$, $g = p(x)$;

对应于 $\psi = \infty$, $g = p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{常数}$.

为了在物理平面 x, y 上表示这种流动,需要借助于公式

$$y = \int \frac{d\psi}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{g - p(x)}}$$

将 ψ 变换为 y . 方程(8.27)与热传导方程相仿. 对于一维(例如一根直棒的)热传导问题,其微分方程可以表示为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (8.28)$$

其中 T 表示温度, t 表示时间, α 表示热扩散系数(见第十二章). 然而,与方程(8.28)不同的是: 变换后的边界层方程是非线性的. 因为如果用 νu 取代热扩散系数, νu 不仅依赖于自变量 x , 还依赖于因变量 g .

在壁面上, $\psi = 0$, $u = 0$, $g = p$, 方程(8.27)出现讨厌的奇异性. 方程的左边为 $\partial g / \partial x = dp/dx \neq 0$; 而方程的右边 $u = 0$. 因此, $\partial^2 g / \partial \psi^2 = \infty$. 在使用数值方法时,这种情况是令人烦恼的,而且它与壁面附近速度剖面的奇异性密切相关, L. Prandtl^[11] 对方程(8.27)曾作过详细的讨论. 在 von Mises 发表他的论文之前, Prandtl 早就得出了这种变换,只是没有发表¹⁾, 见参考文献 [1, 12, 16].

*) 见参考文献[11]第79页上的脚注和 L. Prandtl 给 ZAMM 的信(见 ZAMM, 249 (1928)).

为了检验方程(8.27)的实用性, H. J. Luckert⁽⁶⁾曾把它应用于平板边界层。L. Rosenhead 和 H. Simpson⁽¹³⁾对上述论文作了评述。

d. 边界层的动量积分方程和能量积分方程

正如在下一章将详细看到的那样, 在许多情况下, 采用微分方程完整地计算给定物体的边界层是那样的麻烦而又费时, 以至于只有借助于电子计算机才能完成(也见第九章 i)。因此, 无论如何总希望有一些近似解法, 虽然它们的精度有限, 但适用于那些作了相当数量的工作而不能得到边界层方程精确解的情形。这样的近似方法是可以得到的; 只要我们不强求每一个流体质点都满足微分方程。我们用满足边界条件和某些相容条件的办法, 使得在壁面附近和从边界层到外部流动的过渡区域附近的薄层内满足边界层方程。而在边界层内的其它流体区域中, 只满足微分方程的某个平均值(即对整个边界层厚度取的平均值)。这样的平均值是由动量方程得到的, 而动量方程是通过在边界层厚度上积分的办法由运动方程导出的。因为在后面将要讨论的近似方法中要经常使用这个方程, 所以我们现在来推导这个方程, 并写出它的最新形式。这个方程称为边界层理论的动量积分方程或 von Kármán 积分方程⁽⁷⁾。

我们只限于讨论二维定常不可压缩流动的情形, 即从方程(7.10)–(7.12)出发。将运动方程(7.11)对 y 积分, 从 $y = 0$ (壁面)积到 $y = h$, 其中 $y = h$ 这一层全部位于边界层之外, 由此得到

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (8.29)$$

式中用壁面上的切应力 τ_0 代替了 $\mu(\partial u/\partial y)_0$, 所以方程(8.29)对于层流和湍流两种情形都是适用的。不过在湍流情形下, u 和 v 表示相应速度分量的时间平均值。由连续方程可以看出, 垂直速度分量 v 可以用 $v = - \int_0^y (\partial u/\partial x) dy$ 来代替, 因此得到

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}.$$

对上式的第二项进行分部积分, 得到

$$\int_{y=0}^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

因此

$$\int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho},$$

这个方程可以缩写成

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^h (U-u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (8.29a)$$

因为两个积分中的被积函数在边界层之外都为零, 所以可以令 $h \rightarrow \infty$.

现在我们引入位移厚度 δ_1 和动量厚度 δ_2 (这些在第七章已经使用过), 它们分别定义为

$$\delta_1 U = \int_{y=0}^{\infty} (U-u) dy \quad (\text{位移厚度}), \quad (8.30)$$

$$\delta_2 U^2 = \int_{y=0}^{\infty} u(U-u) dy \quad (\text{动量厚度}). \quad (8.31)$$

值得注意的是, 在方程(8.29a)的第一项中, 由于积分上限 h 和 x 无关, 所以对于 x 的微分和对于 y 的积分可以互换. 因此

$$\boxed{\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx}.} \quad (8.32)$$

这就是二维不可压缩边界层的动量积分方程. 只要对 τ_0 不作规定, 那么方程(8.32)就既适用于层流边界层, 又适用于湍流边界层. 这种形式的动量积分方程是 H. Gruschwitz^[9] 首先给出的. 它在层流边界层和湍流边界层的近似理论中都有所应用(见第十, 十一和二十二章).

K. Wieghardt^[9] 使用类似的方法导出了关于层流边界层的能量积分方程. 将运动方程乘以 u , 然后从 $y=0$ 到 $y=h > \delta(x)$ 进行积分就能得到这个方程. 我们再一次由连续方程替换掉 v , 从而得到

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^h \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) - uU \frac{dU}{dx} \right] dy \\ & = \mu \int_0^h u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy. \end{aligned}$$

利用分部积分, 上式第二项可以变成

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h (U^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

另外, 把第一项和第三项合并起来, 则得

$$\int_0^h \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uU \frac{dU}{dx} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h u \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - U^2) dy.$$

再对上式右边进行分部积分, 最后得到

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(U^2 - u^2) dy = \mu \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (8.33)$$

这里, 积分上限也能够用 $y = \infty$ 来代替, 因为在边界层之外被积函数等于零. 式中, $\mu(\partial u/\partial y)^2$ 表示单位体积单位时间通过摩擦转换成热的能量(耗散, 参看第十二章). 左边的 $\frac{1}{2} \rho(U^2 - u^2)$ 表示与位势流动相比, 在边界层内损失的机械能(动能和压力能). 因此, $\frac{1}{2} \rho \int_0^{\infty} u(U^2 - u^2) dy$ 表示耗散能的通量, 而方程的左边则表示 x 方向上, 单位长度耗散能通量的变化率.

除了由方程(8.30)和(8.31)所定义的位移厚度和动量厚度以外, 如果再引入由下式所定义的能量损失厚度 δ_3 :

$$U^3 \delta_3 = \int_0^{\infty} u(U^2 - u^2) dy \quad (\text{能量厚度}), \quad (8.34)$$

则可以把能量积分方程(8.33)写成如下的简化形式:

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2\nu \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (8.35)$$

这个方程就是二维不可压缩层流边界层的能量积分方程¹⁾.

1) 在湍流情形下, 能量积分方程所采用的形式为

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

为了使位移厚度,动量厚度和能量损失厚度比较直观,方便的办法是对于具有线性速度分布的简单情形把这些厚度计算出来,如图 8.2 所示。在这种情形下解得:

$$\begin{aligned} \text{位移厚度} \quad \delta_1 &= \frac{1}{2} \delta \\ \text{动量厚度} \quad \delta_2 &= \frac{1}{6} \delta \\ \text{能量厚度} \quad \delta_3 &= \frac{1}{4} \delta. \end{aligned}$$

把上述近似方法推广到轴对称边界层的问题将在第十一章给予阐述。关于热边界层的近似方法将在第十二章 8 中加以讨论;而对于可压缩边界层和非定常边界层的近似方法,则分别在第十三章 d 和第十五章中给出。

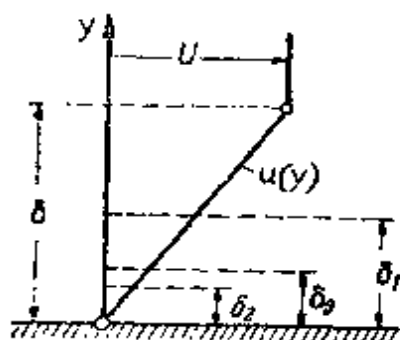


图 8.2 具有线性速度分布的边界层
 δ 边界层厚度; δ_1 —位移厚度; δ_2 —动量厚度; δ_3 —能量厚度

第九章 二维定常边界层 方程的精确解

本章将讨论边界层方程的一些精确解。如果一个解是边界层方程的全解,无论它是解析得到的,还是用数值方法得到的,都可以看作是精确解。另一方面,第十章将讨论近似解,即讨论那些不是通过微分方程,而是通过积分关系式,例如用上一章讲过的动量积分方程和能量积分方程得到的解。

目前只有少数几个精确的解析解,所以我们首先要讨论这些解。正如在平板例子中已经说明的,一般说来,获得边界层方程解析解的过程会遇到相当大的数学困难。在大多数情形下,这些微分方程都是非线性的,因而一般说来,它们只能用幂级数展开法或者用数值方法来求解。即使对不可压缩流动中的零攻角平板边界层这种物理上最简单的情形,至今也没有发现封闭形式的解析解。

在二维运动情形下,边界层方程及其边界条件由式(7.10)至(7.12)给出:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.2)$$

$$y = 0: u = 0, v = 0; y = \infty: u = U(x). \quad (9.3)$$

另外,还须给出起始截面上,例如在 $x = 0$ 处的速度剖面 $u(0, y)$ 。

在大多数情形下,最好是通过引进流函数 $\psi(x, y)$ 来满足连续方程,这样

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

因此,流函数一定满足下述方程(参看方程(7.18)):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}, \quad (9.4)$$

其边界条件是：在壁面 ($y=0$) 上, $\partial\phi/\partial y=0$ 和 $\partial\phi/\partial x=0$, 在 $y=\infty$ 处, $\partial\phi/\partial y=U(x)$.

a. 绕楔流动

第八章中讨论的“相似”解是一类特别简单的解 $u(x, y)$, 它们具有这样的性质：对 x 和 y 用适当的尺度因子, 可以使不同距离 x 上的速度剖面变得相同。这样, 偏微分方程组(9.1)和(9.2)可以化为一个常微分方程。第八章中已经证明, 若位势流速度正比于从驻点量起的长度坐标 x 的某次幂, 即当

$$U(x) = u_1 x^m$$

时, 则存在这类相似解。由式(8.24)可以看出, 为得到常微分方程, 自变量 y 的变换是

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{\nu x}} = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}. \quad (9.5)$$

通过引进流函数来满足连续方程, 从式(8.11)和(8.23)可以看出, 对此应该设

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu u_1} x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta).$$

于是速度分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 x^m f'(\eta) = U f'(\eta), \\ v &= -\sqrt{\frac{m+1}{2} \nu u_1 x^{m-1}} \left\{ f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

将这些值代入运动方程(9.1), 再除以 $m u_1 x^{2m-1}$, 并如式(8.21)那样, 令

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad \frac{2m}{m+1} = \beta, \quad (9.7)$$

就可以得到下述关于 $f(\eta)$ 的微分方程:

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0. \quad (9.8)$$

可能还记得, 这个方程曾作为式(8.15)给出过, 而且其边界条件是

$$\eta = 0: f = 0, f' = 0; \quad \eta = \infty: f' = 1.$$

方程(9.8)是由 V. M. Falkner 和 S. W. Skan 首先导出的, 后来 D. R. Hartree 详细地研究了 this 方程的解(参看第八章的参考文献)。图 9.1 画出了这个解。在加速流动情形下($m > 0, \beta > 0$), 速度剖面无拐点, 而在减速流动情形下($m < 0, \beta < 0$), 它们显示出一个拐点。当 $\beta = -0.199$, 即当 $m = -0.091$ 时发生分离。这个结果说明, 层流边界层若不发生分离只能承受很小的负加速度。

K. Stewartson^[64]对方程(9.8)的这族解作过详细分析。根据这个分析, 在升压区内($-0.199 < \beta < 0$), 除了 Hartree 发现的那个解之外, 还存在另一个解。由这个解得出有倒流的速度剖面(参看第十章 e)。

由 $U(x) = u_1 x^m$ 给出的位势流动, 出现在楔的驻点附近(图 8.1)。楔的夹角 β 由式(9.7)表示。二维驻点流动以及零攻角平板边界层, 都是该解的特殊情形, 前者是 $\beta = 1$ 和 $m = 1$, 后者是 $\beta = 0$ 和 $m = 0$ 。

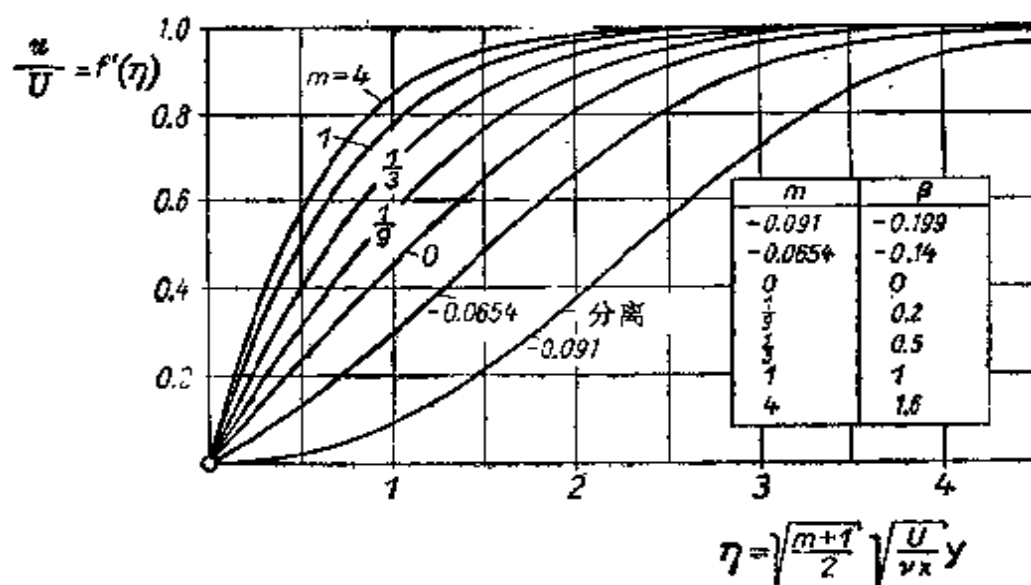


图 9.1 在 $U(x) = u_1 x^m$ 给出的绕楔流动中, 层流边界层内的速度分布。指数 m 和楔角 β (图 8.1) 通过式(9.7)联系起来

$\beta = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{3}$ 的情形值得注意。在这种情形下, $f(\eta)$ 的微分方程成为: $f'' + ff'' + \frac{1}{2}(1 - f'^2) = 0$; 如果设 $\eta = \zeta\sqrt{2}$ 和 $df/d\eta = d\varphi/d\zeta$, 它就变成有驻点的旋转对称流动的微分方程(5.47), 即关于 $\varphi(\zeta)$ 的方程 $\varphi''' + 2\varphi\varphi'' + 1 - \varphi'^2 = 0$ 。这就是说, 这种旋转对称情形的边界层, 可以化为绕其夹角为 $\pi\beta = \pi/2$ 的楔的二维流动来计算。

二维边界层和旋转对称边界层之间的关系, 将在第十一章以更一般的形式进一步讨论。

如果式(9.5)定义的相似变量 η 用自变量 $\eta = y\sqrt{U(x)/\nu x}$ 来代替, 则函数 $f(\eta) = u/U$ 的微分方程形式就会变为

$$f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m(1 - f'^2) = 0, \quad (9.8a)$$

在 $m = 0$ 的特殊情形下, 这个方程就变为平板边界层方程(7.28)。Falkner-Skan 方程(9.8)的解在文献[61]中已有详细讨论。

根据 J. Steinheuer^[62]的分析, 应该承认 Falkner-Skan 方程(9.8)的解有一个有意义的推广; 它在减速流动($\beta < 0$)中, 当速度分布具有速度超出($f'(\eta) > 1$), 且在壁面附近有最大值时成立。在这种情形下, 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 极限 $f'(\eta) = 1$ 是“由大到小”渐近达到的, 而不是象迄今的情形那样“由小到大”达到的。这种解在物理上可以这样解释: 它相当于在正压力梯度($dp/dx > 0$)的外部流动中引出的一股层流壁面射流。文献[63]证明, 若设 $\beta = -2$, 即当最大速度超出趋于无穷时, 这些解的极限情形就变为无外流速度时纯壁面射流的著名自相似解——M. B. Glauert 处理的一个问题(见第十一章的文献[40])。

对于二维和旋转对称物体层流边界层(包括热边界层, 见第十二章)的精确自相似解, C. F. Dewar 和 J. F. Gross^[64]发表了特别详尽的专论。他们的讨论包括有传热和无传热的可压缩效应(见第八章), 涉及到变 Prandtl 数, 并包括某些抽吸和引射的情形。

K. K. Chen 和 P. A. Libby^[65]广泛地研究了这样的边界层: 它的特点在于对 Falkner-Skan 型的自相似绕流流动边界层稍有偏离。显然, 这样的边界层不再是自相似的。

b. 收缩槽中的流动

由方程

$$U(x) = -\frac{u_1}{x} \quad (9.9)$$

给出的位势流动问题与绕楔流动有关,而且也可以得到“相似”解。在 $u_1 > 0$ 的情形下,它代表直壁收缩槽内的二维流动(汇)。

对于全开度角 2π 和单位高度的流体层,其体积流量是 $Q = 2\pi u_1$ (图 9.2)。引进相似性变换

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{-x\nu}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Q}{2\pi\nu}} \quad (9.10)$$

以及流函数

$$\psi(x, y) = -\sqrt{\nu u_1} f(\eta),$$

可以得到速度分量

$$u = Uf'; \quad v = -\sqrt{\nu u_1} \frac{\eta}{x} f'. \quad (9.11)$$

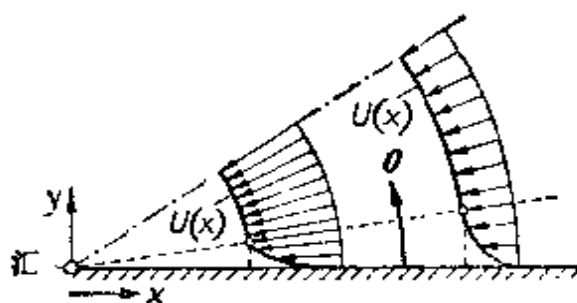


图 9.2 收缩槽中的流动

代人方程(9.2),就可得到流函数的微分方程

$$f''' + f'^2 + 1 = 0. \quad (9.12)$$

其边界条件由式(9.3)得出,它们是:当 $\eta = 0$ 时, $f' = 0$; 当 $\eta = \infty$ 时, $f' = 1$ 和 $f'' = 0$ 。这也是第八章中讨论的那类“相似”解的特殊情形。如果设 $\alpha = 0$, $\beta = +1$, 就可以由“相似”边界层更普遍的微分方程(8.15)得到方程(9.12)。这里讨论的例子,是以封闭形式得到边界层方程解析解的罕见情形之一。

首先,用 f'' 乘方程(9.12),并积分一次,得到

$$f''^2 - \frac{2}{3} (f' - 1)^2 (f' + 2) = a,$$

其中 a 是积分常数。因为当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $f' = 1$ 和 $f'' = 0$, 所以 a 值等于零。于是

$$\frac{df'}{d\eta} = \sqrt{\frac{2}{3} (f' - 1)^2 (f' + 2)},$$

或者

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{(f'-1)^2(f'+2)}},$$

其中，由于 $\eta = \infty$ 时的边界条件 $f' = 1$ ，所以附加的积分常数等于零。这个积分可以用封闭形式表示如下：

$$\eta = \sqrt{2} \left\{ \tanh^{-1} \frac{\sqrt{2+f'}}{\sqrt{3}} - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right\},$$

或者解出 $f' = u/U$ ：

$$f' = \frac{u}{U} = 3 \tanh^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1.146 \right) - 2. \quad (9.13)$$

这里我们已代入了 $\tanh^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} = 1.146$ 。引进极角 $\theta = y/x$ 及 $Q = 2\pi r U$ (r 等于离开汇的径向距离)，则根据方程(9.10)，可以用下式替代 η ：

$$\eta = \theta \sqrt{\frac{U r}{\nu}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U r}{\nu}}. \quad (9.14)$$

图 9.3 画出了式(9.13)的速度分布。大约在 $\eta = 3$ 时，边界层与位势流动会合。因此边界层厚度成为 $\delta = 3x \sqrt{\nu/U r}$ ；和其它例子一样， δ 也随 $1/\sqrt{R}$ 减小而减小。

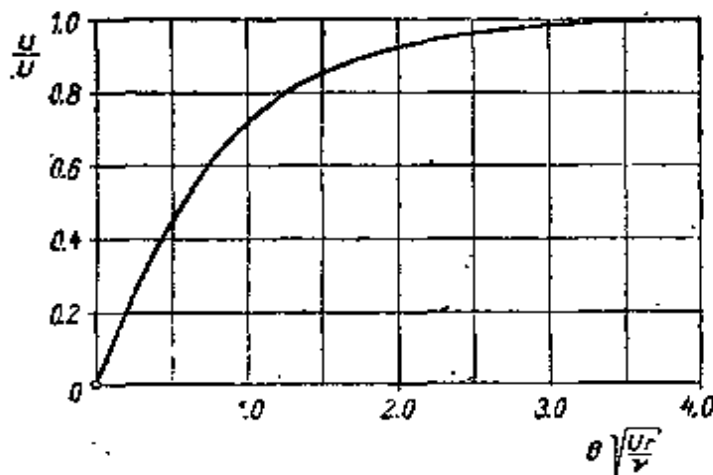


图 9.3 在收缩槽流动中边界层内的速度分布

上述解是由 K. Pohlhausen^[50] 首先得到的。从第 121 页的第五章 b12 可以记起，G. Hamel 讨论的扩张槽流动，是 Navier-

Stokes 方程的精确解。图 5.15 中的曲线包含了现在这个解的某些数值结果。在这方面,值得参阅 B. L. Reeves 和 C. J. Kippenhan 的文章^[52]。

c. 绕柱体流动; 对称情形 (Blasius 级数)

迄今所讨论的边界层方程的这类“相似”解是相当有限的。除了已经讲过的平板、驻点流动、绕楔流动和收缩槽流动这些例子以外,几乎很难得到另外的解。现在我们准备研究柱体边界层的一般情形,其中流动垂直于柱体的体轴。H. Blasius^[4]首先给出这个问题的解法,后来 K. Hiemenz^[39] 和 L. Howarth^[40]进一步发展了这一方法。这里必须区分两种情形,就是对于平行于远处来流的轴线,物体是对称的还是非对称的。我们将把这两种情形分别称为对称情形和非对称情形。

在每种情形下,都假定位势流速度具有 x 幂级数的形式,其中 x 表示从驻点开始沿周线的距离,边界层的速度剖面也表示成类似的 x 幂级数,并假定其系数是垂直物面的坐标 y 的函数 (Blasius 级数)。L. Howarth 成功地找到了一种对于速度剖面的代换,它能给予依赖于 y 的系数以普遍适用性。换句话说,通过对幂级数的适当假设,使它的系数与柱体的具体形状无关,因而可以计算出这些函数,并能以表格的形式表示出来。因此,只要这种表格列出足够多的级数项,利用这些表格,就能使给定外形的边界层计算变得非常简单。

然而,Blasius 方法的有效性受到严格的限制,因为恰恰在很细长物体这种最重要的情形下,需要的级数项很多;事实上,它们的项数非常多,以致要想用适度的计算量把它们全部列出表来是不现实的。这是因为在细长物体截面情形下,例如,在主轴平行于气流的椭圆形截面情形下,或者在翼剖面情形下,前缘驻点附近的位势速度,最初急剧增加,然后在下游相当大的距离内非常缓慢地变化。通过少数几项的幂级数是不能很好描述这类函数的。尽管有这样的限制,Blasius 方法仍具有很基本的重要性,因为在分离

点附近其收敛性不好的情况中，可以利用它以很高的精度解析地算出驻点附近的边界层起始部分。然后再利用适当的数值积分方法继续进行计算，例如象第九章中所叙述的方法。

我们来讨论**对称情形**，并且假设位势流速度以级数形式给出：

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots \quad (9.15)$$

系数 u_1, u_3, \dots 只依赖于物体形状，并且认为是已知的。通过引进流函数 $\phi(x, y)$ ，使连续方程得到满足。类似于式(9.15)，似乎也可将 ϕ 表示成 x 的幂级数，并将其系数看成是 y 的函数。这个幂级数的具体形式的选择取决于以下要求：即要求级数中 y 的函数与描述流动的系数 u_1, u_3, u_5, \dots 无关。利用这种方法，这些 y 的函数可以成为通用的，而且可以一劳永逸地计算出来。

取¹⁾

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \quad (9.16)$$

将离开壁面的距离无量纲化。这将导出如下形式的流函数：

$$\phi = \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} \{ u_1 x f_1(\eta) + 4u_3 x^3 f_3(\eta) + 6u_5 x^5 f_5(\eta) + \dots \}, \quad (9.17)$$

通过它就能求出速度分量 $u = \partial\phi/\partial y$ 和 $v = -\partial\phi/\partial x$ 的级数。将这些表达式代入运动方程(9.2)，比较方程中的系数，就可得到函数 f_1, f_3, \dots 的常微分方程组。前两个方程是

$$\left. \begin{aligned} f_1' + f_1 f_1'' &= 1 + f_1''', \\ 4f_1 f_3' - 3f_1'' f_1' - f_1 f_3'' &= 1 + f_3'''. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

在这些方程中，用撇表示对 η 求导数。有关的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: f_1 = f_1' = 0; f_3 = f_3' = 0, \\ \eta = \infty: f_1 = 1; f_3 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

所有这些函数系数的微分方程都是三阶的，而且只有第一个，即关

1) 这种形式是通过将式(9.15)的第一项代入 Blasius 方程(7.24)，即用 $u_1 x$ 代替 U_∞ 得到的。这也随着带来缺点，即它没有考虑到边界层厚度沿顺流方向的增长。

于 f_1 的方程是非线性的；它与第五章讨论的二维驻点流动方程 (5.39) 相同。其余的所有方程都是线性的，而且它们的系数都是用前面方程的各项函数表示的。K. Hiemenz⁽³⁹⁾ 已经计算了函数 f_1 和 f_3 。图 9.4 中画出了它们的一阶导数曲线。前面，在图 5.11 和表 5.1 中给出了速度分布函数 f_1 (当时用 φ' 表示)。它们的高阶函数可以在本书较早的版本^(37a) 中找到。

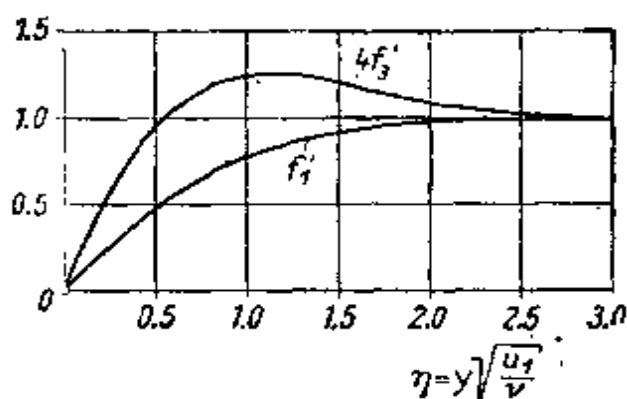


图 9.4 出现在 Blasius 幂级数中的函数 f_1 和 f_3

例：圆柱。我们现在准备把上面概述的方法应用到圆柱情形。尽管在文献中常常用实验测量的压力分布来求解这个问题，但是为了确定起见，我们还是把计算建立在位势理论压力分布的基础上。在来流平行于 x 轴、来流速度为 U_∞ 以及圆柱半径为 R 的无粘、无旋圆柱绕流中，理想的速度分布可以表示为

$$u(x) = 2U_\infty \sin x/R = 2U_\infty \sin \varphi, \quad (9.20)$$

其中 φ 是从驻点起度量的角度。将 $\sin x/R$ 展开成级数，并与式 (9.15) 的级数进行比较，可以得到

$$u_1 = 2 \frac{U_\infty}{R}; \quad u_3 = -\frac{2}{3!} \frac{U_\infty}{R^3}; \dots \text{ 和 } \eta = \frac{y}{R} \sqrt{\frac{2U_\infty R}{\nu}}$$

在图 9.5 中，可以看到不同 φ 值下的速度剖面，该图是根据将速度 u 展开到 x'' 项的级数画出的。 $\varphi > 90^\circ$ 的速度剖面都有一个拐点，因为它们处于升压区。

图 9.6 画出了切应力 $\tau_0 = \mu(\partial u/\partial y)$ 的分布曲线。分离点的位置由 $\tau_0 = 0$ 的条件来确定。其位置为

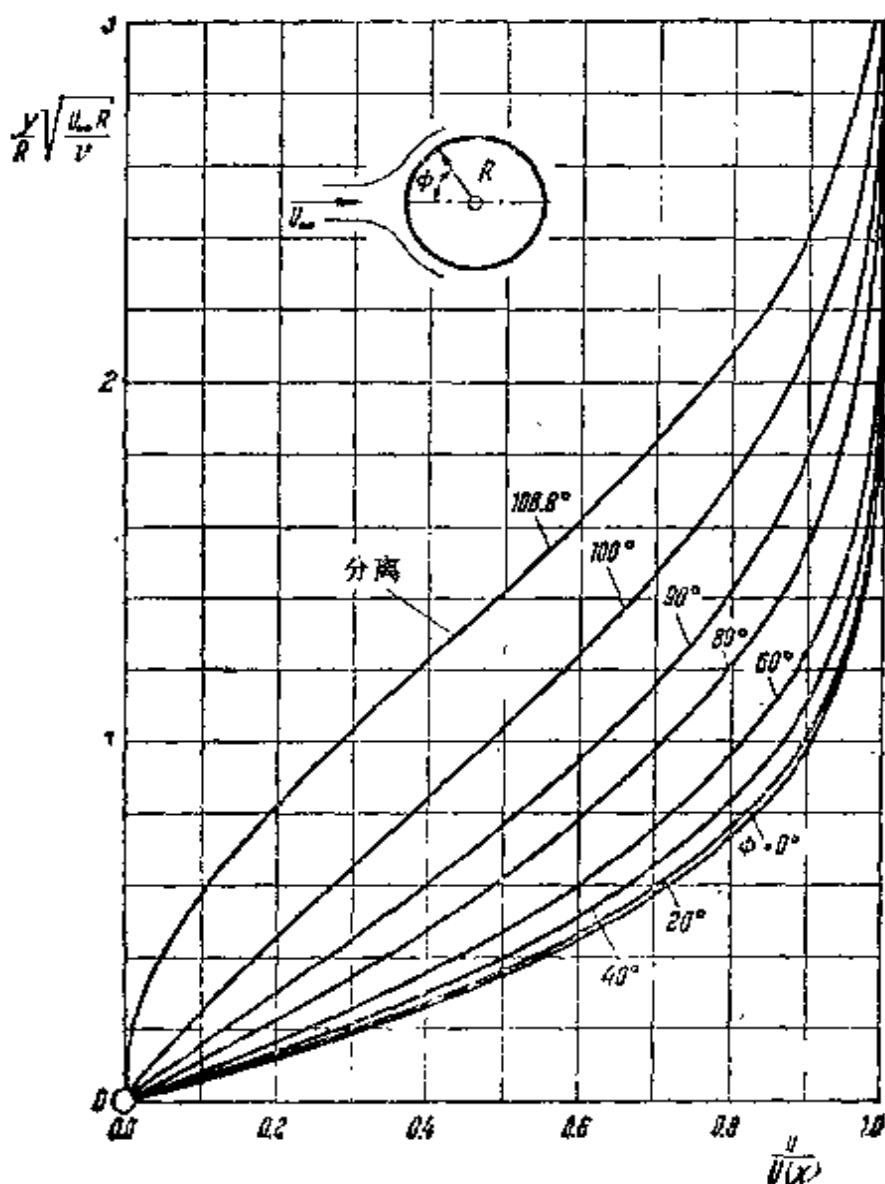


图 9.5 圆柱边界层的速度分布
 φ ——从驻点起度量的角度

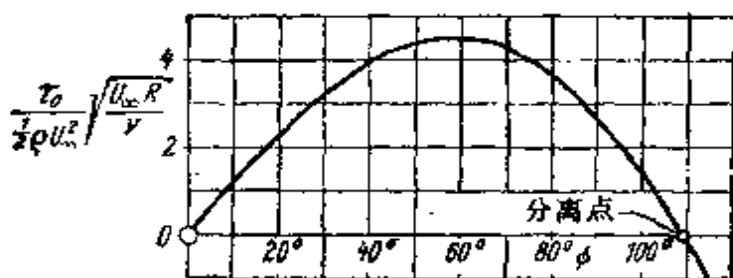


图 9.6 圆柱层流边界层中壁面切应力沿周线的变化

$$\varphi_s = 108.8^\circ.$$

如果幂级数在 x^9 项上截止, 则分离点的位置出现在 $\varphi_s = 109.6^\circ$. 现在用数值方法可以得到更精确的值, 见第九章 i 和第十章 c3.

借助壁面相容条件可以检查这种基于幂级数计算的精度, 进而估计幂级数省略部分的收敛速度. 根据方程 (7.15), 必然有

$$U \frac{dU}{dx} = -v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0}. \quad (9.21)$$

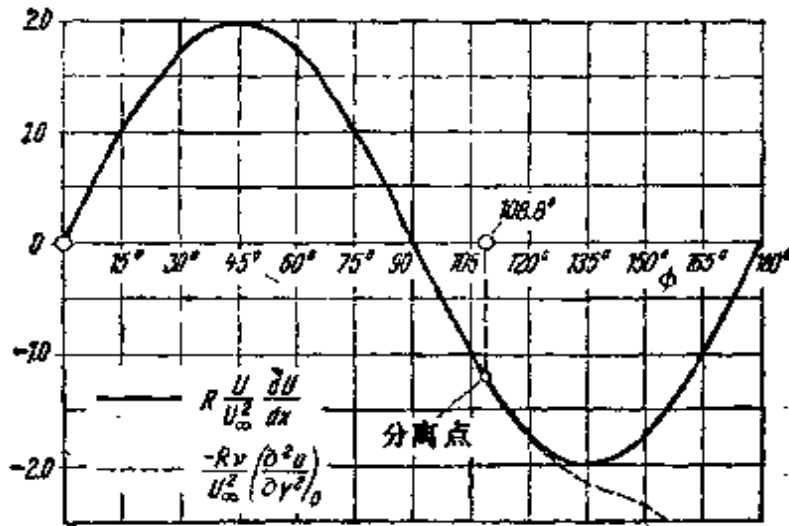


图 9.7 对于图 9.5 的圆柱层流边界层, 验证式 (9.21) 的第一相容条件. 直到分离点后的某点都近似满足第一相容条件

图 9.7 将壁面上的速度剖面曲率与 $U dU/dx$ 的精确值作了比较. 可以看出, 当距离 x 超过分离点时, 它们仍符合得很好. 因此, 我们可以断定: 在 x^9 项上截止的 Blasius 级数, 直到分离点之后的某点, 都满足圆球上的相容条件. 但是, 这并不是说, 这个截取级数一定以很高的精确度表示速度剖面.

正如前面提过的, 在较细长的物体形状情形下, 如果希望得到直至分离点的速度剖面, 那就需要相当多的 Blasius 级数项. 但是, 由于存在相当大的困难, 这就妨碍我们计算出更多的函数系数. 这些困难不仅在于, 当截取级数每增加一项时, 需要增加求解的方程个数, 而且更重要的还在于, 如果要使高幂次项的函数达到

足够的精度，那就还要再提高低幂次项函数的计算精度。

L. Howarth^[40]将现在这个方法推广到包括非对称的情形，但是，没有列出相应于 x^2 幂次以后的各项函数系数表。N. Froessling^[23]将这种方法推广到旋转对称的情形，这种情形将在第十一章中讨论。

K. Hiemenz 在向 Goettingen 大学提出的论文^[39]中，报告了绕圆柱压力分布的测量结果。这些测量结果成为他的边界层计算的基础。他的测量结果表明，分离发生在 $\varphi_s = 81^\circ$ ，而计算指出 $\varphi_s = 82^\circ$ 。后来 O. Flachsbart 发表了压力分布的大量实验数据(图 1.10)，这些数据指出 Reynolds 数的显著影响。当 Reynolds 数低于临界值时，最小压力值在 $\varphi = 70^\circ$ 左右就已出现了，并且在圆柱的整个下游区域内压力几乎不变。当 Reynolds 数高于临界值时，最小压力值移到 $\varphi = 90^\circ$ 左右，并与位势理论一致，而且总的来说，压力分布与位势理论的偏差比前一种情形要小。介于这两个值之间，即在临界 Reynolds 数(约为 $U_\infty D/\nu = 3 \times 10^5$)附近，圆柱的阻力系数急剧下降(图 1.4)，这种现象表明边界层已经变成湍流的(见第十八章 f)。

A. Thom^[67] 和 A. Fage^[16] 也研究过圆柱的层流边界层，他们研究的 Reynolds 数范围分别为 $U_\infty D/\nu = 28000$ 和 $U_\infty D/\nu = 1.0 \times 10^5$ 到 3.3×10^5 。在 L. Schiller 和 W. Linke 的文章^[54]中，包括在低于临界值的 Reynolds 数范围内，对于压差阻力和表面摩擦的一些讨论。在 Reynolds 数约从 60 到 5000 的范围内，在圆柱后面存在一个规则的、周期性结构的涡街(图 2.7 和 2.8)。向这个所谓 von Kármán 涡街发放旋涡的频率，由 H. Blenk, D. Fuchs 和 H. Liebers，后来由 A. Reshko 进行了研究(见第二章)。

d. 用 $U(x) = U_0 - \alpha x^n$ 表示的位势流动的边界层

L. Howarth^[41] 和 J. Tani^[66]得到了边界层方程的另外一族解。这些解与由

$$U(x) = U_0 - \alpha x^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.22)$$

表示的位势流动相联系。显然，这种流动是沿平板流动(见第七章 c)的普遍形式；当 $\alpha = 0$ 时，它们是相等的。在 L. Howarth 所处理的 $n = 1$ 的最简单情形下，这种流动可以解释为出现在槽中的流动，这个槽由两部分组成：一个平行壁面部分(速度 U_0)，

和一个后接的收缩段($a < 0$)或扩张段($a > 0$)¹⁾。这是另一个速度剖面不相似的边界层例子。L. Howarth 引进新的自变量

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}, \quad (9.23)$$

这与在零攻角平板解中所采用的自变量相同。他还假设

$$x^* = \frac{ax}{U_0}$$

($x^* < 0$, 加速流动; $x^* > 0$, 减速流动)。利用类似于柱体情形的方法(见第九章 c), 现在可以对流函数规定一个 x^* 的幂级数, 其系数是 y 的函数:

$$\psi(x, y) = \sqrt{U_0 \nu x} \{f_0(\eta) - (8x^*)f_1(\eta) + (8x^*)^2 f_2(\eta) - + \dots\}. \quad (9.24)$$

因此流动速度为

$$u = \frac{1}{2} U_0 \{f_0'(\eta) - (8x^*)f_1'(\eta) + (8x^*)^2 f_2'(\eta) - + \dots\}. \quad (9.25)$$

将这些值代入运动方程(9.2), 比较各项系数, 我们就得到一组关于 $f_0(\eta), f_1(\eta), \dots$ 的常微分方程。它们的前三个方程是

$$f_0'' + f_0 f_0'' = 0,$$

$$f_1'' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1 + 3f_0' f_1 = -1,$$

$$f_2'' + f_0 f_2'' - 4f_0' f_2 + 5f_0' f_2 = -\frac{1}{8} + 2f_1'^2 - 3f_1 f_1',$$

其边界条件是

$$\eta = 0: f_0 = f_0' = 0; f_1 = f_1' = 0; f_2 = f_2' = 0;$$

$$\eta = \infty: f_0 = 2; f_1 = \frac{1}{4}; f_2 = 0.$$

只有第一个方程是非线性的, 并且与零攻角平板的方程相同²⁾。其余所有的方程都是线性的, 而且齐次部分只含函数 f_0 , 但是非齐次项是由其他函数 f_n 构成的。L. Howarth 求解了前七个微分方程(直到并包括 f_6), 并计算出它们的函数表。

利用这些 f_n 值, 在 $-0.1 \leq x^* \leq +0.1$ 的范围内, 级数(9.25)收敛得很好。在减速流动($x^* > 0$)情形下, 分离点约在 $x^* = 0.12$ 处, 但对于这样稍微扩展的 x^* 值的范围, 级数(9.25)的收敛性就不能保证了。为了到达分离点, L. Howarth 利用数值方法进行解的延拓。图 9.8 中画出了加速流动和减速流动两种情形下几个 x^* 值的速度剖面。应当注意, 减速流动的所有速度剖面都有一个拐点。D. R. Hartree^[33]重复了这些计算, 所得结果与 L. Howarth 的很一致。D. C. F. Leigh^[44]更准确地计算了 $a/U_0 = 0.125$ 的情形, 为此, 他使用了电子数字计算机, 而且特别注意分离区。他得到在分离点上的形状因数是 $x^* = 0.1198$ 。

L. Tani^[45]将 L. Howarth 的方法推广到包括 $n \geq 1$ (同时 $a > 0$) 的情形。但是 J. Tani 没有发表任何函数系数表, 他只报告了在 $n = 2, 4$ 和 8 时的最后结果。在这

1) 当 $n = 1$ 时, 如果将方程(9.22)写成 $U(x) = U_0(1 - x/L)$ 的形式, 它也可以解释为沿平直壁面的位势流动, 该壁面以 $x = 0$ 为起点, 并在 $x = L$ 处连接另一个与它垂直的无限长的壁面。这与图 2.17 表示的减速驻点流动属于同一类型, 驻点是在 $x = L$ 处。

2) 以上方程中的自变量 η 与第七章的自变量相差一个因子 $\frac{1}{2}$ 。

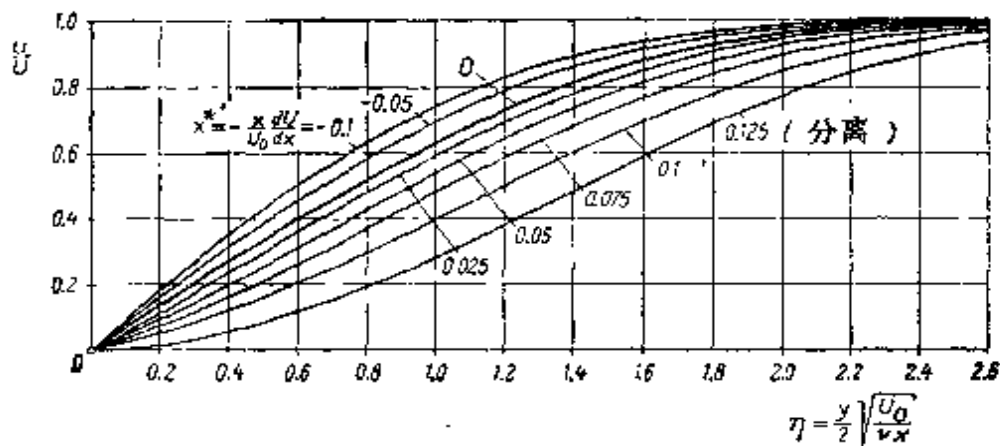


图 9.8 用 $U(x) = U_0 - ax$ 表示的位势流动中，层流边界层的速度分布，根据 Howarth^[41]

种情形下，级数的收敛性很差，他也不能以足够的精度确定出分离点，后来只好也利用 L. Howarth 的数值延拓方法。

e. 零攻角平板尾迹中的流动

边界层方程的应用并不局限于靠近固壁的区域。如果在流体内部存在粘性影响占优势的流体层，也可以应用这些方程。当两层流体以不同的速度相遇时，例如，在物体后面的尾迹中，或者当流体通过小孔喷射时，都会出现这种情形。在本节及后面几节中，我们准备讨论这类流动的三个例子，在讨论湍流时，我们还会回头来讨论这些流动。

作为第一个例子，我们将讨论零攻角平板尾迹中的流动情形（图 9.9）。在后缘后面两个速度剖面合并为一个尾迹速度剖面。这一剖面的宽度将随着距离而增加，而其平均速度将减小。速度曲线减小的多少与物体的阻力直接有关。但是，总的来说，正如我们将在后面看到的，在远离物体的地方，尾迹中的速度剖面与物体的形状无关，只是尺度因子有差异。另一方面，非常靠近物体的尾迹速度剖面，显然取决于物体附近的边界层，而其形状取决于流动是否已经发生了分离。

根据尾迹的速度剖面，可以利用动量方程来计算阻力。为此，我们画出一个矩形控制面 AA_1B_1B ，如图 9.9 所示。平行于平板的边界 A_1B_1 离开平板一段距离，它完全处于未受扰动的速度为 U_0 。

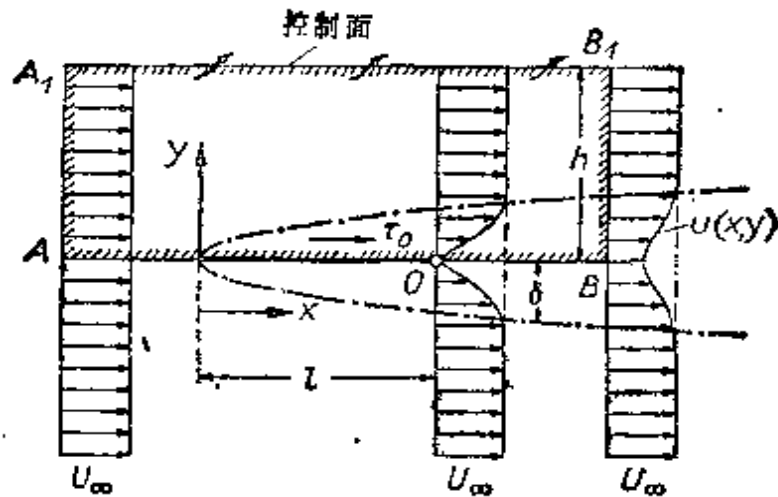


图 9.9 由尾迹速度剖面计算零攻角平板阻力时，动量方程的应用

区域内。另外，在整个控制面上压力不变，所以压力对动量无贡献。当计算通过控制面的动量通量时，必须记住，由于连续性要求，流体必然从边界 A_1B_1 流出。通过 A_1B_1 流出的流量等于流进 A_1A 的流量与流出 B_1B 的流量之差。由于对称性，边界 AB 上的横向速度为零，所以该边界对 x 方向的动量无贡献。其动量守恒关系将在下面以表格形式给出，并且依照惯例，认为流进的质量为正，流出的质量为负。平板宽度用 b 表示。总的动量通量等于单面浸湿平板上的阻力 D 。于是，我们有

$$D = b\rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_\infty - u)dy. \quad (9.26)$$

因为当 $y > h$ 时，式(9.26)中的被积函数等于零，所以可以将积分上限 $y = h$ 改为 $y = \infty$ 。因此，双面浸湿平板上的阻力为

$$2D = b\rho \int_{-\infty}^{\infty} u(U_\infty - u)dy. \quad (9.27)$$

这个式子不仅能用于平板，而且可以用于任意对称柱体。应该记住，在较一般的情形下，应该在足够远的截面上对尾迹剖面进行积分，这样整个截面的静压有其未受扰动的值。由于平板附近既无纵向压力差又无横向压力差，所以式(9.27)可以应用在平板后面的任何距离上。另外，式(9.27)可以应用于平板边界层的任意 x 截面上，这时它给出从前缘到该截面这部分平板的阻力。在式(9.26)或(9.27)中，积分的物理意义是，它代表了摩擦引起的动量

损失。它与定义动量厚度 δ_2 的方程(8.31)的积分是一样的，所以可以给出式(9.26)的另一种形式

$$D = b\rho U_\infty^2 \delta_2 \quad (9.28)$$

截 面	流 量	x 方向的动量
AB	0	0
AA ₁	$b \int_0^h U_\infty dy$	$\rho b \int_0^h U_\infty^2 dy$
BB ₁	$-b \int_0^h u dy$	$-\rho b \int_0^h u^2 dy$
A ₁ B ₁	$-b \int_0^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho b \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
$\Sigma =$ 控制面	Σ 流量=0	Σ 动量通量=阻力

我们现在着手计算尾迹中的速度剖面，特别是离开平板后缘很远的尾迹速度剖面。这种计算必须分两步进行：1. 沿从前缘到后缘的顺流方向的展开计算，即对后缘附近的平板 Blasius 速度剖面进行延拓计算；2. 沿逆流方向的展开计算。后者是对于平板后面远距离的一种渐近积分，而且确实与物体形状无关。这里有必要作如下假设：尾迹中的速度差

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (9.29)$$

比起 U_∞ 来是小量，所以 u_1 的二次项和高次项可以忽略不计。这种方法利用了延拓已知解的方法。计算是从用 Blasius 方法计算的后缘速度剖面开始的，这里我们不准备进一步讨论了。W. Tollmien^[69]计算了沿逆流方向的渐近展开。由于它对尾迹流动问题具有代表性，同时在更重要的湍流问题中还要用到它，所以我们打算花一些时间进行讨论。

由于压力项等于零，所以将(9.29)代入边界层方程(9.2)，得到

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (9.30)$$

其中 u_1 和 ν 的二次项已经略去。边界条件是：

$$y = 0: \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0; \quad y = \infty: u_1 = 0.$$

通过适当的变换，这个偏微分方程也可以变换为一个常微分方程。

类似于平板 Blasius 方法中的假设(7.24), 设

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}},$$

同时, 我们设 u_1 具有如下形式:

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} g(\eta), \quad (9.31)$$

其中 l 是平板的长度(图 9.9).

在式(9.27)中, 给出平板阻力的动量积分必须与 x 无关, 这就证明在式(9.31)中 x 的 $-\frac{1}{2}$ 次幂是正确的. 因此, 忽略 u_1 的二次项以后, 式(9.27)给出两面浸湿的平板阻力为

$$2D = b\rho U_\infty \int_{y=-\infty}^{\infty} u_1 dy$$

代入式(9.31), 得到

$$2D = b\rho U_\infty^2 C \sqrt{\frac{\nu l}{U_\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta. \quad (9.32)$$

此外, 将式(9.31)代入式(9.30), 再通除以 $C U_\infty^2 \cdot (x/l)^{-\frac{1}{2}} x^{-1}$, 则得到 $g(\eta)$ 的微分方程

$$g'' + \frac{1}{2} \eta g' + \frac{1}{2} g = 0, \quad (9.33)$$

其边界条件是

当 $\eta = 0$ 时, $g' = 0$; 当 $\eta = \infty$ 时, $g = 0$.

积分一次, 有

$$g' + \frac{1}{2} \eta g = 0,$$

其中, 由于在 $\eta = 0$ 处的边界条件, 积分常数等于零. 再积分一次, 则得到解

$$g = \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right). \quad (9.34)$$

这里, 积分常数以系数的形式出现, 并且不失一般性可以使其等于 1, 因为根据(9.31)定义的速度分布函数 u_1 中还含有一个未定常数 C . 常数 C 由这样的条件来确定: 由动量损失计算的阻力, 式

(9.32), 必须等于平板上的阻力, 式(7.33).

首先, 我们注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right) d\eta = 2\sqrt{\pi},$$

所以, 由式(9.32)我们有

$$2D = 2\sqrt{\pi} C b \rho U_{\infty}^2 \sqrt{\frac{\nu l}{U_{\infty}}}.$$

另一方面, 由式(7.33)可以写出两面浸湿平板的表面摩擦:

$$2D = 1.328 \rho U_{\infty}^2 \sqrt{\frac{\nu l}{U_{\infty}}}.$$

所以 $2C\sqrt{\pi} = 1.328$, 而 $C = 0.664/\sqrt{\pi}$, 并且零攻角平板尾迹中速度差的最终结果为

$$\frac{u_1}{U_{\infty}} = \frac{0.664}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4} \frac{y^2 U_{\infty}}{x \nu}\right\}. \quad (9.35)$$

图 9.10 中绘出了这个渐近方程给出的速度分布. 值得注意的是, 这个速度分布和 Gauss 误差分布函数是一样的. 正如在开始时

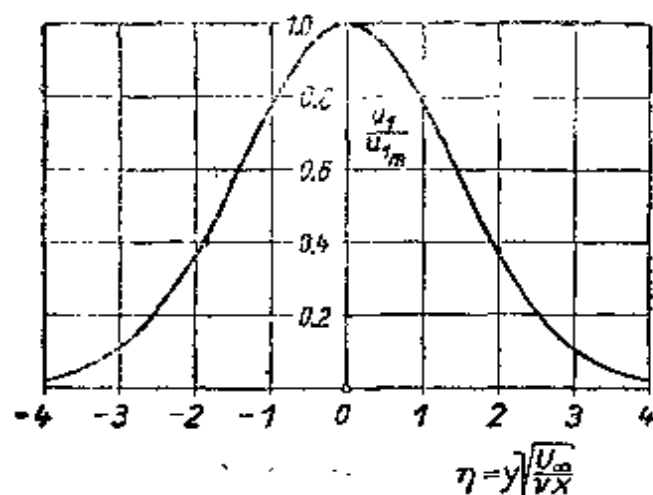


图 9.10 平板后面层流尾迹中的渐近速度分布[根据方程(9.35)]

假定的, 只是在远离平板的地方, 式(9.35)才是正确的. W. Tollmien 证明了它可以用在大约 $x > 3l$ 的地方. 图 9.11 给出一幅曲线图, 由此可以推断出整个速度场.

在大多数情形下, 平板尾迹中的流场以及任意物体后面尾迹

中的流场都是湍流的,即使在小 Reynolds 数情形下,比如说 $R_1 < 10^6$, 这时边界层直至后缘都是层流的,可是在尾迹中流动还是要变成湍流的,因为所有尾迹的速度剖面都有一个拐点,因而是极不稳定的. 换句话说,即使在比较小的 Reynolds 数情形下,尾迹也是湍流的. 在第二十四章将讨论湍流尾迹.

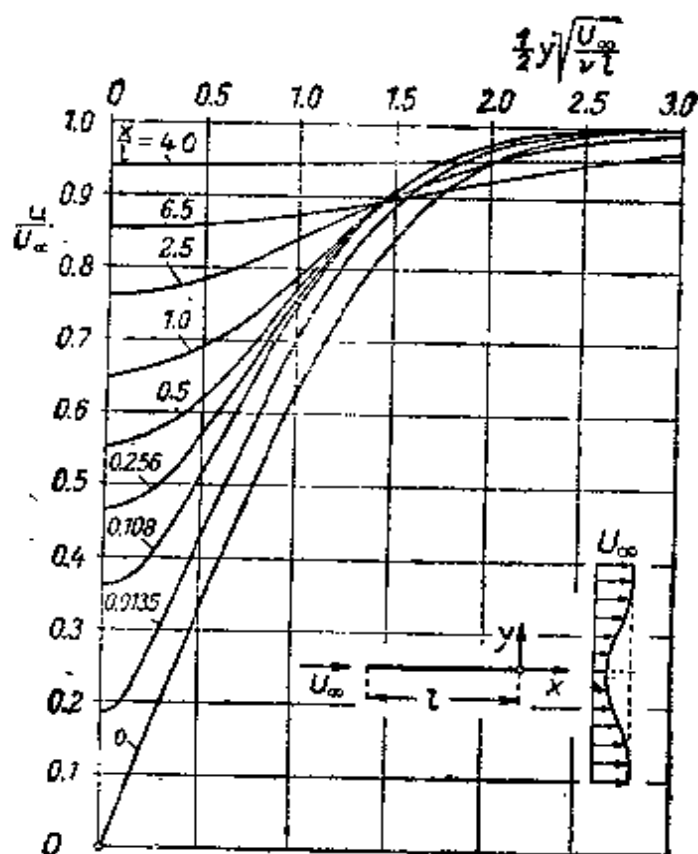


图 9.11 零攻角平板后面层流尾迹中的速度分布

f. 二维层流射流

从小孔中喷出一股射流的运动, 提供了另一个能应用边界层理论, 而又无固体边界的运动例子. 我们打算讨论二维问题, 所以假定射流从一个狭长缝中射出, 并与周围流体相混合. H. Schlichting^[56]和 W. Bickley^[3]求解了这个问题. 实际上, 和前面一样, 在这种情形下, 流动也会变为湍流的. 可是, 这里我们要详细讨论层流情形, 因为后面将讨论的湍流射流, 可以用同样的数学方法进行

分析。

这样一股射流,由于在它边缘上形成的摩擦作用,将带动着周围一些原来静止的流体一起运动。图 9.12 绘出了所得到的流线图象。我们将采用原点在狭缝上、横坐标轴与射流轴线相重合的坐标系。由于摩擦的影响,射流沿流动方向向外扩展,而其中心速度沿流动方向减小。为简单起见,我们将设狭缝无限小,但是为了保持有限的流量和有限的动量,就必须假设狭缝上的流速无限大。象前面的例子一样,由于作用在射流上的周围流体的压力不变,所以 x 方向的压力梯度可以忽略不计。因此, x 方向的总动量(记作 J)应保持不变,而且与离开狭缝的距离无关。这样

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \text{常数}. \quad (9.36)$$

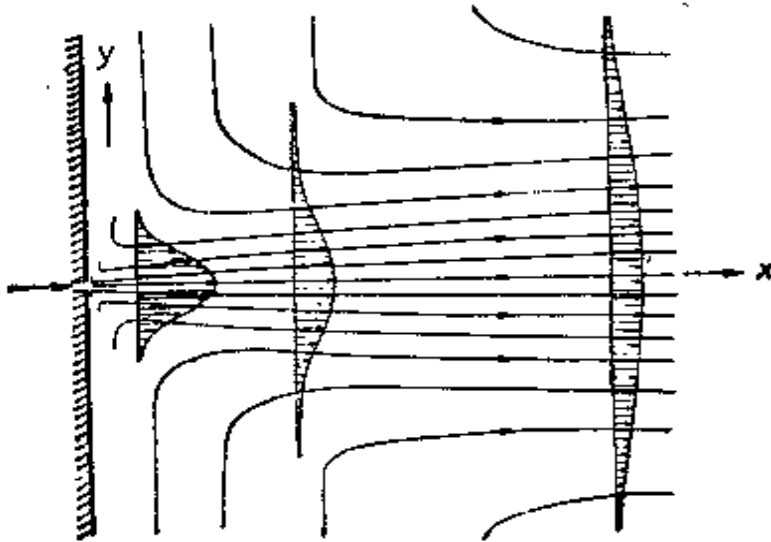


图 9.12 二维层流自由射流

因为整个这个问题无特征长度,所以,和零攻角平板情形一样,如果考虑到速度剖面 $u(x, y)$ 很可能是相似的,就能作出关于速度分布的适当假设。因此,我们设速度 u 是 y/b 的函数,其中 b 是适当定义的射流宽度。我们还设 b 正比于 x^q 。相应地,可以把流函数写成如下形式:

$$\psi \sim x^{p/q} f\left(\frac{y}{b}\right) = x^{p/q} f\left(\frac{y}{x^q}\right).$$

这两个未知指数将由下述条件来确定:

1. 根据式(9.36), x 方向的动量通量与 x 无关.
2. 式(9.2)中的加速度项和摩擦项具有相同的量级.

这就给出两个关于 p 和 q 的方程:

$$2p - q = 0 \quad \text{和} \quad 2p - 2q - 1 = p - 3q.$$

由此

$$p = \frac{1}{3}; \quad q = \frac{2}{3}.$$

所以,关于自变量和流函数的假设,如果包括适当的常数,就可以写为:

$$\eta = \frac{1}{3\nu^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}}; \quad \psi = \nu^{1/2} x^{1/3} f(\eta).$$

因此,可以给出速度分量的如下表达式:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta); \\ v &= -\frac{1}{3} \nu^{1/2} x^{-2/3} (f - 2\eta f'). \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

将这些值代入微分方程(9.2),并设压力项等于零,我们就得到关于流函数 $f(\eta)$ 的下述微分方程:

$$f'' + ff'' + f''' = 0, \quad (9.38)$$

其边界条件是:在 $y = 0$ 处, $v = 0$ 和 $\partial u / \partial y = 0$, 在 $y = \infty$ 处, $u = 0$. 于是

$$\eta = 0: f = 0, f'' = 0; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (9.39)$$

方程(9.38)的解是异常简单的,积分一次,有

$$ff' + f'' = 0.$$

由于在 $\eta = 0$ 处的边界条件,积分常数等于零.如果这个二阶微分方程的第一项含有系数 2,就可直接进行积分.这可以通过如下变换来实现:

$$\xi = \alpha\eta; \quad f = 2\alpha F(\xi),$$

其中 α 是未知常数,以后再来确定.这样,上面的方程就变换为

$$F'' + 2FF' = 0, \quad (9.40)$$

现在用撇表示对 ξ 求导数, 边界条件是

$$\xi = 0: F = 0; \quad \xi = \infty: F' = 0. \quad (9.41)$$

再对方程积分一次, 得到

$$F' + F^2 = 1, \quad (9.42)$$

其中积分常数等于 1. 如果设 $F'(0) = 1$, 就得出这个结果; 因为在 f 和 F 的关系中有未定常数 α , 所以这样的假设是允许的, 并不失其一般性. 方程(9.42)是 Riccati 型的微分方程, 并且能以封闭形式积分. 我们得到

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1 - F^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + F}{1 - F} = \tanh^{-1} F.$$

反解这个方程, 可以得到

$$F = \tanh \xi = \frac{1 - \exp(-2\xi)}{1 + \exp(-2\xi)}. \quad (9.43)$$

另外, 因为 $dF/d\xi = 1 - \tanh^2 \xi$, 所以可以由式(9.37)导出速度分布为

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \tanh^2 \xi). \quad (9.44)$$

图 9.13 中给出了式(9.37)的速度分布曲线.

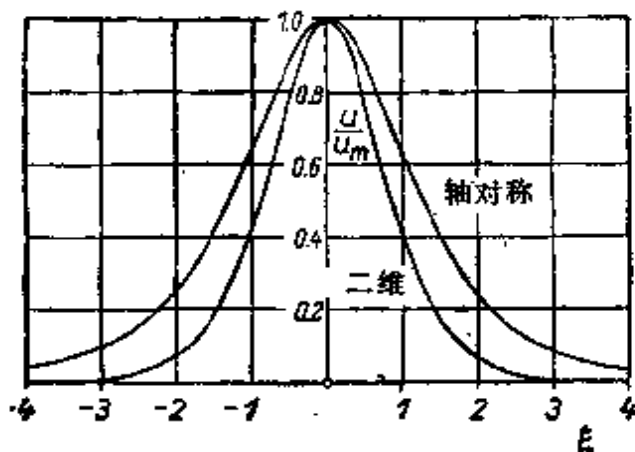


图 9.13 二维自由射流和圆自由射流的速度分布, 它们分别由式(9.44)和(11.15)表示. 对于二维射流 $\xi = 0.275K^{1/3}y/(\nu x)^{2/3}$, 对于圆射流 $\xi = 0.244K'^{1/2}y/\nu x$. K 和 K' 表示动量 J/ρ

现在尚需确定常数 α , 用沿 x 方向动量保持不变的条件式(9.36), 就可以做到这点. 联合式(9.44)和(9.36), 可以得到

$$J = \frac{4}{3} \rho \alpha^3 \nu^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh^2 \xi)^2 d\xi = \frac{16}{9} \rho \alpha^3 \nu^{1/2}. \quad (9.45)$$

我们将假定射流的动量通量是给定的，它正比于使射流流出狭缝的压力差。引进运动动量 $J/\rho = K$ ，由式(9.45)得到

$$\alpha = 0.8255 \left(\frac{K}{\nu^{1/2}} \right)^{1/3},$$

因此对于速度分布，有

$$\left. \begin{aligned} u &= 0.4543 \left(\frac{K^2}{\nu x} \right)^{1/3} (1 - \tanh^2 \xi), \\ v &= 0.5503 \left(\frac{K \nu}{x^2} \right)^{1/3} [2\xi(1 - \tanh^2 \xi) - \tanh \xi], \\ \xi &= 0.2752 \left(\frac{K}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.46)$$

射流边界上的横向速度是

$$v_{\infty} = -0.550 \left(\frac{K \nu}{x^2} \right)^{1/3}, \quad (9.47)$$

狭缝单位长度射出的体积流量为 $Q = \int_{-\infty}^{\infty} u dy$ ，或者

$$Q = 3.3019 (K \nu x)^{1/3}. \quad (9.48)$$

由于射流边界的摩擦作用带动周围的流体一起运动，所以体积流量沿着流动方向增加。体积流量还随着射流动量增加而增加。

在第十一章中将讨论相应的旋转对称情形，其中射流从小圆孔射出。S. I. Pai^[49]和 M. Z. Krzywoblocki^[41]解出了从狭缝中射出二维可压缩层流射流的问题。

E. N. Andrade^[1]对二维层流射流所作的测量，很好地证实了上述的理论讨论。直至 $R = 30$ 左右，射流都是层流的，其中 Reynolds 数以喷射速度和狭缝宽度为参考量。在第二十四章将讨论二维湍流射流和圆湍流射流问题。在 S. I. Pai 的书^[49]中，可以找到所有射流问题的综合评述。

g. 层流平行流动

我们将简单地讨论一下两个平行的层流流动之间的流体层运

动,这两个平行流动以不同的速度运动,因而提供了另一个能应用边界层方程的例子.在图 9.14 的插图中,可以看到对这个问题的描述:两个最初独立、未受扰动的平行流动,分别以速度 U_1 和 U_2 运动,由于摩擦作用它们开始相互作用.可以假设,从速度 U_1 过渡到速度 U_2 发生在一个狭窄的混合区内,而且横向速度分量 v 处处小于纵向速度分量 u .因此,可以用边界层方程(9.1)来描述区域 I 和 II 内的流动,而且可以忽略压力项.

利用类似于平板边界层中使用过的方法(见第七章 e),通过引进无量纲横坐标 $\eta = y\sqrt{U_1/\nu x}$ 和流函数 $\phi = \sqrt{\nu U_1 x} f$,可以得到常微分方程

$$ff'' + 2f''' = 0. \quad (9.49)$$

因为 $u/U_1 = f'$, 我们得到边界条件

$$\left. \begin{aligned} \eta = +\infty: f' &= 1, \\ \eta = -\infty: f' &= \frac{U_2}{U_1} = \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

因为在 $y = 0$ 的分界面上, $\phi = 0$, 所以必然有

$$\eta = 0: f = 0. \quad (9.51)$$

微分方程(9.49)满足边界条件(9.50)和(9.51)的解不能以封闭形式给出,因而必须使用数值方法.利用在 $\eta \rightarrow -\infty$ 和 $\eta \rightarrow +\infty$ 的渐近展开以及在 $\eta = 0$ 附近的级数展开,可以得到精确的数值解. R. C. Lock^[45]给出了几个这样的解. M. Lessen^[44a]从 $\eta \rightarrow -\infty$ 的渐近展开出发,用数值积分方法首先解出了这个问题.

图 9.14 中的曲线表示 $\lambda = U_2/U_1 = 0$ 和 0.5 的速度剖面. W. J. Christian^[10]发表了一个改进的数值解.一个宽的均匀射流与邻近的静止空气之间相互作用这样一种特殊情形,常常称为“平面半射流”.

根据第七章中提到的 J. Steinheuer^[63]所进行的研究,这些解属于 Blasius 方程(9.49)的一组特殊解.在该文献中可以找到,对于各种速度比 λ ,最近计算的 $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 值.另外,还计算了零流线的位移.因为在边界层两个边缘上,当 $\eta \rightarrow \pm\infty$ 时,法向速

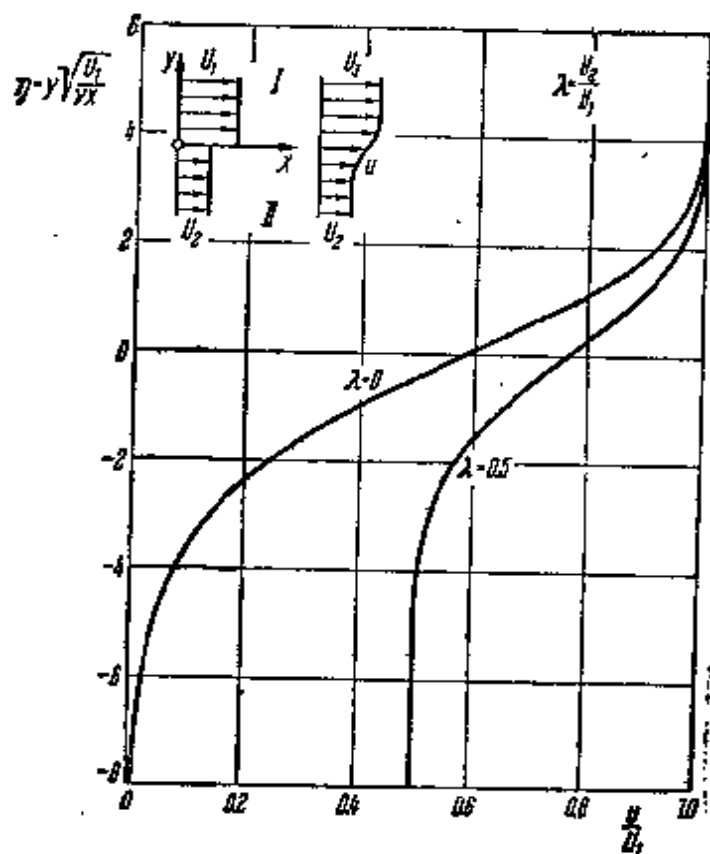


图 9.14 两个相互作用的平行流动之间区域内的速度分布，引自 R. C. Lock^[45]

度分量 $v = -\partial\phi/\partial x \sim (\eta f' - f)$ 不相等，所以发生这种位移。

另外，R. C. Lock^[45]研究过两股半射流不仅速度不相同，而且密度和粘性也不相同的情形。这种情形的一个例子是空气在水面上方的流动。现在，这个解除了依赖于 λ 外，还依赖于 $\kappa = \rho_2\mu_2/\rho_1\mu_1$ 。Lock 除了给出基于动量积分方程的解以外，还给出了几个精确解。O. E. Potter^[51]也给出了一种近似解法。

D. R. Chapman^[7]研究过可压缩半射流的问题。这类可压缩流动，在分离尾迹的自由剪切层计算中起一定作用^[6,48]。

h. 直槽进口段的流动

作为二维边界层流动的另一个例子，我们现在准备讨论平行壁面的直槽进口段的流动问题。假设在远离进口的上游，速度分布是均匀的，而且和第五章指出的一样，槽内宽度上的速度分布是抛物线的。我们还假设，进口截面的速度在其宽度 $2a$ 上均匀分布，速度大小为 U_0 。由于粘性摩擦作用，在两个壁面上将形成边界层，边界层的厚度将沿顺流方向增长。开始时，即在离开进口截面的很小距离上，边界层增长的方式与沿

零攻角平板相同。所得到的速度剖面，将由中心部分的常速度线和两个壁面上的边界层剖面连接而成。因为在每个截面上体积流量必须相等，所以在壁面附近由于摩擦作用而减少的流量，必须由在轴线附近相应增加的流量来补偿。因此，与平板情形不同，边界层要在加速外流作用下形成。在远离进口截面的地方，这两个边界层逐渐合并，最后速度剖面渐近地成为 Poiseuille 流动的抛物线分布。

这个过程可用以下两种方法之一进行数学分析。首先，可以沿顺流方向进行积分，从而在加速的外流条件下计算出边界层的生长。其次，可以分析速度剖面对渐近的抛物线分布的累积偏差，即沿逆流方向进行积分。在得到这两个解之后（比如说，以级数展开的形式给出），我们可以给它们保留足够的项数，并在两个级数都可应用的截面上把它们连接起来。用这种方法可以得到整个进口段的流动。现在准备简略地概述一下 H. Schlichting^[7]首先使用的方法。

设一个坐标系，它的横坐标轴与槽的中心线相重合（图 9.15）。当沿逆流方向展开时，将从槽的中心线起度量坐标 y ，而沿顺流方向展开时，将从一个壁面起度量坐标 y' 。进口速度用 U_0 表示，中心流动速度用 $U(x)$ 表示。

我们从如下连续方程出发：

$$\int_{y=0}^a u dy = U_0 a, \quad (9.52)$$

根据(8.30)引进位移厚度 δ_1 ，可以写出

$$\int_0^a (U - u) dy = U \delta_1,$$

同时，借助于式(9.52)，可以写出

$$\Delta U(x) = U_0 \frac{a}{a - \delta_1} = U_0 \left[1 + \frac{\delta_1}{a} + \left(\frac{\delta_1}{a} \right)^2 + \dots \right]. \quad (9.53)$$

靠近进口截面，边界层增长的方式与非加速流动中的零攻角平板边界层相同，所以由式(7.37)有

$$\frac{\delta_1}{a} = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{a^2 U_0}} = 1.72 \varepsilon = K_1 \varepsilon,$$

其中

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu x}{a^2 U_0}} \quad (9.54)$$

是无量纲的进口特征长度。式(9.53)也可写为

$$U(x) = U_0 [1 + K_1 \varepsilon + K_2 \varepsilon^2 + \dots], \quad (9.55)$$

其中 $K_1 = 1.72$ 。这样就得到用 \sqrt{x} 的幂级数表示的边界层外面的速度。根据平板 Blasius 解， K_1 值是已知的，而其余的系数 K_2, K_3, \dots 是未知的，因为它们依赖于尚未确定的边界层。

在沿逆流方向的级数展开中，设 $u = u_0(y) - u'(x, y)$ ，其中 $u_0(y)$ 是抛物线速度分布，即 $u_0(y) = \frac{3}{2} U_0 (1 - y^2/a^2)$ ，而 u' 是一个附加的速度，其高阶项在一次近似中可以略去。

图 9.15 表示整个进口段中速度剖面的变化。可以看出，约在 $\nu x/a^2 U_0 = 0.16$ 的地方，就形成了抛物线剖面，所以实际的进口段长度是 $l_E = 0.16 a (U_0 a/\nu) = 0.04(2a) \cdot R$ ，其中 R 表示以槽的宽度为参考的 Reynolds 数。例如，在 $R = 2000 \sim 5000$ 时，进口段长度为槽宽的 80~200 倍。因此，如果槽很短或者 Reynolds 数相当大，则流动就

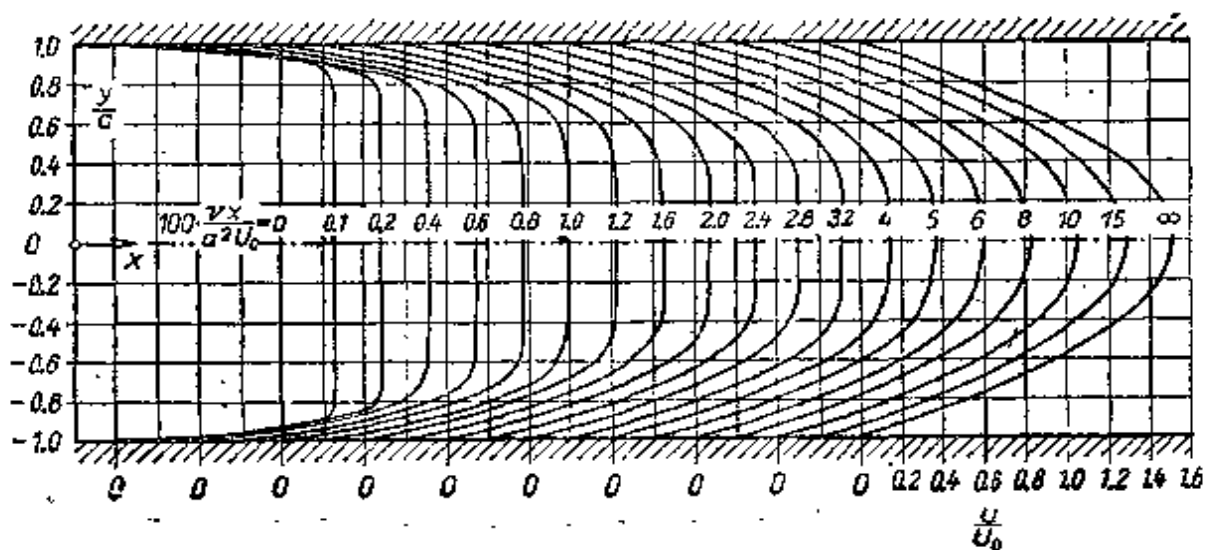


图 9.15 槽内进口段的层流速度分布

不能得到完全发展。

在 H. Hahnemann 和 L. Ehret 的两篇文章^[36, 37]中,报导了一种基于动量方程计算二维问题的近似方法(见第十章),还有一些延伸到湍流区的数值实验结果。L. Schiller^[38]研究了圆管进口段的流动。

在文献[57]中可以找到从下游向上游导出解的计算细节。

M. Van Dyke^[71]在阐述其二阶理论时,严格地检验了槽内进口段流动图象的发展问题,关于二阶理论见第七章 *f* 和第九章 *j*。他注意到这样的事实,图 9.15 中画出的解代表一阶的解,并只有当 Reynolds 数很大时才是正确的。由于这个原因,我们发现,在低 Reynolds 数时,这个解与完整 Navier-Stokes 方程的数值解不同,它显示出一定的偏差。

i. 有限差分方法¹⁾

现代方法(数字计算机)。近年来已经提出了许多数值计算方法,用来求解层流边界层方程。这些方法大部分属于隐式有限差分法,并且都是对 Fluegge-Lotz 和 Blottner^[21]首先阐述的数值方法的发展。所提到的这些方法都是精确的和快速的,但是需要使

1) 感谢 Troadhein 理工学院的 T. L. Fanncloep 教授,他欣然向我提供了如下陈述。

用数字计算机。在某一具体情形下所选择的方法，取决于所讨论问题的性质，当然也有个人爱好问题。作为对现有方法的回顾，读者可以参阅 Blottner 的一篇评论文章^[5]。

这里提供的方法，是根据其简单性及其广泛的适用性选择的。这种方法不同于那些早期的方法，它使用了变换过的(相似型)变量，并且允许沿流动方向和沿法线方向改变步长。使用变换变量的几个优点是：(a)基本上消除了由于边界层增厚而引起的计算区域的增加；(b)在变换平面内边界层更光滑，同时变化得更缓慢，因而允许使用更大的步长；(c)对于可压缩和不可压缩、平面和轴对称边界层流动，它们的有限差分公式实际上是一样的。在法线方向上使用变步长，只要在公式上作些较小的变化，就能象计算层流一样来计算湍流。

对于具有不同长度尺度的边界层所表征的特殊层流(例如大引射率的流动)，也能以较高的精度进行处理。

所考虑的边界层方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}(r'u) + \frac{\partial}{\partial y}(r'v) = 0, \quad (9.56)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\epsilon_t}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (9.57)$$

其中 $j = 0$ (平面流动)，或 $j = 1$ (轴对称流动)。其边界条件是：在 $y = 0$ 处， $u = v = 0$ ，而在 $y = \delta$ 处， $u = U(x)$ 。对于湍流， u 和 v 是适当的平均速度，而 ϵ_t 代表适当定义的涡粘性系数(例如，见 A. M. O. Smith 和 T. Cebeci 的文章^[62])。对于层流，则 $\epsilon_t = 0$ 。将方程(9.56)和(9.57)变为无量纲变量的变换，包括 Blasius 变换和 Mangler 变换(参看 H. Goertler 的文章^{[33][34]})，其定义如下：

$$\xi = \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx, \quad (9.58a)$$

$$\eta = yU(x) / \left(2\nu \int_0^x U(x) dx \right)^{1/2}. \quad (9.58b)$$

连续方程通过流函数来满足：

$$u r^i = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v r^i = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (9.59)$$

相应的用自变量 ξ, η 表示的无量纲流函数 $f(\xi, \eta)$ 由下式定义:

$$\phi(x, y) = v\sqrt{2\xi}f(\xi, \eta). \quad (9.60)$$

现在可以证明, $f(\xi, \eta)$ 满足偏微分方程

$$(Nf_{\eta\eta})_{\eta} + ff_{\eta\eta} + \beta(1 - f_{\eta}^2) = 2\xi(f_{\eta}f_{\eta\xi} - f_{\xi}f_{\eta\eta}). \quad (9.61)$$

这里

$$N = 1 + \varepsilon_s/\rho\nu,$$

而 ε_s 是由式(19.2)定义的涡粘性系数. 下标表示偏导数, 而

$$\beta(\xi) = 2 \frac{U'(x)}{U^2(x)} \int_0^x U(x) dx \quad (9.62)$$

是唯一由外部流动确定的量. f 的边界条件是

$$\eta = 0: f = 0, f_{\eta} = 0 \quad \text{和} \quad \eta = \infty: f_{\eta} = 1. \quad (9.63)$$

对二阶有限差分方程进行求解(用矩阵求逆的子程序), 要比对三阶(或高阶)方程求解有效的多. 所以, 将方程(9.61)化为二阶方程是有意义的. 为此, 引进变量 $F = f_{\eta}$, 并将式(9.61)改写为

$$[NF_{\eta}]_{\eta} + fF_{\eta} + \beta(1 - F^2) = 2\xi[FF_{\xi} - f_{\xi}F_{\eta}]. \quad (9.64)$$

现在这个方程含有两个未知函数 f 和 F , 但是它们可以用如下的简单表达式联系起来:

$$f(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} F(\xi, \eta) d\eta + f(\xi, 0). \quad (9.65)$$

在无抽吸和无引射时, 边界条件是

$$F(\xi, 0) = f(\xi, 0) = 0, F(\xi, \infty) = 1. \quad (9.66)$$

在尖体的前缘附近和钝体的驻点区域内, 方程(9.64)和(9.65)可以化为真正相似性的形式. 因此, 可用相应的相似解作为逐步有限差分法的起始值. 这里所介绍的方法可以求解偏微分方程(9.64), 同时(用一些小的修正)也可以求解作为起始值所需要的有关相似性方程. 因此, 这个方法是自动开始的, 不需要另外的输入.

有限差商: 在 ξ, η 平面内可以用一个半无限的长条来表示计算域, 这个长条的边界是: 壁面 $\eta = 0$, 边界层外缘 $\eta = \eta_c$ (其中 η_c 是适当定义的)以及起始线 $\xi = \xi_0$. 在起始线上, 假定解是已知

的。

如图 9.16 所示，由平行于 ξ 和 η 坐标轴的直线组成的网格，完全覆盖了这个长条。步长 $\Delta\xi$ 表示两条相邻网格线 ($\xi = \text{常数}$) 之间的距离；只是假定它很小，而没有其他方面的规定。沿 η 方向的相应步长 $\Delta\eta$ ，规定按几何级数变化。两个相邻网格线间距 $\Delta\eta_n$ 和 $\Delta\eta_{n+1}$ 之比记作 $K = 1 + k$ ，在典型情形下， $|k|$ 在 0 到 0.05 之间变化。每个节点用双下标 m, n 标识。这两个下标规定了该节点的位置 ξ_m, η_n ：

$$\xi_m = \xi_0 + \sum_{j=1}^m \Delta\xi_j, \quad \eta_n = \frac{\Delta\eta_1}{k} (K^{n-1} - 1). \quad (9.67)$$

在写有限差商时，引进两个相邻 $\Delta\eta$ 值的平均值 $\bar{\Delta\eta}_n$ 是方便的：

$$\bar{\Delta\eta}_n = \frac{1}{2} (\Delta\eta_{n+1} + \Delta\eta_n). \quad (9.68)$$

在逐步计算中，认为在 ξ_m 及其前面所有网格线上的解是已知的，而在 ξ_{m+1} 上寻找变量 F 和 f 值。

通过在 $(m+1, n)$ 点上分别对 $F_{m+1, n+1}$ 和 $F_{m+1, n-1}$ 进行 Taylor 级数展开，可以在 ξ_{m+1} 上得到导数 F_η 和 $F_{\eta\eta}$ 的中心差分近似。用略去 $\Delta\eta^2$ 量级项的方法，就可以把这两个级数展开表达式结合起来。相应的差商可以给出如下(略去下标 $m+1$)：

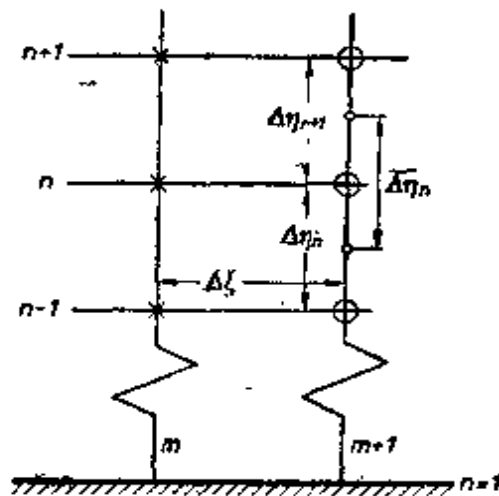


图 9.16 计算层流和湍流边界层时的变步长有限差分网格
× 已知值 ○ 未知值

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} = \frac{1}{2\Delta\eta_n} \{L_3 F_{n-1} + L_2 F_n + L_1 F_{n+1}\} + O\{\Delta\eta^2, k\Delta\eta\}, \quad (9.69)$$

其中 $L_1 = K^{-1}$, $L_2 = (K^2 - 1)L_1$, $L_3 = -K$;

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial \eta^2} = \frac{P_1}{\Delta\eta_n^2} \{P_4 F_{n-1} - P_3 F_n + P_2 F_{n+1}\} + O\{\Delta\eta^2, k\Delta\eta\}, \quad (9.70)$$

其中 $P_1 = \frac{1}{2}(1+K)$, $P_2 = L_1$, $P_3 = 2P_1 P_2$, $P_4 = 1$. 当 $K = 1$ 时, 式(9.69)和(9.70)就化为标准的中心差分格式.

对于方程(9.64)中的 ξ 导数, 可以用简单的后向差分公式:

$$F_\xi = \frac{F_{m+1,n} - F_{m,n}}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi). \quad (9.71)$$

这里出现的较大截断误差, 由为了求解这个方程而提出的迭代方案来补偿. 方程(9.64)中的非线性项, 必须用线化差商来代替. 作为例子, 项 fF_η 和 FF_ξ 可以写为

$$FF_\xi = F^i(F_\xi)_{m+1,n} \quad \text{和} \quad fF_\eta = f^i(F_\eta)_{m+1,n}, \quad (9.72)$$

其中 $(F_\xi)_{m+1,n}$ 和 $(F_\eta)_{m+1,n}$ 分别由式(9.71)和(9.69)给出. 在第一次迭代中, 令未知系数 F^i 和 f^i 等于已知值 $F_{m,n}$ 和 $f_{m,n}$, 以后在第二次和进一步迭代中, 用 F^i 和 f^i ($i = 1, 2, 3, \dots$) 不断改进. 经验表明, 项 F^2 应该近似表示为

$$F^2_{m+1,n} = 2F_{m,n}F_{m+1,n} - F^2_{m,n}. \quad (9.73)$$

将上面给出的线化有限差商代入微分方程(9.64), 并通乘以 $\Delta\xi$, 就给出一个差分方程. 这个方程写出如下:

$$A_n F_{m+1,n-1} + B_n F_{m+1,n} + C_n F_{m+1,n+1} = D_n, \quad (9.74)$$

其中

$$A_n = \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta_n^2} N^i F_i P_4 + \frac{\Delta\xi}{2\Delta\eta_n} L_3 [f^i + (N_\eta)^i + 2\xi(f_\xi)^i], \quad (9.75a)$$

$$B_n = -\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta_n^2} P_1 P_3 N^i + \frac{\Delta\xi}{2\Delta\eta_n} L_2 [f^i + (N_\eta)^i + 2\xi(f_\xi)^i L_2] - 2F_{m,n}(\Delta\xi \times \beta + \xi), \quad (9.75b)$$

$$C_n = \frac{\Delta \xi}{2 \Delta \eta^n} N^i P_1 P_2 + \frac{\Delta \xi}{2 \Delta \eta^n} L_i [f^i + (N_\eta)^i + 2\xi (f_\xi)^i], \quad (9.75c)$$

$$D_n = -\beta(1 - F_{m,n}^2) - 2\xi F_{m,n}^2. \quad (9.75d)$$

在式(9.75)中, ξ 和 β 是在 $(m+1)$ 上计算的, 只有带上标 i 的变量, 才是通过逐次迭代不断改进的. 为了加速迭代过程, 在达到初始的收敛之前, 项 $(f_\xi)^i$ 可以保持不变(等于前一位置的值).

求解的方法: 方程(9.74)表示一组未知量 $F_{m+1,n}$ ($n = 2, 3, \dots, N-1$) 的 $N-2$ 个联立代数方程. 在每一层 n 上出现三个未知量, 即 $F_{m+1,n-1}$, $F_{m+1,n}$ 和 $F_{m+1,n+1}$, 但是 $F_{m+1,1}$ 和 $F_{m+1,N}$ 可由边界条件知道, 所以方程的总数等于未知量的个数. 这个代数方程组可用所谓三对角线矩阵形式写出来. 这种在三对角线带以外所有非对角线元素都为零的矩阵, 可以用很适合于数字计算机的简单而直接的方法求逆. 为此, 将方程(9.74)改写为“标准形式”[略去下标 $(m+1)$]:

$$A_n F_{n-1} + B_n F_n + C_n F_{n+1} = D_n; 2 \leq n \leq N-1. \quad (9.74b)$$

边界条件是

$$F_1 = 0 \text{ 和 } F_N = 1, \quad (9.76)$$

其中 $n=1$ 表示壁面, $n=N$ 表示边界层外缘. 现在假定解以如下形式出现¹⁾:

$$F_n = E_n F_{n+1} + G_n. \quad (9.77)$$

边界条件 $F_1 = 0$ 以及方程(9.77)成立与步长 $\Delta \eta$ 无关的要求, 导出

$$E_1 = 0, G_1 = 0. \quad (9.78)$$

由方程(9.77)直接推出

$$F_{n-1} = E_{n-1} F_n + G_{n-1}. \quad (9.79)$$

当将上述表达式代入方程(9.74b)时, 就得到如下关系:

1) 关于证明可参考 R.D.Richtmeyer 的著作[53].

$$F_n = \frac{-C_n}{B_n + A_n E_{n-1}} F_{n+1} + \frac{D_n - A_n G_{n-1}}{B_n - A_n E_{n-1}} \quad (9.80)$$

比较式(9.77)和(9.80),表明

$$E_n = \frac{-C_n}{B_n + A_n E_{n-1}}, \quad G_n = \frac{D_n - A_n G_{n-1}}{B_n - A_n E_{n-1}} \quad (9.81)$$

借助于式(9.81)和条件(9.78),就能对壁面和边界层外缘之间的所有网格点,从 $n = 2$ 开始,计算出 n 的逐次值的 E_n 和 G_n .

因为根据(9.76) $n = N - 1$ 的 F_{n+1} 是已知的,所以能用式(9.77)从外缘到壁面横穿边界层按 n 的递减值(即按 $n = N - 1, N - 2, \dots, 2$ 的顺序),计算出所有未知量 F_n . 这就完成了一次迭代中的 $F_n (\equiv F_{m+1,n})$ 计算. 一旦确定出 $F_{m+1,n}$, 就能直接用方程(9.65)的数值积分,求出 $f_{m+1,n}$ 的相应解. 梯形法则就能解决这个问题.

用这些计算值 $F_{m+1,n}$ 和 $f_{m+1,n}$ 可以定出系数 A_n, B_n, C_n 新的改进值,反过来,用这些系数又得出 $F_{m+1,n}$ 和 $f_{m+1,n}$ 新的改进值. 当两个相继的迭代结果之差在规定的容许误差之内时,(容许误差的典型量级为 10^{-5}),就结束迭代过程. 通常收敛是很快的,在大多数情形下取步长 Δx 在 0.01 到 0.05 范围内,有三、四次迭代就够了.

在某些问题中,当向下游进行计算时,必须用增加 N (或 η_c) 的办法来考虑边界层的增长. 边界层外缘由下述要求来定义: $F_N - F_{N-1}$ 的差值应该小于某个规定值,典型量级是 10^{-4} . 甚至在有分离的情形下,用目前这些变量表示的边界层增长,通常也是不大的.

计算中主要关心的一个变量是壁面切应力. 这个值可以通过下述五点公式很精确地确定出来:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\Gamma_1}{\Delta \eta_1} \{\Gamma_2 F_2 + \Gamma_3 F_3 + \Gamma_4 F_4 + \Gamma_5 F_5\} \quad (9.82)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= -K^{-3}, \quad \Gamma_2 = -(1 + K + K^2 + K^3), \\ \Gamma_3 &= -\frac{\Gamma_2(1 + K + K^2)}{K^2(1 + K)^2}, \\ \Gamma_4 &= -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{1 + K + K^2}, \quad \Gamma_5 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

起始值：如果利用列成表的相似解作为起始值，则每当使用变步长 $\Delta\eta_n$ 时，总需要大量的插值。而利用有限差分法，通过逐次迭代来产生相似解，则更方便也更有效。根据方程(9.64)，可以得到所要求解的方程，并可写成线性形式：

$$N_{i-1}F_i'' + (f_{i-1} + N'_{i-1})F_i' + \beta(1 - F_{i-1}F_i) = 0, \quad (9.84)$$

其中

$$f_i = \int_0^{\eta} F_i d\eta. \quad (9.85)$$

下标 $(i, i-1)$ 表示该变量计算所进行的迭代，而 $(\eta)'$ 表示 $d/d\eta$ 。认为带下标 $i-1$ 的变量是已知的（最初要推测一个满足边界条件的解），而那些带下标 i 的值要在第 i 次，即当前迭代中得到。现将差商(9.69)和(9.70)代入方程(9.84)。最后的差分方程可以写成方程(9.74)的标准形式，其系数为

$$A_n = N_{i-1}P_1P_2 + \frac{1}{2}L_3\overline{\Delta\eta_n}(f_{i-1} - N'_{i-1}), \quad (9.86a)$$

$$\begin{aligned} B_n &= -N_{i-1}P_1P_3 + \frac{1}{2}L_2\overline{\Delta\eta_n}(f_{i-1} - N'_{i-1}) \\ &\quad - \overline{\Delta\eta_n^2}\beta F_{i-1}, \end{aligned} \quad (9.86b)$$

$$C_n = N_{i-1}P_1P_2 + \frac{1}{2}L_1\overline{\Delta\eta_n}(f_{i-1} - N'_{i-1}), \quad (9.86c)$$

$$D_n = -\overline{\Delta\eta_n^2}\beta. \quad (9.86d)$$

取 F 的线性变化关系作为起始推测值 F_0 是足够的，然后由方程(9.85)确定相应的 f 值。接着计算系数 A_n, B_n, C_n, D_n ，再横穿边界层计算相应的 E_n, G_n 值。利用递推公式(9.77)和边界条件(9.78)，横穿边界层确定新的迭代值 F_i 。这个过程一直重复到相继的迭代值之差小于规定的容许误差时为止。典型的需要迭代的次数大约是 8—12 次。这种方法比通常用于两点边值问题的“打

靶”法来得简单,而且在许多打靶法失效的情形下,例如在很大折射率的情形下,也是收敛的。

应用: 这里所介绍的有限差分法,可以作为实用的工程方法。如果用更复杂的方法,可以获得更高的精度,但是这要增加公式和程序的复杂性,同时又要提高对机时和容量上的要求。对于所有差分法,计算的时间和精度都取决于计算中使用的步长。利用几种已知的高精度解的情形来检验本方法的精度是有意义的。这些情形是 Howarth 的线性减速流动(参看第九章 d)、根据位势理论压力分布计算的圆柱绕流、以及根据 Hiemenz 实验压力分布计算的圆柱绕流(参看第十章 c)。“标准”步长下和“小”步长下的结果列表如下。根据计算的结果,这里只给出分离点的位置。

在 UNIVAC1108 计算机上,用“标准”步长的典型计算时间是 5 至 10 秒。可以看出,用小步长时精度要好些,但是要以增加二

情形	当前的结果	精确值
线性减速流动	(1) $x_r^* = 0.1227$ (2) $x_r^* = 0.1210$	$x_r^* = 0.1199$ (Howarth) 或 $x_r^* = 0.1198$ (Leigh) ^[44] 或 $x_r^* = 0.1203$ (Schoenauer)
圆柱 (位势流动)	(1) $\varphi_r = 106.13^\circ$ (2) $\varphi_r = 105.01^\circ$	$\varphi_r = 104.5^\circ$ (Schoenauer) (参看第十章 c)
圆柱 (Hiemenz 压力数据)	(1) $\varphi_r = 80.98^\circ$ (2) $\varphi_r = 80.08^\circ$	$\varphi_r = 80.0^\circ$ (Jaffe 和 Smith) ^[45] (内插结果)

(1)“标准”步长: $\Delta\xi = 0.01, \Delta\eta = 0.05$; (2)“小”步长: $\Delta\xi = 0.001, \Delta\eta = 0.025$

十倍的机时作为代价。对于工程计算来说,这种粗网格就够了;对于象翼剖面层流边界层这种有实际意义的情形,它要求运算时间在 10 秒左右。在计算进行中改变步长,可以获得更好的经济效果,即只是在邻近分离的关键区域内,才使用这种细网格。

在 Smolderen 讲演录^[69]中,给出了流体力学数值方法的扼要说明。

j. 二阶边界层^U

在第七章 f 中导出了边界层流动的二阶方程(7.52)和(7.53)。如果已知一阶解 $u_1(x, N)$ 和 $v_1(x, N)$, 并且适当规定了函数 $K(x)$, $U_2(x, 0)$ 和 $P_2(x, 0)$, 就能求解这组线性偏微分方程。

因此, 在流动中给定物体上计算二阶边界层时, 需要采取如下步骤:

(a) 计算绕物体的位势流动(一阶的外部流动), 其边界条件是 $V_1(x, 0) = 0$ 。由这个解得到 $U_1(x, 0)$ 。

(b) 对于给出的 $U_1(x, 0)$, 计算一阶边界层, 即确定方程组(7.49)的解。特别是, 由解 $u_1(x, N)$, $v_1(x, N)$, 我们用式(7.45)计算函数 $V_2(x, 0)$ 。

(c) 根据边界条件 $V_2(x, 0)$ 以及依照式(7.45)在远离物体处速度为零的条件, 计算二阶外部流动。这步计算为我们提供 $U_2(x, 0)$ 和 $P_2(x, 0)$ 。

在下文中, 假设这些步骤已经完成。我们的讨论将集中在对几个具体问题的更详细的二阶计算上。

对称驻点流动: M. Van Dyke 详细分析过这类流动(参看第七章文献[7])。假设已经求出驻点(在 $x = 0$ 上 $K = 1$)凸壁上的一阶外部流动和二阶外部流动的表达式, 并得到

$$U(x, 0) = U_{11}x + \varepsilon U_{21}x + O(\varepsilon^2), \quad (9.87)$$

其中 U_{11} 和 U_{21} 为常数, 它依赖于物体的形状。根据式(7.48), 我们对内部解作如下假设:

$$u(x, y, \varepsilon) = U_{11}xf'(\eta) + \varepsilon[\sqrt{U_{11}}xF'_1(\eta) + U_{21}xF'_2(\eta)] + O(\varepsilon^2), \quad (9.88)$$

$$v(x, y, \varepsilon) = -\varepsilon U_{11}f(\eta) - \varepsilon^2[F_1(\eta) - \eta f(\eta) + U_{21}F_2(\eta)/\sqrt{U_{11}}] + O(\varepsilon^3). \quad (9.89)$$

这里, 定义新变量为

1) 感谢 K. Gersten 教授对本节所作的说明。

$$\eta = \sqrt{U_{11}} N = \sqrt{U_{11}} y / \varepsilon^D. \quad (9.90)$$

将这些式子代入一阶和二阶边界层方程,可以得到

$$f''' + ff'' + 1 - f^2 = 0, \quad (9.91)$$

$$F_c''' + fF_c'' - 2f'F_c' + f''F_c = \eta(ff'' - f^2 + 2) + 0.6479, \quad (9.92)$$

$$F_d''' + fF_d'' - 2f'F_d' + f''F_d = -2, \quad (9.93)$$

其边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: f = 0, f' = 0, F_c = 0, F_c' = 0, F_d = 0, F_d' = 0, \\ \eta \rightarrow \infty: f = 1, F_c' = -1, F_d' = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

第一个方程确定一阶边界层,它与平板驻点流动的方程(5.39)相同。后面的两个方程确定二阶边界层。这个解已经分成两部分:由曲率引起的那部分解(下标 c)和由位移效应引起的那部分解(下标 d)。后面这部分解是由具有速度 $U_2(x, 0) = U_{21}x$ 的二阶外部流动引起的, $U_2(x, 0)$ 由上述步骤(c)确定。对于 F_d , 我们得到下述简单解:

$$F_d = \frac{1}{2}(f + \eta f'). \quad (9.95)$$

表面摩擦力系数由式(7.55)得到。代入以下数值

$$f''(0) = 1.2326; F_c''(0) = -1.9133; F_d''(0) = 1.8489, \quad (9.96)$$

求得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_f' = \varepsilon x \sqrt{U_{11}} \{ 1.2326 U_{11} - \varepsilon (1.9133 \sqrt{U_{11}} \\ - 1.8489 U_{21}) \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9.97)$$

根据式(7.54), 压力系数是

- 1) 只要注意到坐标 x, y 在第九章 c 中代表长度, 而在这里已经用特征长度 R_0 (驻点上物体的曲率半径)无量纲化了, 那就可以看出这个式子和第九章 c 中的式(9.16)是一样的。如果由式(9.87)和(9.15)比较外部流动的速度分布, 就有 $\eta = \sqrt{U_{11}} N = y \sqrt{u_1 / \nu}$ 。

$$c_{pw} = 1 - U_{11}^2 x^2 \{1 - \varepsilon(1.8805/\sqrt{U_{11}} - 2U_{21}/U_{11}) + O(\varepsilon^1)\}. \quad (9.98)$$

此压力系数和表面摩擦力系数的公式是通用的。系数 U_{11} 和 U_{21} 的数值只依赖于物体的形状。在所有已知的实例中，都已证明 U_{21} 是负的。这表明，由于高阶边界层效应（曲率和位移），凸壁驻点附近的表面摩擦力系数会减小，而壁面上的压力系数会增加。

对称流动中的抛物线体：M. Van Dyke 计算了对称流动中抛物线体上的二阶边界层（参看第七章文献[7]）。在驻点附近，有

$$U_{11} = 1 \text{ 和 } U_{21} = -0.61. \quad (9.100)$$

在抛物线体问题中，我们有 R. T. Davis^[11] 计算的完整 Navier-Stokes 方程的数值解可供使用，并可用它作为二阶理论所作改进的直接鉴定。图 9.17 中给出了抛物线体驻点上表面摩擦力系数随 Reynolds 数变化的曲线，该摩擦力系数由式(9.97)算出，Reynolds 数是以顶点曲率半径 R_0 为参考长度构成的。由式(9.97)可以得到

$$c'_f/2\varepsilon x = 1.2326 - 3.04\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (9.101)$$

它等价于

$$c'_f/2\varepsilon x = \frac{1.2326}{1 + 2.47\varepsilon} + O(\varepsilon^2). \quad (9.101a)$$

在图 9.17 中，曲线 II 是这个关系的曲线，而曲线 I 描绘了一阶解。曲线 III 是用 R. T. Davis 的数值解结果画出的。在低 Reynolds 数区，二阶理论引起的很大改善是显而易见的。另外，这些曲线图提供了一个明显的迹象：二阶理论能使我们指出一阶理论的有效范围。如果允许误差高达 2%，则一阶理论可在 Reynolds 数超过 $R = 1.5 \times 10^5$ 的范围上使用。基于 R. T. Davis 数值解的类似比较表明，如果允许误差为 2%，则二阶理论适用范围的下限是 $R = 100$ 。

图 9.18 给出沿零攻角抛物线体的静压分布和表面摩擦力分布，这两者都是用二阶理论计算的。为了比较起见，图中还有用一阶理论 ($R \rightarrow \infty$) 计算的分布曲线。这两种压力分布都是从

驻点上 $c_p = 1$ 开始的。无摩擦流动 ($R \rightarrow \infty$) 给出

$$c_p = \frac{1}{1 + 2x^{*2}} \quad (9.102)$$

其中 $x^* = x'/R_0$ 表示从抛物线体顶点沿中心线度量的无量纲距离, 参看图 9.18. 当 $R = 100$ 时, 由式(9.98)可以得到, 在驻点附近

$$c_p = 1 - x^2(1 - 3.10\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (9.103)$$

这等价于

$$c_p = \frac{1}{1 + 1.38x^{*2}}, \quad (9.104)$$

其中在驻点附近 $x = (2x^{*2})^{1/2}$. 正如所预料的, 高阶修正量沿顺流方向减小, 特别是, 当沿顺流方向曲率减小时, 结果更是如此. 在约 $x^* = 2$ 时, 实际上高阶效应已经消失. 类似的结论适用于表面摩擦力系数, 但是在驻点上呈现出最大的二阶修正量.

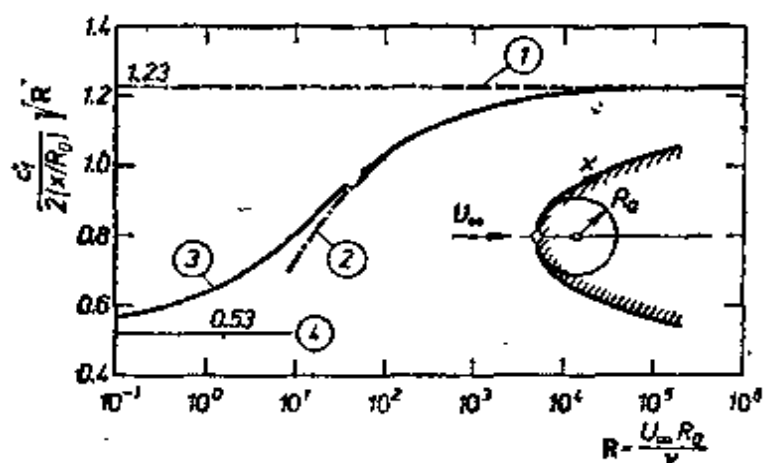


图 9.17 抛物线体驻点附近的局部表面摩擦力系数随 Reynolds 数 $R = U_\infty R_0 / \nu$ 变化的曲线

- (1) 一阶边界层理论, $R \rightarrow \infty$
- (2) 二阶边界层理论, 式(9.101), 根据 K. Gersten (第七章文献[10])
- (3) Navier-Stokes 方程数值解, 根据 R. T. Davis^[11]
- (4) $R = 0$, Stokes 流动

另一方面, 高阶效应使压力系数增加, 而使表面摩擦力系数减小. 因此, 当 Reynolds 数从 $R \rightarrow \infty$ 减小时, 抛物线体的压差阻力增加, 但表面摩擦力减小.

对于宽度为 b 的抛物线体的压差阻力系数(不计底部阻力),

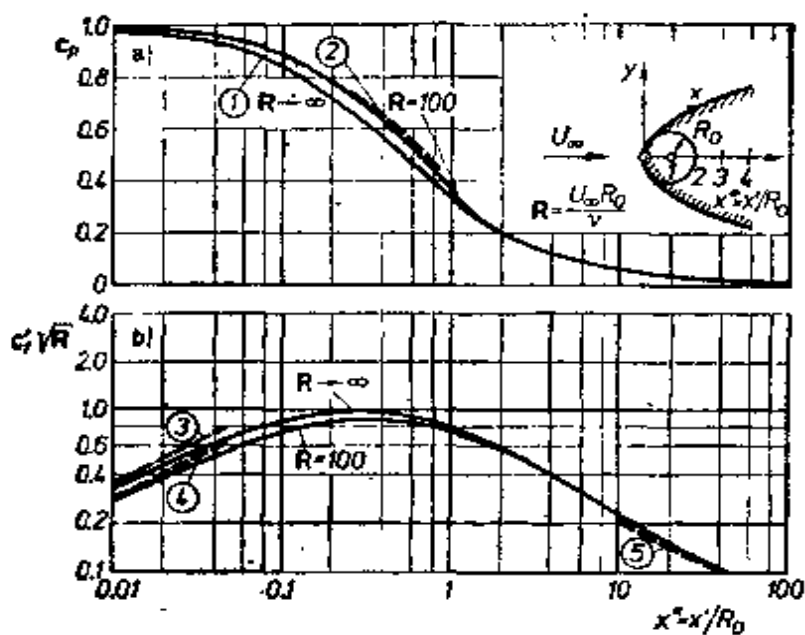


图 9.18 绕零攻角抛物线体的, a) 静压分布和 b) 切应力分布.
 $R = 100$ 的曲线对应于二阶边界层理论; $R \rightarrow \infty$ 的曲线对应于一阶边界层理论

- (1) 无粘流动的 c_p , $R \rightarrow \infty$, 式(9.102)
- (2) $R = 100$ 时的 c_p , 式(9.104)
- (3) $c_f \sqrt{R} = 3.486 x^{*1/2}$; 驻点; $R \rightarrow \infty$; 式(9.101); $\epsilon = 0$
- (4) $c_f \sqrt{R} = 2.63 x^{*1/2}$; 驻点; $R \rightarrow \infty$; 式(9.101); $\epsilon = 0.1$
- (5) $c_f \sqrt{R} = 0.664 x^{*-1/2}$; 平板

我们求得^[11]

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 R_0 b} = \pi + 5.2\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (9.105)$$

这样, 当 $R = 100$ 时, 该压差阻力比无粘流动的超出 16%.

这种由于二阶边界层效应而增加压差阻力的事实, 表明这样的可能性: 正如第七章 f 讲过的, 对于零攻角平板, 在二阶理论中也应出现这样的阻力.

其他形状: L. Devan^[12]研究了一些半无限体的二阶效应. 其结果与抛物线体相类似. 式(9.97)和(9.98)中的系数是

$$U_{11} = 1.5, \quad U_{21} = -0.62.$$

可以预料, 对于可以得到一阶自相似解的情形(第八章 b), 也可以得到二阶边界层方程(7.52)和(7.53)的另外一些解. 在一阶外部

流动形式为 $U_1(x, 0) \sim x^m$ 的情形下, 如果

$$K(x) \sim x^{(m-1)/2}; U_2(x, 0) \sim x^n, \quad (9.106)$$

则二阶理论也得到自相似解. 关于二阶理论效应更进一步的细节, 可以在第七章以及文献 [31, 33] 中找到. 后者包括有抽吸、引射、传热以及可压缩性情形下的二阶效应. 在高 Mach 数和有引射的情形下, 二阶理论更加重要. 这方面可参阅文献 [24, 25, 47, 48, 59].

第十章 二维定常边界层方程的 近似解法

引言: 前几章讨论过的边界层方程精确解的一些例子表明: 求解析解在数学上会带来相当大的困难. 特别是, 流体绕任意形状物体流动的一般性问题, 用前面所介绍的解析方法是不能完全解决的. 如果利用快速数字计算机, 那么我们采用数值方法即逐步逼近法(见第九章 i), 花费适当的工作量, 就能解出大多数问题. 由于这个缘故, 在计算机出现以前提出的边界层方程的近似解法, 现在已不如当年重要了. 但是, 我们打算在这里对这些近似方法作一番概述. 因为即使在相当复杂的情形下, 利用它们也能很快得出解的概况, E. Truckenbrodt 的总结性文章^[24]会帮助我们了解这一点.

本章只讨论层流边界层的近似解法. 湍流边界层的类似解法(参看第二十二章)至今仍具有特殊的重要性.

所有的近似解法都是积分方法, 它们并不要求在每一条流线上都满足边界层方程, 而只是在整个边界层厚度上以某种平均意义来满足边界层方程. 所有的近似解法都基于第八章 e 中边界层理论的动量方程和能量方程. 所有这些解法都可以追溯到两篇论文, 一篇是 Th. von Kármán 的论文^[7], 另一篇是 K. Pohlhausen 的论文^[19]. 在将该方法应用到有压力梯度的二维和轴对称边界层的一般情形之前, 我们先将它们应用于零攻角平板的情形, 以此来讨论这种解法的基本特点. 由于整个平板上的压力梯度为零, 所以这个例子特别简单. 此外, 至少在一个具体情形下, 我们有可能估计出近似解法的近似程度, 并将它与第七章的精确解作比较.

a. 动量方程在绕零攻角平板流动中的应用

将动量方程应用在图 10.1 所示控制面内的流动体上, 设控制

面固定于空间，则可以得出下述结论：通过控制面的动量通量等于从前缘 ($x = 0$) 到 x 处平板上的摩擦阻力 $D(x)$ 。在第九章中，我们已经讨论过动量方程在零攻角平板上的应用，求得由公式(9.26)给出的一面浸湿的平板阻力，即

$$D(x) = b\rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy, \quad (10.1)$$

此式是在 x 处截面上积分。另一方面，阻力又可以用壁面上切应力 τ_0 沿平板的积分来表示：

$$D(x) = b \int_0^x \tau_0(x)dx. \quad (10.2)$$

比较公式(10.1)和(10.2)得出

$$\tau_0(x) = \rho \frac{d}{dx} \int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy. \quad (10.3)$$

此式还可用完全正规的方法由方程(7.22)导出，即将 x 方向的动量方程对 y 从 0 到 ∞ 进行一次积分求得。只要利用连续方程来消去速度分量 v ，并且注意到 $\mu(\partial u/\partial y)_{y=0} = \tau_0$ ，最后就不难得出公式(10.3)。

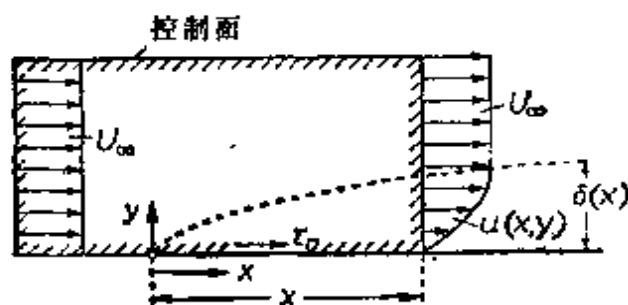


图 10.1 动量方程在零攻角平板绕流中的应用

引进由式(8.31)定义的动量厚度 δ_2 ，则有

$$U_{\infty}^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (10.4)$$

边界层理论中动量方程的一般形式为方程(8.32)，动量方程(10.4)只是其中的一个特殊情形，只适用于零攻角平板的情形。因为在所讨论的例子中没有压力梯度的影响，所以方程(10.4)的物理意义为：壁面上的切应力等于边界层中的动量损失。

到目前为止,方程(10.4)中并未作任何附加的假设,在下面的近似方法中将进行某些假设.但是在讨论这个问题之前,首先指出 τ_0 和 δ_2 之间的关系是有用的.我们将式(7.32)中 τ_0 的精确值代入方程(10.4),就可以得到 τ_0 和 δ_2 之间的关系.设 $\tau_0/\rho U_\infty^2 = \alpha\sqrt{\nu/U_\infty x}$,其中 $\alpha = 0.332$,则

$$\delta_2 = \int_0^x \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} dx = 2\alpha \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

由此得到

$$\delta_2 = 2 \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} x. \quad (10.5)$$

根据方程(10.3)或(10.4),现在可以对零攻角平板的边界层作出近似计算.近似解法的实质是在边界层中假设一个合适的速度分布函数 $u(y)$.但是应该注意,它要满足必要的边界条件.此外,它只包含一个独立参数,例如自然选取边界层厚度,这个参数最后由动量方程(10.3)定出.

在目前所讨论的零攻角平板的特殊情形下,可以利用速度剖面相似这个特点.所以设

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = f(\eta), \quad (10.6)$$

其中 $\eta = y/\delta(x)$ 是到壁面的无量纲距离,它以边界层厚度为参考长度.在这里,速度剖面的相似性表现为 $f(\eta)$ 只是 η 的函数,不再包含别的独立参数.从 u 的边界条件得出,函数 f 在壁面($\eta = 0$)上必须为零,而在 η 的值很大时应趋向于1.尽管边界层方程所有的精确解都是渐近的趋向于其相应的位势流解,但是在采用近似方法时,把过渡到位势流动看成发生在离开壁面有限的距离上是适当的,换句话说,就是假定有一个有限的边界层厚度 $\delta(x)$.就此而论,这样的边界层厚度并没有任何物理意义,只是一个在计算中用起来很方便的量.

采用了式(10.6)表示的速度剖面,我们就可以计算动量积分(10.3),由此得出

$$\int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy = U_{\infty}^2 \delta(x) \int_0^1 f(1-f)d\eta. \quad (10.7)$$

只要对 $f(\eta)$ 作出具体的规定, 方程(10.7)中的积分就可以计算出来. 为简短起见, 令

$$\alpha_1 = \int_0^1 f(1-f)d\eta, \quad (10.8)$$

则得出

$$\int_{y=0}^{\infty} u(U_{\infty} - u)dy = U_{\infty}^2 \delta_2 = \alpha_1 \delta U_{\infty}^2, \quad (10.9)$$

即
$$\delta_2 = \alpha_1 \delta.$$

为了以后需要, 现在还可以根据式(8.30)算出位移厚度 δ_1 的值. 设

$$\alpha_2 = \int_0^1 (1-f)d\eta, \quad (10.10)$$

则得

$$\delta_1 = \alpha_2 \delta. \quad (10.11)$$

另外, 壁面上的粘性切应力可以表示为

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\nu U_{\infty}}{\delta} f'(0) = \beta_1 \frac{\nu U_{\infty}}{\delta}, \quad (10.12)$$

其中

$$\beta_1 = f'(0). \quad (10.13)$$

将这些值代入动量方程(10.4), 得到

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\nu}{U_{\infty}}.$$

从 $x=0$ 处 $\delta=0$ 开始积分, 就得到近似理论的第一个结果, 其形式为

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}. \quad (10.14)$$

因此, 根据式(10.12), 壁面上的切应力变为

$$\tau_w(x) = \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta_1}{2}} \mu U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}}. \quad (10.15)$$

最后, 作用在两面浸湿的平板上的总阻力 $2D = 2b \int_0^l \tau_w dx$ 可以写成

$$2D = 2b \sqrt{2\alpha_1 \beta_1} \sqrt{\mu \rho l U_\infty^3}, \quad (10.16)$$

同时由方程(10.11)和(10.14)得出位移厚度

$$\delta_1 = \alpha_2 \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (10.17)$$

将边界层厚度、壁面上的切应力和阻力的近似表达式同精确理论中相应的公式(7.37), (7.31)和(7.33)作比较表明, 在所有情况下, 应用动量积分方程可以得到完全正确的表达式. 换句话说, 正确地导出了这些量对流动长度 x 、来流速度 U_∞ 和运动粘性系数 ν 的依赖关系. 而且不难证明, 根据近似计算也可以导出由式(10.5)所表示的动量厚度和壁面上切应力之间的关系. 剩下的未知系数 α_1 , α_2 和 β_1 , 只有在对速度剖面作出具体假设之后, 即式(10.6)中函数 $f(\eta)$ 的形式明确规定之后, 才能进行计算.

在给出 $f(\eta)$ 的表达式时, 必须使 $u(y)$ (即 $f(\eta)$) 满足一定的边界条件. 至少要满足无滑移条件, 即在 $y = 0$ 处有 $u = 0$, 以及从边界层速度剖面过渡到位势流速度时的连续条件, 即在 $y = \delta$ 处有 $u = U$. 更进一步的条件还可以包括在两个解的连接点上速度剖面斜率和曲率的连续性. 换句话说, 我们可以要求满足下述条件: 在 $y = \delta$ 处, $\partial u / \partial y = 0$ 和 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$. 在平板的情形下, $y = 0$ 处 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ 的条件也是很重要的, 因为从方程(7.15)看出, 精确解满足这个条件.

数值例子:

现在用几个例子来检验上述近似方法, 结果的好坏在很大程度上决定于对速度函数(10.6)的选取. 前面已经说明, 在任何情况下, 根据壁面上无滑移条件, 函数 $f(\eta)$ 在 $\eta = 0$ 处必须为零. 此外, 当 η 值很大时, 必须有 $f(\eta) = 1$. 如果只要求粗略的近似, 则过渡到值 $f(\eta) = 1$ 时, 可以有不连续的一阶导数. 对于比较好的近似, 则可以假定 $df/d\eta$ 连续. 不管对 $f(\eta)$ 假定的具体的形式如何, 下述量

$$\delta_1 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \delta_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \frac{\tau_w}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \quad c_f \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}}$$

一定是纯数量，它们很容易从式(10.8)至(10.17)算出来。

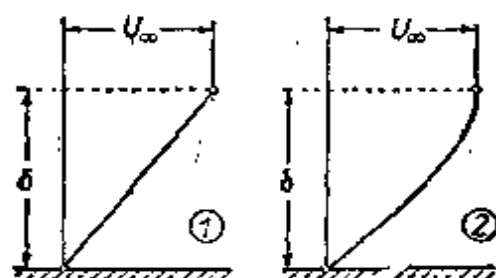


图 10.2 零攻角平板边界层中的速度分布
(1)线性近似
(2)表 10.1 中的三次曲线近似

表 10.1 中列出用几种不同的速度分布函数所算出的结果。前两个函数示于图 10.2 中，线性函数只满足 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$ 的条件，而三次函数还满足 $f'(1) = 0$ 和 $f''(0) = 0$ 的条件。最后，可以使四次多项式满足另一条件 $f''(1) = 0$ 。对于正弦函数，除去 $f''(1) = 0$ 的条件之外，满足和四次多项式同样的条件。由三次多项式，四次多项式和正弦函数算出的壁面上的切应力，其误差小于 3%，因而可以认为是完全合适的。位移厚度值也表明与相应的精确值相当吻合。

可以看出，在零攻角平板情形下，近似方法给出了满意的结果，与精确解计算中的复杂性相对照，近似计算显然是异常简单的。

b. 二维流动的 Th. von Kármán 和 K. Pohlhausen 近似方法

现在将上节的近似方法发展一步，使它适用于有压力梯度的二维边界层的一般问题。K. Pohlhausen^[19]首先阐明这一方法的最初形式。以后的表述是基于 H. Holstein 和 T. Bohlen^[20]所建立的更为现代的形式。我们仍旧选取以前用过的坐标系， x 表示沿浸湿壁面量度的弧长， y 表示到壁面的距离。将运动方程对 y 积分，由 $y = 0$ 的壁面积分到某个距离 $h(x)$ 。这里假定 $h(x)$ 大于 x 处的边界层厚度，这样就得到动量理论的基本方程。根据这些

表 10.1 零攻角平板边界层近似理论的计算结果

	速度分布 $u/U = f(\eta)$	α_1	α_2	β_1	$\delta_1 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$\frac{\tau_0}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$	$c_f \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{1/2}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{1,2}$
1	$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1.732	0.289	1.155	3.00
2	$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	1.740	0.323	1.292	2.70
3	$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^5$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2	1.752	0.343	1.372	2.55
4	$f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	1.741	0.327	1.310	2.66
5	精确解	—	—	—	1.721	0.332	1.328	2.59

$$\delta_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{2\tau_0}{\mu U_\infty} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}; \quad c_f \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{1/2} = 2\delta_1 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

符号,动量方程具有方程(8.32)所给出的形式,即

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1)U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (10.18)$$

象上一节的平板情形一样,只要对速度剖面假定一个合适的形式,方程(10.18)就给出关于边界层厚度的常微分方程,由此可以算出动量厚度、位移厚度和壁面上的切应力。在选取合适的速度函数时,仍旧需要有和前面相同的考虑,即关于壁面上的无滑移条件,以及这个解与位势流解的连接点上的连续性要求。此外,在有压力梯度的情形下,相应于负压力梯度的区域或正压力梯度的区域内,速度函数必需分别具有拐点和没有拐点。为了能够用近似方法计算分离点的位置,还必须能有壁面上梯度为零(即 $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$)的速度剖面。另一方面,可以不再规定各个 x 值上的速度剖面具有相似性。按照 K. Pohlhausen 的做法,假设速度函数为 η 的四次多项式,这里的 $\eta = y/\delta(x)$ 是到壁面的无量纲距离,也就是在区域 $0 \leq \eta \leq 1$ 中,设

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4, \quad (10.19)$$

而当 $\eta > 1$ 时,就取 $u/U = 1$ 。和以前一样,我们还要求边界层和位势流动在离壁面的有限距离 $y = \delta(x)$ 上能够连接起来。

为了确定四个独立常数 a, b, c, d , 我们规定下述四个边界条件:

$$\left. \begin{aligned} y=0: \quad & \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}; \\ y=\delta: \quad & u=U; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

从方程(7.10)至(7.12)可以看出,精确解也满足这个条件。

因为壁面的无滑移条件已隐含在式(10.19)中,所以上述条件足以定出常数 a, b, c, d 。其中第一个条件特别重要,因为由式(7.15)看出,所有的精确解都满足这个条件。这个条件确定了速度剖面在壁面附近的曲率,不仅保证速度剖面在降压区没有拐点,而且保证增压区有第七章中精确解所要求的拐点,见图 7.3 和图

7.4. 引入无量纲量

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}, \quad (10.21)$$

则得出式(10.19)中系数的下述表达式:

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad b = -\frac{\Lambda}{2}; \quad c = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad d = 1 - \frac{\Lambda}{6},$$

因此速度剖面为

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= F(\eta) + \Lambda G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) \\ &+ \frac{\Lambda}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4), \end{aligned} \quad (10.22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1 - \eta)^3(1 + \eta), \\ G(\eta) &= \frac{1}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6} \eta(1 - \eta)^3. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

容易看出, 用 $\eta = y/\delta(x)$ 表示的速度剖面构成一单参数的曲线族, 并以无量纲量 Λ 为形状因子. 无量纲量 Λ 还可以写成

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = - \frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu U/\delta}.$$

因此, 在物理上可以把 Λ 解释为压力与粘性力之比. 为了得到一个可以具有真实物理意义的量, 对于前面所定义的 δ , 必须用一个本身具有物理意义的且正比于 δ 的量来代替, 例如用动量厚度来代替. 这在本节的末尾再加以讨论.

图 10.3 中画出了由式(10.23)定义的两个函数 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$, 两者组合起来就是由式(10.22)给出的速度分布函数. 不同 Λ 值的速度剖面示于图 10.4 中. 当 $dU/dx = 0$ 时, 得出对应于 $\Lambda = 0$ 的速度剖面, 即对应于没有压力梯度的边界层的情形(零攻角平板), 或者对应于位势流动中速度达到最小值或最大值点上的情形. 在这种情形下, 速度剖面变得与上节平板中所用的四次多项式一样. 在有 $(\partial u/\partial y)_0 = 0$ (即 $a = 0$) 的分离点上, 速度剖面对

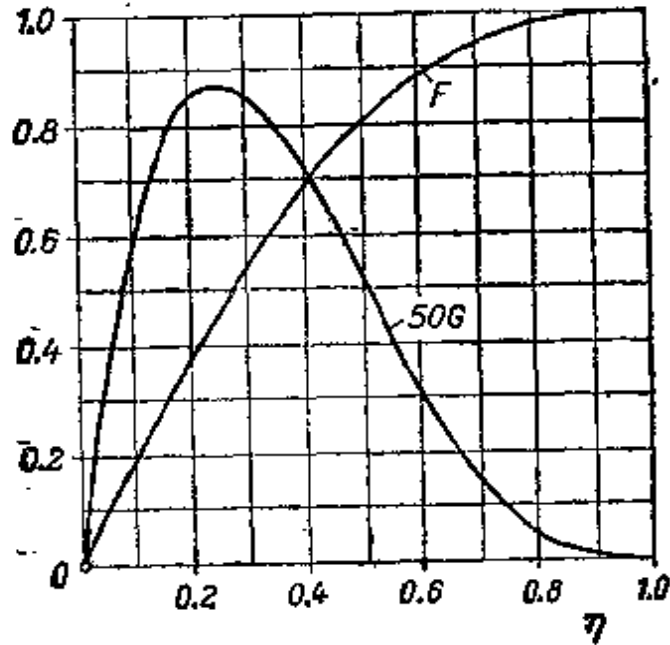


图 10.3 边界层的速度分布函数 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ ，根据式(10.22)和式(10.23)画出

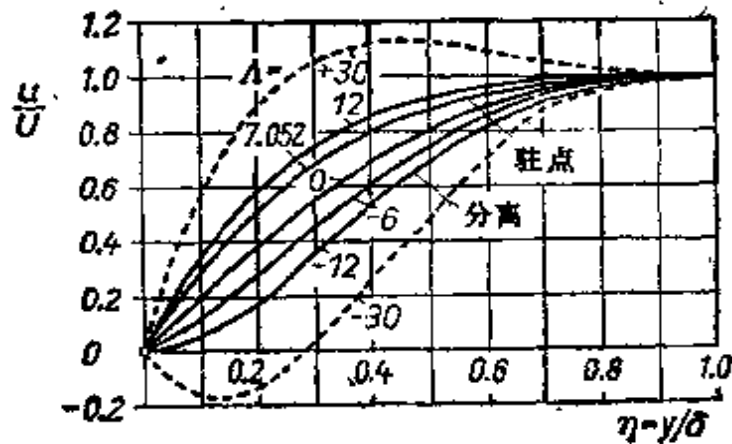


图 10.4 根据式(10.22)画出的单参数速度剖面族

应于 $\Lambda = -12$ 。以后将证明，驻点上的速度剖面对应于 $\Lambda = 7.052$ 。当 $\Lambda > 12$ 时，边界层中出现 $u/U > 1$ ，但是，这在定常流动中必须排除，因为在分离点以后，仍旧根据边界层概念所进行的计算已失去意义，所以，可以看出，形状因子限制在 $-12 \leq \Lambda \leq 12$ 的范围内，见图 10.4。

在根据动量定理着手计算边界层厚度 $\delta(x)$ 之前，如上节中对零攻角平板所做的那样，最好是借助于近似的速度剖面，先计算出动量厚度 δ_2 ，位移厚度 δ_1 和壁面上的粘性切应力 τ_0 。我们根据式

(8.33), (8.31), 以及式(10.22)得出

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta,$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [F(\eta) + \Lambda G(\eta)][1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta.$$

然后利用式(10.23)中的 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 计算上述定积分, 结果得到

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}; \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right). \quad (10.24)$$

类似地, 壁面上的粘性应力 $\tau_0 = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ 可以表示为

$$\frac{\tau_0 \delta}{\mu U} = 2 + \frac{\Lambda}{6}. \quad (10.25)$$

为了确定出尚属未知的形状因子 $\Lambda(x)$, 并由此根据式(10.21)确定出函数 $\delta(x)$, 现在必须求助于动量方程(10.18). 将方程(10.18)乘以 $\delta_2/\nu U$, 就可以表示成下述无量纲的形式:

$$\frac{U \delta_2 \delta_2'}{\nu} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{U' \delta_2^2}{\nu} = \frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U}, \quad (10.26)$$

其中不显含边界层厚度 δ ; 这种情况不足为奇, 因为 δ 只是与一个近似计算方法有关的随意出现的量, 并不具有特定的物理意义. 另一方面, 方程(10.26)却包含一些真正的重要的物理量, 即位移厚度 δ_1 , 动量厚度 δ_2 , 以及壁面上的切应力 τ_0 . 所以, 很自然地要从由动量方程(10.26)计算 δ_2 开始, 然后由 δ_2 再借助于式(10.24)导出 δ . 为此, 按照 H. Holstein 和 T. Bohlen^[5] 的意见, 最好是引进第二个形状因子

$$K = \frac{\delta_2'}{\nu} \frac{dU}{dx}, \quad (10.27)$$

K 和动量厚度的关系与第一个形状因子 Λ 和边界层厚度 δ 的关系相同, 见式(10.21). 另外, 设

$$Z = \frac{\delta_2^2}{\nu}, \quad (10.28)$$

则

$$K = Z \frac{dU}{dx}. \quad (10.29)$$

由式(10.21), (10.27)和(10.24)可以看出, 形状因子 Λ 和 K 满足普适关系

$$K = \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2 \right)^2 \Lambda. \quad (10.30)$$

为了简洁起见, 记

$$H_{11} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{120} \Lambda}{\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2} = f_1(K), \quad (10.31)^{1)}$$

$$\frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U} = \left(2 + \frac{1}{6} \Lambda \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2 \right) = f_2(K). \quad (10.32)$$

将式(10.27)和(10.28)中的 K 和 Z 以及式(10.31)和(10.32)中的 $f_1(K)$ 和 $f_2(K)$ 分别代入动量方程(10.26), 并且有 $\delta_2 \delta_2' / \nu = \frac{1}{2} \frac{dZ}{dx}$, 我们得到关系式

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)] K = f_2(K). \quad (10.33)$$

最后, 我们引入另一个缩写函数

$$2f_2(K) - 4K - 2Kf_1(K) = F(K), \quad (10.34)$$

或者完整地写出,

$$F(K) = 2 \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2 \right) \left[2 - \frac{116}{315} \Lambda + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{1}{9072} \Lambda^3 \right], \quad (10.35)$$

其中 Λ 和 K 的关系已由式(10.30)给出。根据所有这些缩写符号

1) 量 $H_{11} = \delta_1 / \delta_2$, 也当作是形状因子; 对于湍流边界层而言, 它是非常重要的, 参阅第二十二章。在层流边界层区域中, H_{11} 的值约为 2.3—3.5; 参见表 10.2; 在湍流边界层中, H_{11} 取值约为 1.3—2.2。在转折点上, H_{11} 显著增大, 参见图 16.5。

及代换, 动量方程(10.33)可以改写成非常紧凑的形式

$$\boxed{\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U}; K = ZU'} \quad (10.36)$$

这是关于 Z 的一阶非线性微分方程, 其中 $Z = \delta_2^2/\nu$ 是当前的长度坐标 x 的函数。虽然函数 $F(K)$ 的形式非常复杂, 但是, 从解方程(10.36)这一点来说, 并没有造成实际上的困难。因为 $F(K)$ 是一个普适函数, 即 $F(K)$ 是一个与物体形状无关的函数, 所以可一劳永逸地计算出来。表 10.2 中分别列出由式(10.30)算出的函数 $K(\Lambda)$ 的值, 以及由式(10.31), (10.32) 和 (10.35) 算出的 $f_1(K)$, $f_2(K)$ 和 $F(K)$ 的值。而辅助函数 $F(K)$ 在图 10-6 中用曲线表示出来。

关于动量厚度的微分方程的解: 关于求解方程(10.36)的问题, 可作如下说明: 计算应该从驻点 $x = 0$ 处开始, 在驻点上有 $U = 0$, 并且除了物体在驻点具有夹角为零的尖缘之外, du/dx 为有限的非零值。在上游驻点处, 如果 $F(K)$ 不为零, 那么积分曲线的初始斜率 dZ/dx 将变成无限大。由此, 可以看出, 函数 $F(K)$ 具有有物理意义的初值。 $F(K)$ 为零的 Λ 取值是使式(10.35)右边第二个括号为零, 于是有

$$\text{当 } K = K_0 = 0.0770 \text{ 或 } \Lambda = \Lambda_0 = 7.052 \text{ 时,}$$

$$F(K) = 0.$$

因此, 如前所述, $\Lambda = 7.052$ 是第一个形状因子在驻点的值。由此可以看出, 在上游驻点处积分曲线的初始斜率为不定型 $\frac{0}{0}$ (方程(10.30)的奇点)。不过, 通过简单的取极限的过程, 可以很容易的计算出这个值。我们得到

$$Z_0 = \frac{K_0}{U_0} = \frac{0.0770}{U_0}; \left(\frac{dZ}{dx}\right)_0 = -0.0652 \frac{U_0''}{U_0^2}. \quad (10.36a)$$

这里, 下标 0 指上游驻点。根据这些初值, 可以很方便地对方程进行积分, 例如, 用等倾法。图 10.5 说明这种方法在零攻角对称翼型上的应用。计算以前缘驻点上的值 $\Lambda_0 = 7.052$ 和 $K_0 = 0.0770$ 开始, 一直计算到分离点上的值 $\Lambda = -12$ 和 $K = -0.1567$ 为止。

速度函数 $U(x)$ 及其一阶导数 dU/dx ，则由位势流解给出。对于积分曲线的初始斜率而言，只要求给出在前缘上的 d^2U/dx^2 值。

计算所采取的步骤可以总结如下：

1. 给出用弧长 x 表示的位势流函数 $U(x)$ 及其导数 dU/dx ;
2. 对方程(10.36)积分给出 $Z(x)$ 和第二形状因子 $K(x)$ ，以便由此从式(10.27)能计算出动量厚度 $\delta_2(x)$ ，随后可以求出分离点的位置；
3. 由式(10.30)和表 10.2 得出第一形状因子的变化；
4. 利用表 10.2 的数值，可以根据式(10.31)和(10.32)分别求出位移厚度 δ_1 和壁面上的切应力 τ_0 ；
5. 由式(10.24)得出边界层厚度 $\delta(x)$ ；
6. 最后，从式(10.22)求得速度分布。

表 10.2 层流边界层近似计算中的辅助函数，
取自 Holstein 和 Bohler^[5]

A	K	$F(K)$	$f_1(K) = \frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$	$f_2(K) = \frac{\delta_2 \tau_0}{\mu U}$
15	0.0884	-0.0658	2.279	0.346
14	0.0928	-0.0885	2.262	0.351
13	0.0914	-0.0914	2.253	0.354
12	0.0948	-0.0948	2.250	0.356
11	0.0941	-0.0912	2.253	0.355
10	0.0919	-0.0800	2.260	0.351
9	0.0882	-0.0608	2.273	0.347
8	0.0831	-0.0335	2.289	0.340
7.8	0.0819	-0.0271	2.293	0.338
7.6	0.0807	-0.0203	2.297	0.337
7.4	0.0794	-0.0132	2.301	0.335
7.2	0.0781	-0.0051	2.305	0.333
7.052	0.0770	0	2.308	0.332
7	0.0767	0.0021	2.309	0.331
6.8	0.0752	0.0102	2.314	0.330
6.6	0.0737	0.0186	2.318	0.328
6.4	0.0721	0.0274	2.323	0.326
6.2	0.0706	0.0363	2.328	0.324

续表

A	K	$F(K)$	$f_1(K) = \frac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12}$	$f_2(K) = \frac{\delta_2 \tau_0}{\mu U}$
6	0.0689	0.0459	2.333	0.321
5	0.0599	0.0979	2.361	0.310
4	0.0497	0.1579	2.392	0.297
3	0.0385	0.2255	2.427	0.283
2	0.0264	0.3004	2.466	0.268
1	0.0135	0.3820	2.508	0.252
0	0	0.4698	2.554	0.235
-1	-0.0140	0.5633	2.604	0.217
-2	-0.0284	0.6609	2.647	0.199
-3	-0.0429	0.7640	2.716	0.179
-4	-0.0575	0.8698	2.779	0.160
-5	-0.0720	0.9780	2.847	0.140
-6	-0.0862	1.0877	2.921	0.120
-7	-0.0999	1.1981	2.999	0.100
-8	-0.1130	1.3080	3.085	0.079
-9	-0.1254	1.4167	3.176	0.059
-10	-0.1369	1.5229	3.276	0.039
-11	-0.1474	1.6257	3.383	0.019
-12	-0.1567	1.7241	3.500	0
-13	-0.1648	1.8169	3.627	-0.019
-14	-0.1715	1.9033	3.765	-0.037
-15	-0.1767	1.9820	3.916	-0.054

A. Walz^[23]指出,可以引入进一步的近似,将方程(10.36)化成一个简单的求积问题,而没有任何明显的精度损失.他发现函数 $F(K)$ 可以用直线

$$F(K) = a - bK$$

来很好地近似,其中 $a = 0.470$ 和 $b = 6$.这种近似在驻点和最大速度点之间特别与精确值一致(见图10.6).这样一来,方程(10.36)化为

$$U \frac{dZ}{dx} = a - bK,$$

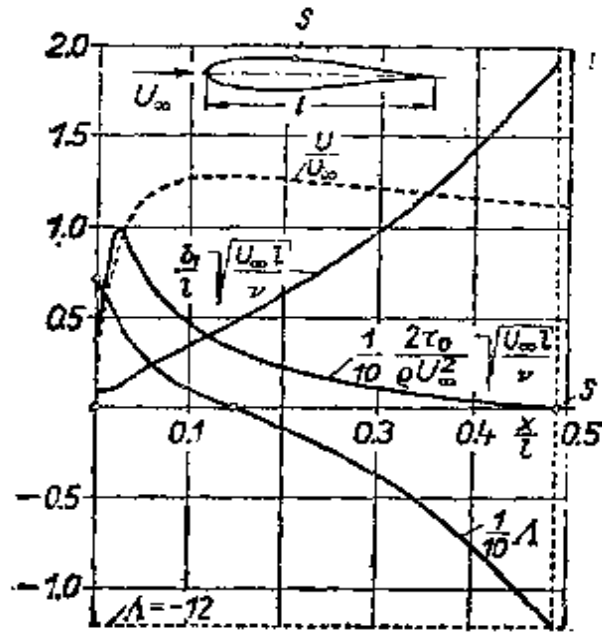


图 10.5 用 Pohlhausen 和 Hosten-Bohlen^[6] 建立的近似方法计算边界层的例子，对零攻角($\alpha = 0$)的 Zhukovskii 对称翼型 J015 用等倾法所得到的微分方程(10.36)的解。也可见图 10.12
 $s =$ 分离点

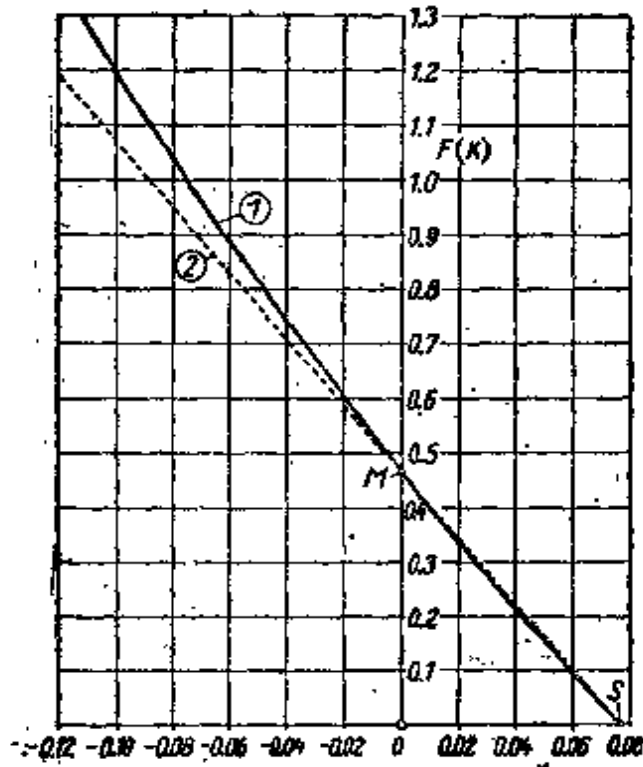


图 10.6 用 Holstein 和 Bohlen^[7] 方法计算的层流边界层的辅助函数 $F(K)$
 (1) 利用方程(10.35);
 (2) 线性近似 $F(K) = 0.470 - 6K$;
 $S =$ 驻点; $M =$ 速度最大值点

或将 Z 和 K 最初的定义值代入, 则得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{U \delta_2^2}{\nu} \right) = a - (b-1) \frac{U \delta_2^2}{\nu} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}$$

显然, 这个关于 $U \delta_2^2 / \nu$ 的微分方程可以积分成

$$U \frac{\delta_2^2}{\nu} = \frac{a}{U^{b-1}} \int_0^x U^{b-1} dx,$$

或者利用上面给出的 a 和 b 的数值, 得出

$$\boxed{\frac{U \delta_2^2}{\nu} = \frac{0.470}{U^3} \int_{x=0}^x U^3 dx.} \quad (10.37)$$

由此可见, 方程(10.36)的求解可以化成简单的求积分. 在第二十二章中求解湍流中相应方程的解时, 也将利用类似的求积方法.

c. 近似解和精确解的比较

1. 零攻角平板. 在零攻角平板情形下, 由方程(10.22)容易看出: Pohlhausen 近似就等价于表 10.1 中的例 3. 这种情形也可以直接从方程(10.36)得出. 因为此时 $U(x) = U_\infty$, $U' \equiv 0$, 于是 $K = \Lambda \equiv 0$, 所以方程(10.36)给出 $dZ/dx = F(0)/U_\infty = 0.4698/U_\infty$. 考虑到在 $x = 0$ 处 $Z = 0$, 由此得出 $Z = 0.4698x/U_\infty$, 或 $\delta_2 = 0.686\sqrt{\nu x/U_\infty}$, 这与表 10.1 中数值相符. 为了便于比较, 表 10.1 列出了边界层参数的精确值和近似值. 可以看出, 它们之间的吻合程度是非常令人满意的.

2. 二维驻点流动. 在第五章第 9 节中给出过二维驻点流动问题的精确解, 其中 $U(x) = U' \cdot x$. 用该方法计算出的位移厚度, 动量厚度和壁面切应力的精确值列于表 10.3.

表 10.3 在二维驻点流动的情形下, 边界层参数的精确值和近似值的比较

	$\delta_1 \sqrt{\frac{U'}{\nu}}$	$\delta_2 \sqrt{\frac{U'}{\nu}}$	$\frac{x_0}{\mu U} \sqrt{\frac{\nu}{U}}$	$H_{12} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$
K. Pohlhausen 近似方法的结果	0.641	0.278	1.19	2.31
精确解	0.648	0.292	1.233	2.21

在近似方法中有 $Z_0 = K_0/U'$, 因而根据方程(10.36)可知, 动量厚度由 $\delta_2 \sqrt{U'/\nu} = \sqrt{K_0} = \sqrt{0.0770} = 0.278$ 给出, 由方程(10.31)看出, 位移厚度由 $\delta_1 \sqrt{U'/\nu} = f_1(K_0) \sqrt{K_0} = 0.641$ 近似确定; 而关于壁面切应力, 方程(10.32)则给出 $\tau_0/\mu U \cdot \sqrt{\nu/U'} = f_2(K_0)/\sqrt{K_0} = 0.332/0.278 = 1.19$. 在这种情形下, 近似值和精确值的吻合程度也是完全令人满意的。

3. 绕圆柱的流动. 在 K. Pohlhausen 原来的文章^[20]中, 将绕圆柱流动的近似计算结果与 Hiemenz 解 (见第九章 c) 进行了比较. 他采用了 Hiemenz 关于圆柱体的实验压力分布函数, 并将结果与 Hiemenz 解作了比较, 该 Hiemenz 解只取了 Blasius 级数的前三项. Hiemenz 解表明分离发生在 $\phi = 82.0^\circ$ 处, 而 Pohlhausen 的近似值为 $\phi = 81.5^\circ$. 但是, 对于分离点附近的边界层厚度而言, 用近似方法得到的值却远大于由 Hiemenz 所得到的值. 此外, 必须认识到这一比较不是结论性的, 因为只包含 Blasius 级数前三项的解本身不足以代表分离点附近的解。

现在将用 Pohlhausen 近似方法所得到的结果和在数字计算机上直接解微分方程所得到的高精度数值结果进行比较. 用来比较的例子就是绕圆柱的流动, 其外流速度是用位势流理论计算的, 其边界层速度是用包含到 x^{11} 的 Blasius 级数计算的 (见第九章 c). 这一比较说明: 一直到分离点附近, 幂级数方法都具有很高的精度. 但是在分离点本身, 级数在 x^{11} 的项上截断就变得不精确了. 图 10.7 中画出了一组边界层参数的曲线, 有位移厚度 δ_1 , 动量厚度 δ_2 和壁面切应力 τ_0 . 由图看出, 就位移厚度和动量厚度的变化以及切应力的变化而论, 根据 W. Schoenauer^[20]所作的新的数值计算结果表明: 在分离点附近稍有不同的趋势, 并预言分离点的出现要早些. W. Schoenauer 求得的分离角度为 $\phi_s = 104.5^\circ$, 而用 Pohlhausen 近似方法得到的 $\phi_s = 109.5^\circ$, 用取到 x^{11} 项的级数展开式给出的 $\phi_s = 108.8^\circ$. 速度分布之间的比较 (见图 10.8) 得出下述结论: 在 $0 < \phi < 90^\circ$ 的角度范围内, 即在外部流动加速的区域内, 精确解和近似解几乎完全一致. 对比之下, 在最小压力

点的下游,当接近分离点时,其间的差异增加得非常迅速。

至今还没有给出关于衡量近似程度的一般准则,看来要得出这种准则是很困难的。但是由上述计算和类似计算以及实验结果来判断,似乎有理由肯定, Pohlhausen 近似方法在位势流动的加速区域内得出非常令人满意的结果,类似地可以说明,在位势流动减

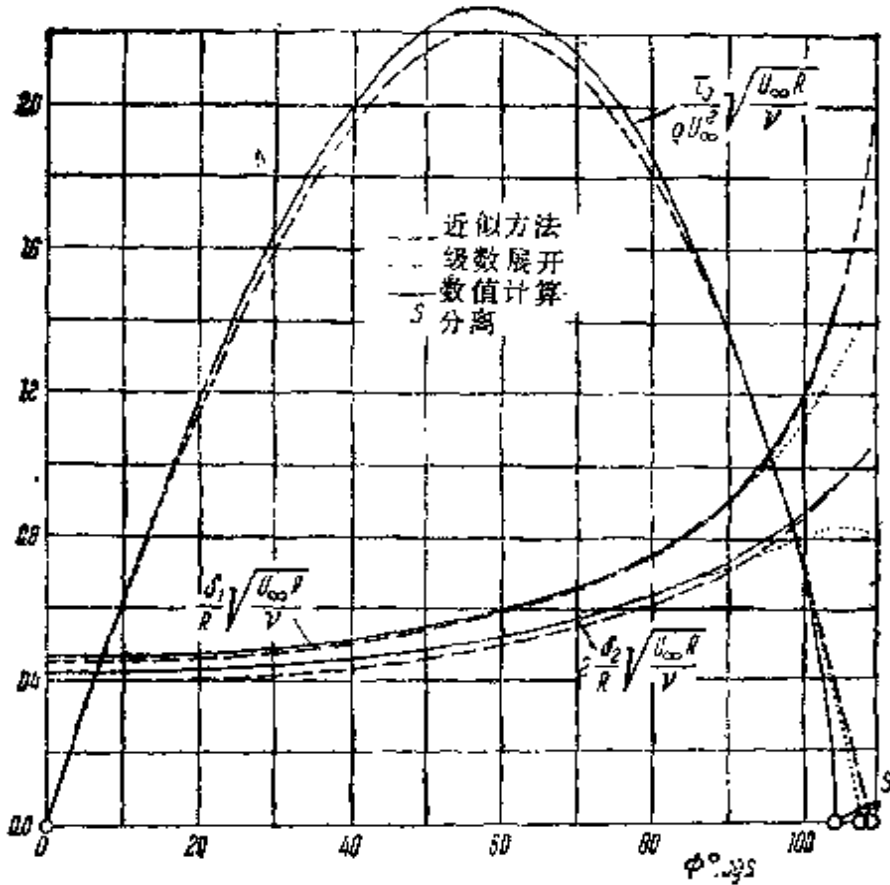


图 10.7 在圆柱情形下, Pohlhausen 近似解与精确解的比较

- δ_1 = 位移厚度;
- δ_2 = 动量厚度;
- τ_0 = 壁面的切应力。

速的区域中,当接近分离点时,近似解变得不那么精确了。特别是在分离点位于最小压力点后面很远的情形下,所计算出的分离点位置会有某种程度的不确定性¹⁾²⁾。

1) 例如: 对于长细比 $a:b = 2.96:1$ 的椭圆柱,当来流平行于长轴时, G. B. Schubauer^[21] 测量了最小压力点的位置,测得它位于 $x/b = 1.3$ 处,而分离发生在 $x/b = 1.99$ 处。对于速度剖面而言,一直到最小压力点为止,用 Pohlhausen 近

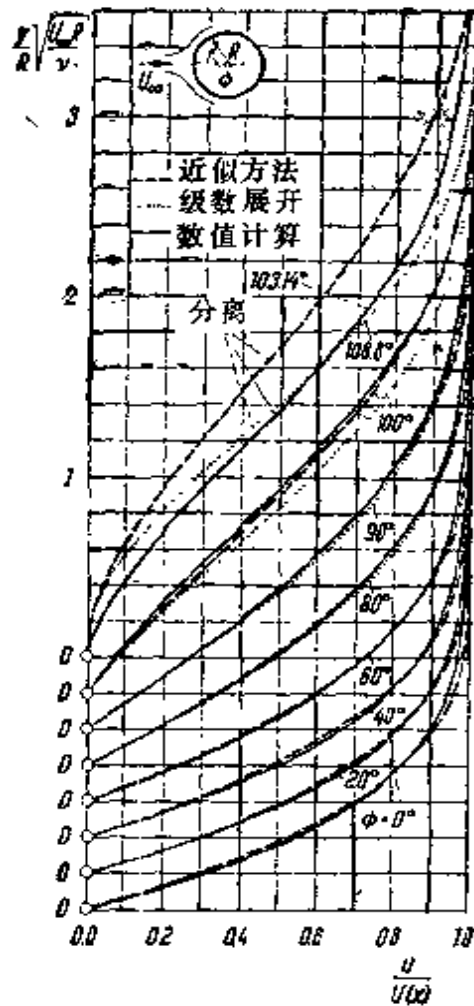


图 10.8 圆柱情形中的速度剖面, Pohlhausen 近似解与精确解的比较

根据速度剖面组成单参数曲线族的假定, 必然得出分离点仅由这个参数值确定的结论。但是 I. Tani^[22]证明, 分离点的位置还依赖于外部流动的压力梯度。

似方法计算的结果与实验测量的结果都非常吻合, 但是近似方法算不出分离。D. Meksyn^[13]建立了一种计算方法。对于上述例子, 该方法得出分离点位于 $x/b = 2.02$ 处。在他的方法中, 边界层方程被变换成与 Falkner-Skan 方程(9.8)类似的常微分方程。

- 2) 在此应该指出: 在压力梯度很大, 即对应于 $\Delta > 12 (K > 0.095)$ 的区域中, 用 Pohlhausen 近似方法的等倾法来近似求积是无效的, 因为 K 随 Δ 变化的曲线在此向下弯转(见表 10.2), 所以超过 $K = 0.095$ 的范围之后, 不能继续积分下去。而且当 $\Delta > 12$ 时, 由于速度剖面中有 $u/U > 1$ 的点(图 10.4), 所以这些速度剖面已不适用。如果利用方程(10.37), 就可避免这些困难。

d. 其它的算例

在本节中，我们打算把用上述近似方法计算边界层的若干算例概括一下，这一工作是由 H. Schlichting 和 A. Ulrich 在论文 [19] 中最先给出的。第一组例子是关于长轴平行于来流方向的椭圆柱，其长短轴之比分别为 $a/b = 1, 2, 4, 8$ ，位势流速度分布函数见图 10.9 中的曲线。速度的最大值为 $U_m/U = 1 + b/a$ 。边界层的位移厚度 δ_1 ，形状因子 Λ 和壁面上切应力 τ_0 等特征参数，见图 10.10 中曲线，为了进行比较，在同一图中还画有零攻角平板的结果。在圆柱的情形下，如上所述，分离发生在 $x/l' = 0.609$ ，即 $\phi = 109.5^\circ$ 处 ($2l' =$ 周长)，椭圆愈细长分离点愈移向下游。分离点的位置标志在图 10.9 中速度剖面的曲线上。 $a/b = 8$ 的椭圆的结果，与零攻角平板的结果几乎相同。对应于 $a/b = 4$ 的椭圆情形，图 10.11 中画出了一组边界层的速度剖面。关于短轴平行于来流的椭圆以及旋转椭球的计算结果，可以从 J. Pretsch 的论文^[17]中找到。

另一个例子示于图 10.12 中，它是零攻角下 Zhukovskii 对称

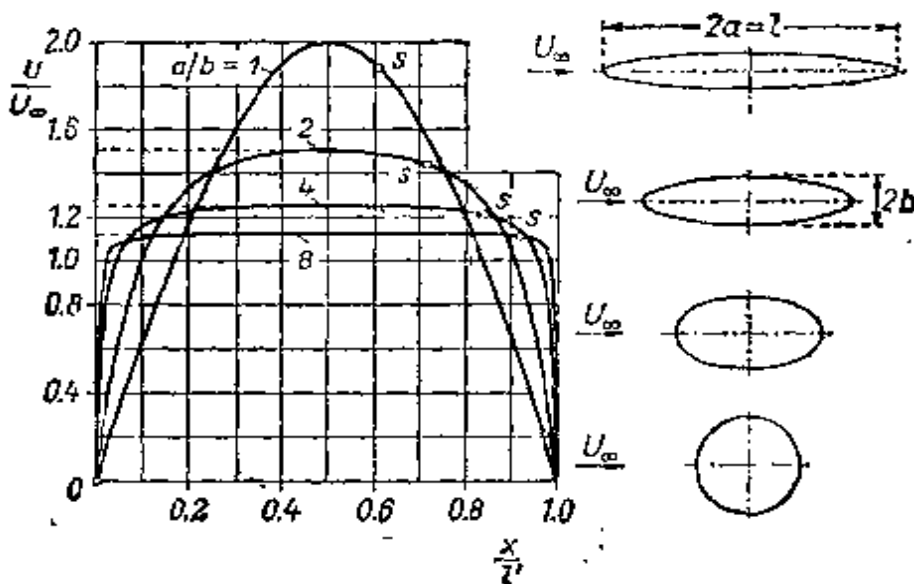


图 10.9 在长细比为 $a/b = 1, 2, 4, 8$ 的椭圆柱上，当来流方向平行于椭圆长轴时的位势流速度分布函数
 s = 分离点的位置

翼型的结果。最小压力点在 $x/l' = 0.141$ 处，它非常靠近前缘。在其后面，压力上升是很缓慢的，所以，分离点在最小压力点下游很远的地方，即位于 $x/l' = 0.470$ 处。因为 Zhukovskii 翼型有尖的尾缘，所以尾缘的位势流速度不为零。有关不同厚度比，不同弯度比的 Zhukovskii 翼型的许多系列，在不同攻角下的系统的边界层计算的详情，可以参阅 K. Bussmann 和 A. Ulrich 的论文^[2]。

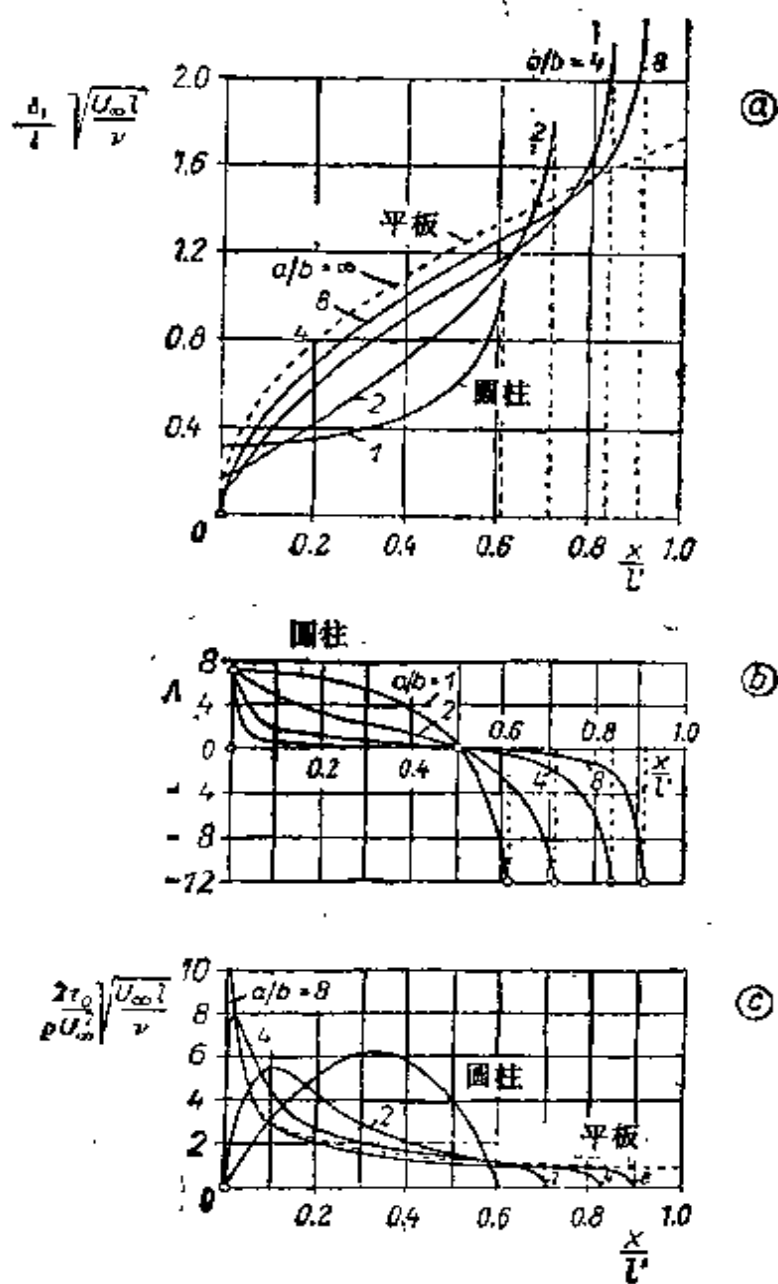


图 10.10 图 10.9 中长短比为 $a/b = 1, 2, 4, 8$ 的椭圆柱上边界层的计算结果。a) 边界层位移厚度；b) 形状因子；c) 壁面上的切应力， $2l'$ = 椭圆的周长； $a/b = 1$ 为圆柱； $a/b = \infty$ 为平板

对于迄今已提出的大量近似方法的评述,发表在由 L. Rosennead 主编的名为“层流边界层”^[18]的文集中。

在改进层流边界层的计算精度的工作中,许多作者利用双参数方法来代替上述的单参数方法。要做到这点,除了满足动量积分方程之外,还满足能量积分方程(例如参阅 K. Wiegardt^[27])。L. G. Loitsianskii 及其合作者^[8,9,10,11,12,14]已经广泛发展了双参数方法。由于这种双参数方法非常复杂,同时其精度难以评定,所以目前的作者都偏爱借助于大型电子计算机的精确的数值方法,这些方法的原理在第九章中已作过简要叙述。

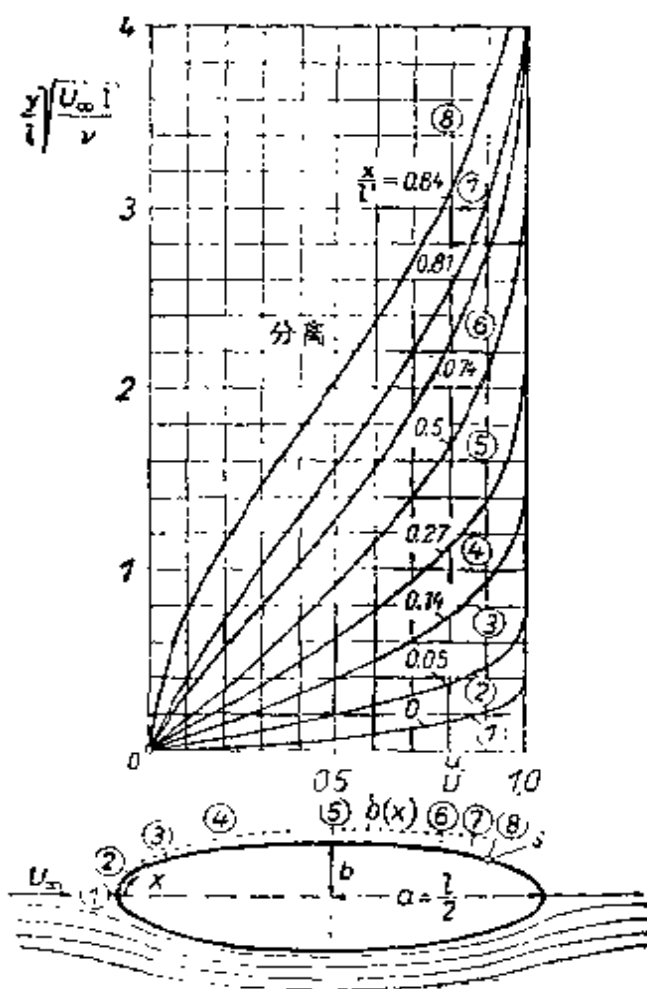


图 10.11 椭圆柱上层流边界层的速度剖面, 长短轴比 $a/b = 4$

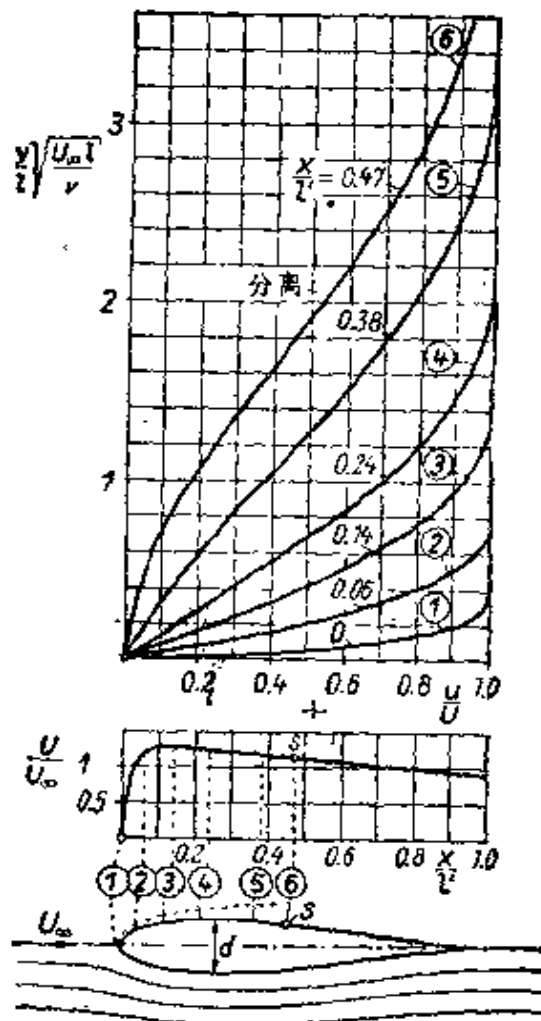


图 10.12 Zhukovskii 翼型 J015 上层流边界层中速度剖面以及位势流速度函数, 翼型厚度比 $d/l = 0.15$, 攻角 $\alpha = 0$

e. 有逆压梯度的层流流动; 分离

有逆压梯度的流动(减速流动)具有很大的实际意义。在这方面, 总是希望避免从壁面上分离, 因为分离现象伴随着大量的能量损失。绕翼型的流动就是这样一种情形。由于在吸力面上后缘的压力必须增加到来流流场的值, 因此, 流动很可能总是发生分离的。扩张槽(扩压器)中的流动提供了另一个例子。利用此种扩张槽形状的目的是将动能转换成压力能, 但是如果扩张角取得过大, 就会发生分离。

关于分离点邻域中边界层的特性, S. Goldstein^[41] 和 B. S. Stratford^[118] 已经作了理论研究, 可参阅 S. N. Brown 和 K. Stewartson^[11] 的评论文章。

观察表明, 从壁面分离出来的层流边界层常常是先变成湍流, 然后再附于壁面。这种现象导致层流分离泡的产生, 这种流体泡本身位于分离点 S 和再附点 R 之间, 见图 10.13b。在泡中的流体作循环运动。根据图 10.13a, 沿壁面的压力分布可简单地表述为: 在分离点 S 和最大厚度点 T 之间压力为常数, 然后, 从 T 到再附点 R , 压力线性增加。I. Tani^[23] 已经对这种现象作了详细的描述。最近, A. D. Young 等^[118] 以

及 M. Gaster^[44] 和 J. L. Van Ingen^[45] 已经对层流分离泡的性质进行了实验研究。有关的理论文献参阅[2b, 3a, 5a]。

现在可以借助几个例子来说明，无分离的层流只能承受很小的逆压梯度。所以，如果流动是层流的，那么在实际应用中存在的逆压梯度几乎总会导致分离。大量实际流动可以承受相当大的压力增长率而不分离，是由于流动基本上是湍流。以后可以看到，湍流可以克服很大的逆压梯度而不出现分离。这方面最著名的例子是绕圆柱和绕圆球的流动，这里层流分离比起湍流分离来发生在上游远得多的地方。实际上，当有逆压梯度存在时，流动几乎总是湍流的。这是因为逆压梯度的存在更容易使层流转换为湍流。尽管为此，通过层流的例子来弄清防止分离的某些基本关系还是有用的，特别是层流远比湍流容易进行数学处理。

防止分离的方法有好几种。其中最简单的方法是使逆压梯度保持在发生分离的

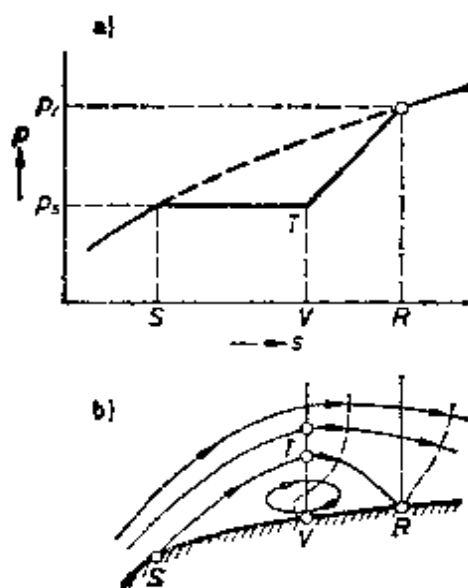


图 10.13 层流边界层中的分离泡(取自 I. Tani^[23])。a) 流体泡中沿壁面的压力分布(示意图)；b) 流体泡形状(示意图)。流体泡中 S 和 V 之间的压力保持为 p_s 不变；在 V 的下游，压力增加到 p_r 。

S = 分离点
R = 再附点
V - T = 气泡高度

限度以下。下面将用数值例子来说明这一概念。另一种可能性是控制边界层，例如用抽吸或将流体射入边界层，或在机翼的临界区域中容易影响边界层的地方加辅助装置。这些方法将在第十四章中更全面地讨论。

现在按照 L. Prandtl 的文章^[16]，说明如何才能估计恰好不出现分离时逆压梯度的容许值。我们的分析是根据第十章 b 中所研究的 von Kármán-Pohlhausen 近似方法。假定直到非常靠近分离点的某一个点，例如图 10.14 中的点 o 为止，边界层一直受到位势流动中压力分布的作用。从这个点开始，假定下游的压力梯度使速度剖面的形状保持不变，或者换句话说，形状因子 A 保持为常值；因为在分离点上 $A = -12$ ，所以在该点选取 $A = -10$ 。由表 10.2 看出，这导致第二形状因子有确定的值，即 $K = 0.1369$ ，所以 $F(K) = 1.523$ 。利用这些值，可以从式(10.28)和(10.29)知道，防止分离意味着位势流速 $U(x)$ 和动量厚度 $\delta_2(x)$ 之间有下列关系：

$$\frac{\delta_i^2}{\nu} = Z = \frac{0.1369}{-U'(x)}$$

由此得出 $dZ/dx = 0.1369 U''/U'^2$, 或

$$U \frac{dZ}{dx} = 0.1369 \frac{UU''}{U'^2} = 0.1369 \sigma, \quad (10.38)$$

其中

$$\sigma = \frac{UU''}{U'^2}. \quad (10.39)$$

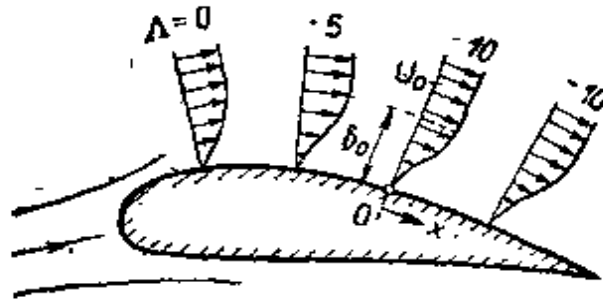


图 10.14 在层流分离被防止的情形下, 边界层的发展

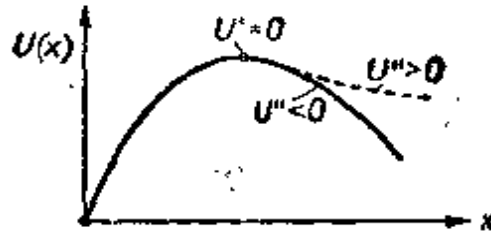


图 10.15 有分离和无分离的层流边界层的位势流速度函数

另一方面, 当 $x > 0$ 时, 由动量方程(10.36)给出以后的速度剖面, 即

$$U \frac{dZ}{dx} = F(K) = 1.523, \quad (10.40)$$

其中对应于 $\Delta = -10$ 的 $F(K)$ 的数值已经代入。由方程(10.38)和(10.40)得出, 如果 $0.1369\sigma = 1.523$, 即如果

$$\sigma = \frac{UU''}{U'^2} = 11.13 \approx 11, \quad (10.41)$$

$$\sigma > 11: \text{不分离}; \quad \sigma < 11: \text{分离}, \quad (10.41a)$$

则形状因子的值保持为 $\Delta = -10$ 不变。上述讨论表明: 如果 $\sigma > 11$, 则边界层能够承受这种逆压梯度, 而 $\sigma < 11$ 意味着分离。如果 σ 保持 $\sigma = 11$ 不变, 同时 $\Delta = -10$, 那么边界层继续处于分离的边缘。

关于不导致分离的位势流速度函数 $U(x)$ 的形状, 立即可以定性地作出下述说明。根据方程(10.41)看来

$$U' > 0$$

是减速流动 ($U' < 0$) 附着在壁面上的必要条件。换句话说, 逆压梯度值必须沿流动方

向减小(图 10.15), 因此, 如果速度函数 $U(x)$ 在其最大值后面向下弯曲($U'' < 0$), 则分离总要发生. 反之, 如果速度函数向上弯曲($U'' > 0$), 则分离可以避免. 即使 $U'' = 0$ 的极限情形, 即速度随弧长线性减小的情形, 也总是导致分离. 后一种情形的说明与第九章 d 中得到的结果相同, 在那里研究了位势流速度线性减小的边界层, 其微分方程的解引自 L. Howarth 的文章. 不出现分离的充分条件可以表示为

$$U'' > 11U'^2/U.$$

对于 $\sigma = 11$ 的极限情形, 即边界层处于出现分离边缘的情形, 我们来计算位势流动和边界层厚度的变化. 由方程(10.41)得到

$$\frac{U'''}{U''} = 11 \times \frac{U'}{U},$$

或通过积分得到 $\ln U' = 11 \ln U + \ln(-C_1)$, 即 $U'/U^{11} = -C_1$, 这里 C_1 表示积分常数. 再积分一次得到

$$\frac{1}{10} U^{-10} = C_1 x + C_2. \quad (10.42)$$

在 $x = 0$ 处, 必须有 $U(x) = U_0$, 所以 $C_2 = \frac{1}{10} U_0^{-10}$. 进一步设 $C_1 U_0^{10} = C_3$, 由方程(10.41)得到

$$U(x) = \frac{U_0}{(1 + 10C_3 x)^{1/10}} \quad (10.43)$$

式(10.43)代表分离刚好可以避免的位势流速度. 常数 C_3 可以由原点 $x = 0$ 处边界层厚度的值 δ_0 来确定. 我们有 $A = U' \delta^2 / \nu = -10$ 或 $\delta = \sqrt{10\nu / (-U')}$. 同时由式(10.43)得到

$$U = -\frac{C_3 U_0}{(1 + 10C_3 x)^{11/10}},$$

所以

$$\delta = \sqrt{\frac{10\nu}{C_3 U_0}} (1 + 10C_3 x)^{11/20}$$

根据 $x = 0$ 处 $\delta = \delta_0$, 则有 $C_3 = 10\nu / U_0 \delta_0^2$, 这样就得到关于位势流动和边界层厚度变化的最终解

$$U(x) = U_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{U_0 \delta_0^2}\right)^{-0.1}; \quad (10.44)$$

$$\delta(x) = \delta_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{U_0 \delta_0^2}\right)^{0.55}. \quad (10.45)$$

由此可见, 容许的减速(速度的减小)的数值是很小的, 与 $x^{-0.1}$ 成正比. 它的值几乎只有沿零攻角平板的常速度流动才能实现. 在目前的情形下, 边界层厚度 δ 的增加正比于 $x^{0.55}$; 这个数值和零攻角平板情形中的 $\delta \sim x^{0.5}$ 差异也很小.

作为减速流动的另一个例子, 我们来研究通过直壁扩张槽的流动. 这种情形是第九章 b 中所讨论的扩张槽中边界层流动的推论. 流动简图示于图 10.16, 其中 x 表示到源 o 的径向距离. 假定壁面从 $x = a$ 开始, 此处位势流动的入口速度记作 U_0 , 位势流动可以表示为

$$U(x) = U_0 \frac{a}{x}; \quad v(x) = -U_0 \frac{a}{x^2}; \quad U''(x) = 2U_0 \frac{a}{x^3} \quad (10.46)$$

根据方程(10.41)计算对分离有决定意义的量 σ , 可以得出 $\sigma = 2$. 应用式(10.41a)给

出的判据可以断定，不管扩张角的大小如何，都要出现分离。这个例子非常清楚地表明：层流承受逆压梯度而不分离的能力是非常有限的。

根据 K. Pohlhausen^[19]所作的计算，其分离点出现在 $x_s/a = 1.21$ 处，并且可以看作与扩张角无关。

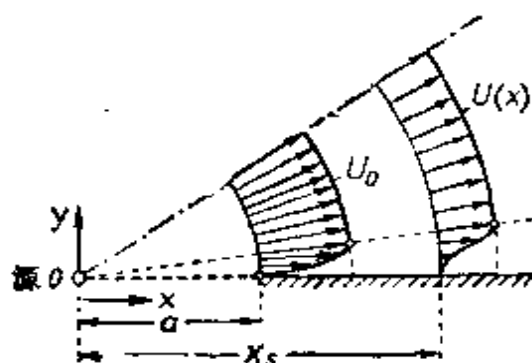


图 10.15 扩张槽中的层流边界层，分离发生在 $x_s/a = 1.21$ 处，与扩张角无关

上述结论只适用于边界层位移效应可以忽略的情形。但是，当扩张角很小时，情况并非如此。在扩张角很小时，经过一定的入口距离之后，边界层就充满整个槽的横截面(参阅第十一章 i)，同时在这种流动过程中，流动渐近地过渡到第五章 12 节中所讨论的扩张槽情形。当夹角不超过某个值时，就不出现分离。这个值与 Reynolds 数有关。

近来，S. N. Brown 和 K. Stewartson 发表了一篇关于分离问题的综合评论^[11]，该文强调关于微分方程在临界点上出现的奇异性的数学问题。关于此问题，也可参阅 S. Goldstein 的文章^[43]。最近 J. C. Williams III^[29]和 P. K. Chang^[26]就这个问题发表了从物理上讲更富有启发性的评论。

第十一章 轴对称边界层和 三维边界层

在前面几章边界层问题的讨论中，我们仅考虑了速度分量只依赖于两个空间坐标的二维问题。同时第三个空间坐标方向的速度分量等于零。而三个速度分量均依赖于三个坐标的一般三维边界层问题，由于数学上相当困难，到目前为止，还没有很好地得到解决它。在本章末尾，我们将叙述对这个问题的初步尝试。

另一方面，在轴对称的边界层研究中所遇到的数学困难要少得多，甚至几乎没有超出在二维情形下所遇到的困难。轴对称边界层，例如，出现在绕轴对称物体的流动中；轴对称射流也属于这类问题。旋转圆盘和有驻点的轴对称流动这两个例子，已经在 Navier-Stokes 方程精确解的那一章讨论过了。

在本章开始，我们将讨论另外几个定常轴对称流动的例子，它们都是可以用微分方程求解的。接下去要把上一章讲过的近似方法加以推广，以包括轴对称的情形。此外，我们还要讨论三维边界层的基本特点。非定常的轴对称边界层将在第十五章中同非定常二维边界层的例子一起讨论。

a. 轴对称边界层的精确解

1. 地面附近的旋转流动 在第五章中我们讨论了在静止流体中旋转圆盘附近的流动情形。与此密切相关的是，当流体在静止壁面的远上方以等角速度旋转时，静止壁面附近的流动情形（图 11.1）。U.T. Boedewadt^[9] 研究了这个问题。在旋转圆盘的例子中，基本效果之一是，在壁面附近的薄层内流体在离心力的作用下向外抛开，被迫沿径向向外流动的流体为沿轴向流动的流体所代替。现在所讨论的流体在壁面上方旋转的情形，也有类似的效果，

只不过符号相反。在与径向压力梯度相平衡的离心力的影响下，在壁面远上方旋转的流体质点处于平衡状态。在壁面附近，质点的周向速度降低，因而离心力显著下降，但是指向转轴的径向压力梯度保持不变。这种情形使得壁面附近的质点沿着径向向内流动，同时由于连续性的原因，这种流动必然引起一种向上的轴向流动，如图 11.1 所示。这种出现于边界层中、其方向偏离外流的叠加流场，通常称为二次流动。这是 E. Gruschwitz^[45] 在分析弯曲管道流动时首先发现的，还可参看 E. Becker 的文章^[6]。

上一段叙述的在固壁附近伴随旋转而引起的二次流动，可以

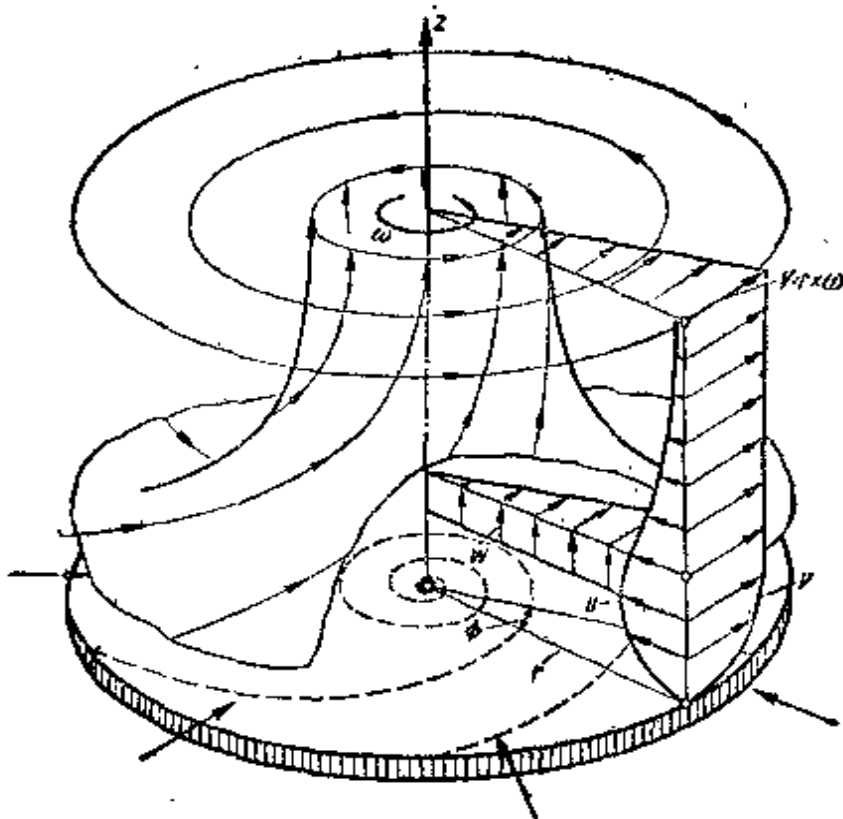


图 11.1 地面附近的旋转流动

速度分量： u ——径向； v ——周向； w ——轴向。由于摩擦作用，周向速度在静止圆盘附近受到减速，这就引起了沿径向向内的二次流动

很清楚地在茶杯中观察到：经过强烈搅动产生旋转以后，再等一会，就会在杯子底部形成向内的径向流动。可以从茶叶在杯底中间堆成一小堆这个事实来推断它的存在。

为了用数学式子描述这个问题，我们采用柱坐标 r, φ, z ，静止壁面位于 $z = 0$ 面上（图 11.1）。假定远离壁面的流体象刚

体一样以等角速度 ω 旋转。我们将径向速度分量记作 u ，周向分量记作 v ，轴向分量记作 w 。由于轴对称的原因，可以将对 φ 的导数从 Navier-Stokes 方程中去掉。正如旋转圆盘的解一样，我们将要得到的解也应该是 Navier-Stokes 方程的精确解，因为在边界层方程中略去的项在这里自动等于零。根据方程(3.36)可写出如下的 Navier-Stokes 方程：

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}, \quad (11.1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (11.1d)$$

其边界条件是 $\left. \begin{array}{l} z=0: u=0; v=0; w=0. \\ z=\infty: u=0; v=r\omega. \end{array} \right\} \quad (11.2)$

如旋转圆盘的情形那样(见第五章 11)，最好引进 z 的无量纲坐标

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (11.3)$$

假定速度分量的形式如下：

$$u = r\omega F(\zeta); \quad v = r\omega G(\zeta); \quad w = \sqrt{\nu\omega} H(\zeta). \quad (11.4)$$

对于远离壁面的无摩擦流动，其径向压力梯度可由下述条件进行计算： $(1/\rho) \cdot (\partial p/\partial r) = V^2/r$ ，或者再利用 $V = r\omega$ ，则

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2. \quad (11.5)$$

在边界层理论范围内，假定在壁面附近的粘性层内作用有同样的压力梯度。将式(11.4)和(11.5)代入方程(11.1a, b, d)，可以得到

与第五章 11 的方程相类似的常微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + HF' - F'' + 1 &= 0, \\ 2GF + HG' - G'' &= 0, \\ 2F + H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

其边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0: F = 0; G = 0; H = 0; \\ \zeta = \infty: F = 0; G = 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

可以假设 z 方向的压力梯度等于零, 因为这样一种假设与边界层理论相一致. 或者, 在得到主要的解之后, 可用方程(11.1c)计算出这压力梯度, 这样就得到 Navier-Stokes 方程的精确解.

U. T. Boedewadt^[9]用一种很麻烦的方法, 首先求解了具有边界条件(11.7)的方程组(11.6), 在 $\zeta = 0$ 处用幂级数展开法, 而在 $\zeta = \infty$ 处用渐近展开法. 最近, J. E. Nydahl^[10a]在一篇未发表的文章中改进了这个解. 表 11.1 和图 11.2 中给出了根据 Nydahl 计算的函数 F, G, H 值. 在图 11.3 中还用极曲线画出水平速度, 即 u 和 v 的合成矢量. 水平速度分量与周向之间的夹角仅依赖于高度, 此矢量指出了不同高度下的水平速度方向. 对于在很大高度上规定的周向来说, 接近地面处的偏离最大, 其角度是向内偏 50.6° . 向外偏 7.4° 的最大偏离出现在 $\zeta = 4.63$ 处, 所以最大角度差, 即地面的与 $\zeta = 4.63$ 处的角度之差是 58° . 更值得注意的是, 轴向速度分量 w 不依赖于离开转轴的距离 r , 它仅依赖于离开地面的距离. 在所有点上, 运动方向都是向上的 ($w > 0$). 正如已指出的, 这是由地面附近向内的流动引起的, 是地面附近离心力降低的结果. 无论如何, 如由图 11.2 所见, 这会在较高处为向外的径向流动所抵消, 然而总的来说, 还是向内的径向流动占优势. 在围绕 z 轴半径为 R 的柱面上所通过的流向转轴的总流量是

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u dz = 2\pi R^2 \sqrt{\omega\nu} \int_0^{\infty} F(\zeta) d\zeta \\ &= -\pi R^2 \sqrt{\omega\nu} H(\infty). \end{aligned}$$

表 11.1 静止壁面上方有旋转流动情形下的速度分布函数
(取自 J. E. Nydahl^[212])

ζ	F	G	H
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	-0.3487	0.3834	0.1944
1.0	-0.4788	0.7354	0.6241
1.5	-0.4496	1.0134	1.0987
2.0	-0.3287	1.1924	1.4929
2.5	-0.1762	1.2721	1.7459
3.0	-0.0361	1.2714	1.8496
3.5	0.0663	1.2182	1.8308
4.0	0.1227	1.1413	1.7325
4.5	0.1371	1.0640	1.5995
5.0	0.1210	1.0016	1.4685
5.5	0.0878	0.9611	1.3632
6.0	0.0499	0.9427	1.2944
6.5	0.0162	0.9407	1.2620
7.0	-0.0084	0.9530	1.2585
7.5	-0.0223	0.9693	1.2751
8.0	-0.0268	0.9857	1.3004
8.5	-0.0243	0.9991	1.3264
9.0	-0.0179	1.0078	1.3477
9.5	-0.0102	1.0119	1.3617
10.0	-0.0033	1.0121	1.3683
10.5	0.0018	1.0099	1.3689
11.0	0.0047	1.0065	1.3654
11.5	0.0057	1.0031	1.3601
12.0	0.0052	1.0003	1.3546
12.5	0.0038	0.9984	1.3500
∞	0.0000	1.0000	1.3494

代入表 11.1 中的 $H(\infty)$ 值, 可以得到

$$Q = -1.347\pi R^2 \sqrt{\omega\nu}. \quad (11.8)$$

沿 x 轴正方向的体积流量与此相等。最大的向上运动出现在 $\zeta = 3.1$, 那里 $w = 1.85\sqrt{\omega\nu}$ 。还值得指出的是, 比起在静止流体中旋转的圆盘例子来(第五章 b), 这种边界层向上延伸要高得多。如

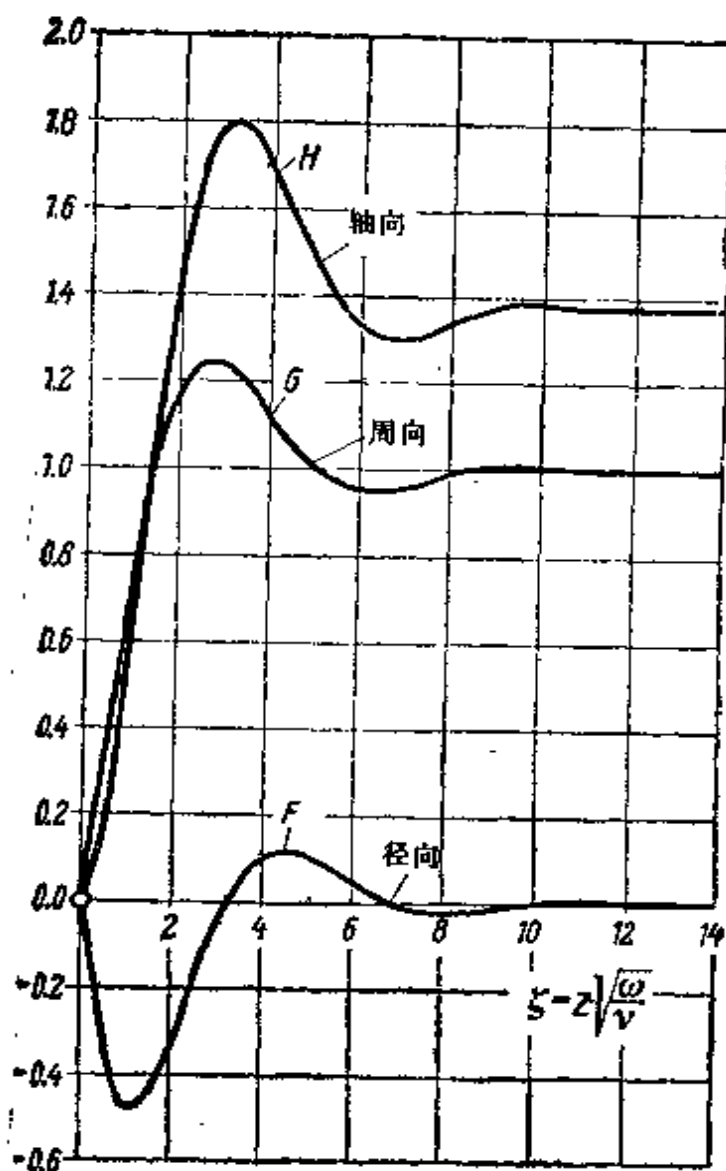


图 11.2 固壁附近的旋转流动, 根据 Boedewadt^[9], 由方程(11.4) 表示的边界层内的速度分布还可见表 11.1

果将边界层厚度 δ 定义为周向速度的偏离等于百分之二的高度, 我们将得到 $\delta = 8\sqrt{\nu/\omega}$, 而在静止流体情形下 $\delta = 4\sqrt{\nu/\omega}$.

G. Vogelpohl^[120] 讨论的两个平行壁面之间涡源运动的例子, 在某种程度上与上述情形有关, 对于很小的 Reynolds 数, 速度分布稍许偏离 Poiseuille 流动的抛物线曲线, 对于大 Reynolds 数, 速度剖面接近矩形分布, 并且可以看到边界层的形成. C. Pfleiderer^[83] 讨论过相应的湍流情形. 在这方面, 还可参阅 E. Becker^[61] 的文章.

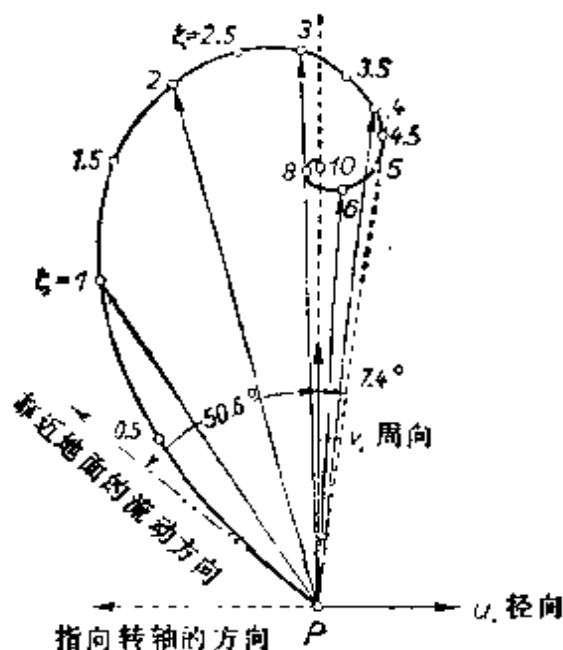


图 11.3 固壁附近的旋转流动, 根据 Boedewadt. 矢量代表水平速度分量

在 K. Garbsch^[32]研究的锥形漏斗管道内的涡旋流动中, 可以发现类似的现象. 其位势流动由一个在锥顶的强度为 Q 的汇和一个沿轴线强度为 Γ 的位势涡形成 (图 11.4). 通过迭代可以得到边界层方程的解, 并且只需要很少几步迭代就可以得到很好的近似. 这种流动的两个特殊情形也用近似方法研究过, 它们已在第十章提到: A. M. Binnie 和 D. P. Harris^[33]研究了单纯汇的流动 ($\Gamma = 0$), G. I. Taylor^[111] 和 J. C. Cooke^[112]研究了单纯涡的流动 ($Q = 0$). 在后一种情形下, 如图 11.4 所示, 流动在圆锥管壁上形成边界层. 边界层内的流场产生沿圆锥母线方向的速度分量 w , 而单纯旋涡的无粘涡核只有切向速度分量 v . 边界层内的二次流动向锥顶输运一部分流体. 读者还可以进一步研究 H. E. Weber^[113]的有关文章.

2. 圆形射流 我们现在要给出层流圆形射流的 H. Schlichting^[97]解, 它与第九章 8 给出的二维射流解相类似. 所以, 现在研究的问题是一股离开小圆孔并与周围流体相混合的射流. 在大多数实际情形下, 圆形射流也是湍流的. 在第二十四章将讨论湍流圆形射流, 但是因为它得出一个和层流情形一样的微分方程, 所以现在我们要比较详尽地讨论层流射流.

象二维情形一样, 这里也可以认为压力不变. 坐标系将这样选择: x 轴选在射流轴线上, y 表示径向距离. 轴向和径向速度分量将分别记作 u 和 v . 由于压力不变的假设, 沿 x 方向的动量通量再次保持不变:

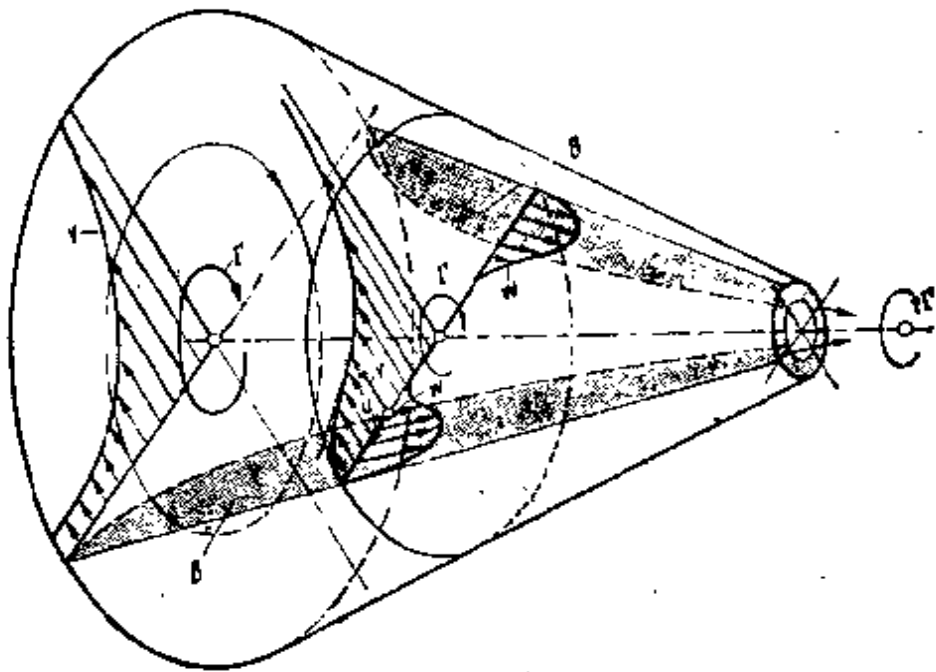


图 11.4 锥形收缩管道中的涡流. 根据 G. I. Taylor^[11]
 B = 锥形管道壁上的边界层, 其中有流向锥顶点的二次流动

$$J = 2\pi\rho \int_0^{\infty} u^2 y dy = \text{常数}. \quad (11.9)$$

在通常的边界层简化下, 在所选用的坐标系内, x 方向的动量方程及连续方程可以写成

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (11.10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0, \quad (11.10b)$$

其边界条件是

$$\left. \begin{aligned} y=0: v=0; \frac{\partial u}{\partial y} &= 0; \\ y=\infty: u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

象以前一样, 可以假设速度剖面 $u(x, y)$ 是相似的. 认为射流的宽度 Δ 度正比于 x^n , 并进一步假设

$$\psi \sim x^p F(\eta), \quad \text{其中 } \eta = \frac{y}{x^n}.$$

为了确定指数 p 和 n , 我们可以利用和二维情形相同的两个条件.

首先,根据方程(11.9),动量必须与 x 无关;其次,方程(11.10a)中的惯性项和摩擦项必须具有相同的数量级。因此

$$u \sim x^{p-2n}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim x^{p-2n-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim x^{p-2n}, \quad \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim x^{p-4n}.$$

这样就得出下述两个关于 p 和 n 的方程:

$$2p - 4n + 2n = 0; \quad 2p - 4n - 1 = p - 4n,$$

所以 $p = n = 1$ 。因此,我们现在可以设

$$\phi = vx F(\eta) \quad \text{和} \quad \eta = \frac{y}{x},$$

并由此得出速度分量为

$$u = \frac{v}{x} \frac{F'}{\eta}; \quad v = \frac{v}{x} \left(F' - \frac{F}{\eta} \right). \quad (11.12)$$

将这些值代入方程(11.10a),我们得到下述关于流函数的方程:

$$\frac{FF'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{FF''}{\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right),$$

对它进行一次积分,得到

$$FF' = F' - \eta F''. \quad (11.13)$$

其边界条件是,在 $y = 0$ 处, $u = u_m$ 和 $v = 0$ 。由此得到,在 $\eta = 0$ 处, $F' = 0$ 和 $F = 0$ 。因为 u 是 η 的偶函数,所以 F'/η 一定是偶函数, F' 是奇函数, F 是偶函数。由于 $F(0) = 0$, 所以 F 对 η 的幂级数展开中的常数项必须为零,这就确定了一个积分常数。第二个积分常数将记作 γ , 它的计算如下: 如果 $F(\eta)$ 是方程(11.13)的一个解,那么 $F(\gamma\eta) = F(\xi)$ 也是一个解。满足边界条件 $\xi = 0: F = 0, F' = 0$ 的微分方程

$$F \frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{d\xi} - \xi \frac{d^2F}{d\xi^2}$$

的一个特解可以表示为

$$F = \frac{\xi^2}{1 + \frac{1}{4}\xi^2}. \quad (11.14)$$

所以我们由方程(11.12)得到

$$u = \frac{\nu}{x} \gamma^2 \frac{1}{\xi} \frac{dF}{d\xi} = \frac{\nu}{x} \frac{2\gamma^2}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2\right)^2},$$

$$v = \frac{\nu}{x} \gamma \left(\frac{dF}{d\xi} - \frac{F}{\xi} \right) = \frac{\nu}{x} \gamma \frac{\xi - \frac{1}{4}\xi^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2\right)^2}.$$

这里 $\xi = \gamma y/x$, 并且现在可以从给定的动量值来确定积分常数 γ .

由方程(11.9) 可以得到射流的动量

$$J = 2\pi\rho \int_0^{\infty} u^2 y dy = \frac{16}{3} \pi\rho\gamma^2\nu^2.$$

最后, 上述结果可以用只含运动粘性系数 ν 和运动动量 $K' = J/\rho$ 的形式来表示. 于是

$$u = \frac{3 K'}{8\pi\nu x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2\right)^2}, \quad (11.15)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K'}}{x} \frac{\xi - \frac{1}{4}\xi^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2\right)^2}, \quad (11.16)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \frac{\sqrt{K'}}{\nu} \frac{y}{x}. \quad (11.17)$$

图 11.5 表示由上式计算的流线图象. 在图 9.13 中画出了圆形射流的纵向速度 u , 同时也画出了二维射流的纵向速度.

由于射流引起周围介质流动, 所以射流的体积流量 $Q = 2\pi \times \int_0^{\infty} u y dy$ (每秒体积) 随着离开小孔的距离而增加, 它可以用如下简单方程来表示:

$$Q = 8\pi\nu x. \quad (11.18)$$

应该将这个方程与二维射流的方程(9.48)加以比较. 可以意外地

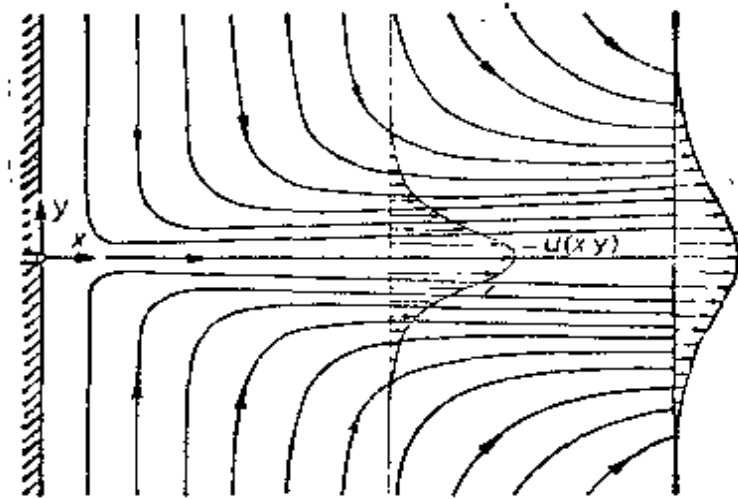


图 11.5 圆形层流射流的流线图象

看出，在离开小孔一定距离上的流量与这股射流的动量无关，即与使射流喷出小孔的压力差无关。在大压力差(大速度)下喷出的射流比在小压力差(小速度)下喷出的射流要窄些。后者携带比较多的静止流体，所以只要这两种情形的运动粘性系数相同，就能使它们在离小孔一定距离上的体积流量相等。

对于在环形小孔内还有径向速度分量的锥形射流情形，H. B. Squire^[105, 106]已求出其边界层方程的解及完整 Navier-Stokes 方程的解，并对它们进行了比较。在这种径向射流中，其速度也与离开小孔的距离成反比。通过用湍流运动粘性系数代替这里的运动粘性系数，可将这种理论推广到湍流，在这种情形下湍流粘性系数保持不变，见第二十四章。M. B. Glauert^[40]解决了当射流垂直射到壁面并沿壁面散开的情形，他的文章包括平面和轴对称流动，以及层流和湍流。

M. Z. Krzywoblocki^[61]和 D. C. Pack^[33]计算了可压缩圆形层流射流的相应情形。在亚声速范围内，射流轴线上的密度比边界上的大，温度比边界上的低。这些差值与离开小孔距离的平方成反比。根据 H. Goertler 的分析^[43]，在射流上叠加一个弱旋涡的情形也可以进行数学处理，并且可以沿顺流方向追踪出现在小孔内的旋涡运动的影响。结果是随着离小孔距离的增加，旋涡比轴线上的射流速度减小得更快。

3. 轴对称尾迹 轴对称尾迹中的流动, 例如在零攻角轴对称物体下游出现的流动, 也可以用方程组(11.10a,b)来描述。这个问题的解与第九章 f 详细描述的二维情形的解十分相似。设 U_∞ 表示来流速度, 并设 $u(x, y)$ 是尾迹中的流动速度。象方程(9.29)那样, 假设在远下游的地方, 尾迹中的速度差

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (11.19)$$

与 U_∞ 相比是很小的。因此, 我们将略去 u_1 的平方项。利用这种简化, 就能由方程(11.10a)和(11.19)导出如下关于 u_1 的微分方程:

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\nu}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (11.20)$$

对于速度差与轴向坐标 x 和径向坐标 y 的关系所取的解析形式, 可以从这样的条件得出, 即在远离物体的下游, 由尾迹动量计算出来的阻力必须与 x 无关。由此得出如下关系式:

$$D = 2\pi\rho U_\infty \int_{y=0}^{\infty} u_1 \cdot y dy = \text{常数}, \quad (11.21)$$

这将由如下形式的 u_1 来满足:

$$u_1 = CU_\infty \frac{f(\eta)}{x}, \quad (11.22)$$

其中

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}. \quad (11.23)$$

这种形式类似于二维问题方程(9.31)的形式。将方程(11.22)和(11.23)代入方程(11.20), 我们得到一个关于 $f(\eta)$ 的微分方程, 这就是

$$(\eta f')' + 2\eta^2 f' + 4\eta f = 0, \quad (11.24)$$

其边界条件是

$$\text{在 } \eta = 0 \text{ 处, } f' = 0, \text{ 在 } \eta = \infty \text{ 处, } f = 0.$$

容易证明, 方程(11.24)的解具有指数形式

$$f(\eta) = \exp(-\eta^2), \quad (11.25)$$

这种形式也类似于二维情形方程(9.34)的形式。所以速度差应该是

$$u_1(x, y) = \frac{C}{x} U_\infty \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{U_\infty y^2}{\nu x}\right).$$

常数 C 必须根据阻力用方程(11.21)来确定;其值是

$$C = \frac{\pi}{32} c_D R d,$$

其中 c_D 表示用物体迎风面积作参考的阻力系数,而 $R = U_\infty d/\nu$. 因此我们得到

$$\frac{u_1(x, y)}{U_\infty} = \frac{\pi c_D}{32} \left(\frac{d}{x} R\right) \exp(-\eta^2). \quad (11.26)$$

按照式(11.26)画出的速度差曲线与图 9.10 中的曲线相同. 在 F. R. Hama 的文章中^[45a]可以找到实验数据.

4. 旋成体边界层 粘性流体绕零攻角旋成体的流动具有很大的实际意义. E. Boltze^[10]导出了适用于这种情形的边界层方程. 选取一个曲线坐标系(图 11.6), 我们用 x 表示从驻点沿子午线测量的流动长度, y 表示垂直于物面的坐标. 用垂直于体轴的截面半径 $r(x)$ 来规定物体的外形. 假设没有尖角, 因而 d^2r/dx^2 不会取极大的值. 平行于物面和垂直于物面的速度分量, 将分别记作 u 和 v , 而位势流动速度则表示为 $U(x)$. 根据 Boltze 的分析, 此边界层方程将取如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vx)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} (11.27a, b)$$

其边界条件是

$$y = 0; u = v = 0; y = \infty; u = U(x, t). \quad (11.28)$$

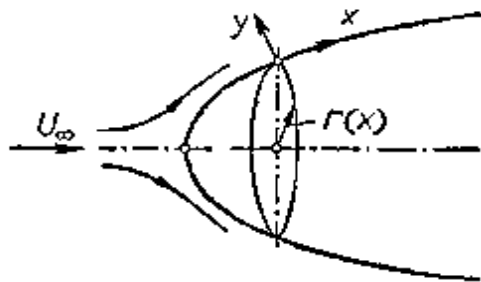


图 11.6 旋成体边界层, 坐标系

与二维流动相比，可以看出 x 方向的运动方程仍保持不变。对 y 方向运动方程的各项进行量级估计表明，垂直于壁面的压力梯度 $\partial p / \partial y \sim u^2 / r \sim 1$ 。因此，穿过边界层的压力差具有边界层厚度 δ 的量级，所以又能认为位势流动的压力梯度 $\partial p / \partial x$ 施加在边界层上。

本章的讨论仅限于定常流动的情形。为了积分轴对称情形的方程(11.27a,b)，我们再次引进流函数 $\psi(x, y)$ ：

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi. \end{aligned} \right\} (11.29a,b)^{11)}$$

这使方程(11.27a)变换为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}, \quad (11.30)$$

其边界条件是

$$y = 0: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad y = \infty: \frac{\partial \psi}{\partial y} = U(x).$$

我们现在打算对旋成体边界层的计算方法作简要说明。在本书较早版本中^[20]可以找到更详细的叙述。但是对于圆球的数值结果尚需进行比较详细的讨论。任意形状旋成体上的边界层，可以用第九章c中对任意截面柱体(二维问题)使用过的同样方法来确定。将位势流速度 $U(x)$ 展开成 x 的幂级数，并且假设流函数 ψ 可以用类似的 x 级数表示，其中的系数依赖于到壁面的距离 y (Blasius 级数)。根据 N. Froessling^[23]的分析，可以发现这里也可以将关于 y 的系数函数处理得与任何具体问题的参数无关。利用

1) 另一种流函数 $\bar{\psi}$ 也能满足连续方程，例如

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}; \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}.$$

如第十五章b2中所述，E. Boltze 在计算非定常轴对称边界层时就使用了这种形式的流函数。

这种方法，这些函数一旦计算出来就可以普遍使用。

物体外形用级数给出：

$$r(x) = r_1 x + r_3 x^3 + r_5 x^5 + \dots, \quad (11.31)$$

同时位势流速度也用级数给出：

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots. \quad (11.32)$$

离开壁面的距离用无量纲坐标表示：

$$\eta = y \sqrt{\frac{2u_1}{\nu}}, \quad (11.33)$$

同时，与方程(11.32)相类似，流函数用 Blasius 级数表示：

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{\nu}{2u_1}} \{u_1 x f_1(\eta) + 2u_3 x^3 f_3(\eta) + \dots\}. \quad (11.34)$$

将方程(11.31)，(11.32)和(11.34)代入方程(11.30)，并比较各项，可以得到一组关于 f_1, f_3, \dots 的微分方程。第一个方程是

$$f_1'' = -f_1 f_1'' + \frac{1}{2}(f_1'^2 - 1), \quad (11.35)$$

其中用撇表示对 η 的导数。边界条件是

$$\eta = 0: f_1 = f_1' = 0; \quad \eta = \infty: f_1 = 1. \quad (11.36)$$

这组方程的第一个方程是非线性的，并且与第五章 10 讨论的三维驻点方程相同¹⁾。在图 5.10 中画出了 f_1 的曲线，那里的 $f_1 = \varphi'$ 。N. Froessling^[29]求解了 x^3 项和 x^5 项的方程。F. W. Scholke 1 meier^[102]计算了后面的 x^7 项的十个函数。

例：圆球。

用类似于第九章 c 中圆柱情形使用过的方法，我们可以利用上述方案求解圆球问题。对于半径为 R 的圆球，其流动半径为

$$r(x) = R \sin x/R, \quad (11.37)$$

同时圆球表面上的速度分布为

$$U(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin x/R = \frac{3}{2} U_\infty \sin \varphi, \quad (11.38)$$

1) 如果注意到 $\eta = \xi/\sqrt{2}$ 和 $df_1/d\eta = d\varphi/d\xi$ ， $f_1(\eta)$ 的方程可以转换为 $\varphi(\xi)$ 的方程(5.47)。

其中 φ 表示从驻点量起的中心角。将方程(11.38)中 $\sin(x/R)$ 的级数展开式与级数(11.32)相比, 可以确定方程(11.32)的系数如下:

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R}; \quad a_3 = -\frac{1}{4} \frac{U_\infty}{R^3}; \quad \dots \text{和 } \eta = \frac{y}{R} \sqrt{\frac{3U_\infty R}{\nu}}$$

在图 11.7 中画出了对于不同 φ 角所得到的速度分布; 对于这些曲线, 速度 u 已计算到 x^7 项。 $\varphi > 90^\circ$ 的每一速度剖面都呈现出一个拐点, 因为它们处于升压区。

对于目前这个问题, 可以重复前面关于使用 Blasius 级数的普遍实用性的论述。在 x^7 项以后, 各基本函数的计算量大得难以接受, 而细长体的计算又需要相当多的级数项。所有这些都对这种方法形成严格的限制。关于圆球的其他结果, 将在下一节介绍。

横向曲率。 我们已经反复说过, 只是在边界层厚度到处远小于物体外形半径 ($\delta \ll$

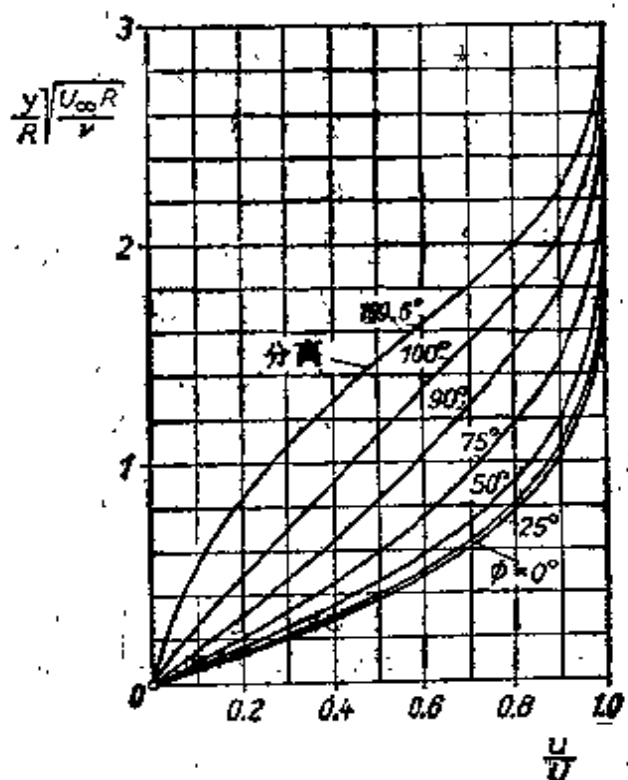


图 11.7 圆球边界层内的速度分布

r)的条件下, 轴对称流动的运动方程(11.27a)才具有与二维情形相同的形式。就这方面而言, 在细长柱体情形下, 或在细长旋成体情形下, 都不能满足这个条件。这种物体上的边界层沿顺流方向增长, 而且它的厚度最终可以与物体的半径相当。这就证明旋成体边界层本来具有三维特性, 这种特性是由于物体表面较大的横向曲率引起的。

R. A. Seban 和 R. Bond^[99] 处理了置于均匀轴向流动中半径 $r_0 = a = \text{常数}$ 的细长柱体问题。H. R. Kelly^[60] 研究了同样的问题，他引进了某些数值修正。M. B. Glauert 和 M. J. Lighthill^[10] 利用 Pohlhausen 近似方法(见第十一章 b)和渐近级数展开法得到了一些解。J. C. Cooke^[16] 采用 Blasius 级数和 Pohlhausen 近似方法得到了沿任意横截面柱体母线的流动。

R. F. Probstein 和 D. Elliot^[98] 研究了旋成体的可压缩、轴对称边界层的一般情形(物体外形是纵向坐标 x 的函数)，特别是圆柱和圆球的情形。结果表明，对于这样一些有压力梯度的流动，横向曲率与一个附加的顺压梯度有同样的影响。因此，切应力增加，而分离推迟。

b. 轴对称边界层的近似解

1. 非旋转物体上边界层的近似解 在第十章详细介绍的二维边界层微分方程的近似解法，可以推广到轴对称流动问题。C. B. Millikan^[77] 首先给出了轴向流动中旋成体边界层的近似计算方法。S. Tomotika^[116, 117] 把第十章描述的基于四次多项式的 Pohlhausen-近似解法推广到旋成体情形。

下面对适用于旋成体的方法所作的说明，是以 F. W. Schokemeier^[102] 的论述为基础的，他按照 H. Holstein 和 T. Bohlen 对二维情形所使用的类似方法，采用了一种新型的动量方程。按照第八章 d 中对二维情形使用的同样方法，可以得到轴对称情形的动量方程。从方程(11.27a,b)出发，我们得到¹⁾

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_1 + \delta_2)U \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{\delta_2}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{r_0}{\rho} \quad (11.39)$$

这里 $r(x)$ 的意义可以从图 11.6 看出。回顾第十章 b 的步骤，我

1) 对旋成体边界层的位移厚度 δ_1 和动量厚度 δ_2 所使用的定义与二维情形的方程(8.30)和(8.31)相同，其中 y 表示垂直于壁面的坐标。但是有时也使用稍微不同的定义^[122]：

$$\text{位移厚度: } \delta_1 U = \int_0^{\infty} (U - u) \left(1 + \frac{y}{r}\right) dy,$$

$$\text{动量厚度: } \delta_2 U = \int_0^{\infty} u(U - u) \left(1 + \frac{y}{r}\right) dy.$$

这个因子 $(1 + y/r)$ 考虑到这种情形，就是在离开壁面的 y 距离上，速度 u 与流过宽度为 dy 的一个环带的体积流量有关，这个流量是流过宽度为 $2\pi r$ 的平直面积流量的 $(1 + y/r)$ 倍。

们得到如下关于量 $Z = \delta_1/\nu$ 的微分方程:

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)]K + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} K = f_2(K).$$

量 $K, f_1(K), f_2(K)$ 具有二维情形中方程(10.27), (10.31)和(10.32)的同样意义. 象以前写出的式(10.34)一样, 引进 $F(K)$, 我们有

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{U} \left\{ F(K) - 2K \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} \right\}; \quad K = ZU'. \quad (11.40)$$

容易看出, 转换式

$$\bar{Z} = r^2 Z \quad (11.41)$$

将上面这个方程变换成如下形式

$$\frac{d\bar{Z}}{dx} = \frac{r^2}{U} F(K); \quad K = \frac{\bar{Z}U'}{r^2}. \quad (11.42)$$

这种形式比方程(11.40)更可取, 因为它不包含导数 dr/dx .

分离点仍在 $A = -12$, 即 $K = -0.1567$ 处, 但是现在驻点的形状因子 A 及 K 值有所不同. 如果旋成体有一个钝头, 则在 $x = 0$ 上, 即在前驻点上有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{U}{U'} \right) = 1.$$

由于有了这个值, 方程(11.40)括号中的那些项就可以化为 $F(K) - 2K$. 按照如二维情形的同样论述, 我们发现在驻点上 K 的初值可以由条件 $F(K) - 2K = 0$ 来确定, 或者明确给出

$$A_0 = +4.716; \quad K_0 = 0.05708.$$

所以, 在驻点上积分曲线(11.40)的起始值为

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{K_0}{U'_0} = \frac{0.05708}{U'_0}, \\ \left(\frac{dZ}{dx} \right)_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

对于旋成体, 其起始斜率等于零, 因为根据对称性, 在驻点上一定有 $U'' = 0$. 如 N. Rott 和 L. F. Crabtree^[93]所指出的, 在第十章

b中所叙述的直接积分法,可以推广到轴对称情形.关于动量厚度的方程(10.37),现在要用下式代替:

$$\frac{U\delta_2^2}{\nu} = \frac{0.470}{r^2 U^3} \int_0^r r^2 U^3 dx. \quad (11.44)$$

在 F.W. Scholkemeier^[102]向 Braunschweig 工程大学提交的论文中,以及在 J. Pretch^[87]的文章中(这两篇前面都引用过),都计算了一些数值例子. S. Tomotika^[117]在某些 Reynolds 数范围内,使用位势压力分布及测量压力分布计算了圆球边界层. A. Fage^[27]给出与测量结果的比较,在 W. Moeller^[76]的文章中有另外一些测量结果.

在这方面,提到 A. Michalke^[24]关于旋转对称喷管的理论研究和实验研究是有益的.

2. 圆管进口段的流动 在这方面,另一个值得注意的轴对称边界层问题,是圆管进口段的层流问题.严格地说,这不是边界层理论的问题,但是它借助类似于目前讨论的方法已经得到解决.当考虑较下游的截面时,最初在圆管进口截面上的矩形速度分布,在粘性力作用下逐渐变为 Poiseuille 抛物线分布.第九章 i 中,在边界层流动微分方程的基础上讨论了类似的二维问题,即矩形槽进口段的层流问题. L. Schiller^[96]的近似方法是以这样一个方程为基础的,它类似于早先讨论的动量方程,表示动量、压力降和粘性力之间的平衡条件.圆管进口段的速度剖面,可以用管轴附近的常速度和壁面附近与之相切的二抛物线部分来近似,从而壁面上的速度等于零.在进口截面上,抛物线部分的宽度等于零,然后沿顺流方向不断增加,在离进口的一定距离上两个抛物线部分会合为单一的抛物线.这个距离就是理论入口长度,根据 L. Schiller 计算,其值为 $x\nu/R^2\bar{u} = 0.115$. 在进口附近大约三分之一理论入口长度(约 $x\nu/R^2\bar{u} = 0.04$)的范围内, J. Nikuradse 的测量结果与 Schiller 理论结果符合得很好(图 11.8).但是,向抛物线剖面的实际过渡要比近似方法指出的过程慢得多.由于对中心流体的加速作用,进口的压力降比发展流动的压力降要大些.进口的附

加压力降是 $\Delta p = 1.16\rho\bar{u}^2/2$ 。H. L. Langhaar^[65]也给出了这个问题的近似解。

B. Punnis^[89] 在 1947 年研究过这种圆管进口区的流动，后来 E. M. Sparrow 等^[106a]也研究过这种流动。

在除了有纵向分量外，还有沿顺流方向衰减的切向(旋转)分量的情形下，这种轴对称流动变得更加复杂。L. Talbot^[110]以及 L. Collatz 和 H. Goertler^[4]研究了这个问题。假设旋转速度分量与 Hagen 和 Poiseuille 轴向速度相比是小量，则通过列出一个二阶线性微分方程的边值问题(它的第一特征值已经求出)，就能计算出旋转分量。根据 Talbot 的分析，当 Reynolds 数为 $R = 10^3$ 时，旋转分量在 40 倍圆管半径的距离上就几乎衰减掉了。这与实验结果很符合。

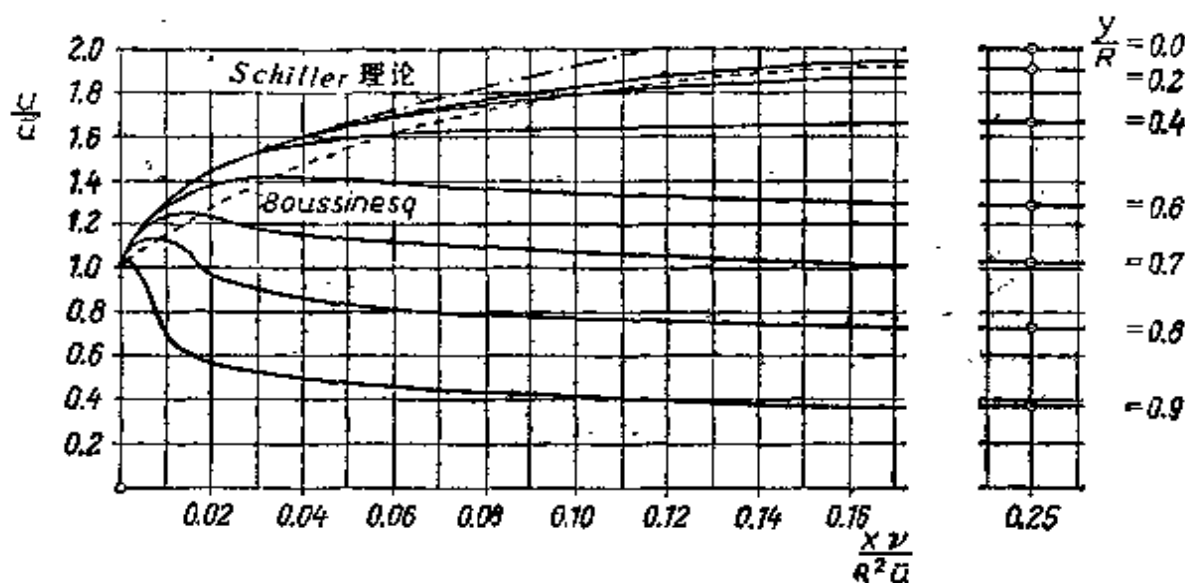


图 11.8 在层流情形下圆管进口段的速度分布；测量是 Nikuradse 完成的，引自 Prandtl-Tietjens vol. II. 理论是 Schiller^[65]提出的

3. 旋转的旋成体上的边界层 旋转物体边界层最简单的例子是第五章 b11 中所讨论的问题，即在静止流体中的旋转圆盘问题。由于存在离心力(“离心作用”)，使得随边界层一起转动的流体质点向外抛出，并由沿轴向流向边界层的质点来填补。在轴向速度为 U_∞ 的流动中，以角速度 ω 旋转的半径为 R 的圆盘情形，提供了

对上述问题的一个简单的推广。在这种情形下，流动受两个参数控制：Reynolds 数和旋转参数 $U_\infty/R\omega$ ，旋转参数由来流速度和圆盘边缘速度之比给出。对于层流情形，D. M. Hannah 小姐^[461]和 A. N. Tifford^[113]给出了所讨论问题的精确解；H. Schlichting 和 E. Truckenbrodt^[98]提供了近似解。E. Truckenbrodt^[119]研究过湍流问题。图 11.9 中绘出了通过这种计算得到的力矩系数 $C_M = M / \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^3$ 随 Reynolds 数和旋转参数 $U_\infty/R\omega$ 变化的曲线图。这里 M 只表示圆盘迎风面上的力矩。当圆盘旋转时，仍然可假设分离发生在圆盘边缘上。圆盘后面的“滞止”流体部分地随着圆盘旋转，它们对力矩的贡献很小。在图 11.9 的 C_M 中不考虑任何这样的贡献。可以看出，当角速度不变时，力矩随 U_∞ 的增大而迅速增加。

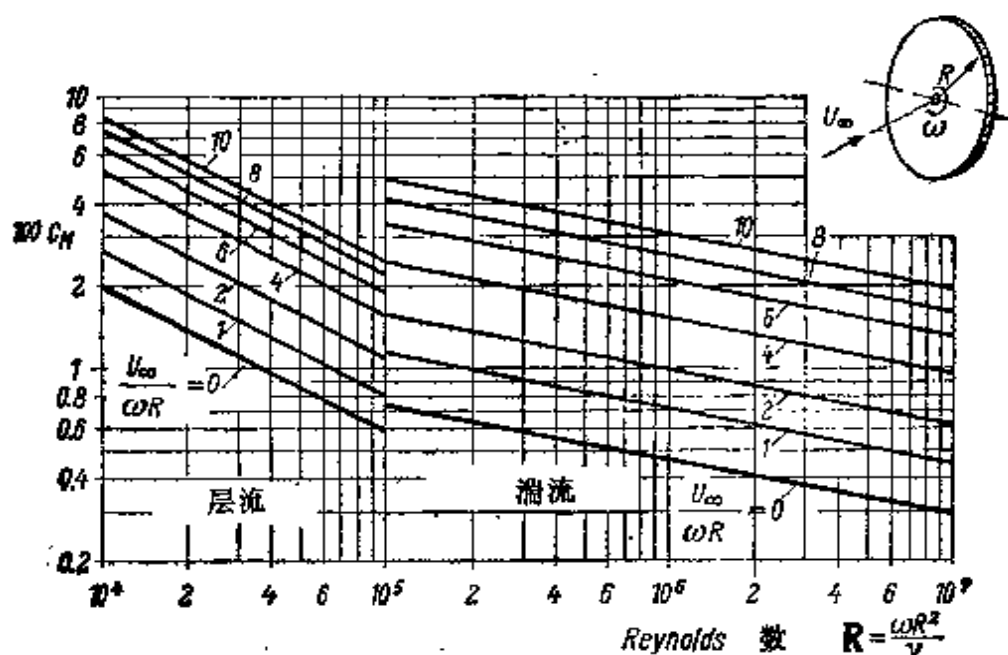


图 11.9 在轴向流动中，旋转圆盘上的力矩系数，根据 Schlichting 和 Truckenbrodt^[98, 119]

$$C_M = M / \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^3;$$

$M =$ 圆盘迎风面的力矩

- 1) 实际上，文献[38]求解了有关的问题，其中外部流场是由无穷远处的一个点源形成的。

装有一个旋转盖的圆盒内的流动，与第五章 b11 讲过的两个旋转圆盘间的流动非常相似。D. Grohne^[44]详细研究了盒内的流动情形，他发现了其中两个特有的特征。首先，和正常情形相反，盒子内部无摩擦涡核的流动只有在考虑壁面边界层的影响时才能确定，而在正常情形下，人们很自然地假定边界层的影响至多只产生位移效应。其次，这些边界层是不寻常的，因为它们彼此相连。类似地，在 H. Ludwig^[68]所研究的由一个旋转管道构成的装置中，当转速足够高时，则能识别出两个流动区域，即无摩擦的涡核和在侧壁上形成的、并引起二次流动的边界层。这种理论得出：由于旋转使阻力系数有很大增加，而且这个结果已经得到实验证实。

如 C. Wieselsberger^[63]及 S. Luthandar 和 A. Rydberg^[69]进行的测量所证明的，位于轴向流动中的钝头旋成体，例如圆球或细长旋成体，显示了旋转对阻力的显著影响。图 11.10 中绘出了旋转圆球的阻力系数随 Reynolds 数变化的曲线图。可以看到，临界 Reynolds 数（此时阻力系数突然下降）强烈地依赖于旋转参数

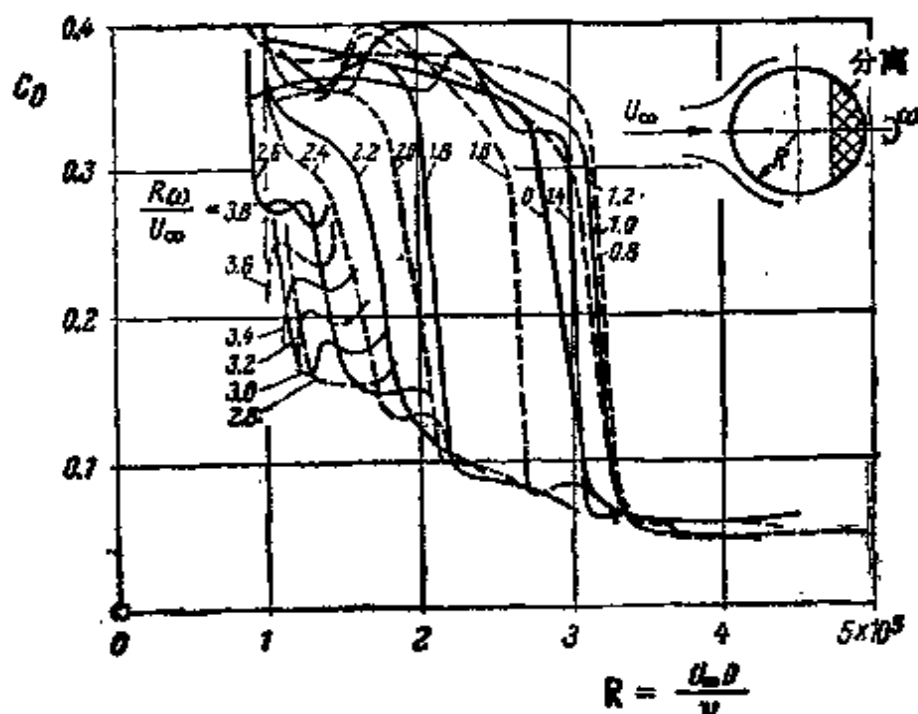


图 11.10 在轴向流动中旋转圆球的阻力系数随 Reynolds 数 R 和旋转参数 $\Omega = \omega R / U_\infty$ 的变化关系；其数据是由 Luthandar 和 Rydberg^[69]测量的

$U_\infty/R\omega$, 而且分离点的位置也是这样. 图 11.11 中的曲线描述了旋转运动对圆球层流分离线位置的影响; N. E. Hoskin^[50] 已经计算出它的数值. 与静止圆球相比, 当旋转参数达到 $\Omega = \omega R/U_\infty = 5$ 时, 分离线将向上游方向移动 10° 左右. 这种特性的物理原因与作用在流体质点上的离心力有关, 这些流体质点在边界层中随着物体一起旋转, 离心力与指向赤道平面的附加压力梯度有相同的作用.

H. Schlichting^[39], E. Truckenbrodt^[118] 和 O. Parr^[83] 的文章, 从理论上解释了在轴向流动中旋转旋成体边界层内非常复杂的三维效应; 这些作者都使用了前面讲过的近似方法. 在轴向流动中旋转旋成体边界层确实还保持轴对称性, 然而由于旋转运动, 除了子午线方向的速度分量以外, 还出现了周向速度分量. 因此, 对这种边界层的计算, 除了子午线方向(x 方向)的动量方程外, 还必须引进周向(φ 方向)的动量方程. 假设物体的角速度为 ω , 并且将垂直物面的坐标记作 y , 则可写出如下形式的两个动量方程:

$$U^2 \frac{d\delta_{1x}}{dx} + U \frac{dU}{dx} (\delta_{1x} + \delta_{1x}) + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} (U^2 \delta_{1x} + \omega_0^2 \delta_{1x}) = \frac{\tau_{x0}}{\rho}, \quad (11.45)$$

$$\frac{\omega_0}{r^2} \frac{d}{dx} (Ur^2 \delta_{1\varphi}) = - \frac{\tau_{\varphi 0}}{\rho} \quad (11.46)$$

其中壁面切应力分量由下式给出:

$$\tau_{x0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0; \quad \tau_{\varphi 0} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0, \quad (11.47)$$

而位移厚度和动量厚度定义为

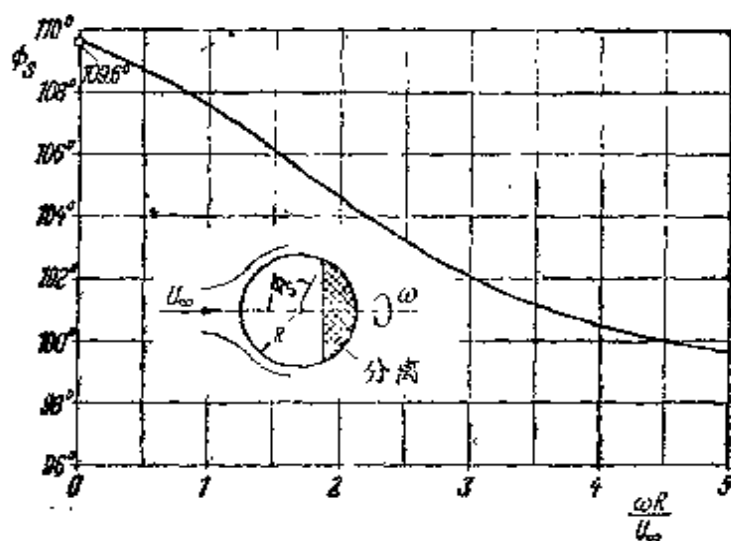


图 11.11 在轴向流动中旋转圆球的层流分离线的位置, 引自 N. E. Hoskin^[50]

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1x} &= \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy; & \delta_{2x} &= \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy; \\ \delta_{1z} &= \int_{y=0}^{\infty} \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 dy; & \delta_{2z} &= \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \cdot \frac{w}{w_0} dy. \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

在上述方程中已经把当地圆周速度 $w_0 = r\omega$ 选为周向分量 $w(x, y)$ 的参考速度。上述方程对于层流和湍流都能进行计算，但在湍流情形下须引进另外的壁面切应力表达式（见文献[84]及第二十二章 c）。在某些情形下，已经证明除了能计算转动力矩外还能计算阻力系数；后者随着参数 $\omega R/U_\infty$ 增加而降低。在这方面，还可参阅 C. R. Illingworth^[94]及 S. T. Chu 和 A. N. Tifford^[113]的文章。H. Schlichting^[101]设想的近似方法，已经由 J. Yamaga^[122]推广到可压缩流动。无论是对层流还是对湍流，前面的一些研究都为几位日本作者^[29, 30, 31, 79, 80]的理论研究和实验研究所推广。

L. Howarth^[11]和 S. D. Nigam^[111]曾讨论过在静止流体中旋转圆球周围的层流问题。B. S. Fadnis^[112]将这个问题推广到包括旋转椭球的情形。在两个极点附近，这种流动与旋转圆盘上的流动相同，而在赤道附近，它很象旋转圆柱上的流动。伴随的二次流动引起流体质点在二极点附近向边界层内流动，而在赤道附近向边界层外流动。如果赤道面积和旋转速度保持不变，则这种二次流动的流量将随长细比增加而增加。但是，赤道面内两个边界层彼此冲撞并向外抛开的现象，不再可能用边界层理论进行分析。这可参阅 W. H. H. Banks 的文章^[52]。

后来 O. Sawatzki^[93]和 P. Dumargue 等^[21a]对这个问题进行了进一步的理论和实验研究。文献[94]描述了 Reynolds 数在 $2 \times 10^3 < R < 1.5 \times 10^6$ 范围内，作用在旋转圆球上的转动力矩的测量结果；这个 Reynolds 数的上限已经大大超出了层流状态的范围。文献[21a]的研究包括圆球和各种锥角圆锥的近壁螺旋流线的流场显示，它们是在层流中出现的。

人们观察到，在轴流式涡轮机固定叶栅后面以及轮毂附近的涡流中，在某些情形下可能出现一片死水区。K. Bammert 和 H. Klaukens^[97]详尽描述了这种现象。这个死水区的起因与由涡流引起的沿径向向外增加的压力有关。由于这种涡流，使得轮毂附近的轴向压力增加比外周壁面上的压力增加大得多；轮毂位于导流片后面的无叶片环形区内。这里边界层的影响是次要的。另外，还可以注意 K. Bammert 和 J. Schoen^[98]对于通过旋转空心轴的流动所进行的研究。由于离心力和粘性力之间的相互作用，可以观察到在其出口形成一个漏斗状的自由面。

c. 轴对称边界层与二维边界层的关系；Mangler 变换

前面的讨论表明，一般说来，轴对称边界层的计算要比二维边界层的计算更加困难。如果记得，二维边界层流场（比如说柱体横向绕流流场）仅仅依赖于位势速度分布 $U(x)$ ，那就会意识到情况确是如此。相比之下，在研究轴对称边界层，例如旋转旋成体边界层时，就会发现物体的外形 $r(x)$ 明确地写进了相应的方程。本节准备对二维边界层和轴对称边界层之间的关系进行较详细的研究。

在定常流动中,二维流动和轴对称流动的边界层方程,分别由方程(7.10), (7.11), 和(11.27a, b)给出. 后者适用于曲线坐标系, 其中 x 表示流动的弧长, y 表示到壁面的垂直距离. 相应的速度分量记作 u 和 v , 同时带杠的量指的是二维情形. 使用这些符号, 对于二维情形有

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0; \quad (11.49)$$

对于轴对称情形有

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0. \quad (11.50)$$

这里 $r(x)$ 表示壁面上一点到对称轴的距离. 这两个方程组的第一个方程是相同的, 而差别仅仅在于在连续方程中是否出现半径 $r(x)$.

因此我们有理由要问: 是否能给出一种变换, 使得能用二维情形的解导出轴对称情形的解. 二维边界层和轴对称边界层的这种一般关系已经由 W. Mangler^[72]揭示出来. 它将轴对称物体的层流边界层计算化为柱体的边界层计算. 将给定的旋成体与一个柱体上的理想位势速度分布联系起来, 其速度分布函数很容易从旋成体外形及其位势速度分布计算出来. Mangler 变换也适用于层流可压缩边界层以及热边界层. 但是, 我们这里只就不可压缩流动的关系讨论这种变换.

根据 Mangler 的分析, 将轴对称问题的坐标和速度变换到等效二维问题中去的方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx; \quad \bar{y} = \frac{r(x)}{L} y; \\ \bar{u} &= u; \quad \bar{v} = \frac{L}{r} \left(v + \frac{r'}{r} yu \right); \\ \bar{U} &= U, \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

其中 L 表示一个不变的长度. 记住

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{r^2}{L^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{r'}{r} \bar{y} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{r}{L},$$

则容易证明, 利用转换关系式(11.51)可将方程(11.50)变换到方程(11.49).

具有理想速度分布 $U(x)$ 的旋成体 $r(x)$ 上的边界层, 可以通过求解速度为 $\bar{U}(\bar{x})$ 的二维边界层来计算, 其中 $U = \bar{U}$, 而 \bar{x} 和 x 由方程(11.51)联系起来. 计算出二维边界层的速度分量 \bar{u} 和 \bar{v} 之后, 就能通过转换方程(11.51)确定轴对称边界层的分量 u 和 v .

利用下述例子可以更好地了解这种方法. 我们考虑旋转对称的驻点流动, 对此

$$r(x) = x; \quad U(x) = u_1 x.$$

于是, 由方程(11.51)我们有

$$\bar{x} = \frac{x^3}{3L^2}, \quad \text{因此 } x = \sqrt[3]{3L^2\bar{x}}.$$

相应的二维位势流动成为

$$\bar{U}(\bar{x}) = u_1 \sqrt[3]{3L^2\bar{x}},$$

所以 $\bar{U}(\bar{x}) = C\bar{x}^{1/3}$, 其中 C 表示常数. 相应的二维流动属于第九章 a 所讨论的那种楔形流动, 它可以表示为 $U = Cx^m$; 对于这个例子 $m = \frac{1}{3}$. 根据式(9.7), 我们得到楔角 $\beta = 2m/(m+1) =$

$\frac{1}{2}$. 相应的二维流动是绕楔角为 $\pi\beta = \pi/2$ 的流动. 轴对称驻点流动可以化为楔角为 $\pi/2$ 的绕楔流动, 我们在第九章 a 中曾介绍过这个事实, 而现在得到了证明.

d. 三维边界层

到目前为止, 我们几乎仅限于讨论二维和轴对称问题. 二维和轴对称问题有这样一个共同点, 即所规定的位势流动只依赖于一个空间坐标, 而边界层内的两个速度分量各依赖于两个空间坐标. 在三维边界层情形下, 位势外流依赖于壁面上的两个坐标, 而边界层内的流动有三个速度分量, 在一般情形下, 它们均依赖于所

有的三个空间坐标。在静止流体中旋转圆盘附近的流动(第五章 b)和固定壁面附近的旋转流动(第十一章 a),不仅是 Navier-Stokes 方程的精确解,而且也是三维边界层的例子。如果位势流动的流线是一些直线,它们或者收缩或者发散,则这种流动和二维流动的主要区别仅在于边界层的厚度有所变化。另一方面,如果位势流动是弯曲的,则加在边界层上的横穿这些位势流线的压力梯度,会产生另外一些影响,例如二次流动:在边界层之外,横向压力梯度与离心力相平衡,而在边界层内,由于速度减慢使得离心力减小,因而横向压力梯度使流体向内流动,即向位势流线凹的一侧流动。空气在固定壁面上方旋转的流动,提供了一个具有这种特性的流动例子,并说明存在向内的流动。

由涡轮叶片或压气机叶片,或者由导流片形成的通道侧壁上的流动,提供了二次流动的另外一个例子。由于外部流场流线的曲率,侧壁上的边界层引起了从一个叶片压力面到下一个叶片吸力面的二次流动。侧壁引起的二次流动还受叶片本身边界层的影响,结果使得通过涡轮机或压气机每一级的流动图象都变得非常复杂。对于这个问题来说,由于流动特性本质上是三维的,这就给边界层理论提出一个非常困难的问题。长期以来,这类问题只靠实验方法进行研究^[47]。

1. 偏航柱体上的边界层 三维边界层的另一个重要情形,是其前缘不垂直于来流的机翼的情形,如后掠翼和偏航翼。根据经验知道,在吸力面上有相当数量的流体向后翼端流动,这种现象对机翼的气动特性有非常不利的影响。

在二维边界层流动中,物体的几何形状仅间接地影响流动的流场,即通过位势流速度分布来影响流场,而该速度分布是单独进行计算的。相比之下,三维边界层受到两种影响:受外流速度分布的影响和直接受物体几何形状的影响。例如在旋成体情形下,半径随距离变化的函数 $r(x)$ 直接出现在微分方程中,见方程 (11.27b)。

为了建立边界层方程,我们将限于最简单的平面壁面的情形,

或者可展成一个平面的曲面壁面(图 11.12)。设 x 和 z 表示壁面的坐标, y (象以前一样)表示垂直壁面的坐标。设位势流的速度矢量 V 有分量 $U(x, z)$ 和 $W(x, z)$, 则定常情形下位势流的压力分布为

$$p + \frac{1}{2} \rho [U^2 + W^2] = \text{常数}. \quad (11.52)$$

在 Reynolds 数很大的前题下, 如果象在第七章 a 关于二维情形所详细说明的那样, 现在对三维 Navier-Stokes 方程(3.32)进行同样的量级估计, 我们就会得到如下结论: 在 x 和 z 方向动量方程的各个摩擦项中, 对 x 和 z 的导数与对 y 的导数相比, 前二者可以略去。关于 y 方向的方程, 我们又可以得到 $\partial p / \partial y$ 很小并且可以略去的结论。于是, 可以认为压力只依赖于 x 和 z , 并且是由位势流动施加到边界层上的。这种估计还表明, 一般来说任何对流项都不能略去。这样, 三维边界层方程表述如下:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} (11.53a, b, c)$$

其边界条件是

$$y = 0; u = v = w = 0; y = \infty; u = U; w = W. \quad (11.54)$$

压力梯度 $\partial p / \partial x$ 和 $\partial p / \partial z$, 可以根据方程(11.52)由位势流动得到。这是一组关于 u , v 和 w 的三个方程。当 $W = 0$ 和 $w = 0$ 时, 这组方程就变为熟悉的二维边界层流动方程(7.10)和(7.11)。

除了前面提到的例子以外, 至今还未找到三维流动中上述一般方程组的精确解。Th. Geis^[33, 34] 研究过导致相似解的特殊流动。与楔形流动相类似, 这里的速度剖面在两个坐标轴的每个方向上都是相似的, 从而能够将方程组(11.53)变换为一组常微分方程。

一个更适合于数值计算的三维边界层流动的特殊情形, 是位势流动依赖于 x 而不依赖于 z 的情形, 即这时

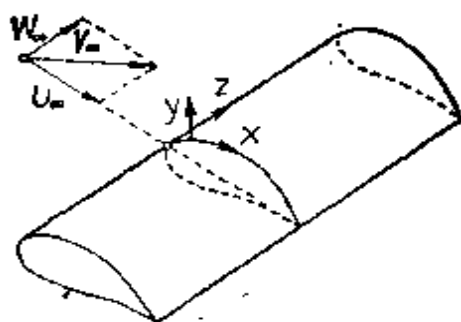


图 11.12 三维边界层的坐标系

$$U = U(x); W = W(x), \quad (11.55)$$

这些条件适用于偏航柱体，也近似适用于零升力偏航机翼。由于目前的问题不依赖于 x ，所以方程组(11.53a, b, c)可以得到简化。在 $W = W_\infty = \text{常数}$ 和考虑到 $-(1/\rho)(\partial\rho/\partial x) = U \cdot (dU/dx)$ 的情形下，我们得到

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.56)$$

其边界条件和前面一样。在这种特殊情形下，这组方程在这种意义上可以简化：它可以从第一个和最后一个方程计算 u 和 v ，其解与二维情形的解相同，然后从第二个方程完成 w 的计算，该方程对 w 来说又是线性的。这就使计算真正简化了。顺便我们还可以注意到，关于速度分量 w 的方程与 Prandtl 数等于 1 时二维边界层的温度分布方程相同(参看第七章)。

对于 $U(x) = U_\infty = \text{常数}$ 的情形，进一步研究方程组(11.56)，就可以得到零攻角下偏航平板的例子。在这种情形下，第一个方程的压力项等于零，这时如果用 u 代替 w ，则第二个方程就变得和第一个方程相同。于是，方程的解 $u(x, y)$ 和 $w(x, y)$ 成正比，也就是 $w(x, y) = \text{常数} \times u(x, y)$ ，或

$$\frac{w}{u} = \frac{W_\infty}{U_\infty}.$$

这就是说,在偏航平板情形下,在所有各点上边界层内平行于壁面的合成速度仍平行于位势流动。可见,平板是否偏航这一点,对边界层的形成没有影响(独立原理)。

当偏航平板边界层的流动为湍流时,方程组(11.56)前两个方程的右边须补充湍流 Reynolds 应力项(第十九章)。这样,这两个方程就不能再用 u 代替 w 或用 w 代替 u 而相互转换了。因此,正如直接通过实验所证明^[3]的那样,边界层内的流线不再与自由流动的方向相平行。另外,文献[3]已经证实,比起无偏航平板的情形来,偏航平板湍流边界层的位移厚度沿顺流方向增长得稍许快些。这又证明独立原理对湍流边界层的不适用性。

偏航柱体的三维边界层计算,即方程(11.56),可以用类似于绕柱体二维流动的解法(见第九章 c)进行求解,即通过对从驻点量起的弧长 x 进行级数展开的方法求解。在对称柱体情形下,可以设

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + \dots, W(x) = W_\infty = \text{常数}.$$

还可以假设,这种流动(其中所有驻点在一条确定的线上)的速度分量 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$, 也可以通过其系数依赖于 y 的 x 级数表示出来(Blasius 级数),其流动图象与沿柱体母线测量的坐标 x 无关。于是,设

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}, \quad (11.57)$$

可以得到

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1 x f_1(\eta) + 4u_3 x^3 f_1(\eta) + \dots; \\ v(x, y) &= -\sqrt{\frac{\nu}{u_1}} \{u_1 f_1(\eta) + 12u_3 x^2 f_3(\eta) + \dots\}; \\ w(x, y) &= W_\infty \left\{ g_0(\eta) + \frac{u_3}{u_1} x^2 g_2(\eta) + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11.58a, b, c)$$

函数 f_1, f_3, \dots 满足微分方程(9.18)。分量 w 的计算结果首先由 W. R. Sears^[10] 给出,后来 H. Goertler^[12] 又大大扩充了这种计算。函数 g_0, g_2, \dots 满足微分方程

$$\left. \begin{aligned} g_0'' + f_1 g_0' &= 0, \\ g_2'' + f_1 g_2' - 2f_1 g_2 &= -[2f_1 g_0', \end{aligned} \right\} \quad (11.59a, b)$$

其边界条件是

$$\eta = 0: g_0 = 0, g_2 = 0, \dots,$$

$$\eta = \infty: g_0 = 1, g_2 = 0, \dots.$$

如 L. Prandtl^[186]指出的, g_0 的方程可以直接积分求解, 其结果是

$$g_0(\eta) = \frac{\int_0^\eta \left\{ \exp\left(-\int_0^\eta f_1 d\eta\right) \right\} d\eta}{\int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\int_0^\eta f_1 d\eta\right) \right\} d\eta}, \quad (11.60)$$

其中 f_1 表示按方程(5.39)和表 5.1 给出的二维驻点流动的解, 这里 $f_1(\eta) = \varphi(\eta)$. 图 11.13 画出了微分方程(11.58c)中的函数 g_0 和 g_2 . 这两个函数表可在文献[101]及文献[42]中找到.

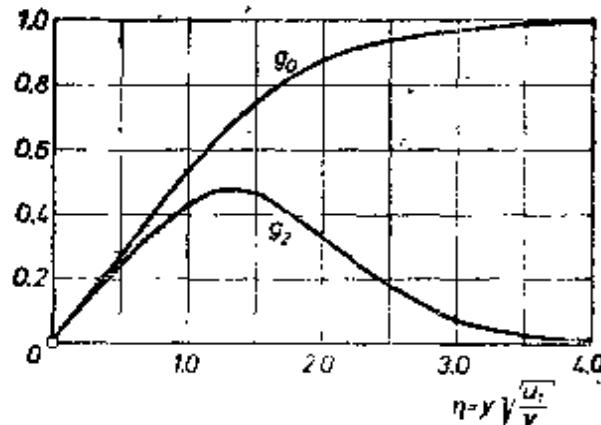


图 11.13 偏航柱体上的层流边界层. g_0 和 g_2 是沿柱体轴线方向的速度分量 w 中的函数, 见方程(11.58c).

在驻点线上有 $W/W_\infty = g_0(\eta)$.

近似方法. L. Prandtl^[172]提出了借助于动量定理, 即通过类似于本章 b 使用的方法得到近似解的方案. 特别是, 当在形式上假设 $r = \text{常数}$ 和方位动量厚度 δ_{1rs} 用公式

$$\delta_{1rs} = \int_{y=0}^r \frac{u}{U} \left(1 - \frac{w}{W_\infty}\right) dy$$

表示时, 可将方程(11.45)到(11.48)转换成关于偏航柱体的方程.

W. Dienemann^[21]发表了一种基于这些方程的计算方法.

J. M. Wild^[126]曾利用类似的近似方法求出偏航柱体问题的

解。图 11.14 表示其截面长短轴之比为 6:1 的偏航椭圆柱体的流动图象；来流对柱体有一个攻角。其升力系数值为 0.47。图中画出的一些箭头线指出邻近壁面且平行于壁面的速度分量的流动方向，也就是值

$$\lim_{y \rightarrow 0} (w/u)$$

图中用虚线画出了一条相应的流线，同时作为比较还画出了位势流线。由图可以看出，边界层内的流动方向以大角度转向柱体后柱端。当用丝线法观察后掠翼流动图象时，这种情形很重要。

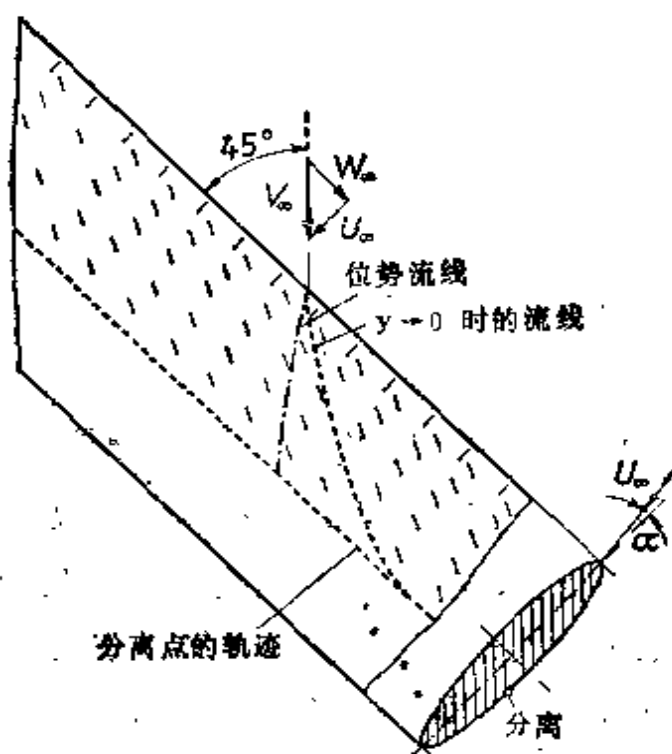


图 11.14 绕有升力偏航椭圆柱体的边界层流动，引自 J. M. Wild^[227]

后掠翼。偏航柱体边界层内出现的横向流动对于后掠翼的气动特性是很重要的。当偏航翼或后掠翼以较高升力值飞行时，在近前缘的吸力面上，压力显示出一个相当大的指向后翼端的压力梯度；这种效应是翼型截面后移的结果。这种现象可以从图 11.15 推断出来，该图画出了偏航翼吸力面上的等压线。在边界层内减速的流体质点有沿该梯度方向移动的倾向，结果形成了向后翼端方向的横向流动。如 R. T. Jones^[28] 和 W. Jacobs^[29] 的测量所证

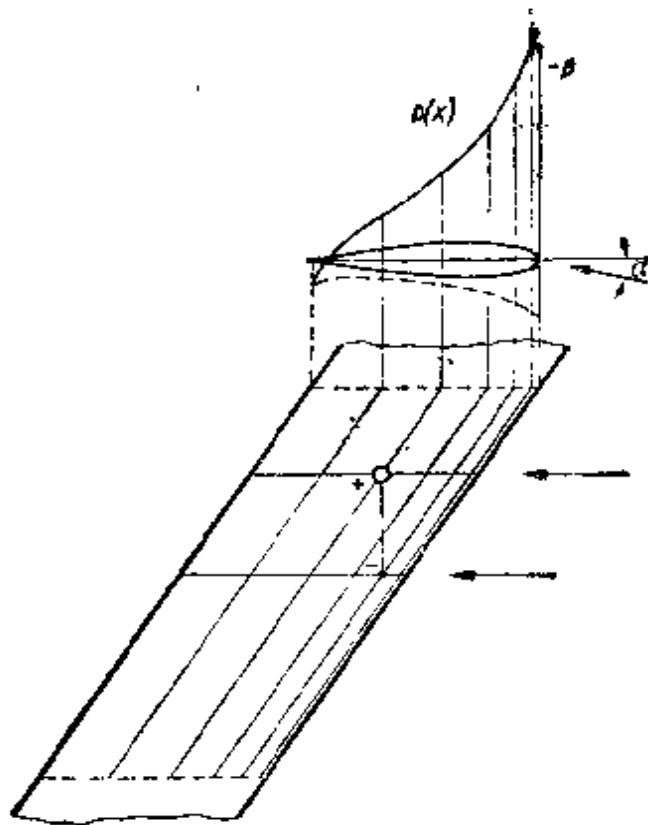


图 11.15 在有攻角偏航机翼上对横向流动起因的说明。机翼吸力面上的常压曲线(等压线)。在上翼面的前缘附近有一个垂直于主流指向翼端很陡的压力梯度,因而引起横向流动

明的,在后掠翼外侧上边界层增厚,这种效应引起了过早的分离。在装有后掠翼的飞机上,分离从机翼外侧,即从副翼附近开始,并且会引起可怕的整个机翼失速。通过在机翼上安装“边界层隔板”的办法(这种由金属薄板构成的隔板安装在机翼前部吸力面上,因而可以防止横向流动),就能避免这种分离,从而防止整个机翼失速。图 11.16 中示出一架装有后掠翼并在两边机翼上各有一片边界层隔板的飞机。W. Liebe^[66]曾报导用这种方法改善了机翼的特性。M. J. Queijo, B. M. Jaquet 和 W. D. Wolhart 的文章^[90]叙述了装有“边界层隔板”模型的大量测量结果。J. Black^[81]和 D. Kuechemann^[64]的文章有关于后掠翼边界层内非常复杂的流动图象的更多细节。A. Das^[20]得到的实验结果指出,边界层隔板除了改善它的外侧流动外,对它内侧的流动也有很大改善。K. G. R. Raju 等^[121]研究了装在平板上的隔板的阻力系数。

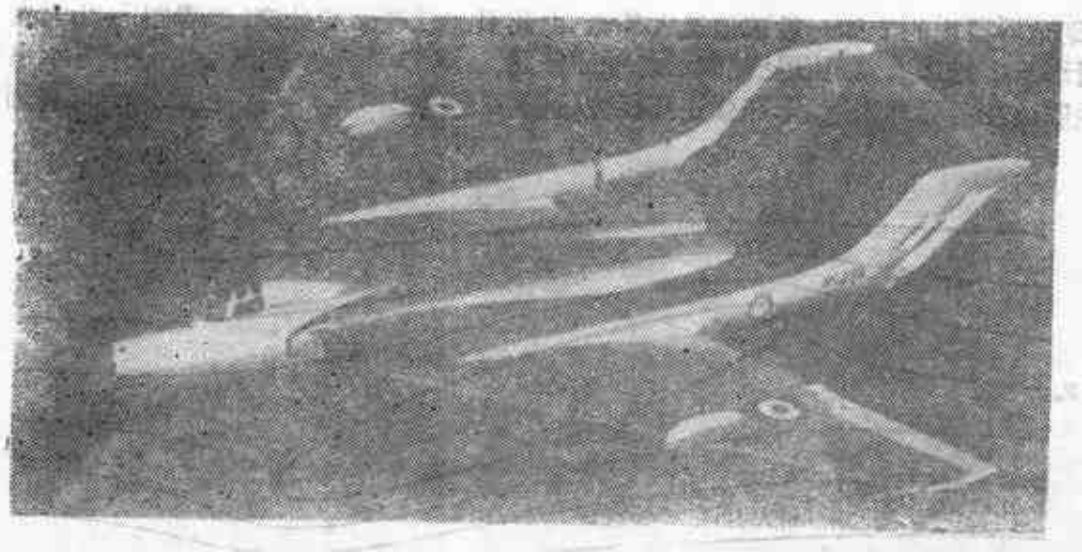


图 11.16 De Havilland D. H. 110 喷气战斗机,它装有后掠翼并在每个副翼边缘处装有边界层隔板,引自 W. Liebs^[67]

$W = \text{常数}$ 的情形,见方程(11.55),并不是唯一受到重视的情形。H. G. Loos^[67]研究了自由流动为 $U = \text{常数}$, $W = a_0 + a_1x$ 的绕平板流动的情形,而 A. G. Hanser 和 H. Z. Herzig^[48]讨论了自由流动为

$$U = \text{常数}; W = \Sigma a_n x^n$$

的一般情形。由于这种外流不是无旋的,所以边界层内的速度可以比自由流动的速度大。这种速度超出是由边界层内的二次流动引起的,正是二次流动将流体质点从较高能量区输送到这里。有时沿主流方向的原有速度剖面也会呈现一些倒流区,但这并不意味着分离;它们通常在下游就消失了。这种性质也可用二次流动的能量传递来解释。读者从上述这个例子可以看出,当讨论三维边界层时,定义分离会遇到重重困难。这是因为现在倒流与切应力之间的关系不象二维情形那样简单^[49,77]。根据 J. E. Fogarty^[24]的分析,当考虑一个绕铅垂轴旋转的无限机翼(直升飞机旋翼)时,可以成功地得到与方程(11.55)所描述的自由流动中所遇到的关系相同的分离。可以发现这种旋转运动不影响弦向速度分量,因而分离区的范围保持不变。旋转只不过引起微小的径向速度分量。

如果外部流动是在二维基本流动上叠加一个微弱扰动,并且这种流动用

$$U(x, z) = U_0(x) + U_1(x, z), \quad U_1 \ll U_0,$$

$$W(x, z) = W_1(x, z), \quad W_1 \ll U_0$$

描述时,则对于方程(11.53)和(11.54)所描述的一般问题,存在另一种便于计算的特殊情形。此时,边界层流动同样可以分为一个二维基本图象和一个叠加在上面的微弱扰动。通过线性化,这问题的基本微分方程又能相互分开。A. Mager^[70,71]和 H. S. Tan^[106]给出了这类问题的一些例子。

2. 其他物体上的边界层 当外流不能简单地表示为两个分量叠加时,三维边界层就会变得更加复杂。例如,偏航的旋成体上就是这种情形。在这种情形下,边界层内的速度方向明显地偏离该点自由流动的方向。换句话说,产生了很强的二次流场。从图 11.17b 的照片可以获得这种非常复杂的三维流动的概念;它是 E. A. Eichelbrenner 和 A. Oudart^[22]在偏航旋成椭球的上表面拍摄的,从物体表面小孔流出的染料条纹使得流动图案成为可见的。这张照片明显表明,逆压梯度下的三维边界层图案与二维边界层图案存在着显著的差别。其主要差别是:在二维情形下,如果逆压梯度足够

强,则边界层内的流体一般被迫进入外流,由此引起从壁面的分离(参看图 7.2b);在三维情形下,流体质点可以从侧向沿着壁面分离. 图 11.17b 中的照片清楚地显示出这种性质: 在后驻点附近,即在强逆压梯度区(另外参看图 11.17a),可以清楚地看到条

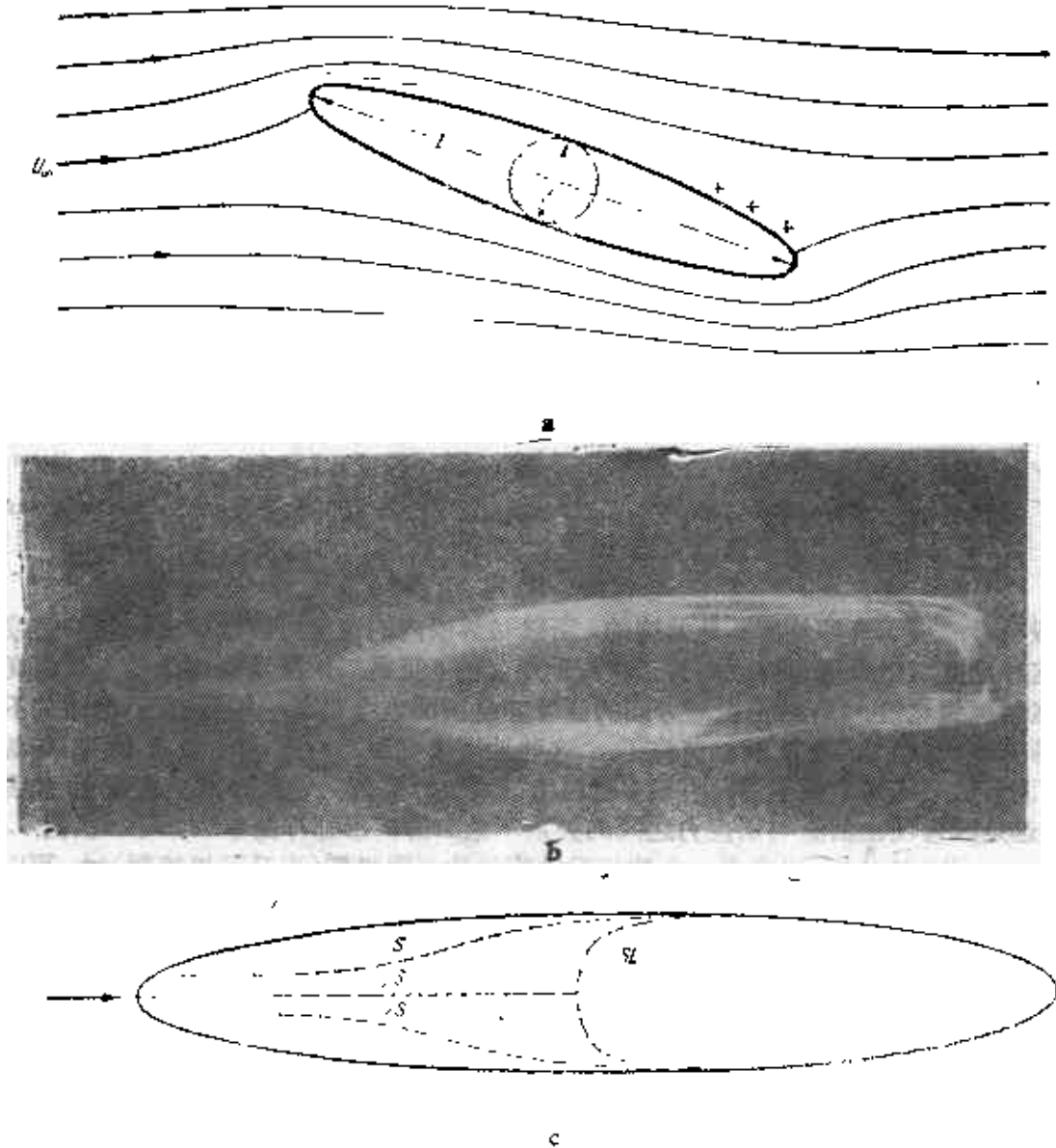


图 11.17 a, b, c 长短轴比 $L/d = 6$ 和有 10° 偏航角的旋成椭球上表面三维边界层, 取自 E. A. Fichelbrenner 和 A. Oudart^(21,22)

a) 侧视流线示意图

b) 在 Chatillon-sous-Bagneux (Paris) 的 ONERA 水洞中的旋成椭球上表面的照片, Reynolds 数 $U_0 l / \nu = 2 \times 10^4$. 通过从物体表面流出的染料线条使流动图案可见. 后驻点附近边界层内的流线显示出显著的横向偏斜. 这对应于三维边界层分离

c) 计算得到的壁面流线, 记作 S, 理论分离线记作 SL; 它们与 b) 中示出的照片图案在定性上令人满意地一致

纹横向偏转，但是它们确实仍然依附于表面上。图 11.17c 是通过计算得到的表面流线，它与图 11.17b 的实验图象定性一致。因此，如果考虑到这种特性，则确实不容易建立起三维边界层的分离准则。在这点上，我们希望读者注意 W. J. Rainbird、R. S. Crabbe 和 L. S. Jurewicz^[91]关于偏航圆锥的研究。

看来试图用 Prandtl 建议的方法^[89]对三维边界层进行理论分析是可能的，Prandtl 建议引进一个曲线坐标系，其中以自由流动的等势线和流线为坐标曲线。当 E. A. Eichelbrenner 和 A. Oudart^[22]计算上面提到的旋成椭球层流问题时，就采用了这种方法。我们已经讲过，如图 11.17c 所示，它们在定性上很一致。还可参阅 R. Timman 的著作^[114]。

最近 W. Geissler^[35,36,37]用数值计算发展了 L. Prandtl 提出的计算方法。图 11.18 说明偏航旋成椭球三维边界层的一些结果。图 11.18a 中除了画出等势线和外流流线外，还画出分离线 S ；后者具有类似于图 11.17 的分离线。图 11.18b 和图 11.18c 表示在一条具体位势线上不同位置的边界层速度分布。

R. Sedney^[104]较早研究过超声速流动中偏航旋转圆锥的层流边界层，而 J. C. Martin^[73]研究过小攻角下旋成体上的 Magnus 效应。

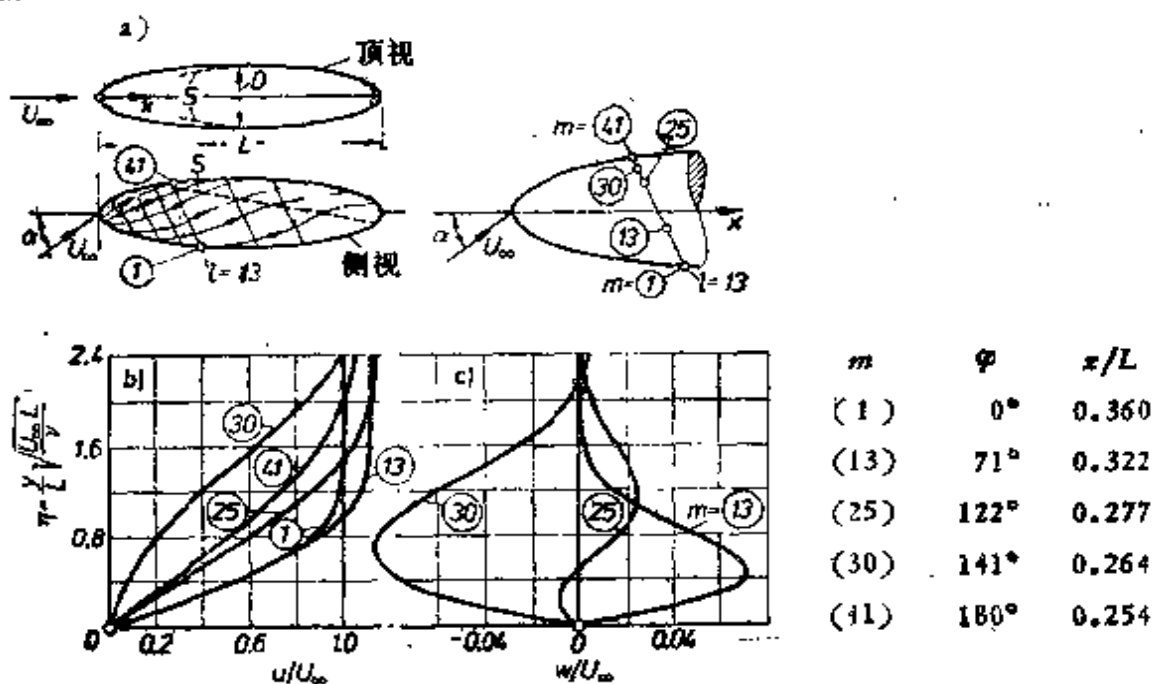


图 11.18 在攻角 $\alpha=15^\circ$ 和长短轴比 $L/D=4$ 的旋成椭球上三维边界层内的速度分布，取自 W. Geissler^[35,37]。a) 外流等势线和流线坐标系； S = 分离线。b) 沿外流流线方向的主要流动速度剖面 u/U_∞ 。c) 垂直于外流流线方向的二次流动速度剖面 w/U_∞ 。这些速度剖面是在位势线 $L=(13)$ 和不同位置 m 上给出的，每个 m 的方位角 φ 和位置 x 如上表所示 ($\varphi=0^\circ$ —迎风对称面)

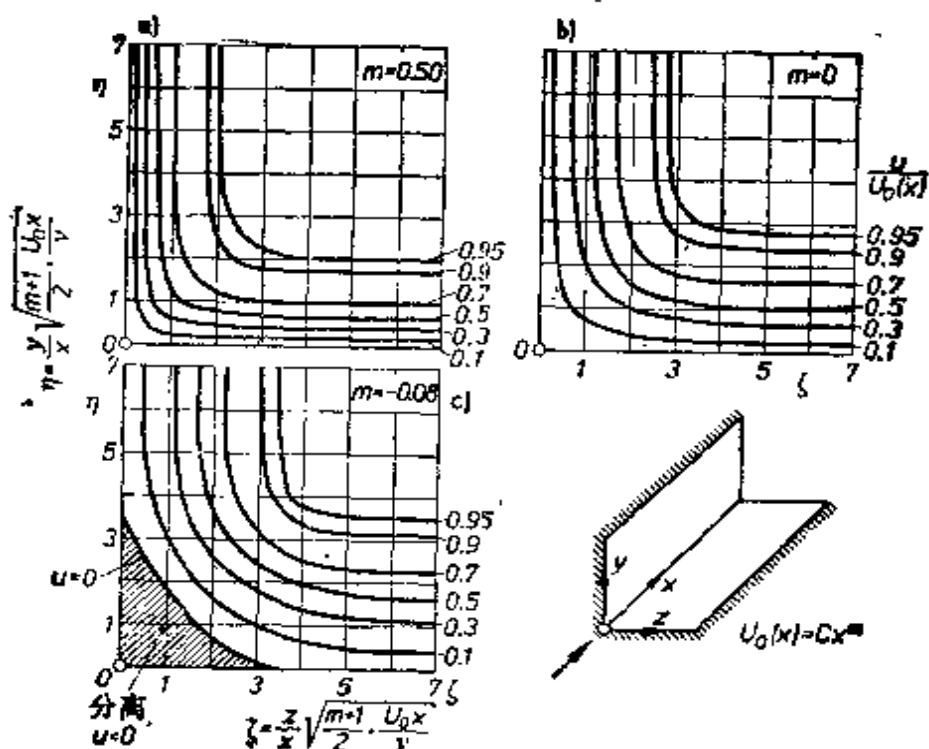


图 11.19 沿拐角的层流边界层的速度分布,取自 Vasanta Ram^[92].
边界层中常速度线, $u/U_0(x) = \text{常数}$. 自由流动速度 $U_0(x) = Cx^m$

两个互相垂直的平板构成拐角而来流平行于其交线的情形, 给出三维边界层的另一个重要例子. Vasanta Ram^[92]从理论上研究过这种流动的图形. 假设远处的外流速度是 Hartree 型的, 即

$$U_0(x) = Cx^m.$$

由第九章 a 可以想到, 这种类型的外流可以导致边界层的相似性速度剖面. 在拐角流动情形下仍然保持这个特点. 图 11.19 中给出了这些研究的某些结果; 该图对三个不同压力参数 m 画出了拐角内的速度分布. 对不同 m 值的速度分布的比较表明, 在沿外流压力增加的情形下, 拐角边界层明显增厚.

实验观察^[82, 39]表明, 即使在逆压梯度小的情形下, 拐角的流动也比远离拐角的壁面流动分离得早. 这种物理上可以理解的状态模式已为这些理论结果完全证实. 平板上在 $m = -0.091$ 时发生分离 (图 9.1), 而直角拐角则早在 $m = -0.05$ 时就发生了分离. 在 $m = -0.08$ 时, 拐角附近的流动显示出一个有倒流 ($u < 0$) 的分离区 (图 11.19). 相反, 在远离拐角的地方, 没有出现倒流.

M. Zamir 和 A. D. Young^[126,127]对零攻角直角拐角的层流边界层进行了大量的实验。还可参阅 S. G. Rubin 的文章^[93a]。

G. Jungclauss^[49]曾把 Pohlhausen 方法推广到旋转的物体；他把这种推广用来研究通过弯曲管道的相对运动，这在离心泵理论中是很重要的。这种理论对分离的预测与测量结果相吻合。

最后，可以注意一下 C. F. Carrier^[122]和 K. Gersten^[289]作出的在零攻角下两个互相垂直平板的边界层计算。M. Z. Von Krzywoblocki 曾处理过超声速流动和传热情形下的同样问题，他利用 G. F. Carrier 较早的工作；参看 H. A. Dwyer 的文章^[21b]。

所谓“四分之一平板问题”与上述问题密切相关。其中一项研究是对零攻角平板流动的研究。这个平板除了有前缘外还有一个平行于来流的侧缘。这个问题理论处理的假定是 K. Stewartson 和 L. Howarth^[108]，以及 K. Stewartson^[209]作出的。平板侧缘使边界层内出现附加的二次流动。除了其他影响外，这要引起切应力增加。这个结果与 J. W. Elder^[22]在有限宽度平板上进行的测量结果相符合。但是，象紧靠前缘附近的流动一样，侧缘上的流动还没有完全了解。

许多三维边界层流动物理上实在太复杂，很可能长期难以进行数值处理。可以通过图 11.20 来说明这种类型流动的一个例子。这个例子用图描述了在钝头短粗柱体（高度比长度小）附近形成的三维边界层。柱体放在平板上，在这个平板上，远离柱体的边界层是二维的，而靠近柱体时，在对称面以外地方的边界层内¹⁾形成一个二次流区，其中速度剖面是扭曲的，很象图 11.1 中的那种剖面。对称面内的边界层，必须克服柱体驻点区很强的压力增加，这就导致了在 S 点上发生分离，其形式类似于图 2.15 的减速滞上流动。

在分离区附近，流动形成了一个绕此柱体卷起的分离涡面，它在柱体基底处象一个马蹄。为了将它显示出来，图 11.21 这张照片是用注入烟流拍摄的。其中可以看到，除了柱体前面顺时针旋转的主旋涡外，还形成了一个附加的小旋涡，它以同样的方向旋转。这个主旋涡与二维类似物的主要区别在于，它不是由不变的流体质点组成的；相反，它不断地从上游方向接收新的流体，同时又不断地向涡面内的分离区释放流体。通过计算来了解这种复杂的流动图象是很困难的，特别是因为在壁面附近虽然它可以是层

1) 虽然这种流动在大多数情形下是湍流，我们还是结合层流边界层的讨论来叙述这种流动，因为总的来说它们的性质是相同的。

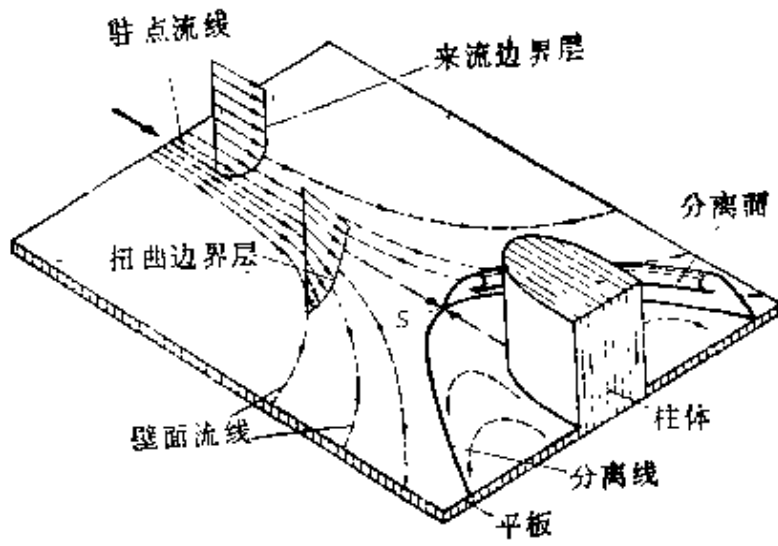


图 11.20 (简图)放在平板上的短粗柱体底角处形成的三维边界层(根据 J. P. Johnston^[76,77])。流线向对称面外面弯曲,结果,在边界层中形成二次流,速度剖面扭曲,对称面内的边界层在驻点区的 S 点上发生分离,这种流动形成一个分离面;还可参看图 11.21

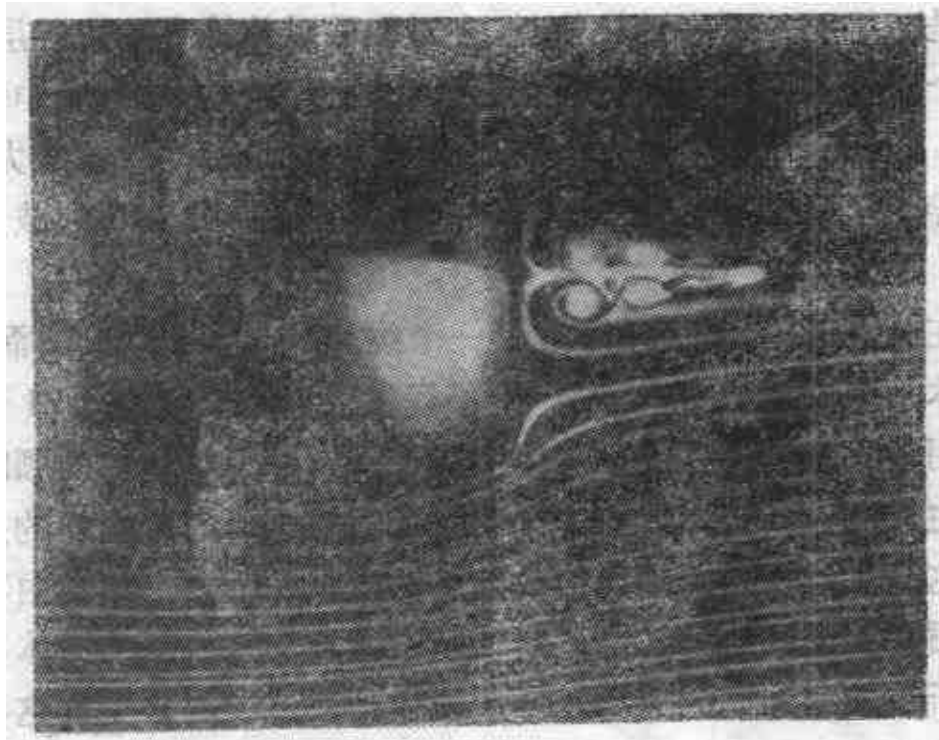


图 11.21 驻点流动的三维边界层分离;短粗柱体放在平板上(取自 Thwaites^[126];还可参看图 11.20)

流，但是在大多数情形下它主要还是湍流。

在 AGARD Conference Proceedings No. 168^[4] 中广泛地讨论了当代对三维流动分离问题的研究。

W. R. Sears^[103a], F. K. Moore^[78], J. C. Cooke 和 M. G. Hall^[19], 以及 H. Schlichting^[60] 都给出过关于三维边界层的概述文章。

第十二章 层流热边界层¹⁾

a. 能量方程的推导

研究固体与流动液体或流动气体之间的传热是包含有流体运动学科的课题。对于实际的流体流动,其中还叠加着热的流动,并且一般说来,这两个场是相互作用的。为了确定温度分布,必须联立运动方程和热传导方程。直观上看,流动流体中热物体周围的温度分布常常与边界层流动中的速度分布有相同的特征。例如,我们设想把一个物体放置在流动流体中,同时对物体加热,使得它的温度始终高于周围流体的温度。那么很明显,只是在直接邻近物体的薄层内和在物体后面狭窄的尾迹中,流体的温度才会增加,见图 4.2。从热物体的温度过渡到较冷的环境温度,主要是发生在邻近物体的薄层内。与流动现象相类似,我们把这个薄层称为热边界层。显然,流动现象和热现象之间的相互作用是很强烈的。

为了研究这种现象,除了要考虑运动方程外,还必须建立运动流体微元的能量平衡。对于不可压缩流体,能量平衡由内能、传导热、流动的对流热和摩擦热来确定。在可压缩流体中,当体积改变时还要加上一项膨胀功(或者压缩功)。在所有情形下都还可能出现辐射传热,但是,在中等温度下它的贡献很小,因此我们将其完全略去。现在,我们在热力学第一定律的基础上来建立这种能量平衡。为此,考虑一个沿其自身轨迹运动的、质量为 $\Delta M = \rho \Delta V$ 的体元 $\Delta V = dx dy dz$ 。在单元时间 dt 内加给该体元的热量 dQ 使该体元的内能增加 dE_T ,并对外做功 dW 。因此,

1) 感谢 K. Gersten 教授对本章提出的修改意见。

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{\frac{dE_T}{dt}}_{\text{能}} + \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{功}} \quad [\text{J/s}]^0, \quad (12.1)$$

其中项 dE_T/dt 表示随体导数，它由当地贡献和对流贡献所组成。

如果略去辐射传热，那么，传热只能通过热传导来实现。按照 Fourier 定律，单位时间通过单位面积的热通量 q [$\text{J}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$] 正比于温度梯度，所以有

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = q = -k \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (12.2)$$

式中 k [$\text{J}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{deg}$] 表示流体的导热系数。负号的意义表示热通量的方向与温度梯度的方向相反。所以，通过垂直于 x 方向的面元传进体元 ΔV 中的热量(见图 12.1)等于 $-(k\partial T/\partial x)dydz$ ，而从体元 ΔV 中传出去的热量则为 $[(k\partial T/\partial x) + (\partial/\partial x)(k\partial T/\partial x)dx]dydz$ 。因此，在 dt 时间内通过热传导加给体元 ΔV 的热量可以写成

$$dQ = dt \Delta V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\}. \quad (12.3)$$

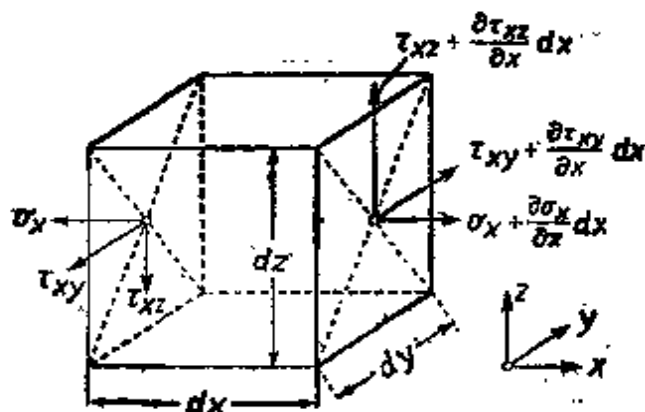


图 12.1 流体微元上的摩擦应力

1) 在这里和下文中，我们采用 Joule (1 Joule = 1 Newtonmeter 或 $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$) 作为功和能量的单位。

如果略去在重力场中由于位移而引起的势能变化, 则总的能量变化 dE_T 是由内能的变化 $dE = \rho \Delta V de$ 和动能的变化

$$d \left\{ \frac{1}{2} \rho \Delta V (u^2 + v^2 + w^2) \right\}$$

所组成的。因此有

$$\frac{dE_T}{dt} = \rho \Delta V \left\{ \frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right\}. \quad (12.4)$$

为了确定所做的功, 我们首先分析应力分量 σ_x 所起的作用。按照图 12.1, 可以看出单位时间所做的功为

$$\begin{aligned} dW_{\sigma_x} &= -dydz \left\{ -u\sigma_x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \right\} \\ &= -\Delta V \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x). \end{aligned} \quad (12.5)$$

加上负号是为了遵循方程 (12.1) 的符号约定, 按照这个约定, 外界对流体所做的功是负的。单位时间正应力和切应力做的总功可以写为

$$\left. \begin{aligned} dW &= -\Delta V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_z) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

式中 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ 表示曾在方程 (3.20) 和 (3.25) 中引进的正应力和切应力。将方程 (12.3), (12.4) 和 (12.6) 代入方程 (12.1), 同时进行一些明显的简化, 包括在方程 (3.11) 引用过的简化, 并经过一些运算, 我们可以得到流动的能量方程为

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} + \rho \operatorname{div} w &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi. \end{aligned} \quad (12.7)$$

式中 Φ 为耗散函数,其表达式为

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (12.8)$$

方程(12.7)是普遍适用的,但是,在大多数实际问题中还能进一步简化。不过在简化的时候,必须仔细地把完全气体情形与不可压缩流体情形区分开。后者的热力学性质并不是前者热力学性质的极限情形。事实上,完全气体的内能变化是 $de = c_v dT$,而焓的变化是 $dh = c_p dT$ 。可是,对于不可压缩流体而言,相应的变化分别是 $de = cdT$ 和 $dh = cdT + (1/\rho)dp$ 。

利用连续方程(3.1),在完全气体情形下得到

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (12.9)$$

借助于这个方程和

$$c_p dT = c_v dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad (12.10)$$

我们可以把方程(12.7)写成如下形式:

$$\boxed{\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} + \mu \Phi.} \quad (12.11)$$

式中 c_p [J/kg·deg] 表示单位质量的定压比热。一般说来, c_p 是温度的函数。在导热系数为常数的情形下,我们可以得到更为简单的形式

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi. \quad (12.12)$$

在不可压缩流体的情形下, $\operatorname{div} w = 0$,同时考虑到 $de = cdT$,则方程(12.7)变成

$$\rho c \frac{dT}{dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi. \quad (12.13)$$

b. 绝热压缩的温升; 驻点温度

在可压缩流动中, 由于动压改变而引起的温度变化对流动的热平衡有重要影响. 特别是, 把由于摩擦热产生的温度差和由于压缩性引起的温度差进行比较, 看来是有用的. 基于这个理由, 我们将首先计算在无摩擦气流中由于压缩性引起的温升: 如果沿着流线速度改变, 那么温度也必然随着改变. 为了简化这个论证, 可以假定过程是绝热的和可逆的. 因为一般说来, 导热系数的值很小, 而状态的热力学性质的变化速率却很高, 这就阻止了与周围环境的任何明显的热交换. 特别是我们所要计算的温升 $(\Delta T)_{ad} = T_0 - T_\infty$, 是气流在物体驻点处出现的温升, 它是由于从 p_∞ 压缩到 p_0 所引起的, 见图 12.2.

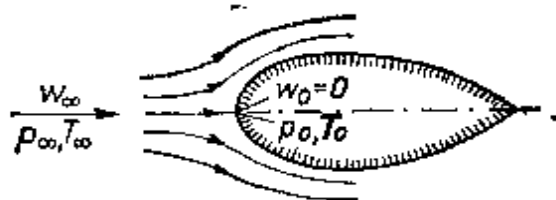


图 12.2 驻点绝热压缩温升 $(\Delta T)_{ad} = T_0 - T_\infty$ 的计算

对于无热传导的无摩擦流动情形, 能量方程(12.11)沿着流线(坐标 s) 给出如下温度和压力之间的关系式:

$$\rho c_p w \frac{dT}{ds} = w \frac{dp}{ds},$$

其中 $w(s)$ 表示沿着流线的速度. 将上式除以 ρw , 再沿着流线积分, 我们得到

$$c_p(T - T_\infty) = \int_{s_\infty}^s \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho}.$$

用类似的方法, 如果在完整的 Navier-Stokes 方程(3.26)中略去粘性项, 再沿着流线积分, 就可以导出 Bernoulli 方程:

表 12.1 物理常数

(1J = 1N · m; 1kJ/kg · deg = 10³m²/s² · deg)

物质	温度		比热	导热系数	热扩散系数	粘性系数	运动粘性系数	Prandtl 数
	<i>s</i>	<i>T</i>	<i>c_p</i>	<i>k</i>	<i>α</i> × 10 ⁶	<i>μ</i> × 10 ⁶	<i>ν</i> × 10 ⁶	<i>P</i>
	[°C]	[K]	[kJ/kg · K]	[J/m · s · K]	[m ² /s]	[kg/m · s = Pa · s]	[m ² /s]	[—]
水 (大气压)	20	293	4.183	0.598	0.143	1000	1.006	7.03
	40	313	4.179	0.627	0.151	654	0.658	4.35
	60	333	4.191	0.650	0.159	470	0.478	3.01
	80	353	4.199	0.670	0.164	354	0.364	2.22
	100	373	4.215	0.681	0.169	276	0.294	1.75
水银	20	293	0.138	9.3	5	1560	0.115	0.023
润滑油	20	293	1.84	0.145	0.088	796 000	892	10 100
	40	313	1.92	0.143	0.084	204 000	231	2 750
	60	333	2.00	0.141	0.081	71 300	82	1 020
	80	353	2.10	0.140	0.078	31 500	37	471
空气 (大气压)	-50	223	1.006	0.0205	13.1	14.6	9.5	0.72
	0	273	1.006	0.0242	19.2	17.1	13.6	0.71
	+50	323	1.006	0.0278	26.2	19.6	18.6	0.71
	100	373	1.009	0.0310	33.6	21.8	23.8	0.71
	200	473	1.028	0.0368	49.7	25.9	35.9	0.71
	300	573	1.048	0.0430	69.0	29.6	49.7	0.72

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{常数},$$

所以温升为

$$T - T_{\infty} = \frac{1}{2c_p} (w_{\infty}^2 - w^2), \quad (12.14a)$$

特别是在驻点 ($w = 0$) 处, 由于绝热压缩引起的温升为

$$T_0 - T_{\infty} = (\Delta T)_{ad} = \frac{w_{\infty}^2}{2c_p}. \quad (12.14b)$$

式中 w_{∞} 表示来流速度(见图 12.2)。速度减小到零时流体的温度 T_0 称为驻点温度, 有时也叫作总温。驻点温度和来流温度之间的

差值 $(\Delta T)_{ad} = T_0 - T_\infty$, 称为**绝热温升**。

公式 (12.14a) 也称为可压缩流动的 Bernoulli 方程。在推导该公式时曾假定流体的流动是可逆的, 也就是沿着流线熵值保持不变。实际上, 公式 (12.14a) 的应用比上述论证所引用的假定更具有普遍性, 因为它可以应用于任何一维流动, 例如通过一个细长喷管内的流动, 这时只要求没有外部的热交换, 而不管其熵值是否保持不变。在三维定常流动中, 可以证明沿着流线这个公式大体

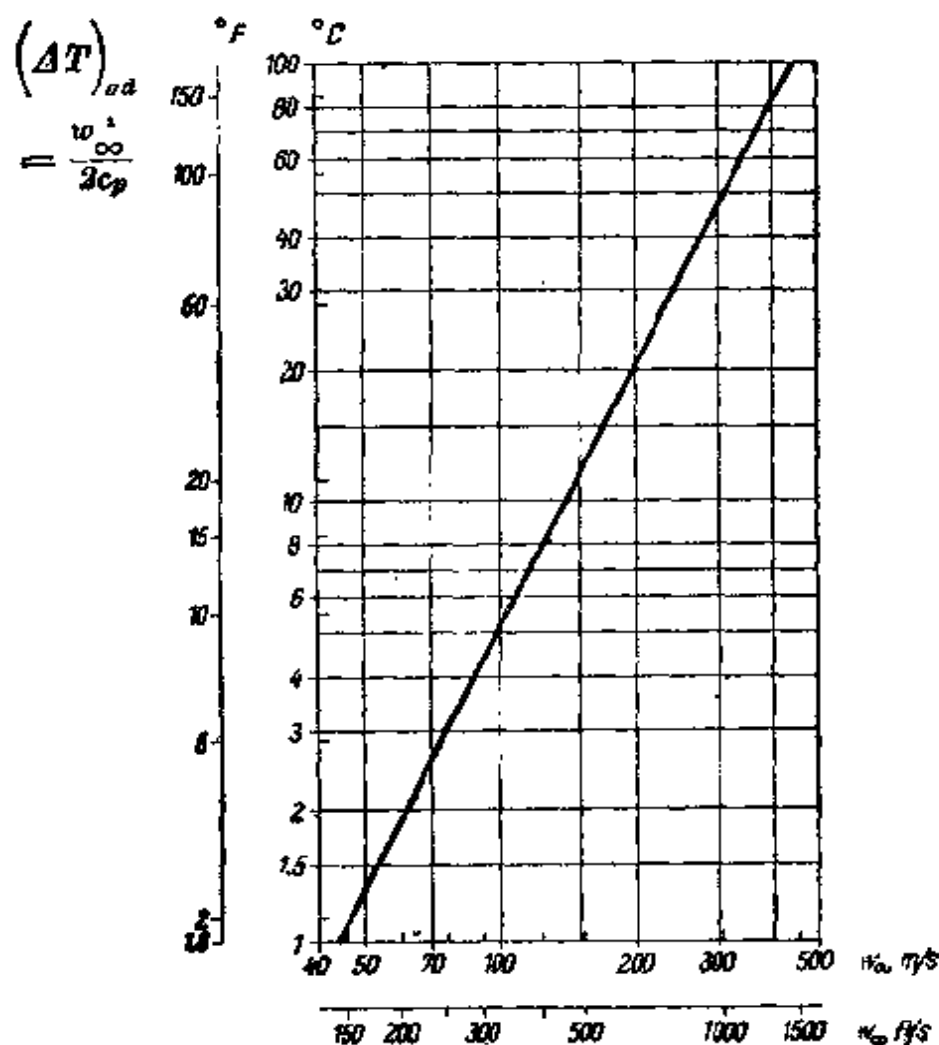


图 12.3 对空气, 由式 (12.14b) 计算的驻点绝热温升
($c_p = 0.24 \text{ Btu/lbf} \cdot \text{R}$)*

* 1 Btu = 1055.06 J. — 编者

上也是正确的¹⁾。对于空气, $c_p = 1.006 \text{ kJ/kg} \cdot \text{deg}$, 当速度为 $w_\infty = 100 \text{ m/s}$ 时, 绝热温升的值为

$$(\Delta T)_{ad} = \frac{100^2}{2 \times 1006} = 4.97^\circ\text{C}.$$

对于空气, 图 12.3 画出了由公式 (12.14b) 计算的绝热温升。一些物质的比热, 导热系数和其它的热特性列在表 12.1 中。

c. 传热的相似性理论

在温差引起了密度差的运动中, 运动方程 (3.28) 中还必须包含浮力, 并且将它作为施加在液体(或气体)上的彻体力来看待, 这些彻体力的大小是

$$X = \rho g_x, \quad Y = \rho g_y, \quad Z = \rho g_z,$$

其中 g_x, g_y, g_z 表示重力加速度矢量 \mathbf{g} 的分量。一般说来, 密度是压力 p 和温度 T 的函数。如果压力和温度对于参考值 p_∞ 和 T_∞ 的偏离不太大, 则可以利用如下的展开式:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, T=T_\infty} (T - T_\infty) \\ + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, p=p_\infty} (p - p_\infty), \end{aligned} \quad (12.15)$$

或者

$$\rho = \rho_\infty - \rho_\infty \beta (T - T_\infty) + \frac{\gamma}{c_\infty^2} (p - p_\infty). \quad (12.16)$$

式中 β 表示温度为 T_∞ 时的热膨胀系数, γ 是比热比, 而 c_∞ 是流体的声速。

在受重力作用的流动中, 上式最后一项可以略去。一般说来, 这样做意味着密度对于压力的依赖关系可以略去不计。另外, 如果减去由静力场产生的项 $\text{grad} p = \rho \mathbf{g}$, 则对于常粘性系数可压

1) 例如, 可以参看 L. Howarth 主编的 "Modern Developments in Fluid Dynamics: High-Speed Flow", Clarendon Press, Oxford 1953. 第 761 页方程 (10). (中译本: L. 霍华斯主编, 流体动力学的新发展(高速流), 科学出版社, 1959, 508 页.)

缩流体的定常流动,我们可以由方程 (3.30) 和 (3.29) 得到下列修改后的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (12.17)$$

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \beta \theta + \mu \left[\Delta^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{w} \right], \\ & \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \beta \theta + \mu \left[\Delta^2 v + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{w} \right], \\ & \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \beta \theta + \mu \left[\Delta^2 w + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{w} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

另外还必须考虑能量方程 (12.12), 在特性不变的假设下有

$$\begin{aligned} & \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ & \quad + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Phi. \end{aligned} \quad (12.19)$$

式中耗散函数 Φ 由方程 (12.8) 给出. 对于完全气体, 状态方程可以写为

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (12.20)$$

在可压缩介质的一般情形下, 方程 (12.17) 至 (12.20) 组成一个六个方程联立的方程组, 其中六个变量是 u, v, w, p, ρ, T . 对于不

1) 因为已经假定粘性系数为常数, 因此, 上述方程组只适用于温度变化不大的场合. 对于气体, 在温差很大 (超过 50°C 或者 90°F) 的情形下; 对于液体, 在中等温差 (超过 10°C 或者 18°F) 的情形下, 都必须计及 μ 随温度的变化. 在这种

可压缩介质(液体),最后一个方程,以及表示压缩功的项 $u \frac{\partial p}{\partial x}$ 等都消失。在这种情形下,只有五个方程,五个变量为 u, v, w, p, T 。

△ 必须强调的是,在方程(12.18), (12.19)和(12.20)中,符号 p 并不表示相同的物理量。在后两个方程中, p 代表热力学性质,而在方程(12.18)中,符号 p 表示介质的实际压力与静力学压力之差,其中静力学压力是密度为 ρ_∞ 时静止介质的压力(参看第四章 a 中关于无自由表面流体的叙述)。至今,在文献中详细讨论这些情形时,压力项或者只包含在方程(12.18)中(自由流动情形),或者只包含在关于可压缩流动的一对方程(12.19)和(12.20)中。

关于上述方程的解将在下面几节中进行讨论。在指出这些方程的解之前,我们准备首先从相似性原理^[106]的观点研究这些方程。通过这种方法,我们将会找到这些解所必须依赖的一些无量纲组合量。按照第四章 a 中由 Navier-Stokes 方程导出 Reynolds 相似性原理的同样方法,先在方程(12.18)和(12.19)中引入一些无量纲量。所有的长度都参考于某一特征长度 l ,所有的速度都参考于自由流速度 U_∞ ,密度参考于 ρ_∞ ,而压力则参考于 $\rho_\infty U_\infty^2$ 。进行无量纲化。能量方程中的温度参考于温差 (ΔT) 。进行无量纲化,其中 $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$ 是壁面温度与远离物体处的流体温度之差;因此 $\theta^* = (T - T_\infty)/(\Delta T)_0$ 。如果用星号表示所有的无量纲量,根据 x 方向的运动方程(12.18)和能量方程(12.19),对于二维情形利用 $g_x = g^* \cos \alpha$,我们可以得到

$$\begin{aligned} & \rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{g\beta(\Delta T)_0 l}{U_\infty^2} \rho^* \theta^* \cos \alpha \\ & \quad + \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty l} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (12.21) \\ & \rho^* \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned}$$

情形下,运动方程仍然保持(3.29)的形式。除了上述六个方程,还需补充一个经验的粘性公式 $\mu(T)$,即方程(13.3)。这样,我们就得到由七个方程组成的联立方程组,七个变量是 u, v, w, p, ρ, T, μ 。

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{\rho_{\infty} c_p U_{\infty} l} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) \\
&+ \frac{U_{\infty}^2}{c_p (\Delta T)_0} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) \\
&+ \frac{\mu U_{\infty}}{\rho_{\infty} c_p l (\Delta T)_0} \Phi^*. \tag{12.22}
\end{aligned}$$

这里,无量纲耗散函数由下式表示:

$$\Phi^* = 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \dots \right] + \dots.$$

一般认为,方程(12.21)和(12.22)的解依赖于下列五个无量纲组合量:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} l}{\mu}; & \frac{g\beta(\Delta T)_0 l}{U_{\infty}^2}; & \frac{k}{\rho_{\infty} c_p U_{\infty} l}; \\
& & \frac{U_{\infty}^2}{c_p (\Delta T)_0}; & \frac{\mu U_{\infty}}{\rho_{\infty} c_p l (\Delta T)_0}.
\end{aligned}$$

第一个组合量是早已熟悉的 Reynolds 数,第四和第五个组合量之间只相差一个因子 \mathbf{R} ,所以,总共只有四个独立的无量纲量,第二个组合量可以表示成

$$\frac{g\beta l (\Delta T)_0}{U_{\infty}^2} = \frac{g\beta l^3 (\Delta T)_0}{\nu^2} \frac{\nu^2}{U_{\infty}^2 l^2} = \mathbf{G} \frac{1}{\mathbf{R}^2}.$$

这就给出了 Grashof 数

$$\mathbf{G} = \frac{g\beta l^3 (\Delta T)_0}{\nu^2}. \tag{12.23}$$

第三个组合量可以写成

$$\frac{k}{\rho_{\infty} c_p U_{\infty} l} = \frac{\alpha}{U_{\infty} l} = \frac{\alpha}{\nu} \frac{\nu}{U_{\infty} l} = \frac{1}{\mathbf{P}} \frac{1}{\mathbf{R}}, \tag{12.24}$$

其中

$$\alpha = \frac{k}{\rho_{\infty} c_p} \tag{12.25}$$

是热扩散系数 [m^2/s 或 ft^2/s],而

$$\mathbf{P} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

是无量纲的 Prandtl 数。应该注意，Prandtl 数只取决于介质的属性。对于空气，近似有 $P = 0.7$ ；对于水，在 20°C 时，近似有 $P = 7$ ；而对于油类，由于它们的粘性系数很大（参看表 12.1），所以 Prandtl 数的量级是 1000^D 。第四个无量纲量可以直接导致如公式 (12.14b) 中所计算的绝热压缩温升。我们有

$$E = \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} = 2 \frac{(\Delta T)_{ad}}{(\Delta T)_0} \quad (\text{Eckert 数}), \quad (12.26)^D$$

其中 E 称为无量纲的 Eckert 数。在不可压缩流动中，量 $E = U_\infty^2 / c_p(\Delta T)_0$ 仍可保留，但是关于绝热压缩的解释已不再适用。现在我们可以推断，当自由流速度 U_∞ 很大，以至于绝热温升与固体和流体之间规定的温差大小相当时，摩擦热和压缩热对于温度场的计算都是重要的。

如果规定的温差与自由流的绝对温度具有相同的量级（例如，在高空火箭上就具有这样的情形），那么 Eckert 数会变得与 Mach 数大小相当。这可以由下列计算看出：根据完全气体的状态方程

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty} = RT_\infty = T_\infty(c_p - c_v) = c_p T_\infty \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

其中 $c_p/c_v = \gamma$ 。于是声速为

$$c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty = T_\infty c_p (\gamma - 1).$$

这时

$$\begin{aligned} E &= \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} = \frac{U_\infty^2}{c_p T_\infty} \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0} = (\gamma - 1) \frac{U_\infty^2}{c_\infty^2} \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0} \\ &= (\gamma - 1) M^2 \frac{T_\infty}{(\Delta T)_0}, \end{aligned}$$

所以

- 1) 在传热理论中，有时要使用 Péclet 数

$$P_r = \frac{U \cdot l}{\alpha}.$$

它与 Prandtl 数的关系为 $P_r = PR$ 。

- 2) 至今，这两种温度差的比值还没有一个公认的单名称。在本书较早的版本中，依照 E. Schmidt 教授的建议用 E. R. G. Eckert 教授的名字来命名，因此将其取名为 Eckert 数 E 。

$$E = (r - 1)M^2 \frac{T_\infty}{(\Delta T)_t}, \quad (12.27)$$

其中 $M = U_\infty/c_\infty$ 是 Mach 数。当自由流速度与声速相近，并且当规定的温度差与自由流的绝对温度具有同样量级时，压缩功和摩擦功都变得重要了；实际上，火箭在高空飞行时就会出现这种情形。

上述量纲分析导致这样的结论：以上关于速度场和温度场的方程组的解，依赖于下列四个无量纲组合量：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Reynolds 数} & \mathbf{R} = \frac{U_\infty l}{\nu} \\ \text{Prandtl 数} & \mathbf{P} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \\ \text{Grashof 数} & \mathbf{G} = \frac{g\beta(\Delta T)_0 l^3}{\nu^2} \\ \text{Eckert 数} & \mathbf{E} = \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} \end{array} \right\} \quad (12.28)$$

如果 $(\Delta T)_0 \approx T_\infty$ ，则按照公式 (12.27)，Eckert 数由 Mach 数 Δ 确定。P. Fischer 的文章^[36]讨论了在有热传递时确定支配流动的无量纲组合量的问题。

在大多数实际应用中，我们并不要求知道温度场和速度场的全部细节，而首先希望知道的是物体和流体之间的热交换量。这个量可以借助于传热系数 α 来表示， α 或者定义为局部量，或者定义为所研究物体表面上的平均量。

传热系数用壁面温度与流体温度的温差作参考，这里的流体温度系指远离壁面处的流体温度。如果用 $q(x)$ 表示 x 点处单位时间和单位面积所交换的热量（=热通量），则按照 **Newton 冷却定律**，它可以表示为

$$q(x) = \alpha(x) \times (T_w - T_\infty) = \alpha(x)(\Delta T)_0. \quad (12.29)$$

传热系数的量纲是 $[J/m^2 \cdot s \cdot \text{deg}]$ 。在固体与流体的界面上，传热完全是由于热传导引起的。按照 Fourier 定律，热通量的绝对值为（见公式 (12.2)）

$$q(x) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (12.30)$$

比较方程(12.29)和(12.30),并且引入无量纲量,就可以得到局部的无量纲传热系数,我们称它为 Nusselt 数 $N^{[91]}$:

$$N(x) = \frac{\alpha(x)l}{k} = - \left(\frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right)_{n^*=0} = - \frac{l}{(\Delta T)_0} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}$$

因此,热流量可以写成

$$q = \frac{k}{l} N (T_w - T_\infty) = \frac{k}{l} N (\Delta T)_0 \quad (12.31)$$

根据上述分析可以预料,速度场和温度场以及局部无量纲传热系数必然都依赖于前面所讨论的无量纲组合量。因此

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{U_\infty} &= f_1(s^*; R, P, G, E) \\ \frac{T - T_\infty}{(\Delta T)_0} &= f_2(s^*; R, P, G, E) \\ N &= f_3(s^*; R, P, G, E) \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

△ 第二个方程说明,相似过程也可以用这样的事实来表征,即在这些过程中比值 $T_w/(\Delta T)_0$ 必须相同(见文献[36]),这里符号 s^* 表示三个无量纲的空间坐标。如果通过对整个表面的积分得出传热系数的平均值,那么空间坐标将不会出现,这时对于几何相似的表面,有

$$N_m = f(R, P, G, E) \quad (12.32a)$$

此外,当研究一些特解时,在多数情况下,将有一个或几个无量纲组合量不会出现,因为这类问题很少会具有这种最一般的性质。由公式(12.27)可以看出,只有当温度差较大(例如 $50 \sim 100^\circ\text{C}$ 或者 $100 \sim 200^\circ\text{F}$),同时速度也很大(具有声速量级)时,温度场和传热系数才依赖于 Eckert 数。在中等速度情形下,只有当温度差很小(几度)时,温度场和速度场才依赖于 Eckert 数。另外,即使在中等速度下,方程(12.21)中由于温度差所引起的浮力,与惯性力和摩擦力相比也是很小的。在这种情形下,问题与 Grashof 数无关。这样的流动称为强迫流动,因此,对于强迫对流

$$N_m = f(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \quad (\text{强迫对流}).$$

只有在流动速度很小的情形下, Grashof 数才是重要的, 特别是, 由浮力引起的运动, 例如流体沿着受热铅垂平板的这种上升流动就是如此. 这样的流动称为自然流动, 我们把这种问题称为自然对流问题. 在这种情形下, 流动与 Reynolds 数无关, 因此有

$$N_m = f(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \quad (\text{自然对流}).$$

在本章 e—g 中将给出一些强迫流动问题的例子; 而在本章 h 中, 则有一些自然对流问题的例子.

d. 粘性流动中关于温度分布的精确解

现在, 我们解几个关于温度分布的特殊问题. 这里准备讨论的例子都是从许多可能求解的情形中根据数学上的简单性挑选出来的. 正如在第五章中首先讨论有摩擦流动方程的几个精确解的例子一样, 现在我们也首先讨论几个精确解的例子, 这些例子是 H. Schlichting^[101] 给出的. 在特性不变的二维不可压缩流动情形下, 我们由方程 (12.17)–(12.19) 得到沿水平面 (x, z 平面) 的定常流动中, 关于速度分布和温度分布的方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.33a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (12.33b)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (12.33c)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi, \quad (12.34)$$

其中

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

1. Couette 流动 对于 Couette 流动可以得到这个方程组的一个特别简单的精确解. Couette 流动是两个平行平直壁面之

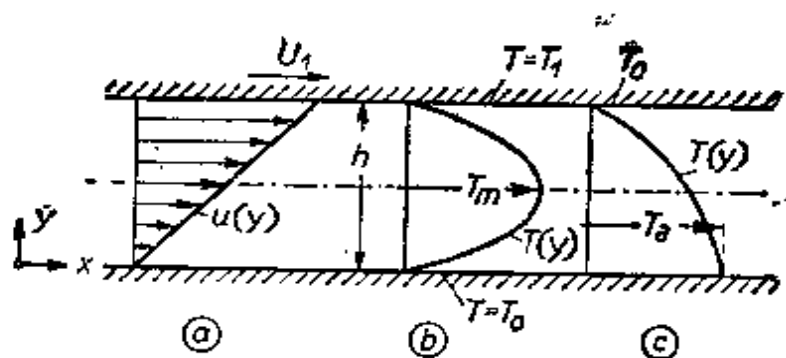


图 12.4 Couette 流动中的速度分布和温度分布. a) 速度分布. b) 当两个壁面的温度相等时,有摩擦热的温度分布. c) 当下壁面无热传导时,有摩擦热的温度分布

间的流动,其中一个壁面是静止的,另一个以不变的速度 U_1 沿自身的平面运动,见图 12.4. 在 x 方向上没有压力梯度时,运动方程的解是

$$u(y) = U_1 \frac{y}{h}; \quad v \equiv 0; \quad p = \text{常数}.$$

如果沿着壁面的温度为常数,那就可以得到关于温度分布的一个非常简单的解,其边界条件是

$$y = 0; \quad T = T_0; \quad y = h; \quad T = T_1. \quad (12.35a)$$

在这种情形下,耗散函数简化成表达式 $\Phi = (\partial u / \partial y)^2$,因此,关于温度分布的方程变成

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12.35b)$$

△根据边界条件 (12.35a), 上述方程有一个与 x 无关的解. 因为 $v = 0$, 方程左边的项 $v \frac{\partial T}{\partial y}$ 也为零,所以方程 (12.34) 左边所有的对流项都等于零. 因此,最后得到的温度分布只是由于摩擦热和横向的传导热引起的. 由方程 (12.35b) 我们得出

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (12.35c)$$

替换掉 du/dy , 则有

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \frac{U_1^2}{h^2}.$$

这个方程满足条件 (12.35a) 的解是

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\mu U_1^2}{2k(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

如果我们令 $T_1 - T_0 = (\Delta T)_0$, 则无量纲参数

$$\frac{\mu U_1^2}{k(T_1 - T_0)}$$

也可以写作

$$\frac{\mu U_1^2}{k(T_1 - T_0)} = \frac{\mu c_p}{k} \frac{U_1^2}{c_p (\Delta T)_0} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}.$$

可以看出, 这个无量纲参数可以根据式 (12.28) 用 Prandtl 数和 Eckert 数来表示. 在所研究的情形下, 也就是当没有对流热的时候, 可以看到温度分布依赖于乘积 $\mathbf{P} \times \mathbf{E}$. 最后如果引入缩写符号 $\eta = y/h$, 则得到下述非常简单的温度分布公式:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \eta + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} \eta (1 - \eta). \quad (12.36)$$

▷ 这个温度分布包括一个线性项, 它与不产生摩擦热的静止流体的情形是相同的. 在它上面叠加了一个由于摩擦热形成的抛物线分布. 图 12.5 中画出了乘积 $\mathbf{P} \times \mathbf{E}$ 为不同数值时的温度分布. 值得注意的是, 当两个壁面的给定温度差 $T_1 - T_0 > 0$ 时, 只要上壁面的速度 U_1 不超过某一个值, 热量总是从上壁面流向流体. 如果在上壁面处的温度梯度改变符号, 那么上壁面的热流也改变方向. 根据式 (12.36) 可以看出, 当 $\mu U_1^2 / 2k = T_1 - T_0$ 时, $(dT/dy)_{y=h} = 0$. 因此, 下面的规则可以用来判断在上壁面处的热流方向:

热从上壁 → 流体 (冷却上壁):

$$\frac{\mu U_1^2}{2k} < T_1 - T_0 \text{ 或者 } \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} < 2.$$

热从流体 → 上壁 (加热上壁):

$$\frac{\mu U_1^2}{2k} > T_1 - T_0 \text{ 或者 } \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} > 2.$$

(12.37)

这个简单的例子表明，摩擦热的产生对于冷却过程有很大的影响。尤其是当速度很高时，较暖的壁面可能被加热而不是被冷却。这种影响对于研究速度很高时的冷却问题具有基本的重要性。在热边界层问题中还要提到它，这些留待以后讨论。

对于两个壁面温度相等 ($T_1 = T_0$) 的 Couette 流动情形，式 (12.36) 导致简单的抛物线温度分布，它对于中间轴线是对称的，其式为

$$T(y) - T_0 = \frac{\mu U_1^2}{2k} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

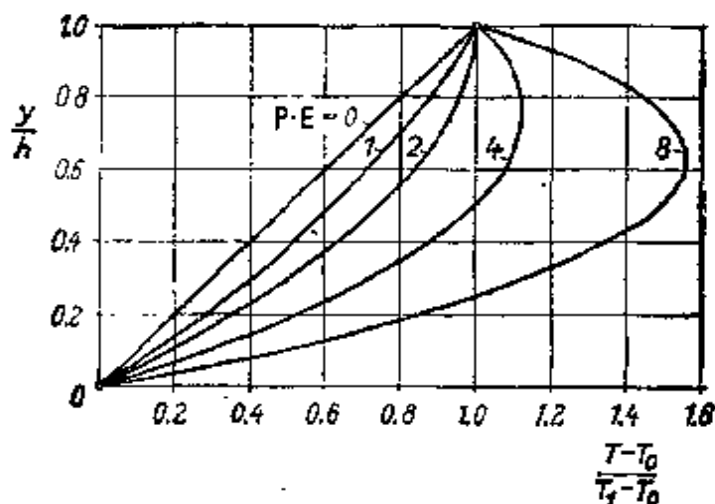


图 12.5 有摩擦热时两个壁面有不同温度的 Couette 流动中的温度分布 ($T_0 =$ 下壁面温度, $T_1 =$ 上壁面温度)

图 12.4b 中画出了这种分布。由摩擦热产生的最高温度 T_m 出现在中心位置，其值为

$$T_m - T_0 = \frac{\mu U_1^2}{8k}. \quad (12.38)$$

在可压缩流动情形下，只要能够假定粘性系数与温度无关，则上面的解仍然有效，并可以把式 (12.38) 写成如下的无量纲形式：

$$\frac{T_m - T_0}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{8} \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}^2, \quad (12.38a)$$

其中 $\mathbf{M} = U_1/c_0$ 表示 Mach 数， c_0 是温度为 T_0 时的声速。值得注意的是最大温度与两个壁面之间的距离无关。由摩擦产生的热量在静止壁面和运动壁面之间是均匀分布的。

这个例子的温度分布对于轴颈和轴承之间间隙中的流动有重要意义, G. Vogelpohl^[443] 对此作过详细的讨论。由于间隙的尺寸很小,同时油的粘性系数又很大,因此间隙中的流动是层流的,即使是在中等速度下,由于摩擦造成的温升也是很显著的。这可以从下面的例子得到证实: 根据表 12.1, 在中等温度(例如 30°C)时油的粘性系数 $\mu = 0.4 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$; 油的导热系数 $k = 0.14 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{deg}$ 。因此, 根据公式 (12.38), 当 $U_1 = 5 \text{ m/s}$ 时, $T_m - T_0 = 9^\circ\text{C}$; 而当 $U_1 = 10 \text{ m/s}$ 时, $T_m - T_0 = 36^\circ\text{C}$ 。润滑油的温升是如此之大, 以至于粘性系数对温度的依赖关系变得重要了。R. Nahme^[90] 把上述解推广到粘性系数与温度有关时的情形, 并发现垂直于壁面的速度分布不再是线性的。

如果假定摩擦产生的热量全部传给一个壁面, 而另一个壁面上没有传热(即为绝热壁面), 则根据方程 (12.34) 可以得到关于温度分布的另一个重要的解。假定下壁为绝热壁, 因而关于温度的边界条件变为

$$y = h: T = T_0; \quad y = 0: \frac{dT}{dy} = 0. \quad (12.39)$$

方程 (12.34) 满足这个边界条件的解是

$$T(y) - T_0 = \mu \frac{U_1^2}{2k} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right); \quad (12.40)$$

其分布曲线见图 12.4c。这样, 下壁面的温升可以表示为

$$T(0) - T_0 = T_* - T_0 = \mu U_1^2 / 2k. \quad (12.41)$$

式中 T_* 称为绝热壁温, 这在前面已讲述过了; 这个值等于平板型温度计上的读数。比较式 (12.41) 和 (12.38) 可以看出, 在壁温相等的情形下, 管道中心的最高温升等于绝热壁温升的四分之一, 即

$$T_m - T_0 = 4(T_* - T_0). \quad (12.42)$$

如果引入绝热壁温 T_* , 则可使式 (12.37) 所给出的不同壁温情形下的冷却判别式得到简化, 这时我们有

$$T_1 - T_0 \geq T_* - T_0: \quad \left. \begin{array}{l} \text{冷却} \\ \text{加热} \end{array} \right\} \text{上壁面}. \quad (12.43)$$

H. M. de Groff^[48] 把上述 Couette 流动的解推广到流体的粘性系数与温度有关时的情形。C. R. Illingworth^[50] 和 A. J. A. Morgan^[51] 则进一步引伸到可压缩流体情形。

2. 平壁槽中的 Poiseuille 流动 在平行平壁槽的二维流动情形下，可以得到另一个非常简单的关于温度分布的精确解。利用图 12.6 中所标明的符号，Poiseuille 指出其速度分布为抛物线：

$$u(y) = u_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right).$$

再假定二壁面的温度相等，即 $y = \pm h$ 时， $T = T_0$ ，因此由方程 (12.35c) 可以得到

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} = - \frac{4\mu(u_m)^2}{h^4} y^2.$$

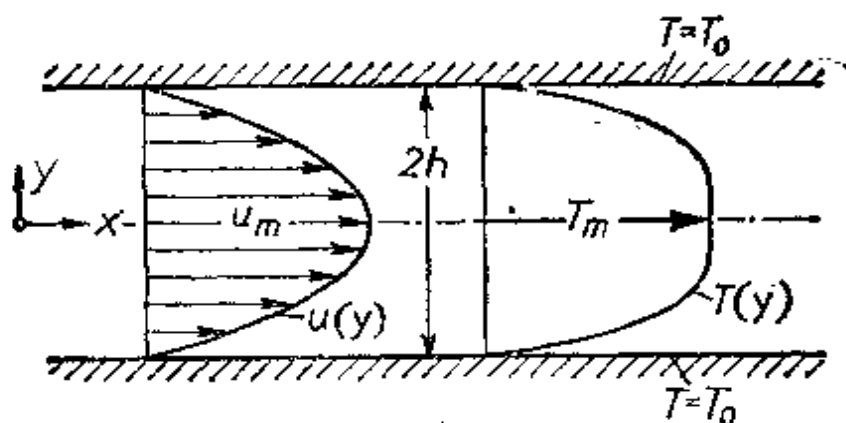


图 12.6 计及摩擦热时平壁槽中的速度分布和温度分布

这个方程的解是

$$T(y) - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu(u_m)^2}{k} \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^4\right]. \quad (12.44)$$

这种温度分布为四次抛物线，见图 12.6，在管道中心上的最大温升是

$$T_m - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu(u_m)^2}{k}. \quad (12.45)$$

H. Hausenblas^[53] 把这个解引伸到粘性系数与温度有关时的情形。

U. Grigull^[47] 给出了关于圆管情形相应的解。

对于在第五章 12 节中早已讨论过的收缩槽和扩张槽中的流动，可以得到热边界层的另一个精确解。为了求解温度问题，K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[46] 利用了 O. Jeffery 和 G. Hamel 给出的速度场的解（第五章 12 节中引用了这个解）。图 12.7 中画出了 Prandtl 数为不同数值时，槽内的温度分布。由于在壁面附近能量耗散特别大，因此得到的温度剖面有明显的“边界层外貌”。事实上，随着 Prandtl 数的增大，这种类似边界层的外貌就愈加明显。为了便于比较，图 12.7 中还画出了引自图 5.15 的速度分布 u/u_0 。

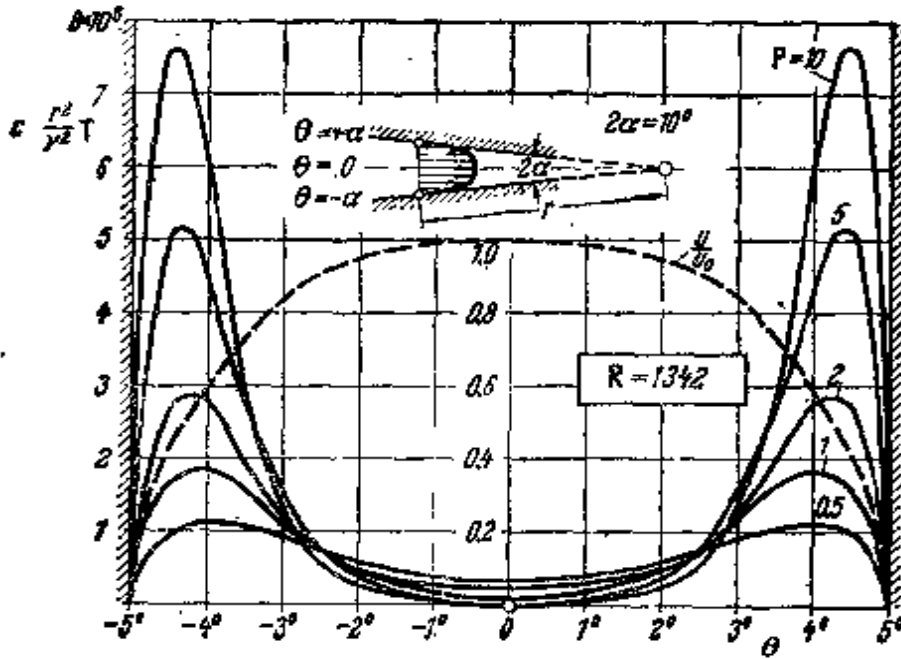


图 12.7 对于不同的 Prandtl 数 P ，夹角 $2\alpha = 10^\circ$ 的收缩槽中的温度分布，引自 K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[46]，Reynolds 数 $R = 1342$ ，速度分布取自图 5.15。

由于在壁面附近能量耗散特别大，因此得到的温度剖面具有明显的“边界层外貌”

旋转圆盘：第五章（具体地讲，在图 5.12 和 5.13 中）有一个无限大圆盘附近流动问题的解，这个圆盘在本来静止的流体中旋转。这是方程组 (5.53) 的一个解。为了确定一个热旋转圆盘邻近的温度场，必须扩大上述方程组以包括描述温度分布的方程（能量方

程)。K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[36a] 已经作了这种计算，并且在计算中也包含了耗散效应。B. L. Reeves 和 Ch. J. Kippenhan^[97] 给出了 Navier-Stokes 方程和能量方程的另外几个相似解。

e. 边界层简化

我们已经几次提到，从直观上显然可以看出，在许多情形下位于流动流体中热物体周围的温度场具有**边界层型式**。这就是说，物体周围的温度场基本上只扩展到直接邻近物面的狭窄区域内，而远离表面的区域实际上不受热物体温度的影响。特别是当导热系数 k 很小时，例如一些气体或液体，就是这种情况。在这种情形下，壁面的法向上有很大的温度梯度，并且，由热传导引起的热通量与只通过壁面附近一个薄层的对流热通量具有同样的量级。另一方面可以预料，在以高 Reynolds 数流动的流体中，未受热的物体附近由于摩擦热引起的温升，只在薄边界层内才是重要的，因为机械能通过摩擦转化为热的量仅在这里才是明显的。由此可以预料，将会形成一个与速度边界层连在一起的热边界层；在此薄层内有很大的温度梯度。从而，可以利用这个事实，对支配温度分布的能量方程引进一些简化，这些简化与早先在运动方程中引进过的简化相类似(见第七章)。

在本章 c 中给出了无量纲形式的运动方程和能量方程，其中利用了特征速度 U_∞ ，特征长度 l 和特征温度差 $(\Delta T)_0$ ，使相应的量变成无量纲量。为了简单起见，我们只限于讨论流体特性不变的二维情形，同时，选取 x 轴沿着主流动方向。在这些假设下， x 方向的运动方程和能量方程，即方程 (12.21) 和 (12.22)，可以写成如下形式：

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \beta g y$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{R^2} \theta \cos \alpha + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (12.46a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{PR} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + E \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + E \frac{1}{R} \phi. \quad (12.46b)$$

这里略去了作为上标的星号。式中标出了两个方程中各项的量级，它们是借助于速度边界层方程(7.2)估算出来的。上述估算的基本结论是：只有当速度边界层厚度 δ_r 满足条件

$$\left(\frac{\delta_r}{l} \right)^2 \sim \frac{1}{R} \quad (12.47)$$

时，粘性力与惯性力才具有相同的量级。由此证明，在第一个运动方程中，与 $\delta^2 u / \partial y^2$ 相比可以略去 $\partial^2 u / \partial x^2$ ，而第二个运动方程则可以完全略去。这是因为横向压力梯度 $\partial p / \partial y \sim \delta_r$ ，所以可以假定压力只取决于 x 。由方程(12.46a)可见，如果

$$G \approx R^2,$$

那么，由于较热流体质点的浮力(也就是热膨胀)所产生的彻体力将与惯性力和粘性力具有相同的量级；这种情形只出现在速度非常小而温差相当大的场合。

现在，我们可以对能量方程的各项作出类似的估计。就液体或气体而言，如果 Reynolds 数很大，那么无量纲组合量

$$\frac{k}{\rho_\infty c_p U_\infty l} = \frac{k}{c_p \mu} \frac{1}{R} = \frac{1}{P} \frac{1}{R} \quad (12.24)$$

(即热传导项的放大因子)也是一个少量，因为气体 Prandtl 数的量级为 1，而液体 Prandtl 数的量级为 10~1000。因此可以看出，

只有当 $\partial\theta/\partial y$ 非常大时,也就是在物体表面附近存在很陡的横向温度梯度层(热边界层)时,热传导项才可以具有与对流项相同的量级.现在可以估计对流项和粘性项的量级.估计结果写在方程式的下面,其中符号 δ_T 表示热边界层的厚度¹⁾.只有当热边界层的厚度具有量级

$$\left(\frac{\delta_T}{l}\right)^2 \sim \frac{1}{R} f_1(\mathbf{P}) \quad (12.48)$$

时, $\partial^2\theta/\partial x^2$ 项与 $\partial^2\theta/\partial y^2$ 项相比才可以略去,并且热传导项与对流项有相同的量级.鉴于以前对边界层厚度所作的估计,即 $\delta_s \sim 1/\sqrt{R}$,于是得到

$$\frac{\delta_T}{\delta_s} = f_2\left(\frac{x}{l}, \mathbf{P}, \mathbf{E}, \frac{\mathbf{G}}{R^2}\right). \quad (12.49)$$

由此可见,两种边界层厚度的比值与 Reynolds 数无关.如果可以忽略摩擦引起的能量耗散和浮力,那么,两种边界层厚度的比值就只取决于一个特征参数——Prandtl 数.在这种情形下,就可对 Prandtl 数作出很好的物理解释,详细说明见本章 f4.

通过对能量方程中其它各项的估计可以断定,在耗散函数表达式中只剩下 $(\partial u/\partial y)^2$ 项是有意义的,并且

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{1}{\delta_s^3}.$$

可见只是在

$$\mathbf{E} = \frac{U_\infty^2}{c_p(\Delta T)_0} \sim 1$$

时,摩擦热才是重要的.对于气体,只有当绝热压缩引起的温升和物体与流体之间的温差具有相同量级时,摩擦热才是重要的.这个叙述同样适用于压缩功.

回到有量纲量,并且计及粘性系数对温度的依赖关系,我们得到下列简化的二维可压缩流动方程:

1) 因为对于不同的流体, Prandtl 数的变化可达几个量级(见表 12.1),所以在 $P \rightarrow 0$ 或 $P \rightarrow \infty$ 的极限情形下,不能认为这里的估计仍然有效.在这种极限情形下,更好的估计值可以由公式(12.58)和(12.62a)给出的解得到.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (12.50a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx} + \rho g_x \beta (T - T_\infty), \quad (12.50b)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx}, \quad (12.50c)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad \mu = \mu(T). \quad (12.50d;e)$$

因为在边界层理论的范围内,可以把压力看作是一个给定的、由外部施加的力,因此,我们现在得到五个方程组成的联立方程组,五个未知量为 ρ, u, v, T, μ 。在(12.50b)和(12.50d)这两个方程中关于 p 的含意的区别,提请读者参看本章 *c* 中紧接方程(12.17)——(12.20)的后面所作的说明。

对于不可压缩($\rho = \rho_\infty = \text{常数}$)和粘性系数为常数的情形,这些方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.51a)$$

$$\rho_\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} - \rho_\infty g_x \beta (T - T_\infty), \quad (12.51b)$$

$$\rho_\infty \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (12.51c)$$

这给出了关于 u, v 和 T 的三个方程。

f. 热边界层的一般性质

1. 强迫流动和自然流动 速度边界层的微分方程(12.51b)和热边界层的微分方程(12.51c)在结构上非常相似。它们的差别只在于运动方程的最后两项和温度方程的最后一项。在一般情形下,速度场和温度场是相互作用的。这就是说,温度分布依赖于速

度分布；反之，速度分布也依赖于温度分布。在特殊情形下，如果浮力可以不考虑，同时可以假定流体的特性与温度无关，那么这种相互作用就消失了。这时虽然温度场对速度场的依赖关系依然存在，但是速度场不再依赖于温度场。这种情形发生在速度很大(大 Reynolds 数)同时温差很小的时候，我们把这种流动称为**强迫流动**(参见 301 页)。这种流动中的传热过程称为**强迫对流**。浮力起支配作用的流动称为**自然流动**，相应的传热过程称为**自然对流**。这种情况发生在运动速度非常小而温差却很大的场合。伴有自然对流的运动状态是由地球重力场中的浮力引起的，而浮力又是由于密度差或密度梯度造成的。例如，直立热平板外侧的流场就属于这种类型。强迫流动又可以再分为中等速度流动和高速流动，这要看是否需要计及摩擦热和压缩性热而定。在这两种情形下温度场都依赖于流场。然而，在中等速度下，如果摩擦热和压缩热可以忽略，则温度场对速度场的依赖关系只取决于 Prandtl 数。对于每一个速度场，都对应以 Prandtl 数为参量的无限多个温度分布。在高速下，必须包括摩擦功和压缩功。是否需要计及摩擦功和压缩功，取决于 Eckert 数 $E = 2(\Delta T)_{ad}/(\Delta T)_0$ ，即取决于 Eckert 数是不是可以与 1 相比较。换句话说，当由于摩擦和压缩引起的温升与边界条件中所规定的温差(物体和流体之间的温度差)可以相比较的时候，就必须计及摩擦功和压缩功。如果规定的温度差具有平均绝对温度的量级，那么只有当流动速度与声速可以比较时，摩擦功和压缩功才变成重要的。

指出这样一点是重要的：和运动方程不同，温度方程是线性的。这就使积分过程大为简化，并且可以对已知解进行叠加。

2. 绝热壁 最后必须提到的是，各种可能的温度场边界条件的集合大于速度场边界条件的集合。物体表面的温度可以是不变的，也可以是改变的，此外还可能遇到规定表面热通量的问题。鉴于方程(12.30)，这意味着壁面上的温度梯度可以作为边界条件出现。通常所谓的**绝热壁**则构成了后一种边界条件的特例，因为这时必须假定从壁面到流体没有热流，即壁面上的边界条件是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} = 0 \quad (\text{绝热壁}).$$

△这种情形可以想象为物体壁面对热流是完全绝热的。流体通过摩擦产生的热使壁面变热，直到 $(\partial T/\partial n)_{n=0} = 0$ 的条件获得满足为止。这样，壁面温度（也可以称为绝热壁温）就高于离壁面一定距离处的流体温度。当使用所谓的平板温度计时，即当借助平行于主流的平板来测量流动流体的温度时，实际上就满足这种条件¹⁾。平板上超出的温度构成平板温度计的误差。为了得到运动流体的真实温度必须减去这个误差。这个差值有时称为动力学温度。

3. 传热和表面摩擦力之间的比擦 对于边界层流动，在传热和表面摩擦力之间存在一种非常明显的关系。1874年 O. Reynolds^[96] 以最简单的形式揭示出了这种关系。基于这个原因，我们把这种关系称为 Reynolds 比拟。

在第八章 a 中已经表明，对于不可压缩流体，二维边界层方程的所有解都有如下的形式：

$$\frac{u}{U_\infty} = f_1\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{\mathbf{R}}\right), \quad (12.52a)$$

$$\frac{v}{U_\infty}\sqrt{\mathbf{R}} = f_2\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{\mathbf{R}}\right), \quad (12.52b)$$

其中 $\mathbf{R} = U_\infty l/\nu$ 。如果可以略去压缩功和耗散热，根据同样的理由，描述热边界层的方程 (12.51c) 的所有解必然都具有这样的形式：

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = f_3\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{\mathbf{R}}, \mathbf{P}\right). \quad (12.52c)$$

因此，按照表这式 (12.30)，热通量可以写为

$$q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{k}{l}(T_w - T_\infty)\sqrt{\mathbf{R}} f_3\left(\frac{x}{l}, \mathbf{P}\right); \quad (12.52d)$$

1) 基于这个原因，在早期的教科书上把绝热壁的问题称为平板温度计问题。

而 Nusselt 数可以表示为

$$N = \frac{ql}{k(T_w - T_\infty)} = \sqrt{R} \bar{f}_3\left(\frac{x}{l}, P\right), \quad (12.53)$$

这个非常重要的关系式说明,对于所有的层流边界层(始终假定可以略去压缩功和摩擦热), Nusselt 数与 Reynolds 数的平方根成正比。这是在边界层简化的基础上得到的一种特殊而更加明显的关系,而不是在完整的 Navier-Stokes 方程的基础上,由式(12.32)所表示的那种 Nusselt 数与 Reynolds 数之间的普遍关系。

由方程(12.52a),我们可以写出如下关于局部切应力的公式:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U_\infty \sqrt{R}}{l} \bar{f}_1\left(\frac{x}{l}\right), \quad (12.53a)$$

而由此给出的局部表面摩擦力系数为

$$c_f' = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{2}{\sqrt{R}} \bar{f}_1\left(\frac{x}{l}\right). \quad (12.53b)$$

将式(12.53b)与(12.53)合并,我们可以得到普遍关系

$$\boxed{N = \frac{1}{2} c_f' R^{1/2} \left(\frac{x}{l}, P\right)}. \quad (12.54)$$

如上所述,这个最普遍的 Reynolds 比拟关系式对于所有的层流边界层都是适用的。

特别地,如果存在一种相似解,即由形式为 $U(x) = u_1 x^m$ 的外部流动所给出的解,那么按照第九章 a 的讨论我们可以写出

$$\frac{u}{U(x)} = F_1\left(y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}\right), \quad (12.54a)$$

$$\frac{v}{U(x)} \sqrt{\frac{xU(x)}{\nu}} = F_2\left(y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}\right). \quad (12.54b)$$

根据温度方程可以直接得到

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = F_2 \left(y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}, \mathbf{P} \right). \quad (12.54c)$$

与式 (12.53) 相类似, 用坐标 x 构成的局部 Nusselt 数可以表示成这样的形式:

$$\mathbf{N}_x = \frac{\alpha x}{k} = \sqrt{\mathbf{R}_x} \cdot F(m, \mathbf{P}), \quad (12.55)$$

其中

$$\mathbf{R}_x = \frac{xU(x)}{\nu}.$$

函数 $F(m, \mathbf{P})$ 将在本章 §2 中详细讨论 (见式 (12.87) 和图 12.14)。这样, 局部表面摩擦力系数

$$c'_{fx} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho [U(x)]^2} = \frac{2}{\sqrt{\mathbf{R}_x}} \bar{F}_1(m), \quad (12.55a)$$

与 Nusselt 数之间有以下关系:

$$\mathbf{N}_x = \frac{1}{2} c'_{fx} \mathbf{R}_x \cdot \bar{F}(m, \mathbf{P}), \quad (12.56)$$

最简单的流动型式是绕零攻角平板的流动, 其特点是 $m = 0$, 这时如果 Prandtl 数为 1, 则关于速度场和温度场的方程 (12.51b) 和 (12.51c) 就变成完全类似。在这种情形下, 这两个解本身具有完全相同的代数形式, 即有

$$F_2 \left(y \sqrt{\frac{u_1}{\nu x}}, 1 \right) \equiv F_1 \left(y \sqrt{\frac{u_1}{\nu x}} \right) \quad (\text{如果 } m = 0). \quad (12.56a)$$

因此, 对于平板情形

$$\bar{F}(0, 1) = 1,$$

并且式 (12.56) 简化为

$$\mathbf{N}_x = \frac{1}{2} c'_{fx} \mathbf{R}_x \quad (m = 0, \mathbf{P} = 1), \quad (12.56b)$$

这正是最简单形式的 Reynolds 比拟; 如上所述, 这个比拟式是由 O. Reynolds 本人首先发现的。

至此, 上述讨论只能适用于壁面温度为常数以及能量耗散可

以忽略的层流不可压缩流动。当然也可以把上述结果引伸到其它的情形,例如具有摩擦热的平板情形(见公式(12.81)和同页上的脚注),或者具有压缩功的情形(见第十三章c)。尤其值得注意的是:在湍流边界层中也可以找到 Reynolds 比拟,这种比拟在计算湍流传热率时起着极为重要的作用(参看第二十三章)。

4. Prandtl 数的影响 本章的讨论使我们确信 Prandtl 数是这样一个数:它对热边界层的厚度,进而对强迫对流或自由对流中的传热率都起着决定性的作用。按其定义

$$P = \frac{\nu}{\alpha},$$

Prandtl 数等于两个量的比值:其中一个(粘性系数)表征流体的动量输运特性,另一个(热扩散系数)表征流体的热输运特性。如果流体的粘性系数特别大,那就可以不太严格地说,其输运动量的能力很大。因此,由于存在壁面(无滑移条件)而引起的动量损失将在流体中延伸很远,所以速度边界层就比较厚。对于热边界层也可以作类似的叙述。因此可以理解,Prandtl 数在强迫流动中起着直接量度两种边界层厚度之比的作用,正如在式(12.49)中已表明的那样。前面讨论过的 $P = 1$ 的特殊情形,对应于两种边界层厚度近似相等的流动;沿着等温的零攻角平板,它们就是完全相等的。除此之外,对于 Prandtl 数很大或者 Prandtl 数很小的极端情形也是值得注意的,它们概要地表示在图 12.8 中。

极小 Prandtl 数: 由图 12.8 可以清楚地看出,在 Prandtl 数很小的情形下,例如在熔化的金属(如水银)中出现的那样,热边界层的计算可以不考虑速度边界层的影响。因此,速度分量 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可以分别用 $U(x)$ 和 $V(x, y) = -(dU/dx)y$ 来代替,这个关于 V 的近似是由适用于壁面的连续方程得到的。于是,能量方程(12.51c)变成特别简单的形式

$$U(x) \frac{\partial T}{\partial x} - y \frac{dU}{dx} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (P \rightarrow 0). \quad (12.57)$$

而且,在边界层内温度场与速度场无关。

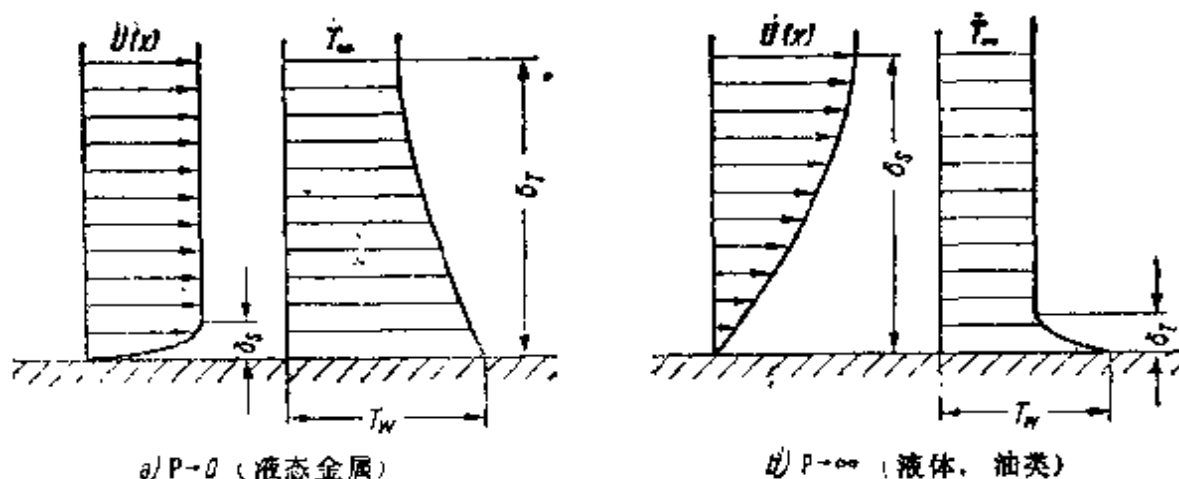


图 12.8 在 Prandtl 数具有很小值或很大值的边界层中，
温度场与速度场之间的比较

引入相似参数

$$\eta = y \frac{U(x)}{2 \sqrt{\alpha \int_0^x U(x) dx}}, \quad (12.57a)$$

就可以把关于温度分布的偏微分方程变换成常微分方程。然后，可以得到如下关于 Nusselt 数的通用表达式：

$$N_x = \frac{\alpha x}{l} = \frac{x U(x)}{\sqrt{\pi \nu \int_0^x U(x) dx}} P^{1/2} \quad (P \rightarrow 0). \quad (12.57b)$$

表达式 (12.59a) 和 (12.59b) 是这种通用表达式的特殊情形。

在具有均匀壁温 T_w 的平板情形下 ($U(x) = U_\infty = \text{常数}$)，我们得到与方程 (5.17) 相同的微分方程(方程 (5.17) 是第五章中对另一种关系导出的方程)。这个方程的解是

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta \right), \quad (12.58)$$

其中

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}.$$

按照式 (12.31)，相应的 Nusselt 数是

$$N_x = \frac{\alpha x}{k} = \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\pi \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{R_x P} \quad (\text{平板}, P \rightarrow 0), \quad (12.59a)$$

在驻点流动情形下 ($U(x) = u_1 x$), 得到

$$N_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{R_x P} \quad (\text{驻点流动}, P \rightarrow 0), \quad (12.59b)$$

其中

$$R_x = Ux/\nu.$$

极大 Prandtl 数: 许多年以前, M. A. Levêque^[76] 首先解出了 $P \rightarrow \infty$ 的第二种极限情形。他引入了一个很合理的假定: 整个温度场都局限在这样的区域内, 在这个区域中速度场的纵向速度分量 u 正比于横向距离 y 。在已经形成的速度边界层内, 热边界层在壁面 $x = x_0$ 处以温度跃变起始的情形下(参看图 12.17), 即使 Prandtl 数为中等数值时也能出现这种情况。因此, 在能量方程 (12.51c) 中, 我们可以假定用 $u = (\tau_0/\mu)y$ 来表示速度边界层的速度分布。于是, 依照参考文献 [76] 和 [68a] (也可见文献 [111] 和 [112]), 可以证明变换式

$$\eta = \frac{y \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}}}{\left\{ 9\alpha \int_{x_0}^x \frac{\tau_0}{\mu} dx \right\}^{1/3}} \quad (12.60)$$

可以把能量方程变换为下述常微分方程:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{dT}{d\eta} = 0. \quad (12.61)$$

式中 x_0 表示壁面上发生温度跃变处的坐标。应该记住, 这里已经略去了摩擦热的影响。这个常微分方程的解可以用不完全的 gamma 函数以封闭形式表示出来。经过一些必要的计算, 我们就能够得到 Nusselt 数

$$N_x = \frac{\alpha(x - x_0)}{k} = \frac{x - x_0}{0.8930} \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}}$$

$$\times \left\{ 9\alpha \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}} dx \right\}^{-1/3} \quad (P \rightarrow \infty), \quad (12.61a)^{11)}$$

或者

$$N_x = 0.5384 P^{1/3} \frac{x - x_0}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left\{ \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dx}{\nu} \right\}^{-1/3} \quad (P \rightarrow \infty). \quad (12.61b)^{11)}$$

在零攻角平板和 $x_0 = 0$ 的特殊情形下, 将式 (7.31), 即

$$\tau_0 = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

代入式 (12.61b), 得到

$$N_x = 0.339 P^{1/3} \sqrt{R_x} \quad (\text{平板}, P \rightarrow \infty). \quad (12.62a)$$

图 12.14 表明, 即使是在中等 Prandtl 数的情形下, 这个公式也给出很好的近似. 在驻点处相应的公式是

$$N_x = 0.661 P^{1/3} \sqrt{R_x} \quad (\text{驻点}, P \rightarrow \infty). \quad (12.62b)$$

类似地, 对于直立平板上的自由对流情形也可以建立简单的渐近公式, 见文献 [73], 也可以见公式 (12.118a) 和 (12.118b).

g. 强迫流动中的热边界层

这一节我们将讨论强迫流动热边界层的几个例子. 在求解这些问题的时候, 将利用简化的热边界层方程. 正如解速度边界层问题一样, 计算任意形状物体热边界层的一般问题是非常困难的, 所以, 我们还是从最简单的零攻角平板开始.

1. 绕零攻角平板的平行流动 我们假定 x 轴位于平板平面上, 并沿着流动方向, y 轴则垂直于平板和流动方向, 原点位于前缘处. 不可压缩流动和不变特性流体 (即特性与温度无关) 的边界层方程组已由方程 (12.51a, b, c) 给出. 如果假设浮力等于零以及 $dp/dx = 0^{12, 91}$, 则得到

1) $0.8930 = \left(\frac{1}{3}\right)_1$, $0.5384 = 9^{-1/3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)_1\right]^{-1}$, 其中 $z_1 = \Gamma(z+1)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.63a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (12.63b)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12.63c)$$

边界条件是

$$y = 0: u = v = 0; T = T_w \text{ 或者 } \partial T / \partial y = 0;$$

$$y = \infty: u = U_\infty; T = T_\infty.$$

这里速度场不依赖于温度场，所以可以首先求解两个流动方程(12.63a, b)，然后利用所得到的结果计算温度场。根据方程(12.63b)和(12.63c)可以直接得到速度分布与温度分布之间的一个重要关系。在方程(12.63c)中，如果摩擦热 $\mu(\partial u / \partial y)^2$ 可以略去，并且用第二个方程中的 u 代替 T ；另外，如果流体的特性满足关系式

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{k}{c_p \rho} \quad \text{或者 } \nu = \alpha, \text{ 即 } P = 1,$$

则方程(12.63b)和(12.63c)就变成完全相同了。如果不计摩擦热，那么，只有在壁面和外部流动之间有温差（例如假定 $T_w - T_\infty > 0$ （冷却））时才存在温度场。由此可见，对于平行流动中的零攻角平板，在速度很小时，只要 Prandtl 数等于1，温度分布和速度分布就是相同的，即

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{U_\infty} \quad (P = 1). \quad (12.64)$$

这个结果对应于式(12.52)，它曾使我们在传热和表面摩擦力之间得到重要的 Reynolds 比拟关系式。

为了求解流动方程，H. Blasius 引进新变量，见式(7.24)和(7.25)（其中 ϕ 为流函数），即：

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}; \quad \phi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta).$$

因此,

$$u = U_{\infty} f'(\eta); \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} (\eta f' - f).$$

关于 $f(\eta)$ 的微分方程 (7.28) 变为

$$ff'' + 2f''' = 0,$$

其边界条件是

$$\eta = 0: \quad f = f' = 0;$$

$$\eta = \infty: \quad f' = 1.$$

在第七章表 7.1 中已经给出了这些方程的解。

计及摩擦热的影响。由方程 (12.63c) 可见, 温度分布 $T(\eta)$ 由下列方程给出:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{\mathbf{P}}{2} f \frac{dT}{d\eta} = -2\mathbf{P} \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} f'^2. \quad (12.65)$$

通过如下形式的两个解的叠加, 可以方便地表示出方程 (12.65) 的通解:

$$T(\eta) - T_{\infty} = C\theta_1(\eta) + \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} \theta_2(\eta). \quad (12.66)$$

式中 $\theta_1(\eta)$ 表示齐次方程的通解, $\theta_2(\eta)$ 表示非齐次方程的特解。另外, 为了简便起见, 可以这样选择 $\theta_1(\eta)$ 和 $\theta_2(\eta)$ 的边界条件: 使得 $\theta_1(\eta)$ 成为在壁面和外部流动之间具有规定温差 ($T_w - T_{\infty}$) 的冷却问题的解, 而 $\theta_2(\eta)$ 是关于绝热壁问题的解。因此 $\theta_1(\eta)$ 和 $\theta_2(\eta)$ 满足下列两个方程, 即

$$\theta_1' + \frac{1}{2} \mathbf{P} f \theta_1 = 0, \quad (12.67)$$

其边界条件是: 在 $\eta = 0$ 处, $\theta_1 = 1$; 在 $\eta = \infty$ 处, $\theta_1 = 0$ 。

$$\theta_2' + \frac{1}{2} \mathbf{P} f \theta_2 = -2\mathbf{P} f'^2, \quad (12.68)$$

其边界条件是: 在 $\eta = 0$ 处, $\theta_2 = 0$; 在 $\eta = \infty$ 处, $\theta_2 = 0$ 。根据式 (12.66), 由 $\theta_1(0)$ 的值可以计算出常数 C , 其方法是满足边界条件: 在 $\eta = 0$ 处, $T = T_w$ 。由此得到

$$C = T_w - T_\infty - \frac{U_\infty^2}{2c_p} \theta_1(0). \quad (12.68a)$$

冷却问题：E. Pohlhausen^[94] 首先给出了方程 (12.67) 的解。这个解可以写成

$$\theta_1(\eta, \mathbf{P}) = \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{\mathbf{P}} d\xi / \int_{\xi=0}^{\infty} [f''(\xi)]^{\mathbf{P}} d\xi. \quad (12.69)$$

因此，当 $\mathbf{P} = 1$ 时： $\theta_1(\eta) = 1 - f'(\eta) = 1 - u/U_\infty$ 。同时依照式 (12.64)，当 $\mathbf{P} = 1$ 时，温度分布与速度分布变成相同的。由式 (12.69)，并用 $f''(0) = 0.332$ ，算出壁面上的温度梯度为：

$$-\left(\frac{d\theta_1}{d\eta}\right)_0 = \alpha_1(\mathbf{P}) = (0.332)^{\mathbf{P}} / \int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{\mathbf{P}} d\xi. \quad (12.70)$$

可见系数 α_1 只依赖于 Prandtl 数，即有 $\alpha_1(\mathbf{P})$ 。表 12.2 中列出了 E. Pohlhausen 计算的一些值。这些值可以由公式

$$\alpha_1 = 0.332^3 \sqrt{\mathbf{P}} \quad (0.6 < \mathbf{P} < 10) \quad (12.71a)$$

插值求得，并具有很好的精度。当 Prandtl 数很小时，式 (12.59a) 给出

$$\alpha_1 = 0.564 \sqrt{\mathbf{P}} \quad (\mathbf{P} \rightarrow 0), \quad (12.71b)$$

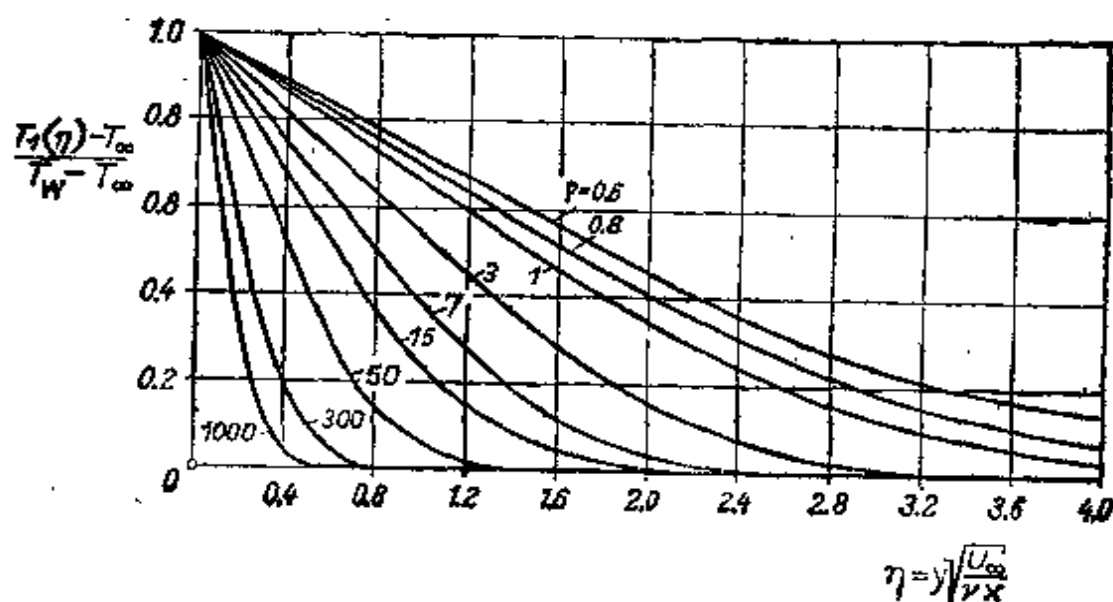


图 12.9 速度很小时对于不同 Prandtl 数 \mathbf{P} 画出的零攻角热平板的温度分布(不计摩擦热)

而当 Prandtl 数很大时,式 (12.62a) 给出

$$\alpha_1 = 0.339 \sqrt[3]{P} \quad (P \rightarrow \infty), \quad (12.71c)$$

根据式 (12.69) 计算的温度分布绘在图 12.9 上。如前所述, $P = 1$ 的温度分布曲线同时也是速度分布曲线。当 $P > 1$ 时,热边界层比速度边界层薄。例如,对于油, Prandtl 数是 $P = 1000$,热边界层的厚度仅是速度边界层的十分之一。

表 12.2 零攻角平板的无量纲传热系数 α_1 和无数纲绝热壁温度 b , 根据式 (12.70) 和 (12.75)

P	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	7.0	10.0	15.0
α_1	0.276	0.293	0.307	0.320	0.332	0.344	0.645	0.730	0.835
b	0.770	0.835	0.895	0.950	1.000	1.050	2.515	2.965	3.535

绝热壁: 利用“参数易变法”可以得到方程 (12.68) 的解。其解为

$$\theta_2(\eta, P) = 2P \int_{\xi-\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^P \left(\int_0^{\xi} [f''(\tau)]^{2-P} d\tau \right) d\xi. \quad (12.72)$$

当 $P = 1$ 时,有

$$\theta_2(\eta) = 1 - f'^2(\eta). \quad (12.73)$$

因此,利用式 (12.66) 和 (12.72),由于摩擦热形成的壁面温度,即绝热壁温 T_s 是:

$$T_{1w} - T_{\infty} = T_s - T_{\infty} = \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} b(P). \quad (12.74)$$

根据式 (12.72),其中

$$b(P) = \theta_2(0, P). \quad (12.75)$$

当 Prandtl 数为常数时,绝热壁温正比于图 12.3 中画出的绝热温升 $U_{\infty}^2/2c_p$ 。表 12.2 中给出了因子 $b(P)$ 的一些数值;对于中等 Prandtl 数,可以用公式 $b = \sqrt{P}$ 插值而足够精确地求得这些数值。当 Prandtl 数很大时,这些值可以从图 12.10 中查得。在极限情形下,则有^[64]

$$b(P) = 1.9 P^{1/3} \quad (P \rightarrow \infty).$$

值得注意的是:当 $P = 1$ 时,精确地有 $b = 1$ 。因此,对于 $P = 1$

而速度为 U_∞ 的平行气流绕零攻角平板的流动, 由于摩擦引起的温升等于绝热温度, 即等于速度从 U_∞ 减小到零时出现的温度. 图 12.11 中画出了不同 Reynolds 数 $U_\infty x/\nu$ 下测量的绝热壁温^[16,20]. 在层流范围内吻合得很好. 但在边界层从层流向湍流过渡的转捩点处, 温度突然上升. 用无量纲形式表达的绝热壁温度分布是

$$\frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\theta_2(\eta, \mathbf{P})}{b(\mathbf{P})},$$

在图 12.12 中可以看到不同 Prandtl 数下的分布曲线. 根据式 (12.74) 和 (12.75), 可以由式 (12.68a) 得到常数 C 为

$$C = (T_w - T_\infty) - (T_s - T_\infty) = T_w - T_s.$$

因此, 对于壁面和自由流之间有规定温差 $(T_w - T_\infty)$ 的通解 (见式 (12.66)) 是

$$T(\eta) - T_\infty = [(T_w - T_\infty) - (T_s - T_\infty)]\theta_1(\eta, \mathbf{P}) + \frac{U_\infty^2}{2c_p}\theta_2(\eta, \mathbf{P}), \quad (12.76)$$

其中 $T_s - T_\infty$ 由式 (12.74) 给出. 无量纲的温度分布为

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{1}{2}\mathbf{E}b(\mathbf{P})\right]\theta_1(\eta, \mathbf{P}) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\theta_2(\eta, \mathbf{P}). \quad (12.76a)$$

图 12.13 中画出了各种 Eckert 数 $\mathbf{E} = U_\infty^2/c_p(T_w - T_\infty)$ (根据式 (12.28)) 下的分布曲线. 当 $b \times \mathbf{E} > 2$ 时, 由于摩擦热使得壁面附近的边界层比壁面本身更热. 在这种情形下, 流经壁面的气流不会使壁面冷却.

传热. 由方程 (12.2) 可以看出, 在 x 位置上从平板向流体的热通量为 $q(x) = -k(\partial T/\partial y)_{y=0}$, 或者写成

$$q(x) = -k\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\left(\frac{dT}{d\eta}\right)_{\eta=0}. \quad (12.77)$$

单位时间平板 (长为 l , 宽为 b) 两面的总传热率为

$$Q = 2b \int_0^l q(x) dx,$$

所以

$$Q = 4bk \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \left(-\frac{dT}{d\eta} \right)_0 \quad (12.78)$$

a) 不计摩擦热: 根据式 (12.69) 和 $(dT/d\eta)_0 = -\alpha_1(T_w - T_\infty)$, 在这种条件下 $T(\eta) - T_\infty = (T_w - T_\infty)\theta_1(\eta)$. 利用式 (12.71a) 中的 α_1 , 则有

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -0.332 \sqrt[3]{P} (T_w - T_\infty).$$

所以

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= 0.332k \sqrt[3]{P} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (T_w - T_\infty), \\ Q &= 1.328bk \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x} (T_w - T_\infty). \end{aligned} \right\} \quad (12.79)$$

如果引进由式 (12.31) 定义的无量纲传热系数 (Nusselt 数) 分别代替局部热通量和总热流率, 即

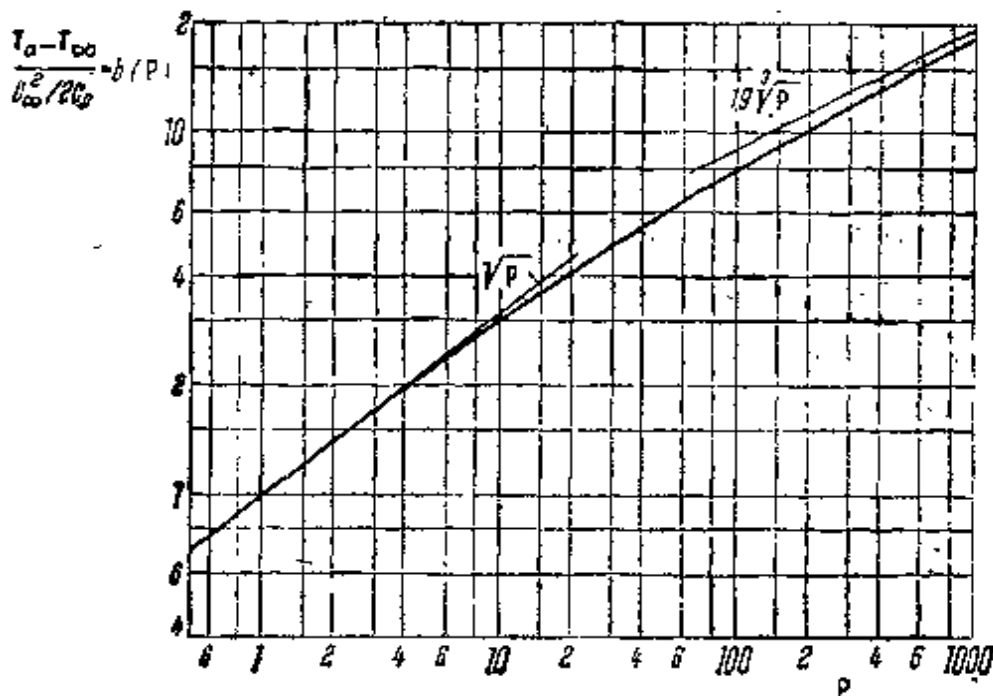


图 12.10 在不同 Prandtl 数下, 速度为 U_∞ 时零攻角平板的绝热壁温 T_w ; 引自 E. Eckert 和 O. Drewitz^[13] 以及 D. Meksyn^[64]. 当 Prandtl 数很大时, 依照 D. Meksyn^[64] 则有 $b = 1.9P^{1/3}$

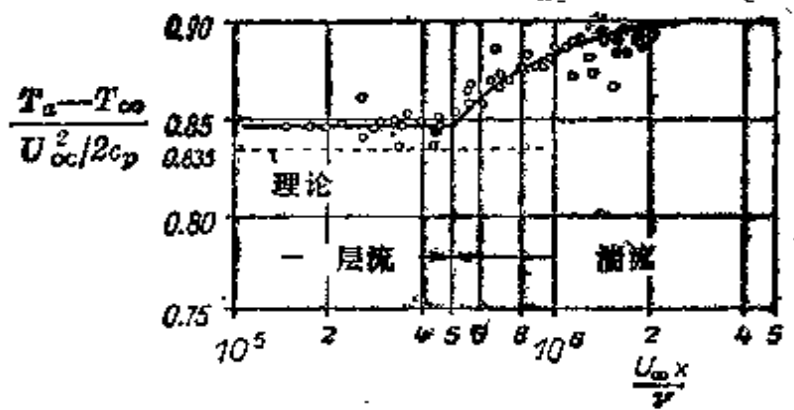


图 12.11 在层流和湍流边界层内，平行气流中零攻角平板绝热壁温的测量值，引自 Eckert 和 Weise^[20]；理论值是 $P = 0.7$ 时层流边界层的值

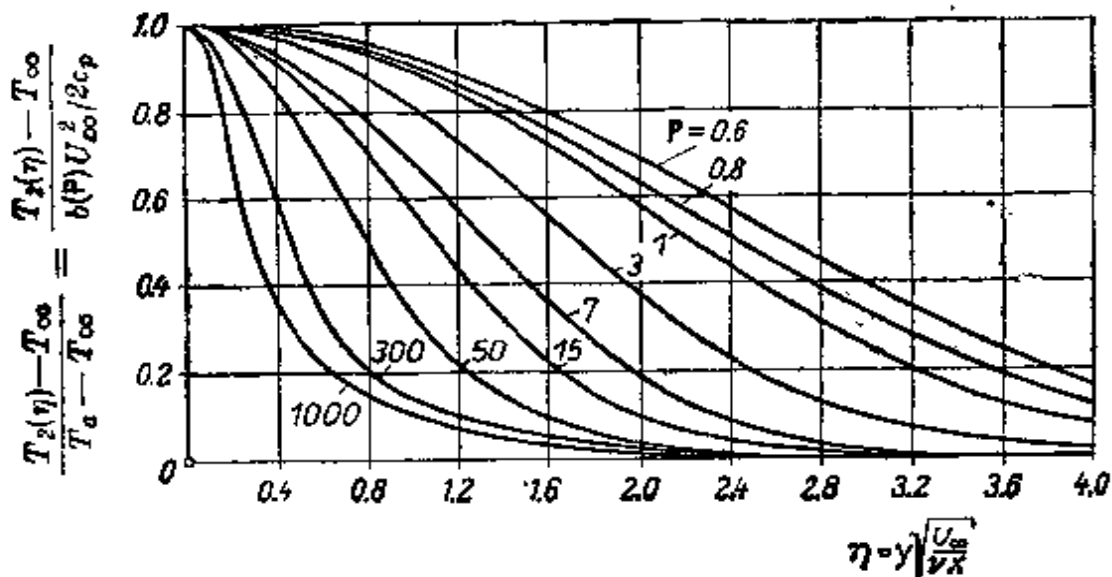


图 12.12 在不同 Prandtl 数下，高速平行气流中零攻角平板层流边界层内的温升，平板没有加热（绝热壁）

$$q(x) = \frac{k}{x} N_x (T_w - T_\infty) \quad \text{和} \quad Q = 2bl \frac{k}{l} N_m (T_w - T_\infty),$$

则可以得到

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 0.564 \sqrt{P} \sqrt{R_x} & P \rightarrow 0, \\ N_x &= 0.332 \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x} & 0.6 < P < 10, \\ N_x &= 0.339 \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x} & P \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} (12.79a)$$

由总热流率得出的平均 Nusselt 数为

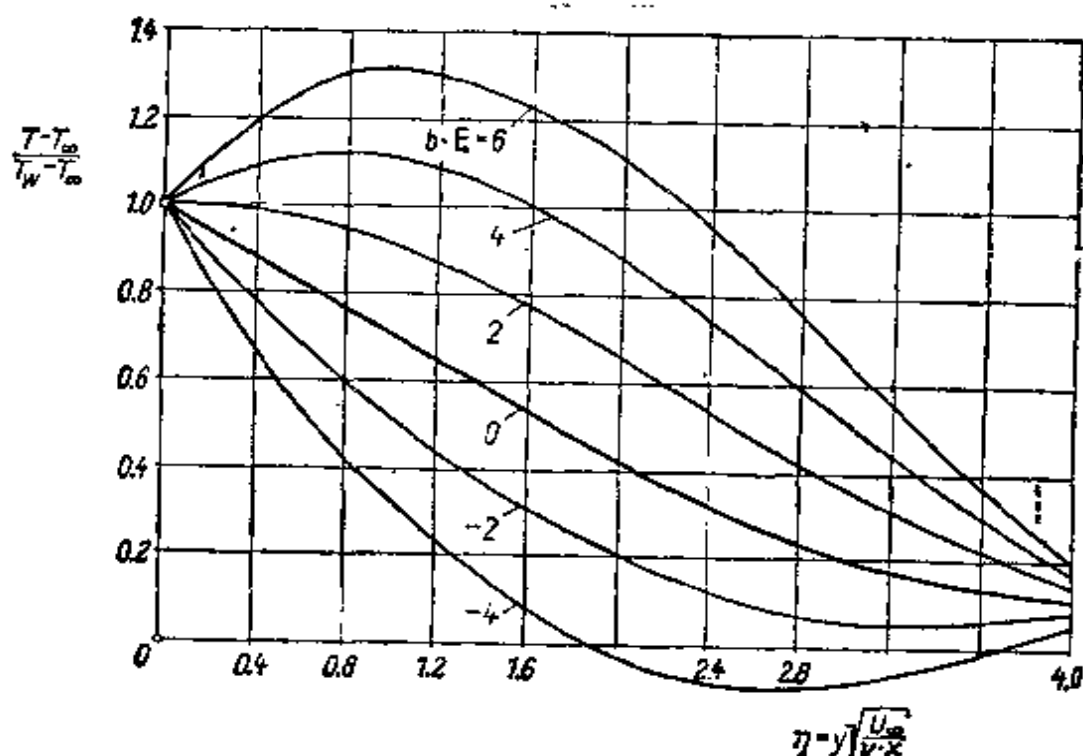


图 12.13 平行流体中零攻角加热平板 ($E > 0$) 或冷却平板 ($E < 0$) 层流边界层内的温度分布, 在层流边界层情形下, 计及按照式 (12.76) 计算的摩擦热。Prandtl 数 $P = 0.7$ (空气)。壁温保持为常数 T_w 。对无摩擦热情形, 曲线 $b \times E = 0$; 对绝热壁, $b \times E = 2$; $E = U_\infty^2 / c_p (T_w - T_\infty)$; $b = 0.835$ 。当 $b \times E > 2$ 时, 较冷的气流将不再使热壁冷却, 因为摩擦热所产生的“热垫层”阻止了冷却

$$\frac{N_m}{\sqrt{R_x}} = 2 \frac{N_x}{\sqrt{R_x}} \quad (12.79b)$$

对于湍流, 可以用下列近似公式:

$$N_x = 0.0296 \sqrt[3]{P} \cdot R_x^{0.8} \quad (\text{湍流}), \quad (12.79c)$$

$$N_m = 0.037 \sqrt[3]{P} \cdot R_x^{0.8} \quad (\text{湍流}). \quad (12.79d)$$

为了完整起见, 这里引用了这两个公式, 但未加证明。上式关于传热率的公式与 F. Elias^[31], A. Edwards 和 B. N. Furber^[27] 以及 J. Kestin, P. E. Maeder 和 H. E. Wang^[66] 等人的测量结果完全一致。

b) 计及摩擦热: 在这种情形下, 由式 (12.76) 的 $T(\eta)$ 我们得到

$$\left(\frac{dT}{d\eta}\right)_0 = -\alpha_1(T_w - T_s) = -0.332 \sqrt[3]{P} (T_w - T_s),$$

其中 T_s 是绝热壁温度。它与温度计问题中的壁面温度是相同的，并且可以根据下式得出：

$$T_s - T_\infty = b(P) \frac{U_\infty^2}{2c_p} = \sqrt{P} \frac{U_\infty^2}{2c_p} \quad (12.80)$$

式中 $b(P)$ 可以取自表 12.2。如果根据式 (12.27) 引入 Mach 数 $M = U_\infty/c_\infty$ ，则 T_s 也可以用下式计算：

$$T_s = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \quad (P = 1).$$

因此，根据式 (12.77) 和 (12.78) 可以得到局部热通量和总热流率的表达式，它们分别是

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= 0.332k \sqrt[3]{P} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_x}} (T_w - T_s), \\ Q &= 1.328bk \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x} (T_w - T_s). \end{aligned} \right\} \quad (12.81)$$

这里没有使用式 (12.29) 中基于温度差 $(T_w - T_\infty)$ 的传热系数 $\alpha(x)$ ，也没有使用按照式 (12.31) 确定的 Nusselt 数，因为热通量不再与这种温度差成正比¹⁾。

由于摩擦热，流体对壁面的冷却作用大大减低。在没有摩擦热时，只要 $T_w > T_\infty$ ，热总是从平板流向流体 ($q > 0$)。但是在实际情况下，如果存在摩擦热，那么只有当 $T_w > T_s$ 时，从平板向流体的热流才能持续，见式 (12.81)。考虑到对 T_s 所导出的值，我们得出这样的判别条件：如果

1) 因此，E. Eckert 和 W. Weise^[17] 曾建议引入基于温度差 $(T_w - T_s)$ 的 Nusselt 数 N^* 。这样，我们可以预料：作为一次近似，即使在可压缩流动中也能得到如同式 (12.79a, b) 中那样的关于 N^* 的表达式。另一方面，如果我们仍然用基于 $(T_w - T_\infty)$ 的 Nusselt 数，那么由式 (12.81) 导出的表达式已不是式 (12.79a)，而是

$$N_x = 0.332 \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x} \left[1 - \frac{1}{2} Eb(P)\right],$$

即当 $bE = 2$ 时， $N_x = 0$ ；当 $bE > 2$ 时， $N_x < 0$ ，参见图 12.13。

$$T_w - T_\infty \geq \sqrt{P} \frac{U_\infty^2}{2c_p}, \quad (12.82)$$

那么热流从壁面流向流体 (>号), 或者从流体流向壁面 (<号). 可以用一个数值例子来说明式(12.82)的意义: 在空气流中, 若流动速度 $U_\infty = 200\text{m/s}$, $P = 0.7$, $c_p = 1.006 \text{ kJ/kg} \cdot \text{deg}$, 则得到 $\sqrt{P} \frac{U_\infty^2}{2c_p} = 16^\circ\text{C}$. 因此, 当

$$T_w - T_\infty > 16^\circ\text{C}$$

时, 壁面才会受到冷却. 如果壁面与流体之间的温差小于 16°C , 那么壁面将吸收一部分摩擦热. 特别是, 当壁面温度与流体温度相等时, 就是这种情况.

H. Schuh^[130] 导出了物质特性变化时零攻角平板的传热率公式. 参考文献 [128] 研究了有线性温度分布的自由流流过平板时的温度场.

2. 热边界层方程的其它相似解 在零攻角平板情形下, 速度剖面和温度剖面本身是相似的. 这就是说, 通过 y 方向的适当拉伸, 可以使沿着平板不同距离 x 处的速度 (或温度) 分布变成完全一样的. 因为我们知道, 除了平板之外, 还有其它的速度边界层也存在这种情形 (例如第九章中讨论的绕尖楔流动的速度剖面), 所以研究能量方程存在其它相似解的可能性将是有益的. 在参考文献 [135] 中详细研究了这个问题. 现在, 我们将从绕楔边界层的这类流动入手, 并且假定外部流动的形式为 $U(x) = u_1 x^m$. 用类似的方法, 我们约定壁面温度分布也满足某一幂次律, 例如有这样一种形式: $T_w(x) - T_\infty = (\Delta T)_0 = T_1 x^n$. 这也包含了壁面温度为常数的情形, 即 $n = 0$; 而 $n = (1 - m)/2$, 相应于热通量 q 为常数的情形. 引入相似变量

$$\eta = y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}$$

我们可以得到熟悉的关于速度 $u = U(x) \cdot f(\eta)$ 的方程 (9.8a), 或者将它写作

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f'^2) = 0. \quad (12.83)$$

这时,无量纲温度

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

满足方程

$$\theta'' + \frac{m+1}{2} \mathbf{P} f \theta' - n \mathbf{P} f' \theta = -\mathbf{P} \mathbf{E} x^{2m-n} f''^2, \quad (12.84)$$

同时,方程的解必须满足边界条件

$$\eta = 0: \theta = 1; \quad \eta = \infty: \theta = 0.$$

式中 $\mathbf{E} = u_1^2/c_p T_1$ 是适用于这类问题的 Eckert 数。

由方程(12.84)可明显看出,没有摩擦热时,方程的右边为零,并且所有的解都具有相似型。但是,如果包含摩擦热,则只有当参数的组合使方程右边与 x 无关时才有相似解。当 $2m - n = 0$ 时,就是说,当外部流动的速度分布和沿着壁面的温度分布之间存在某种固定的耦合时,就会出现这种情形。依照这个结论,壁面温度为常数的情形只有在平板上 ($m = n = 0$) 才有相似解。另一方面,如果满足 $2m - n = 0$ 的条件,那么,对于每一对 m 和 \mathbf{P} 值,都有一个确定的 \mathbf{E}_0 值,在这个 \mathbf{E}_0 值下将没有热流 ($\theta'(0) = 0$)。在这种情形下,沿壁面的温度分布(也称为绝热壁温度分布 T_s) 可以表示为

$$\frac{T_s - T_\infty}{U^2/2c_p} = 2c_p \frac{T_1 x^{2m}}{u_1^2 x^{2m}} = \frac{2}{\mathbf{E}_0} = b(m, \mathbf{P}). \quad (12.85)$$

E. A. Brun^[7] 计算了函数 $b(m, \mathbf{P})$ 的数值。在 $m = 0$ 的特殊情形下,恢复到表 12.2 的数值。

如果忽略耗散热的影响,则可以得到较简单的方程

$$\theta'' + \frac{m+1}{2} \mathbf{P} f \theta' - n \mathbf{P} f' \theta = 0. \quad (12.86)$$

许多作者^[79,121,32,33,89,140]发表了当参数 m , n 和 \mathbf{P} 为不同数值时这个方程的解。E. R. G. Eckert^[18] 证明了当 $n = 0$ 时,局部 Nusselt 数

可以表示为

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = F(m, P) = \left\{ \int_0^\infty \exp \left[-P \sqrt{\frac{m+1}{2}} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta \right\}^{-1}. \quad (12.87)$$

式中

$$N_x = \frac{\alpha x}{k} = -\sqrt{\frac{U(x) \cdot x}{\nu}} \cdot \theta'(0) = -\sqrt{R_x} \theta'(0). \quad (12.88)$$

函数 $F(m, P)$ 绘于图 12.14 中, 该图是基于 H. L. Evans^[35] 所提供的数据. 另外, 图中还分别指出了极小 Prandtl 数和极大 Prandtl 数时的渐近值, 见式 (12.57b) 和 (12.61a) (也见文献 [119]). 对

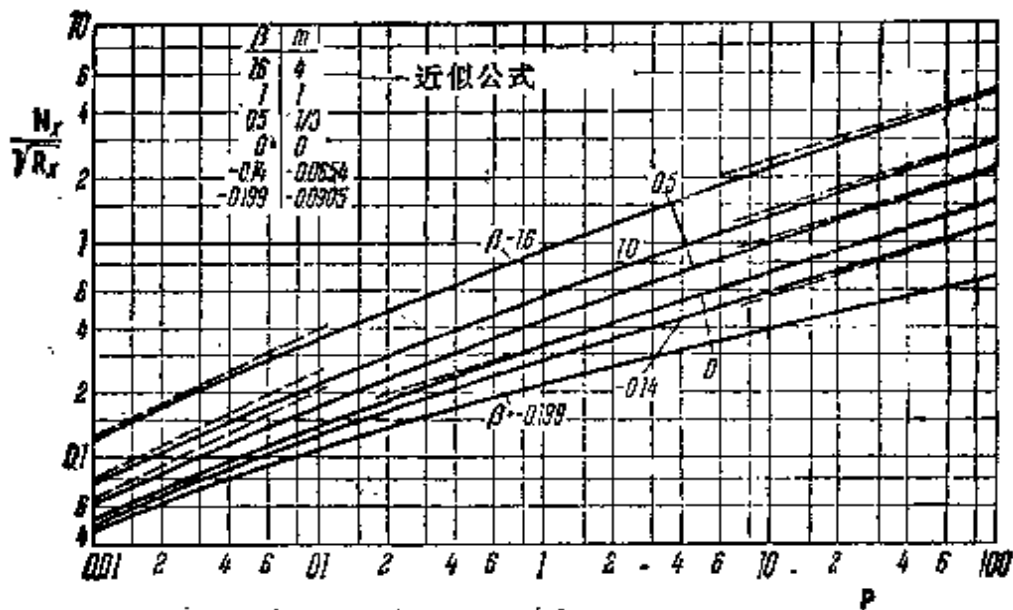


图 12.14 作为 Prandtl 数和流动参数 m 的函数的局部 Nusselt 数, 自由流速度按照 $U(x) = u_1 x^m = u_1 x^{\beta/(2-\beta)}$ 的规律分布 (绕楔流动), 但是壁面温度为常数, 同时不计耗散.

当 $P \rightarrow 0$ 时, 渐近近似式为

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi(2-\beta)}} P^{1/2};$$

当 $P \rightarrow \infty$ 而 $\beta \neq -0.199$ 时, 按照式 (12.61a);

当 $P \rightarrow \infty$, 同时 $\beta = -0.199$ 时, 渐近近似式为

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = 0.224 P^{1/4};$$

当 Prandtl 数为中等值而 $\beta = 0$ 时, 近似式为式 (12.71a)

于平板 ($m = 0$), 自然地恢复到前面的关系式, 即式 (12.59a) 和 (12.62a). 对于驻点流动 ($m = 1$), 则得到式 (12.59b) 和 (12.62 b). 在具有分离剖面的特殊情形下 ($m = -0.091$), 当 $P \rightarrow \infty$ 时, 如文献 [32] 指出的那样, 必须采用别的渐近近似法.

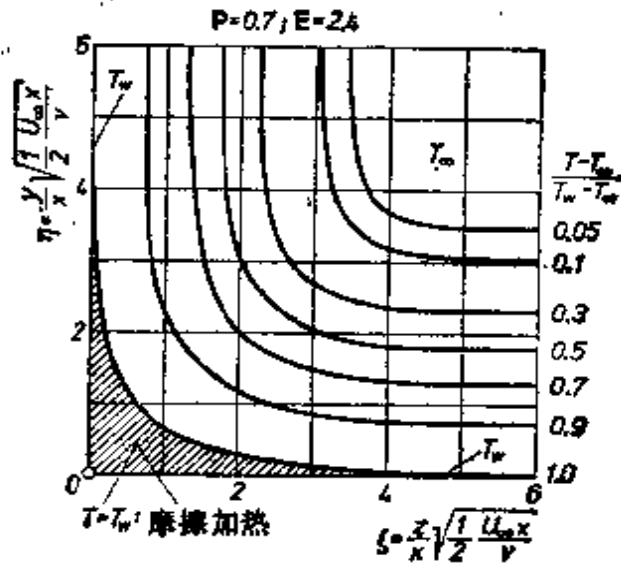


图 12.15 在直角拐角中沿热壁 ($T_w > T_\infty$) 层流边界层内的温度分布, 外流速度 U_∞ 为常数, 计及耗散. 引自 Vasanta Ram^[144]. 等温线是在 $P = 0.7$ 和 $E = 2.4$ 时画出的, 在阴影区域中, 当地温度超过壁面温度 ($T > T_w$); 因此, 在这个区域内, 热从流体流向壁面, 尽管事实上这时壁面温度超过自由流温度. 其原因在于耗散. Eckert 数

$$E = U_\infty^2 / c_p (T_w - T_\infty)$$

当外流速度分布为 $U(x) = Cx^m$ 的 Hartree 类型时, 与零攻角直角拐角情形的三维速度边界层相关的热边界层也是自相似型的. 在 Vasanta Ram 的文章(见第十一章参考文献 [92])中, 给出了这种情形下的速度分布和温度分布. 对于不同的压力梯度参数值 m , 图 11.19 给出了关于速度分布的概念. 图 12.15 的图线是图 11.19 的补充, 因为它含有一个相关的温度分布的例子. 对于 $U(x) = U_\infty = \text{常数}$ 的均匀外部流动, 并且在 $T_w > T_\infty$ 的热壁(即壁面被冷却的)情形下, 它的解在拐角附近呈现出这样一个区域(图中用阴影表示), 在这个区域中 $(T - T_\infty) / (T_w - T_\infty) > 1^*$,

* 原文误为 $(T - T_\infty) / (T_w - T_\infty) > 0$. ——译者注

也就是说其中 $T > T_w$ 。当计及耗散时就会出现这样的区域，在这个区域中当地的流体温度超过了壁面温度。因此，尽管远离壁面处的流体温度低于壁面温度，即 $T_\infty < T_w$ ，但是在局部区域，热通量是反向的，它从流体流向壁面。对于这种表面上看来反常的特性，其物理原因在于拐角附近出现的耗散引起了局部加热率的增加。在高超声速流动状态下，这种现象是重要的。在这类问题中出现的很大温升可以引起气流中物体表面的燃烧（参看第十三章 e）

3. 任意形状等温物体上的热边界层 N. Frössling^[28] 对于绕二维和轴对称的任意形状物体的层流边界层内的温度分布进行了计算。在他的计算中，完全略去了摩擦功和压缩功，并且假定绕物体的位势速度分布可以展成弧长的幂级数（Blasius 级数）。与第九章 c 类似，其幂级数的形式为

$$U = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots$$

另外，级定边界层速度分布的形式为

$$u(x, y) = u_1 x f_1(y) + u_3 x^3 f_3(y) + \dots$$

相应地，假定温度分布的形式为

$$T(x, y) = T_0 + x T_1(y) + x^3 T_3(y) + \dots$$

用类似于第九章 c 中对于速度边界层的方法，可以发现函数 $T_1(y)$, $T_3(y)$, \dots 都满足含有速度分布函数 f_1 , f_3 , \dots 的常微分方程。可是，在这种情形下，函数 T_1 , T_3 , \dots 还依赖于 Prandtl 数。当 Prandtl 数为 0.7 时，对于二维和轴对称情形，已经用数值方法计算了开头的几个辅助函数 $T_i(y)$ 。和速度边界层的情形一样，所用的方法按其性质而言是比较麻烦的，特别是在细长体情形下，这时在幂次展开式中需要保留许多项，正如文献 [28] 中所表明的那样。

关于含有引射和抽吸效应的自相似热边界层的许多解，可以在文献 [34, 44, 134, 10] 中找到。

在 $P = 1$ ，同时又不计摩擦热的特殊情形下，关于绕任意柱体的边界层内温度分布的微分方程，与关于横向速度分量（即偏航柱

体母线方向上的速度分量) 的微分方程是完全相同的。将方程 (12.63c) 和 (11.56) 比较一下就可以看出这一点。这个关系已经在第十一章 d 中讨论过, L. Goland^[46] 曾利用这个关系计算了绕特殊形状柱体边界层内的温度分布。

在驻点邻域内, 速度分布可以用 $U(x) = u_1 x$ 来表示, 且 $m = \beta = 1$ 。如果不计能量耗散, 则由式 (12.87) 所定义的 Nusselt 数可以用下式表示:

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = F(\mathbf{P}, 1) = A(\mathbf{P}). \quad (12.89)$$

函数 $A(\mathbf{P})$ 的特性可以从图 12.14 和表 12.3 中看出。在图 12.14 中, $\beta = 1$ 的曲线对应于函数 A 。对于圆柱体, 可以令 $U(x) = U_\infty \sin(x/R)$, 所以 $u_1 = 4U_\infty/D$ 。因此

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{\sqrt{R_x}} &= \frac{\alpha x}{k} \sqrt{\frac{D\nu}{4U_\infty x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha D}{k} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty D}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{N_D}{\sqrt{R_D}} = A(\mathbf{P}). \end{aligned} \quad (12.90)$$

在较低 Reynolds 数时, 上述表达式与 E. Schmidt 和 K. Wenner^[107] 所作的测量结果是相当一致的, 见图 12.16。然而可以发现, 比值 $N_D/\sqrt{R_D}$ 有规则地依赖于 Reynolds 数; 这种有规则的影响并不能为理论所解释。例如, 当 $R = 1.7 \times 10^5$ 时, 在驻点处的测量值比理论值大 10—15%。本章 g7 中还要谈到这一点, 在那里将表明, 这种偏差是由于自由流湍流度随 Reynolds 数变化引起的。

对热边界层进行数值计算时, 可以发现近似方法比上述精确方法简单得多。这种近似方法所依据的方程是仿照计算速度边界层的动量积分方程得到的, 这种动量积分方程在第十章中已详细讨论过。略去摩擦热和压缩性效应, 可以从 $y = 0$ 到 $y = \infty$ 积分能量方程 (12.51c), 从而得到热通量方程

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty [u(T - T_\infty)] dy = -\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (12.91)$$

其中 $\alpha = k/\rho c_p$ 是在式 (12.25) 中引入的热扩散系数。上述方程

有时也称为能量积分方程¹⁾，它与速度边界层的动量积分方程(8.32)十分类似。

表 12.3 计算驻点附近传热系数公式中的系数 A,
取自 H. B. Squire^[131]

P	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	7.0	10	15
A	0.466	0.495	0.521	0.546	0.570	0.592	1.18	1.34	1.54

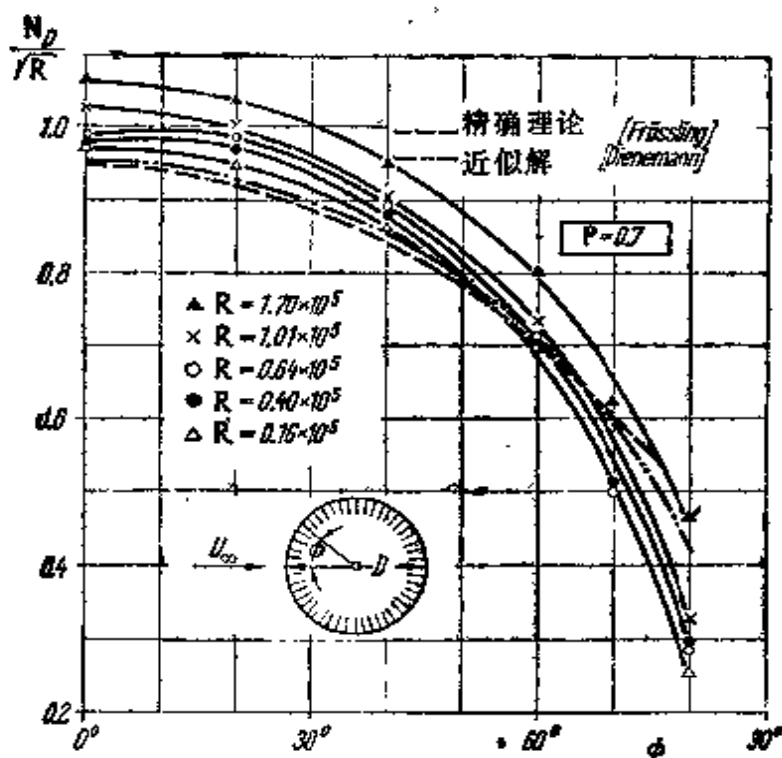


图 12.16 绕圆柱体流动的局部传热率。理论与实验的比较。
Nusselt 数 N_D 和 Reynolds 数 R_D 都参考于圆柱直径 $D = 100$ 毫米。实验测量是由 E. Schmidt 和 K. Wenner^[107] 进行的,理论值是 N. Frössling^[39] 和 W. Dienemann^[11] 计算的。关于改变自由流湍流度引起的 Reynolds 数的系统影响,见本章 §7

在可以用来求解热通量方程(12.91)的大量方法中,我们打算比较详细地叙述 H. B. Squire^[132] 的方法,因为这种方法特别简单,同时它又是第十章所叙述的求解速度边界层的 Pohlhausen 近似方

1) 不要和能量积分方程(8.35)混为一谈。

法的自然延续。为了计算方程(12.91)左边的积分,我们对速度边界层引进变量 $\eta = y/\delta$,对温度边界层引进变量 $\eta_T = y/\delta_T$ 。而用 $\Delta = \delta_T/\delta$ 表示它们的比值,并且假定速度分布和温度分布的形式分别为

$$u = U(x)[2\eta - 2\eta^3 + \eta^4] = U(x)F(\eta), \quad (12.92a)$$

$$\begin{aligned} T - T_\infty &= (T_w - T_\infty)[1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4] \\ &= (T_w - T_\infty)L(\eta_T). \end{aligned} \quad (12.92b)$$

这里所规定的速度分布相应于式(10.23)中的 Pohlhausen 假定。而温度分布函数的形式可以这样选取:当 $\delta_T = \delta$ 时,保证速度分布和温度分布完全相同,正象在 $P = 1$ 时关于平板的 Reynolds 比拟所要求的那样,见式(12.64)。将式(12.92a, b)代入方程(12.91),我们得到

$$\frac{d}{dx} \{ \delta_T \cdot U \cdot H(\Delta) \} = 2 \frac{\alpha}{\delta_T} \quad (12.93)$$

式中 $H(\Delta)$ 是 $\Delta = \delta_T/\delta$ 的通用函数,其结果可以表示为

$$H = \int_0^\infty F(\eta) \cdot L(\eta_T) \cdot d\eta_T \quad (12.94)$$

通过积分,我们得出

当 $\Delta < 1$ 时,

$$H(\Delta) = \frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^3 + \frac{1}{180} \Delta^4,$$

当 $\Delta > 1$ 时,

$$H(\Delta) = \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \frac{1}{\Delta} + \frac{2}{15} \frac{1}{\Delta^2} - \frac{3}{140} \frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{180} \frac{1}{\Delta^5}.$$

W. Dienemann^[11] 计算的函数 $H(\Delta)$ 的一些数值列在表 12.4 中。

表 12.4 函数 $H(\Delta)$ 的数值

Δ	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4
H	0.0873	0.0980	0.1080	0.1175	0.1345	0.1492

对方程(12.93)进行积分,得到

$$(\delta_T U \cdot H)^2 = 4\alpha \int_0^x U \cdot H \cdot dx. \quad (12.95)$$

利用式 (10.37) 可以计算速度边界层的厚度 δ , 这时根据式 (10.24)¹⁾ 有 $\delta/\delta_2 = 315/37$, 因此

$$\delta^2 = 34 \frac{\nu}{U^3} \int_0^x U^3 dx. \quad (12.96)$$

将式 (12.95) 除以式 (12.96), 得到

$$\Delta^2 \cdot H(\Delta) = \frac{4}{34} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{U^4 \int_0^x UH \cdot dx}{H \int_0^x U^3 dx}. \quad (12.97)$$

因为 $H(\Delta)$ 是已知函数, 见表 12.4, 因此上述公式可以用来确定 $\Delta(x)$. 最好采用逐次近似法进行计算. 开始时先假定 $\Delta =$ 常数, 从而得到

$$\Delta^2 \cdot H(\Delta) = \frac{4}{34} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{U^4 \int_0^x U dx}{\int_0^x U^3 dx}. \quad (12.97a)$$

再将得到的 Δ 值代入式 (12.97) 的左边, 这样可以得到一个改进的 Δ 值. 我们发现通常只要迭代两次就足够了.

局部传热率变成

$$q(x) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = 2(T_w - T_\infty) \frac{k}{\delta_T},$$

从而, 以特征长度 l 为参考值的局部 Nusselt 数为

$$\text{Nu}_x = \frac{q(x)}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{l}{k} = 2 \frac{l}{\delta_T}. \quad (12.98)$$

因此, 沿着给定形状的物体, 计算热边界层的步骤, 特别是确定 Nusselt 数变化的步骤如下:

1. 根据式 (12.97) 和 (12.97a) 计算 $\Delta(x)$,
2. 根据式 (12.96) 计算 $\delta(x)$,

1) 为了简单起见, 完全依据平板关系 ($A = 0$) 进行计算.

3. 步骤 1 和 2 给出 $\delta_T(x)$; 最后根据式 (12.98) 得出局部 Nusselt 数。

零攻角平板: 现在, 在零攻角平板的情形下, 将上述近似方法与精确解进行比较。把 $U(x) = U_\infty$ 代入式 (12.97), 我们得到

$$\Delta^2 H(\Delta) = \frac{4}{34} \cdot \frac{1}{P}.$$

这个方程的解可以近似表示为 $\Delta = P^{-1/3}$, 它与精确解相比, 误差在百分之五以内。由式 (12.96), 边界层的厚度为

$$\delta = 5.83 \sqrt{\nu x / U_\infty}.$$

因此, 沿着平板以流动长度 x 为参考量的局部 Nusselt 数, 即式 (12.98) 变为

$$N_x = 0.343 \sqrt{P} R_x^{1/2}, \quad (12.99)$$

而精确解, 即式 (12.79a) 表明其数字系数等于 0.332。

E. Eckert^[119] 与 E. Eckert 和 J. N. B. Livingood^[23, 24] 指出了计算任意形状物体热边界层的另一种近似方法; 不过后者需要的计算工作量更大, 但其精度有所改善。在这方面, W. Diemann^[11], H. J. Merk^[65], M. B. Skopets^[118] 以及 A. G. Smith 和 D. B. Spalding^[119] 等人的文章对读者可能也是有益的。与 H. B. Squire 的方法不同, 这些人的方法利用了上一节中给出的关于相似热边界层理论的结果, 从而改进了计算的精度。在 D. B. Spalding 和 W. M. Pao^[122] 的文章中, 对各种近似方法进行了严格的检验, 并且作了相互比较。特别是, 通过与 N. Froessling 给出的圆柱精确解的比较, 对这些方法的精度作出了判断。根据这些研究, 证明 H. J. Merk^[65] 与 A. G. Smith 和 D. B. Spalding^[119] 所给出的方法, 尽管很简单, 但是相对而言却最为精确。文献 [119] 表明, 在 Prandtl 数 $P = 0.7$ 时, 相似的楔剖面很精确地满足关系式:

$$\frac{U(x)}{\nu} \frac{d(\delta_T^2)}{dx} = 46.72 - 2.87 \frac{\delta_T^2}{\nu} \frac{dU}{dx}. \quad (12.100)$$

对 $\beta = 0$ (平板) 和 $\beta = 1$ (驻点) 的情形, 这个公式是精确的。如果认为式 (12.100) 普遍适用, 那么, 就可以直接写出一个简单的关

于 δ_T 的积分公式,即

$$\left(\frac{\delta_T}{l}\right)^2 \frac{U_\infty l}{\nu} = \frac{46.72}{\left(\frac{U(x)}{U_\infty}\right)^{2.87}} \int_0^{x/l} \left(\frac{U(x)}{U_\infty}\right)^{1.87} d\left(\frac{x}{l}\right) \quad (\mathbf{P} = 0.7), \quad (12.101)$$

式中 U_∞ 和 l 表示不变的参考值。这个公式相应于 A. Walz 对于动量厚度导出的公式 (10.37)。局部 Nusselt 数还是由式 (12.98) 来确定。在驻点处,我们得到

$$\left(\frac{\delta_T}{l}\right)^2 \frac{U_\infty l}{\nu} = \frac{16.28}{\left[\frac{d(U/U_\infty)}{d(x/l)}\right]} \quad (\mathbf{P} = 0.7), \quad (12.102)$$

H. J. Allen 和 B. C. Look^[11] 与 E. Eckert 和 W. Weise^[17] 给出了计算平板和旋成体热边界层的极其简单的方法。

E. Eckert 和 O. Drewitz^[18] 对边界层内考虑压缩性效应和摩擦热效应时的温度分布进行了计算。一般说来,在气体流动时,压缩性功与粘性耗散具有相同的量级。在这种情形下,不能再象平板情形那样,把温度分布方程简化成一阶常微分方程,这种情况使计算变得困难得多。特别是,上述作者详细计算了绕楔流动的热边界层,这种流动对应于 $U(x) = u_1 x^m$ 。D. R. Hartree 最先计算了这种流动的速度边界层(见第九章 a 中所作的讨论)。A. N. Tifford^[139] 的文章也讨论过绕楔流动的热边界层。

4. 壁面具有任意温度分布的热边界层 除了本章 g2 中讨论的关于绕楔流动的相似解以外,至此所讨论的所有热边界层都是在这样的假设下进行计算的:壁面和自由流之间引起热通量的温差保持常数。当沿着壁面存在温度分布 $T_w(x)$ 时,温度场和传热率的计算会出现许多困难。在许多情形下,这些困难是由以下事实引起的:即局部热通量决不仅仅取决于局部温度差 $T_w(x) - T_\infty$, 还受到边界层“过去经历”的强烈影响。

C. R. Guha 和 C. S. Yin^[49] 以及 N. Frössling^[10] 把 Blasius 级数展开法推广到包含壁面温度为任意分布时的情形。D. R. Davies 和 D. E. Bourne^[9] 研究了这样一种特殊情形:这时边界层的速度剖面可以表示成幂次律的形式,而沿着壁面的温度分布可以表示成幂级数的形式。下列作者详尽阐述了沿着非等温壁面计算热边界层的近似方法: D. R. Chapman 和 W. M. Rubesin^[8], J. Klein 和 M. Tribus^[69],

P. L. Donoughe 和 N. B. Livingood^[123], M. J. Lighthill^[124], H. Schuh^[125], G. S. Ambrok^[21], D. B. Spalding^[126], E. Eckert, J. P. Hartnett 和 R. Birkeback^[243], B. Le Fur^[74, 75] 以及 H. Schlichting^[102], H. B. Squire 提出的方法(前面已作过论述)也可以推广到非等温壁的情形^[133]。在大多数情形下,当研究不可压缩流动时,作者们都略去了摩擦热。

因为热边界层的微分方程是线性的,因此,可以利用某些标准解的线性组合形式写出问题的通解。通过研究图 12.17 所示的壁面就能得到这样的标准解;图中从 $x = 0$ 到 $x = x_0$, 壁面温度等于自由流温度 T_∞ 。在 $x = x_0$ 处,壁面温度突然变成 T_s 值,从而产生了如图所示的阶梯函数。如果这个问题的解记作

$$\theta(x, y, x_0) = \frac{T(x, y, x_0) - T_\infty}{T_s - T_\infty}, \quad (12.103)$$

那么,对于任意温度分布 $T_s(x)$, 我们有

$$T(x, y) - T_\infty = \int_0^x \theta(x, y, x_0) dT_s(x_0). \quad (12.104)$$

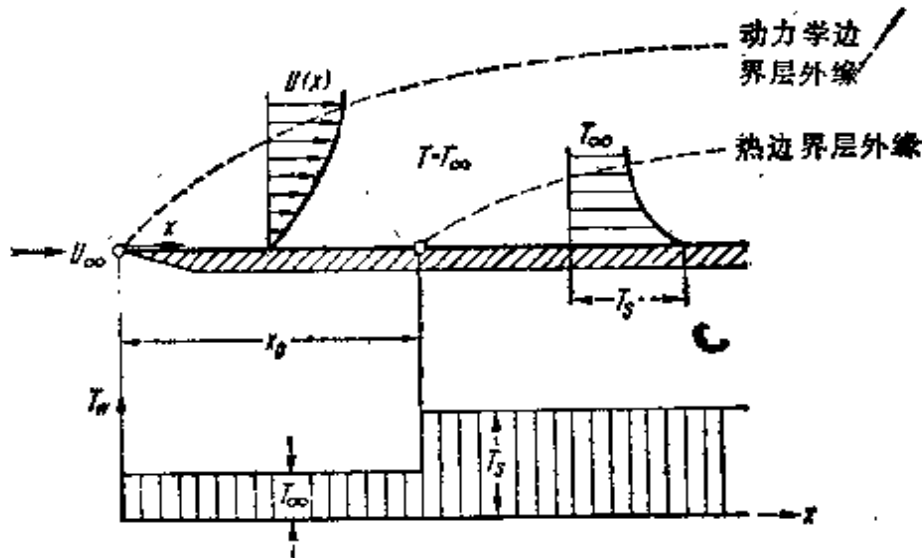


图 12.17 在 $x = x_0$ 处,壁面温度有阶梯跃变时速度边界层和温度边界层的发展(标准问题)

对于图 12.17 的标准问题,用类似的方法,可以根据已知的温度分布计算出热通量 $q(x)$:

$$q(x, x_0) = q^*(x, x_0) (T_s - T_\infty).$$

在这种情形下,

$$q(x) = \int_0^x q^*(x, x_0) dT_s(x_0). \quad (12.105)$$

这里,式(12.104)和(12.105)包含了 Stieltjes 积分。如果在 $x > 0$ 处的温度分布 $T_s(x)$ 是连续的,则可以把上面的表达式简化成

$$T(x, y) - T_\infty = \int_0^x \theta(x, y, x_0) \frac{dT_s}{dx_0} dx_0, \quad (12.106)$$

对式 (12.105) 也可以写出类似的形式, 借用于式 (12.61b), 沿着温度 $T_e(x)$ 变化的壁面, 现在可以得到下列关于热通量的表达式:

$$q(x) = 0.5384 \left(\frac{\rho P}{\mu^2} \right)^{1/3} \sqrt{\tau_0(x)} \times \left\{ \int_0^x \left(\int_{x_0}^z \sqrt{\tau_0(z)} dz \right)^{-1/3} dT_e(x_0) \right\}. \quad (12.107)$$

这个表达式是 M. J. Lighthill^[107] 首先发现的, 严格地说, 上述方程只适用于 $P \rightarrow \infty$ 的渐近情形, 但是, M. J. Lighthill^[107] 指出, 如果用 0.487 代替系数 0.5384, 则可以保证在 $0 < \beta < 1$ 的范围内计算值与实验结果更为一致. H. W. Liepmann^[108] 利用另外的推理方式也得出了同样的表达式, 不过系数是 0.523.

正如在图 12.14 的说明中所指出的, 一般的渐近近似法对于分离剖面是不适用的, 因此很清楚, 在分离点处 Lighthill 公式 (12.107) 必然失效. D. B. Spalding^[120] 指出了计算传热率的改进方法. 按照这个方法, 关于图 12.17 的标准问题, 其热通量分布必须通过下列两个方程的迭代求得:

$$q_{n+1}^*(x, x_0) = \frac{q_{n+1}(x, x_0)}{T_e - T_w} = \left(\frac{\rho P}{\mu^2} \right)^{1/3} \sqrt{\tau_0(x)} \times \left[\int_{x_0}^x \sqrt{\tau_0(x)} F(\chi_n) dx \right]^{-1/3}, \quad (12.108)$$

$$\chi_{n+1}(x, x_0) = - \frac{k}{\tau_0(x)} \frac{dp}{dx} \frac{1}{q_{n+1}^*(x, x_0)}. \quad (12.109)$$

其中函数 $F(\chi)$ 可以根据已知类型的相似解得到. 文献 [120] 中给出了这个函数; 这里, 在表 12.5 中列出了它的几个数值. 迭代从 $F(\chi_0) = 6.4$ 开始, 根据式 (12.108) 得到 $q_1^*(x, x_0)$. 接着, 由式 (12.109) 计算出 $\chi_1(x, x_0)$, 以后再代入式 (12.108), 如此反复进行. 遗憾的是, 在分离点上这个方法也失效, 因为当 $\tau_0 \rightarrow 0$ 时函数 $\chi(x, x_0)$ 变成无穷大.

另外, B. Le Fur^[14, 111] 给出了一种计及摩擦热的比较精确的方法. 这个方法已被推广到可压缩流动情形.

表 12.5 计算非等温壁面热边界层的函数 $F(\chi)$ 的值; 取自 D. B. Spalding^[120]

χ	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$F(\chi)$	3.5	3.8	4.3	5.1	6.4	8.5	11.6	15.8

5. 旋成体和转动物体上的热边界层 计算旋成体的热边界层并不显得特别困难, 因为能量方程和二维情形是相同的. 因此, 对于二维问题所得到的大部分方法都可以推广应用于旋成体表面, 例子可看文献 [1, 17, 111]. 此外, 通过应用 Mangler 变换^[112] (见第十一章 c) 可以把旋成体问题简化成二维问题.

已经有大量的文章研究了转动的旋成体表面的热边界层. 文献 [129, 130, 51] 中研究了在静止空气中转动圆盘的解 (见第五章 11); S. N. Singh^[117] 解出了有关转动圆球的相应问题 (见第十一章 b2).

A. N. Tifford 和 S. T. Chu^[141] 研究了位于轴向流动中的转动圆盘问题, 而 J. Siekmann^[146] 研究了轴向流动中的转动圆球问题. 在参考文献 [3] 和 [138] 中可以找到其它转动物体的解. 关于轴向流动中转动物体热边界层的研究, Y. Yamaga^[147] 提出了一种普遍适用的近似方法, 这个方法以第十一章中提到的 H. Schlichting 的方法 (见第十一章参考文献 [99]) 为基础.

6. 圆柱体和其它形状物体的测量结果 在 R. Hilpert^[146] 以及 E. Schmidt 和 K. Wenner^[107] 的文章中, 可以找到关于强迫对流传热系数的测量结果, 其中大部分是在圆柱体上测得的. R. Hilpert 在很宽的 Reynolds 数范围内, 对位于横向气流中的圆柱体作了测量. 图 12.18 包含一条平均 Nusselt 数 N_m 与 Reynolds 数 R 的关系曲线, 其中 N_m 是对整个圆柱周线取的平均值. 而 N_m 和 R 都以圆柱直径为参考长度. 作为初步近似, 可以假定层流的 N_m 与 $R^{1/2}$ 成正比. 这一点已经为零攻角平板的理论计算所证实, 见式 (12.79a, b); 也为驻点流动的理论计算所证实, 见式 (12.90).

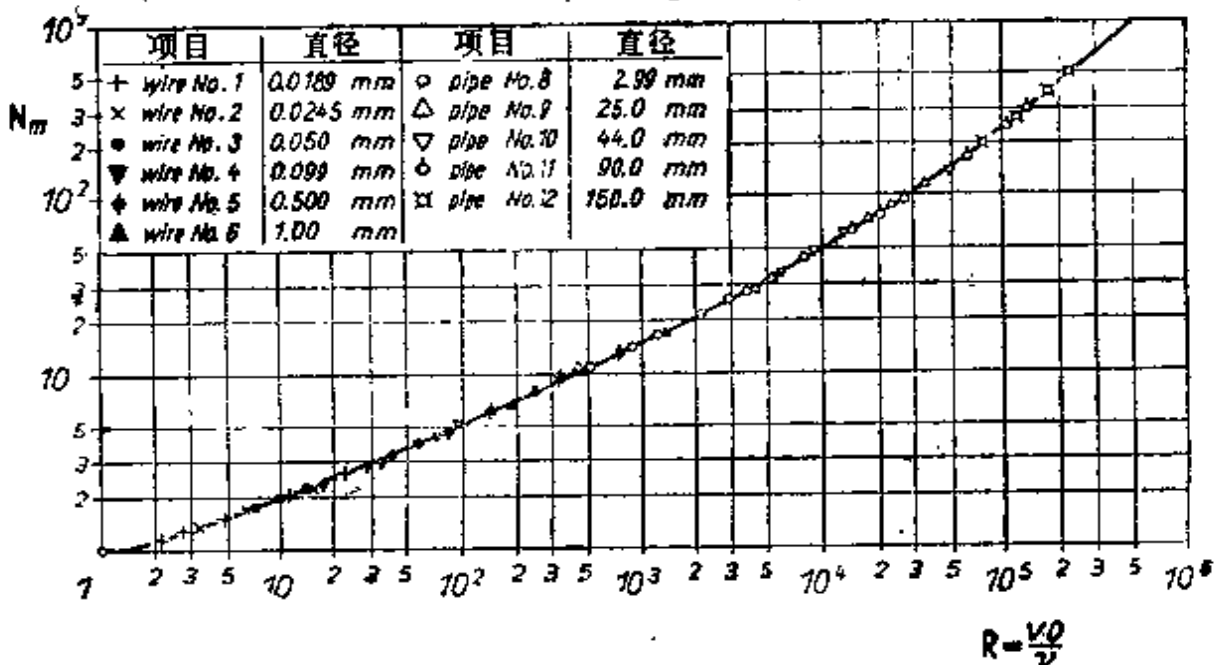


图 12.18 圆柱体的 Nusselt 数 N_m 与 Reynolds 数 R 的关系. 引自 R. Hilpert^[146]. 表面温度 100°C 左右. 通过与 J. Kestin 和 P. F. Maeder^[67] 的测量值进行比较, 认为 Hilpert 的结果是在湍流度为 0.9% 的流动中测得的

在柱体或其它物体表面上，局部传热系数有很大变化。图 12.19 给出 E. Schmidt 和 K. Wenner^[197] 对圆柱体的测量结果。由图可见，在层流边界层内，传热系数随着离开驻点的距离而减小，并在分离点附近达到最小值。在分离点以后的流动中，传热系数约等于层流边界层的前缘值。文献 [72] 和 [99] 中报道了类似的工作。在图 12.16 中已经给出过绕圆柱体流动的测量值与理论计算值的比较。其中的测量值就是引自图 12.19 中圆柱迎风部分（即层流部分）的测量结果，而理论曲线是基于在外部流动中实际测量的速度分布得到的。众所周知，在前驻点附近，该理论曲线与位势理论的结果是非常符合的。如前所述，这种符合程度是令人满意的。D. Johnson 和 J. P. Hartnett^[62] 对有引射（发汗冷却）的圆柱传热率进行过测量。E. Eckert 和 W. Weise^[17,20] 发表

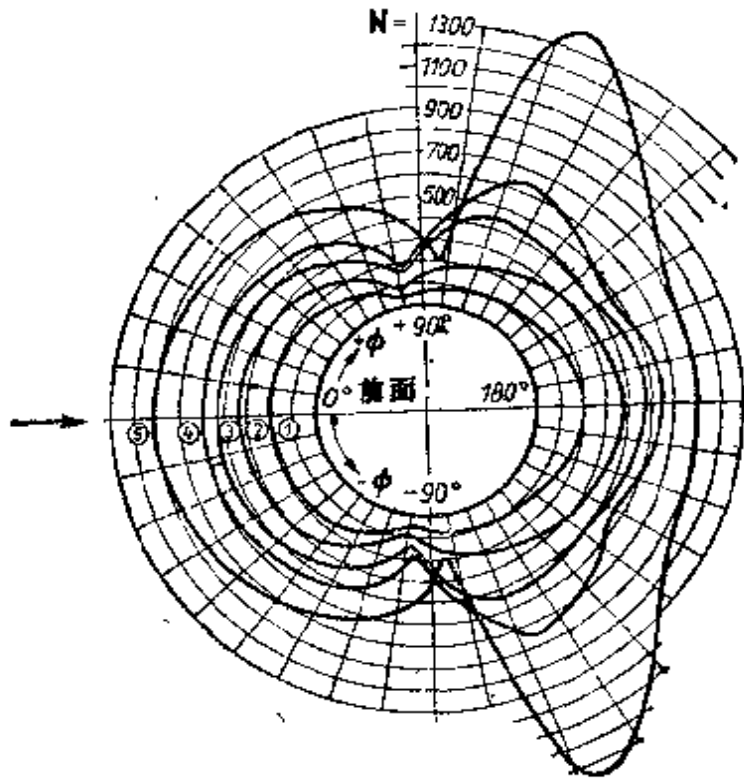


图 12.19 E. Schmidt 和 K. Wenner^[197] 测量的不同 Reynolds 数下圆柱体的局部传热系数。曲线 (1) 和 (2) 指的是小于临界 Reynolds 数的区域，曲线 (3) 和 (4) 是在临界区域内测定的，曲线 (5) 指的是大于临界 Reynolds 数的区域
 (1) $R = 39\ 800$, (2) $R = 101\ 300$, (3) $R = 170\ 000$,
 (4) $R = 257\ 600$, (5) $R = 426\ 000$

了关于平均壁温和局部绝热壁温的测量结果，他们的测量是在不受热的圆柱体上进行的，柱体平行于或者垂直于流动方向，空气速度范围的上限几乎达到声速。在气流与柱体轴线平行的情形下，他们得到一个平均值 $(T_s - T_\infty)2c_p/U_\infty^2 = 0.84$ ，该值与 Mach 数无关，并且与式 (12.80) 的平板值符合得很好。在流动垂直于柱体轴线的情形下，他们得到的平均值在 0.6 与 0.8 之间，该值也可以认为与 Mach 数无关。V. T. Morgan^[38] 的文章中有对圆柱体总传热率方面近期工作的综述。

R. Eichhorn, E. Eckert 和 A. D. Anderson^[30] 测量了位于轴向流动中沿圆柱体的传热率，柱体表面温度是可变的。当计及表面曲率的影响时，他们得到的结果与理论计算是非常一致的。他们对传热问题最新文章评论经常发表在 International Journal of Heat and Mass Transfer (国际传热与传质杂志) 上。

利用干涉照片可以方便地显示出热边界层。图 12.20 表示绕涡轮叶栅的流动。图上线条的位移是当地密度与参考密度之差的量度(例如可以把未扰动流动作为参考状态)。在位势流动范围内，密度的变化主要是由于压力变化引起的，但是在边界层内，密度的变化却主要是由摩擦热引起的。通过精细的分析，在图 12.20 上可以分辨出线条有突然而急剧的折弯。这些正是由于摩擦热引

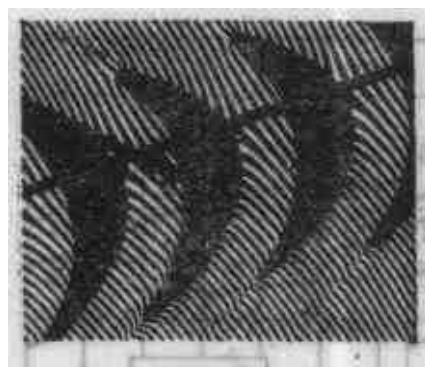


图 12.20 利用干涉法显示的涡轮叶栅的热边界层。引自 F. Eckert, 入口处流动的角度 $\beta_1 = 40^\circ$; 叶栅稠度 $l/t = 2.18$; Reynolds 数 $R = 1.97 \times 10^5$

干涉条纹的位移与密度的变化成正比，在壁面附近线条的突然折弯表示出热边界层的外缘，因为在这个区域内摩擦热使密度产生很大的变化

起很大的密度附加变化所造成的。因此，这种扭曲描绘出热边界层的外缘。在自然对流中，显示热边界层的更为简易的方法是使用纹影技术，E. Schmidt^[109] 首先阐述了这种方法，参看第 353 页。

7. 自由流湍流度的影响 在以上所有关于层流边界层的讨论中，自然意味着外部流动也是层流的。然而，在绝大多数情形下，特别是在风洞实验过程中，外部流动本身带有一定程度的湍流度。这就是说外部流动的每一点上速度是脉动的，在不停地改变着速度的大小和方向。如果速度的平均值是定常的，那么可以认为在这个平均值上叠加有三个脉动速度分量。当时间间隔足够长时，这些脉动速度分量的时间平均值为零。这种脉动量对速度边界层的影响将在第十五章中详细地加以研究，第十五章专门论述非定常边界层。在这一节里，我们将研究这种自由流脉动，特别是由于湍流度产生的脉动对热边界层和传热率的影响。

一般都公认，要明确地描述这种脉动流动是困难的。因为湍流包含着随机的脉动，所以严格地说，任何两个湍流都不可能是相似的。然而，通过实验可以发现，利用脉动的某些平均特性可以描述这种流动。这些平均特性是：第十六章 d 中定义的湍流度 T 和第十八章 d 中定义的湍流尺度 L 。另外，还可以发现，在湍流尺度远小于物体尺寸的情形下，仅湍流度就足以表征这个流场；在大多数实际情况中都会出现这种情形。因此可以预料，对于几何相似的等温物体，把它置于平行、等温、有脉动的流体中时，其 Nusselt 数除了依赖于 Prandtl 数和 Reynolds 数之外，还依赖于湍流度 T 。这样，对于局部 Nusselt 数和平均 Nusselt 数，我们可以分别写为

$$N_x = f_1(R, P, T), \quad (12.110a)$$

$$N_m = f_2(R, P, T), \quad (12.110b)$$

用它们来代替以前的关系式 (12.32) 和 (12.32a)。

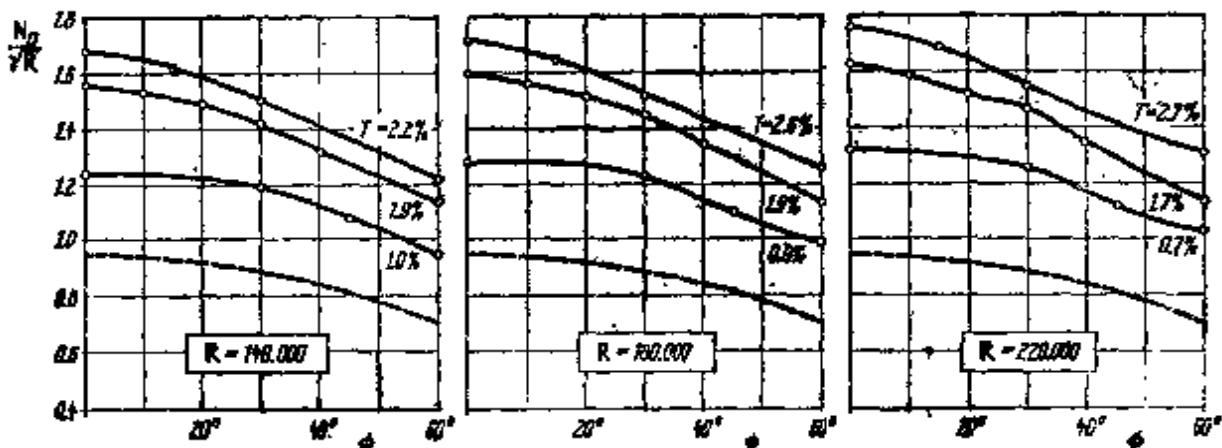


图 12.21 圆柱体局部 Nusselt 数 N_D 随着湍流度 T 和角度坐标 ϕ 的变化，引自 J. Kestin, P. F. Maeder 和 H. H. Sogin^[141] (湍流度 T 只是近似值)---是引自 N. Frössling^[39] 的理论值

增大自由流的湍流度必然会产生两种本质上不同的影响。第一，正如第十六章将说明的，增大湍流度使得边界层提前转变成湍流，因而引起传热率的增加。与层流边界层相比，这种传热率的增大正是湍流的特征。这种影响将在第十六章详细讨论。此外还有第二种影响，这种影响在层流边界层情形下可能变得特别明显。根据 J. Kestin, P.F. Maeder 和 H.H. Sogin^[44] 所作的测量，图 12.21 中的曲线描绘了在不同的 Reynolds 数和不同外流湍流度下，圆柱体局部 Nusselt 数的变化。在图中把这些测量结果与 N. Frössling^[59] 的理论计算结果进行了比较，理论计算对应于外部流动无湍流度的情形。这些结果与图 12.19 中的结果是十分相似的。值得注意的是湍流度的影响是十分显著的，在湍流度约为 2.5% 时，局部热通量约增大 80% 左右。

后来，L. Kayalar^[63] 从理论和实验两方面研究了湍流度对圆柱体传热的影响。实验结果示于图 12.22。这些测量结果也表明，当湍流度在 $T = 1\%$ 和 5% 之间时，随着湍流度增加，Nusselt 数急剧增加，虽然增加量并不象图 12.21 所示的那样大。L. Kayalar 试图从理论上解释这种现象：他认为具有向外凹的流线的驻点流动（见图 5.10），形成了一系列稳定的反向旋转的涡，涡的轴线与主流方向一致，它们颇象图 17.32b 中所示的凹壁上的涡系（Görtler 涡）。结果，这种流动在边界层内变成高度三维的，由此可以解释传热率的增加。在这方面，有关的研究包含在以下作者的文章中：H. Göertler^[49]，H. Schlichting^[103]，J. Kestin^[63] E. A. Brun 等人^[4]，G. W. Lowery 和 R. J. Vachon^[82] 以及 J.

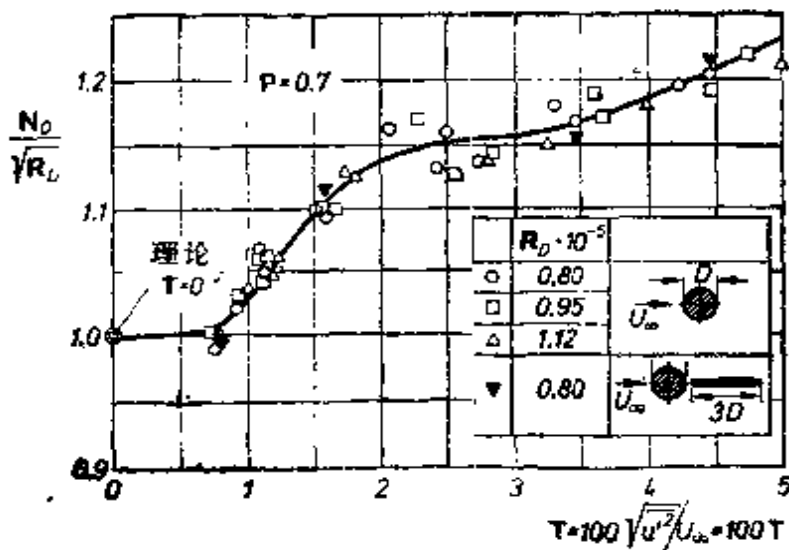


图 12.22 外部流动的湍流度对圆柱驻点传热率的影响，引自 L. Kayalar^[63]

Kestin 和 L. N. Persen^[68a]，还可以参阅第十七章的文献[118]。

然而，意外的是在零攻角平板上却没有上述效应。J. Kestin, P. F. Maeder 和 H. E. Wang^[68] 在平板上的测量结果表明，在层流范围内这些结果对自由流湍流度并不敏感。A. Edwards 和 N. Furber^[77] 也得到相同的结果。这种结果指出：只有在有压力梯度的情形下，外流的湍流度才影响局部传热。参考文献[67]中引用的实验结果为这种假定提供了一个可靠的证据。通过在平板上人为地施加压力梯度的方法，可以发现局部 Nusselt 数能随着湍流度而增加。正如文献[68]中所指出的，借助于第十五章中叙述的林家翘的理论可以作出这种特性的定性解释。文献[5, 42, 43, 54, 83, 100, 113, 136]中也研究过自由流湍流度对传热的影响。而最新的综述可以在文献[88]中找到。

b. 自然流动(自由对流)中的热边界层

只是由温度差产生的密度梯度而引起的运动称为“自由流动”，以区别于因外部原因所引起的“强迫流动”。在一块直立热平板或者在一水平热圆柱的周围就存在着这样的自然流动。在大多数情形下，特别是当流体的粘性系数和导热系数都很小时，自然流动也呈现出边界层的结构。A. J. Ede^[28] 对这种流场作了综合评述。

在直立热平板情形下，每一个水平面上的压力都等于重力的压力，因此是一个常数。引起自然流动的唯一原因是地球重力场中的重力和浮力不相等。根据方程(12.51a, b, c)可以得到这种运动的运动方程，其中 $dp/dx = 0$, $\beta = 1/T_\infty$ 。当不计摩擦热时，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.111)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \theta, \quad (12.112)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (12.113)$$

式中 $\alpha = k/\rho c_p$ 为热扩散系数， $\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ 是无量纲局部温度。E. Schmidt 和 W. Beckmann^[94] 从实验上测定了直立热平板上有自然对流时的温度场和速度场；E. Pohlhau-

sen 通过对这些实验结果的理论研究证明: 如果设 $u = \partial\phi/\partial y$ 和 $v = -\partial\phi/\partial x$, 从而引进流函数, 然后采用相似变换

$$\eta = c \frac{y}{\sqrt{x}}; \quad \phi = 4\nu c x^{3/4} \zeta(\eta).$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{g(T_w - T_\infty)}{4\nu^2 T_\infty}}, \quad \text{---} \quad \sqrt{\frac{g(T_w - T_\infty)}{4\nu^2 T_\infty}} \quad (12.114)$$

则可以把关于 ϕ 的偏微分方程简化成一个常微分方程。这时速度

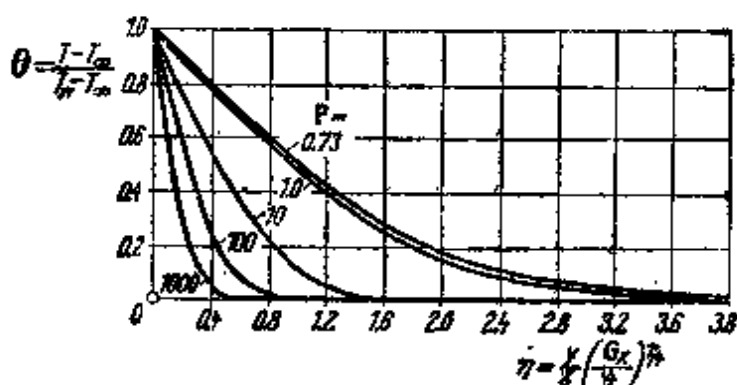


图 12.23 直立热平板上自然对流层流边界层内的温度分布。理论曲线, $P = 0.73$, 引自 E. Pohlhausen^[43] 和 S. Ostrach^[23]

$$G_x = \frac{g x^3}{\nu^2} \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} = \text{Grashof 数}$$

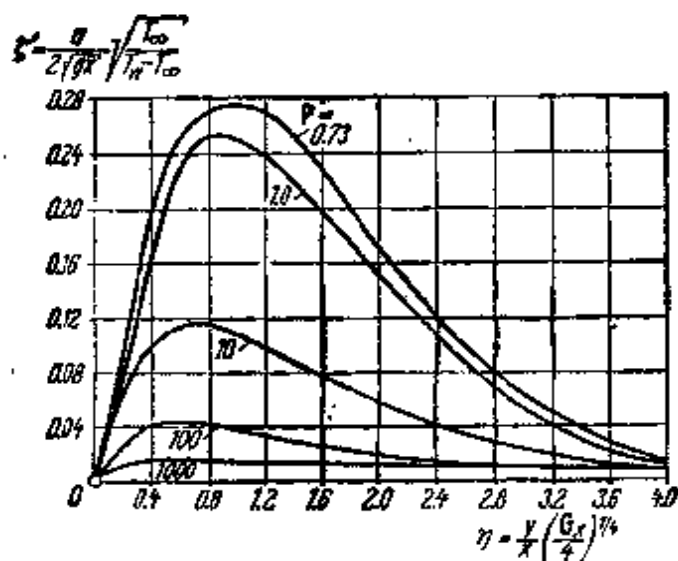


图 12.24 直立热平板上自然对流层流边界层内的速度分布 (参看图 12.23)

分量变成

$$u = 4\nu x^{1/2} c^2 \zeta'; \quad v = \nu c x^{-1/4} (\eta \zeta' - 3\zeta),$$

而温度分布则由函数 $\theta(\eta)$ 确定。由方程 (12.112), (12.113) 和 (12.114) 可以得到如下的微分方程:

$$\zeta'''' + 3\zeta\zeta'' - 2\zeta'^2 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3P\zeta\theta' = 0, \quad (12.115a, b)$$

其边界条件是: 在 $\eta = 0$ 处, $\zeta = \zeta' = 0$ 和 $\theta = 1$; 在 $\eta = \infty$ 处, $\zeta' = 0, \theta = 0$ 。图 12.23 和 12.24 给出在不同 P 值下这些方程的解。图 12.25 和 12.26 包含了速度分布和温度分布的计算值与 E. Schmidt 和 W. Beckmann^[104] 的测量结果的比较。由图看出两者吻合得很好。另外还可以看出, 速度边界层和温度边界的

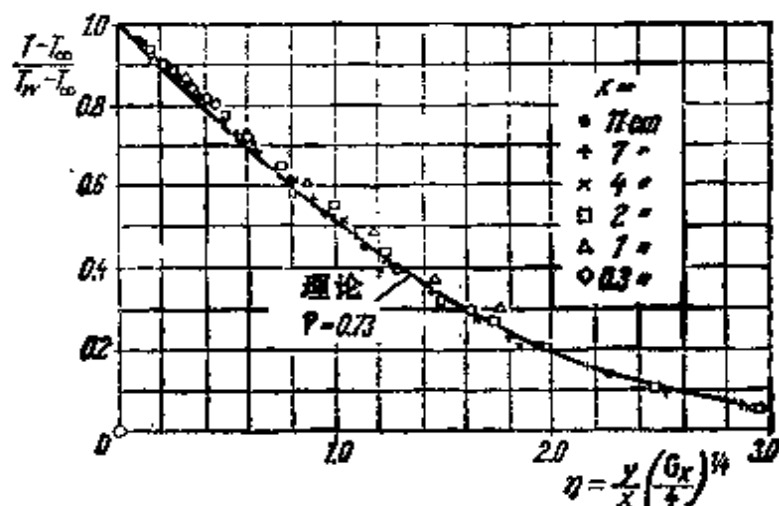


图 12.25 直立热平板上空气自然对流层流边界层内的温度分布, 由 E. Schmidt 和 W. Beckmann^[104] 测量; x = 从平板下缘量起的距离

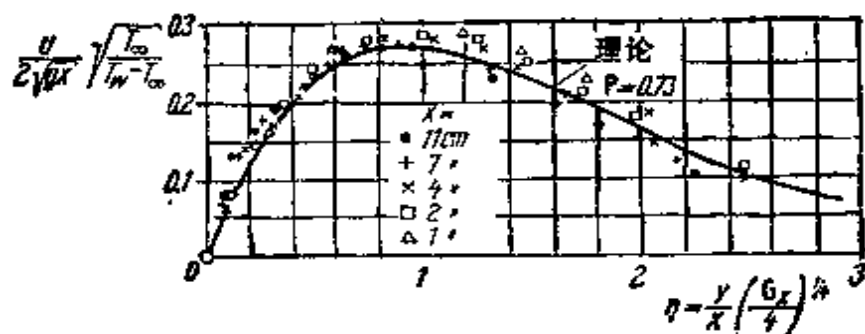


图 12.26 直立热平板上空气自然对流层流边界层内的速度分布, 由 E. Schmidt 和 W. Beckmann^[104] 测量

厚度均与 $x^{1/4}$ 成正比。

传热：在 x 截面上，单位时间通过单位面积从平板向流体传递的热量 $q(x) = -k(\partial T/\partial y)_0$ 为

$$q(x) = -kcx^{-1/4} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_0 (T_w - T_\infty),$$

其中，当 $P = 0.733$ 时， $(\partial\theta/\partial\eta)_0 = -0.508$ 。在长为 l ，宽为 b 的平板上，总传热量为 $Q = b \int_0^l q(x) dx$ ，因此

$$Q = \frac{4}{3} \times 0.508 bl^{3/4} ck(T_w - T_\infty).$$

这样，由 $Q = bkN_m(T_w - T_\infty)$ 所定义的平均 Nusselt 数变为 $N_m = 0.677cl^{3/4}$ ，或者代入式 (12.114) 的 c 值，则有：

$$N_m = 0.478(G)^{1/4}, \quad (12.116)$$

其中

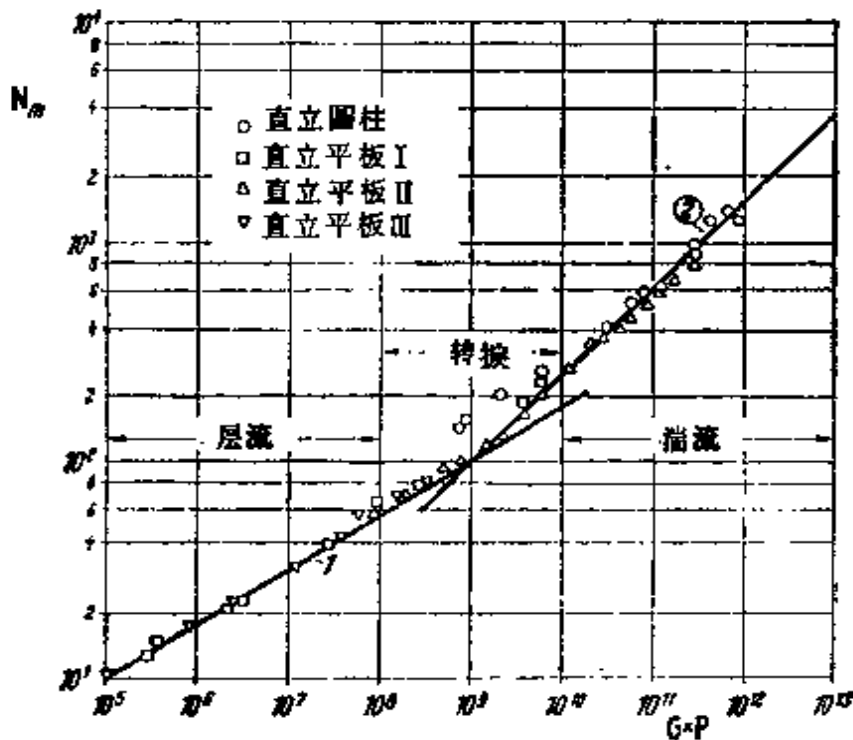


图 12.27 在直立平板和直立圆柱上自由对流的平均 Nusselt 数，
引自 E. R. G. Ecker 和 T. W. Jackson^[22]

曲线 (1) 层流： $N_m = 0.555(GP)^{1/4}$ ； $GP < 10^9$

曲线 (2) 湍流： $N_m = 0.0210(GP)^{1/3}$ ； $GP > 10^9$

$$G = \frac{gl^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} \quad (12.117)$$

为 Grashof 数。在液体情形中，也可以写成 $G = gl^3\beta(T_w - T_\infty)/\nu^2$ 。

图 12.27 给出了自由对流的理论值与测量结果之间的比较，测量是 E. R. G. Eckert 和 T. W. Jackson^[122] 在直立热圆柱和直立热平板上进行的。当乘积 $GP < 10^8$ 时，流动是层流的，而 $GP > 10^{10}$ 时，流动是湍流的。理论和实验之间非常吻合。

H. Schuh^[109] 把 E. Pohlhausen 的计算方法推广到大 Prandtl 数的情形，例如存在于油中的情形。

在 E. M. Sparrow 和 J. L. Gregg^[126] 的文章中研究了极小 Prandtl 数的情形。E. J. Le Fevre^[73] 研究了当 $P \rightarrow 0$ 和 $P \rightarrow \infty$ 时的极限情形，按照他的结果可以写成

$$\frac{N_m}{(GP)^{1/4}} = 0^* \quad (P \rightarrow 0), \quad (12.118a)$$

$$\frac{N_m}{(GP)^{1/4}} = 0.670 \quad (P \rightarrow \infty). \quad (12.118b)$$

表 12.6 中包含了一些关于中间 Prandtl 数的数值。T. Hara^[50] 对粘性系数依赖于温度的情形作了计算。参考文献 [29, 124] 中阐述了自然对流中抽吸和引射对直立平板传热率的影响。K. T. Yang^[146] 讨论了自然流动中的另一类相似解。例如，当平板表面的温度分布形式为 $T_w - T_\infty = T_1 x^n$ 时所产生的相似解，但是，这时微分方程 (12.115) 代之以

$$\zeta''' + (n+3)\zeta\zeta'' - 2(n+1)\zeta'^2 + \theta = 0, \quad (12.119a)$$

表 12.6 自然对流中直立热平板的传热系

P	0	0.003	0.008	0.01	0.02	0.03
$\frac{N_m}{(GP)^{1/4}}$	0	0.182	0.228	0.242	0.280	0.305

* 原文误为 $\frac{N_m}{(GP^2)^{1/4}} = 0.800$ 。——译者注

$$\theta'' + \mathbf{P}(n+3)\zeta\theta' - 4\mathbf{P}n\zeta'\theta = 0, \quad (12.119b)$$

E. M. Sparrow 和 J. L. Gregg^[127] 求出了这些方程的解。参考文献 [125] 讨论了同时有自由对流和强迫对流时的相似解。在这种情形下,外部流动的速度必须与 x^m 成正比(绕楔流动),而平板上的温度分布必须与 x^{2m-1} 成正比。

H. H. Lorenz^[81] 在油中对直立热平板所作的测量结果,给出 $\mathbf{N}_m = 0.555 (\mathbf{G} \times \mathbf{P})^{1/4}$, 如果可以假定理论计算不考虑粘性系数对温度的依赖关系(这对油类恰恰是重要的),那么测量结果与理论计算是非常一致的。

在自然对流中,利用 E. Schmidt^[109] 发明的纹影法,可以方便

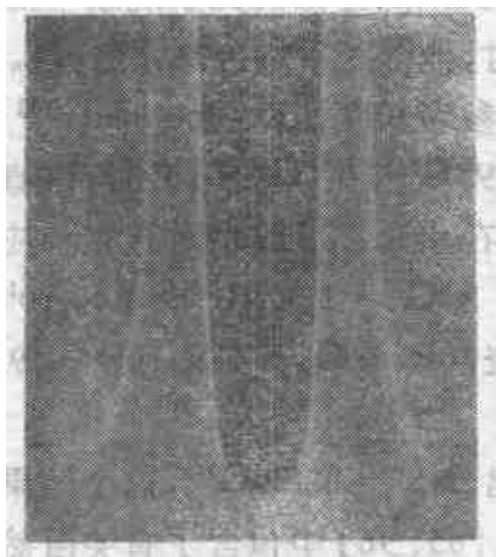


图 12.28 直立热平板上热边界层的纹影照片,引自 E. Schmidt^[109]

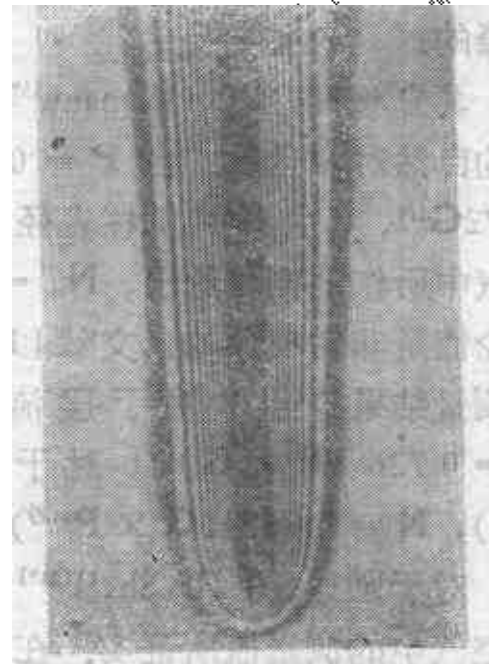


图 12.29 直立热平板上热边界层的干涉照片,引自 E. R. G. Eckert 和 E. Soehngen^[131]

数(层流),按照文献 [93, 94, 109, 126]

0.72	0.73	1	2	10	100	1000	∞
0.516	0.518	0.535	0.568	0.620	0.653	0.665	0.670

地把热物体周围的层流热边界层显示出来。让一束平行光在平行于平板的方向上通过边界层,于是光束在远离物体处的屏幕上产

生阴影。在垂直于物面方向上，空气的密度梯度引起光线向外折射，密度梯度愈陡的地方（即物体附近）折射率愈大。只要屏幕与物体的距离足够大，则受热层所占据的空间就会变暗。所以在纹影照片上，热边界层产生的暗影包围了物体的暗影。从温度场向外折射的光线，形成了一个包围这个暗影的发光区。这个明亮区的外缘是由沿着物面传播的光线组成的。因此，这些光线的折射率正比于物面上的密度梯度，也就是正比于物面的局部传热系数。图 12.28 是对直立热平板拍摄的纹影照片。图中的白色虚线是平板的轮廓。根据阴影不难看出，边界层厚度按 $x^{1/4}$ 增长。明亮区域的外缘表明局部传热系数与 $x^{-1/4}$ 成正比。图 12.29 给出了这种边界层的干涉照片；这张照片是 E. R. G. Eckert 和 E. Soehngen^[13] 拍摄的。

其它物形：R. Hermann^[55] 用类似的方法研究了绕水平热圆柱的自然对流运动。当 $P = 0.7$ 时，他得到平均传热系数 $N_m = 0.372G^{1/4}$ ，其中 G 取圆柱直径作为参考长度。K. Jodlbauer^[61] 在空气中所作的测量给出， $N_m = 0.395G^{1/4}$ ，在 $G = 10^5$ 时，该值与理论值是非常一致的。文献 [142] 在水和乙二醇中对直立圆柱体的测量结果给出：对于层流 ($P \times G = 2 \times 10^3 \sim 4 \times 10^{10}$)， $N = 0.726 (P \times G)^{1/4}$ ；对于湍流 ($P \times G = 4 \times 10^{10} \sim 9 \times 10^{11}$)， $N = 0.0674(G \times P^{1.29})^{-1/3}$ 。

对于圆球，J. I. Shell^[119] 算出 $N_m = 0.429G^{1/4}$ ，这个结果已为空气中的测量值所证实。在文献 [65, 96] 中包含了有关自然对流最新工作的综述。

第十三章 可压缩流动中的层流边界层¹⁾

a. 物理分析

可压缩流动中的边界层理论，是在航空工程的进展以及现代的火箭和人造卫星发展的激励下发展起来的。当飞行速度达到几倍声速时，压缩功和能量耗散会引起相当大的温升，迫使我们在分析中总是要计及热边界层，因为速度边界层和热边界层之间存在着强烈的相互作用。当飞行速度为 w_∞ 时，由公式 (12.14b) 看出，绝热压缩引起的温升值达到

$$(\Delta T)_{ad} = \frac{w_\infty^2}{2c_p}, \quad (13.1)$$

其中 c_p 是单位质量气体的比热。由于 $\gamma p_\infty / \rho_\infty = (\gamma - 1)c_p T_\infty$ ，所以还可以写成

$$\frac{(\Delta T)_{ad}}{T_\infty} = \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2, \quad (13.2)$$

这里的 Mach 数定义为 $M_\infty = w_\infty / c_\infty$ 。如第十二章所述，边界层内由摩擦引起的温升与因绝热压缩引起的温升有相同的量级。这在本章后面还要更为详细地加以证明。

若把空气看作完全气体（其 $c_p = 1.006 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ ， $\gamma = 1.4$ ），公式 (13.1) 和 (13.2) 的数值计算结果示于图 13.1。由图看出，当飞行速度 $w_\infty = 2 \text{ km/s}$ （对应于 Mach 数 $M_\infty = 6$ ）时，气流的温升达到 $\Delta T = 2000^\circ\text{C}$ 。随着飞行速度的增加，这样的温升迅速增加。但是与相应的完全气体相比，高温下的真实气体还改变着它的物理性质。这时在真实气体中将出现离解过程和电离过程（形成等离子体）。这些过程对能量的吸收使得真实气体的温升小

1) F. W. Riegels 博士对本章的前一版提出了修改意见；特别是对本章 d1 中关于推广的 Illingworth-Stewartson 变换作了系统的阐述，在此表示感谢。

于完全气体的温升。在人造卫星的轨道速度 $w_\infty \approx 8\text{km/s}$ 时，即使真实气体的温升仍然是 10000°C 的量级。Mach 数 $M_\infty > 6$ 的流动称为**高超声速流动**，此时真实气体和完全气体之间在性质上有很大不同。在**高超声速**气流中，因激波后或物体上的边界层内存在高温而出现化学反应(电解、离解)，使得分析流动的工作大为复杂化。由于这个缘故，我们的讨论将限制在可以假定流体仍然遵守完全气体定律的 Mach 数范围内；对空气而言，这相当于 $M_\infty < 6$ 的范围。近来，对于具有化学反应的高超声速边界层的研究给予了很大的注意。有关这方面的详细情形，读者可参考 W. H. Dorrance 的著作^[29]。

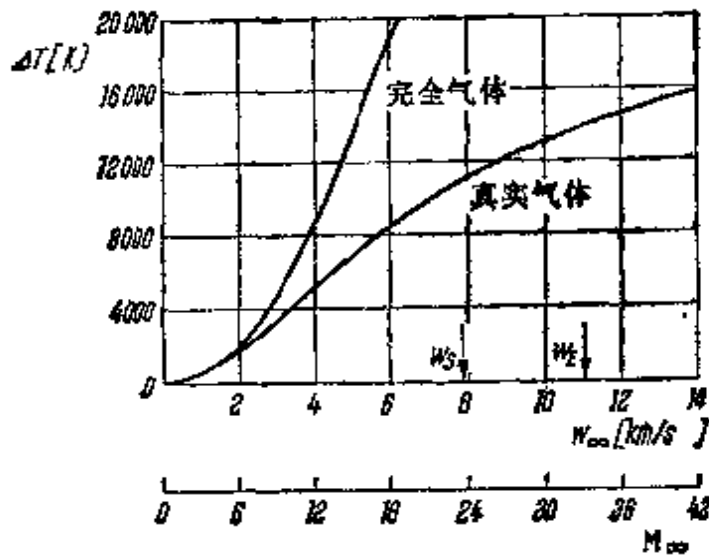


图 13.1 空气中温升随飞行速度 w_∞ 和飞行 Mach 数 M_∞ 的变化。标有“完全气体”的曲线是用公式 (13.1) 和 (13.2) 计算的。 $w_s = 7.9\text{km/s}$ 是人造卫星的轨道速度， $w_E = 11.2\text{km/s}$ 是卫星离开地球的逃逸速度

即使在超声速的 Mach 数范围(在空气中 $M_\infty < 6$)内，气流中的温升也比较高，使我们不得不考虑温度对气体特性的影响，特别是对气体粘性系数的影响。对于包括空气在内的大多数气体而言，运动粘性系数随着温度的升高都有显著的增加。

在空气的情形下，正如 E. R. van Driest^[30] 所指出的，可以采用基于 D. M. Sutherland 的粘性理论的插值公式：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\omega} \frac{T_0 + S_1}{T + S_1}, \quad (13.3)$$

其中 μ_0 为参考温度 T_0 所对应的粘性系数, S_1 为常数, 对空气而

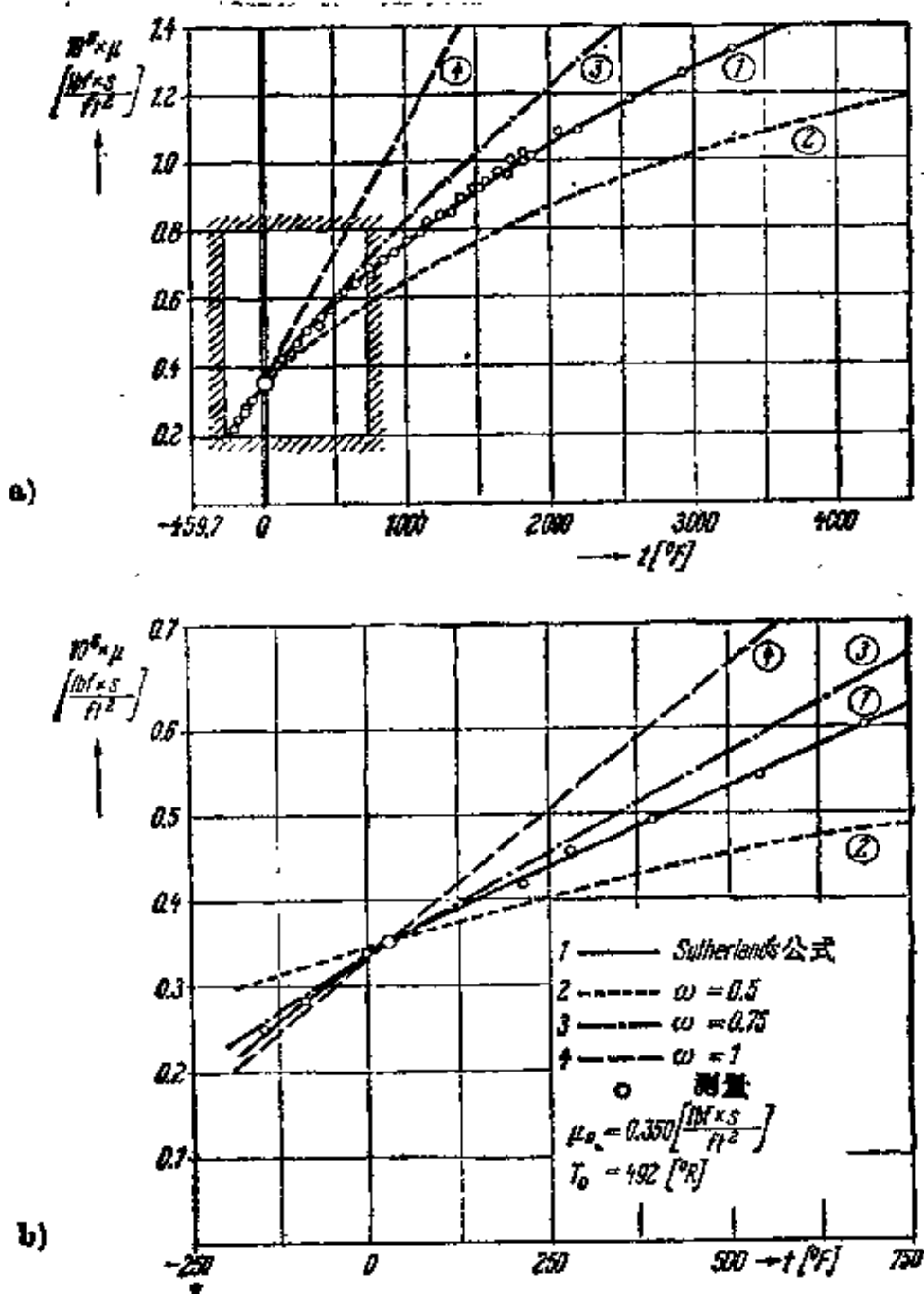


图 13.2 空气的动力粘性系数 μ 随温度 T 的变化

曲线 (1): 测量值和基于 Sutherland 公式的插值公式(13.3);
 曲线 (2), (3) 和 (4): 指数 ω 取不同值的幂律公式 (13.4)

言,取

$$S_1 = 110\text{K}.$$

空气的粘性系数和温度之间的上述关系见图 13.2 中曲线 (1)。由于关系式 (13.3) 还是太复杂,所以在理论计算中通常采用更简单的幂律近似,即

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\omega, \quad (0.5 < \omega < 1). \quad (13.4)$$

对应于 $\omega = 0.5, 0.75$ 和 1.0 的幂律曲线也画在图 13.2 中。由图看出:在高温时, Sutherland 公式 (13.3) 可以通过选用 0.5 和 0.75 之间的 ω 值来近似;在低温时,选用 $\omega = 1.0$ 看来是合适的。至于比热 c_p 和 Prandtl 数 P 的值,由表 12.1 看出,即使在温度差很大时,把它们取成常数也具有令人满意的近似程度。

有时,粘性律 $\mu(T)$ 可以取成下述形式:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = b \frac{T}{T_0}, \quad (13.4a)$$

其中常数 b 用来在所讨论的温度范围内可以得到更好的近似,即更接近于较为精确的 Sutherland 公式 (13.3) (参阅本章 d)。

当然,由于速度边界层与热边界层的相互作用,使得所讨论的现象变得非常复杂。与不可压缩边界层相比,在计算可压缩边界层时,至少还需要考虑另外四个量:

1. Mach 数;
2. Prandtl 数;
3. 粘性系数函数 $\mu(T)$;
4. 有关温度分布的边界条件(传热壁面或绝热壁面)。

显然,由于比不可压缩流动增加了很多新的参数,使得在实际中可能出现的许多情形变得难于处理。

G. Kuerti^[97] 和 A. D. Young^[106] 对涉及可压缩边界层的大量论文作了综合评述。N. Curle^[26] 和 K. Stewartson^[96] 讨论了不同作者所采用的特殊数学方法的一些细节。可压缩湍流边界层的问题将在第二十三章中讨论。

b. 速度场和温度场之间的关系

在二维流动情形下, 不管物体的形状如何, 速度场和温度场之间都存在着非常简单的关系. 在 $P=1$ 的特殊情形下, 求解微分方程要容易得多. A. Busemann^[10] 和 L. Crocco^[20] 在计算可压缩平板边界层时, 首先利用了相应的想法. 这可以简单地表述如下: 不管粘性系数函数具有什么样的形式, 温度 T 只依赖于平行于壁面的速度分量 u , 即 $T = T(u)$. 因此, 等速曲线 ($u = \text{常数}$) 和等温曲线 ($T = \text{常数}$) 是一致的.

这个著名的定理可以很容易从边界层方程组导出. 若略去浮力项, 但是考虑 μ 和 k 对温度的依赖关系, 我们可以将边界层方程组 (12.50a, b, c) 改写成

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (13.5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (13.6)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$p = \rho R T. \quad (13.8)$$

和不可压缩流动的情形一样, 现在压力梯度也是由无摩擦的外流来确定:

$$\frac{dp}{dx} = - \rho_1 U \frac{dU}{dx} = \rho_1 c_p \frac{dT_1}{dx}, \quad (13.9)$$

其中 $\rho_1(x)$ 和 $T_1(x)$ 分别表示边界层外缘的密度和温度. 因为沿流动的任何点 x 处有 $\partial p / \partial y = 0$, 所以温度和密度满足关系式

$$\rho(x, y) \cdot T(x, y) = \rho_1(x) \cdot T_1(x). \quad (13.10)$$

在方程 (13.5) 至 (13.7) 中假设温度只依赖于变量 u , 即

$$T = T(u),$$

就可以由方程 (13.7) 推出

$$\begin{aligned} \rho c_p T_u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k T_u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

其中用下标 u 表示对 u 的微商, 所以 $T_u = dT/du$. 利用方程 (13.6) 消去上式的左边, 得到

$$\begin{aligned} c_p T_u \left[-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ = u \frac{dp}{dx} + T_u \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (T_{uu} k + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dx} (c_p T_u + u) + T_u \left[c_p \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = (T_{uu} k + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

引入 Prandtl 数 $\mathbf{P} = \mu c_p / k$, 就气体而论, 可以假设 \mathbf{P} 与温度无关(参阅表 12.1), 则得

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dx} (c_p T_u + u) + c_p \frac{\mathbf{P} - 1}{\mathbf{P}} T_u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = (T_{uu} k + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

由此清楚看出, 如果同时有

$$\frac{dp}{dx} = 0; \quad \mathbf{P} = 1 \quad \text{和} \quad T_{uu} = -\frac{\mu}{k} = -\frac{1}{c_p}, \quad (13.11)$$

或者如果

$$\Delta \quad \frac{dp}{dx} \neq 0, \quad \text{另外有在 } y = 0 \text{ 处 } T_u = 0, \quad (13.11a)$$

那么 $T = T(u)$ 就是方程组 (13.5)~(13.7) 的解. 这就证明了我们的想法.

温度与速度关系的具体函数可以通过积分求得. 根据等式

(13.11), 求得通解为

$$T(u) = -\frac{u^2}{2c_p} + C_1u + C_2.$$

其积分常数 C_1 和 C_2 现在可通过边界条件来确定。当 $dp/dx \cong 0$ 时, 我们得 $C_1 = 0$ 。

1. 绝热壁面

绝热壁面上的边界条件为

$$y = 0; u = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \text{ 因此 } \frac{dT}{du} = 0.$$

$$y = \infty; u = U; T = T_1,$$

其中 $T_1(x)$ 为边界层外缘的温度。于是解为

$$T = T_1 + \frac{1}{2c_p} (U^2 - u^2). \quad (13.12)$$

所以当 $u = 0$ 时, 绝热壁面的温度 $T = T_0$ 为

$$T_0 = T_1 + \frac{U^2}{2c_p}. \quad (13.12a)$$

引入 Mach 数 $\mathbf{M} = U/c_1$, 其中 $c_1^2 = (\gamma - 1)c_p T_1$, 则可以将式 (13.12a) 改写为如下形式

$$T_0 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}^2 \right), \quad (\mathbf{P} = 1). \quad (13.12b)$$

$T_0 - T_1$ 这个量表示由摩擦热引起的绝热壁面的温升。它与粘性系数函数的指数无关。

2. 传热壁面 (平板, $dp/dx = 0$)

我们假设壁面的温度保持不变且等于 T_w 。此时边界条件为

$$y = 0; u = 0, T = T_w; y = \infty; u = U_\infty, T = T_\infty.$$

由此而给出的解为

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{U_\infty^2}{2c_p T_\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right). \quad (13.13)$$

如果用 Mach 数 $\mathbf{M}_\infty = U_\infty/c_\infty$ 来表示, 则得

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty}$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right). \quad (13.13a)$$

在 $M_\infty \rightarrow 0$ 的极限情形下, 式 (13.13a) 具有式 (12.64) 的形式, 后者是以前在不可压缩流动中所得到的关系式。

由式 (13.13) 给出的速度分布与温度分布的关系示于图 13.3 中。由于 $(\partial u / \partial y)_w > 0$, 所以热流的方向由壁面上的梯度 $(dT / du)_w$ 确定。实际上, 我们从式 (13.13) 可以推出

$$\frac{U_\infty}{T_\infty} \left(\frac{dT}{du} \right)_w = 1 - \frac{T_w}{T_\infty} + \frac{U_\infty^2}{2c_p T_\infty}, \quad (13.14)$$

所以当 $(dT / du)_w < 0$ 时, 热流从壁面流向流体, 而当 $(dT / du)_w > 0$ 时, 热流则从流体流向壁面。因此, 当 $P = 1$ 时, 有

$$T_w - T_\infty \geq \frac{U_\infty^2}{2c_p} \quad \text{或} \quad \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \geq \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2; \quad (13.15)$$

热通量壁面 \longleftrightarrow 流体。

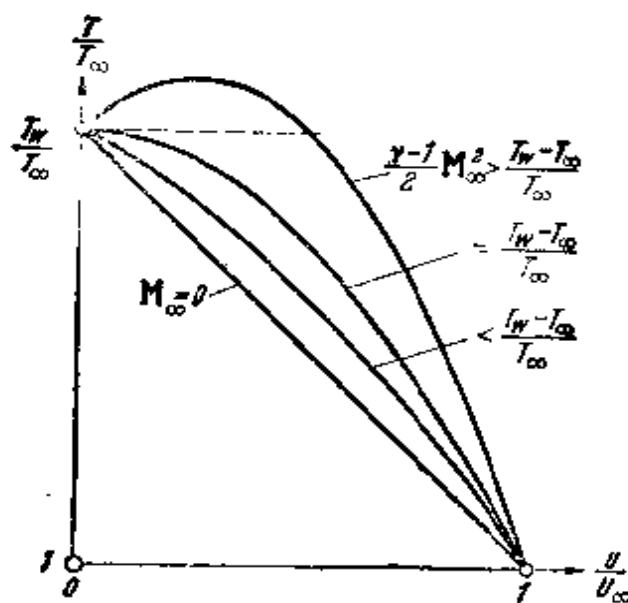


图 13.3 有摩擦热时可压缩平板边界层中速度分布与温度分布的关系, 根据关系式 (13.13)

Prandtl 数 $P = 1$, $T_w =$ 壁温; $T_\infty =$ 来流温度。当

$$\frac{1}{2} (\gamma - 1) M_\infty^2 > (T_w - T_\infty) / T_\infty$$

时, 得 $(\partial T / \partial y)_w > 0$ 。虽然此时有 $T_w > T_\infty$, 但是由于摩擦产生很大的热量, 所以还是有热量传给壁面

c. 零攻角平板

关于零攻角平板边界层,已有大量的文章进行了广泛的研究,所以,我们首先来相当详尽地讨论这种情形。一开始,我们将根据上一节的一般想法,导出平板上速度分布和温度分布之间的关系。

在绝热壁面(平板温度计)下,将 $T_1 = T_\infty$ 和 $U = U_\infty$ 代入式(13.12),则平板边界层中的温度分布为

$$T = T_\infty + \frac{1}{2c_p} (U_\infty^2 - u^2), \quad (13.16)$$

同时,绝热壁面温度(见式(13.12a, b))为

$$T_s = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right), \quad (P = 1), \quad (13.17)$$

其中利用了 $M_\infty = U_\infty/c_\infty$ 和 $c_\infty^2 = (\gamma - 1)c_p T_\infty$ 。值得注意的是:在可压缩流动的情形下,只要 $P = 1$,则由式(13.17)给出的壁面温度就与不可压缩流动中由给出式(12.80)的壁面温度相同。H. W. Emmons 和 J. G. Brainerd^[34] 已经指出:在 Prandtl 数不为 1 的情形下,与不可压缩的公式(13.80)给出的壁面温度相比,由可压缩性效应引起壁面温度的偏差是非常微小的。因此,在可压缩流动中,绝热壁面温度公式

$$T_s = T_\infty + \sqrt{P} \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + \sqrt{P} \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \quad (13.18)$$

仍然有效,并有很好的近似程度。对于空气而言,有 $\gamma = 1.4$, $P = 0.71$,可得

$$T_s = T_\infty (1 + 0.170 M_\infty^2). \quad (13.18a)$$

这个绝热壁面温度对 Mach 数的函数关系已示于图 13.4 中。例如,当 Mach 数 $M_\infty = 1$ 时,壁面加热引起的温升约为 45°C (或 80°F)。当 $M_\infty = 3$ 时,温升达到 400°C (或 720°F)。而当 $M_\infty = 5$ 时,温升高达 1200°C (或 2200°F)。

现在已习惯将式(13.18)写成更一般的形式

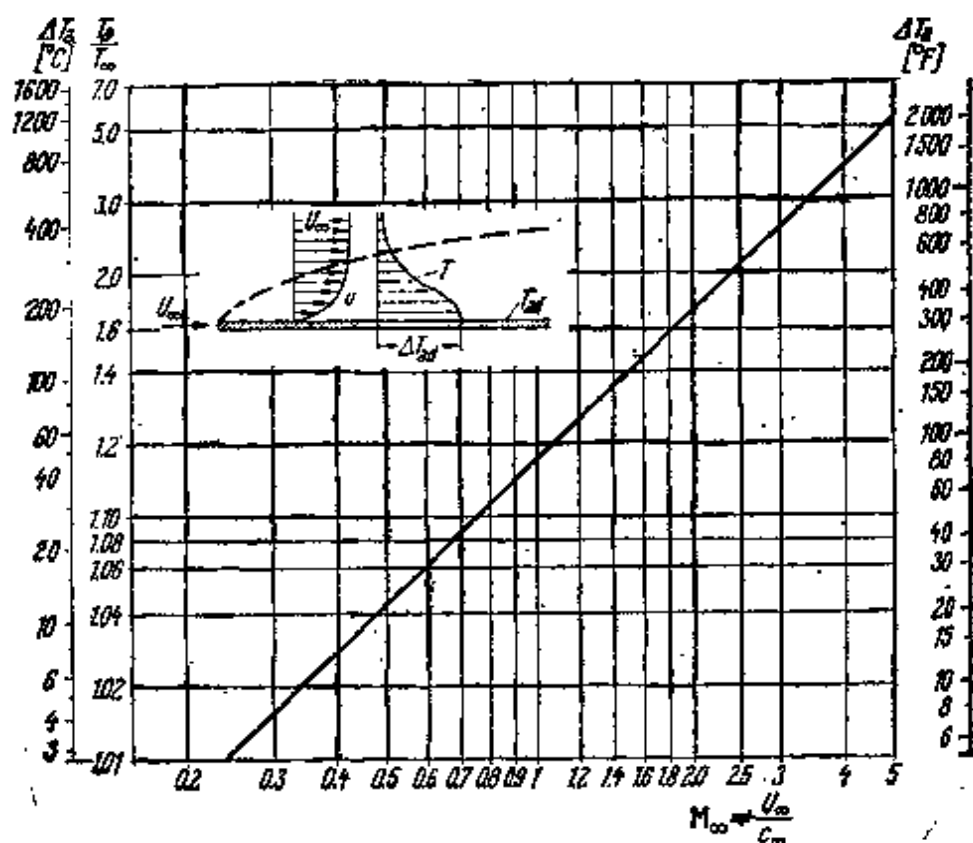


图 13.4 由空气摩擦加热引起的绝热壁面温升随 Mach 的变化，
根据公式 (13.18a)

Prandtl 数 $P = 0.7$ ；绝热壁面温度 $= T_s$ ；外流温度 $= T_\infty$ ；壁面
温升 $(\Delta T)_s = T_s - T_\infty$ ； $T_\infty = 273\text{K}(492^\circ\text{R})$

$$T_s = T_\infty + r \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right). \quad (13.19)$$

因而恢复系数 r 代表平板的摩擦温升 $(T_s - T_\infty)$ 与绝热压缩温升 ΔT_s 之比。根据公式 (12.14)，绝热压缩温升为

$$\Delta T_s = \frac{U_\infty^2}{2c_p},$$

将公式 (13.18) 和 (13.19) 进行比较，可知恢复系数为

$$r = \sqrt{P} \quad (\text{层流}), \quad (13.19a)$$

因此，对空气而言，

$$r = \sqrt{0.71} = 0.84 \quad (\text{层流}). \quad (13.19b)$$

图 13.5 记录了恢复系数的实验数据，这是由 G. R. Eber^[32]

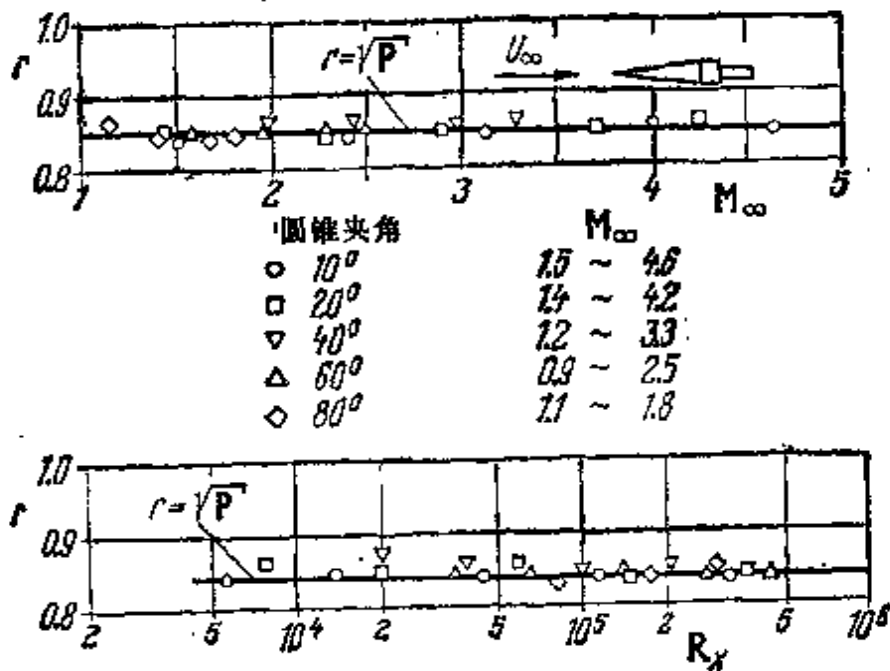


图 13.5 在不同的 Mach 数和 Reynolds 数下, 超声速绕锥流动中层流边界层的恢复系数 r 的测量值与理论值的比较, 实验值取自 G. R. Eber^[32]; 理论值根据公式 (13.19a)

在超声速气体绕圆锥流动的层流边界层情形下测得的。这些实验数据证实了恢复系数 $r = P^{1/2}$ 。B. des Clers 和 J. Sternberg^[27] 对各种圆锥体及一个抛物面体所作的实验测量, 也得出了类似的结果。

无传热时的速度分布和温度分布: W. Hantzsche 和 H. Wendt 的两篇论文^[44,46] 及 L. Crocco 的一篇论文^[21] 中列出了在一些特殊情形下计算速度分布和温度分布的显函数公式。图 13.6 中有一些不同 Mach 数的边界层的速度分布曲线。这是 Crocco 对绝热平板边界层的计算结果, 其中假定粘性(幂)律的指数 $\omega = 1$ 以及 $P = 1$ 。离开壁面的距离 y 已用 $\sqrt{\nu_\infty x / U_\infty}$ 作了无量纲化, 其中 ν_∞ 是外流中的运动粘性系数。由图看出, 当 Mach 数增加时, 边界层显著增厚, 而且当 Mach 数非常大时, 在整个边界层厚度上速度近乎是线性分布。

图 13.6 中也给出了温度分布。可以看出, 当 Mach 数很大时, 边界层中的摩擦温升是很大的。在前面引用过的 W. Hantzsche

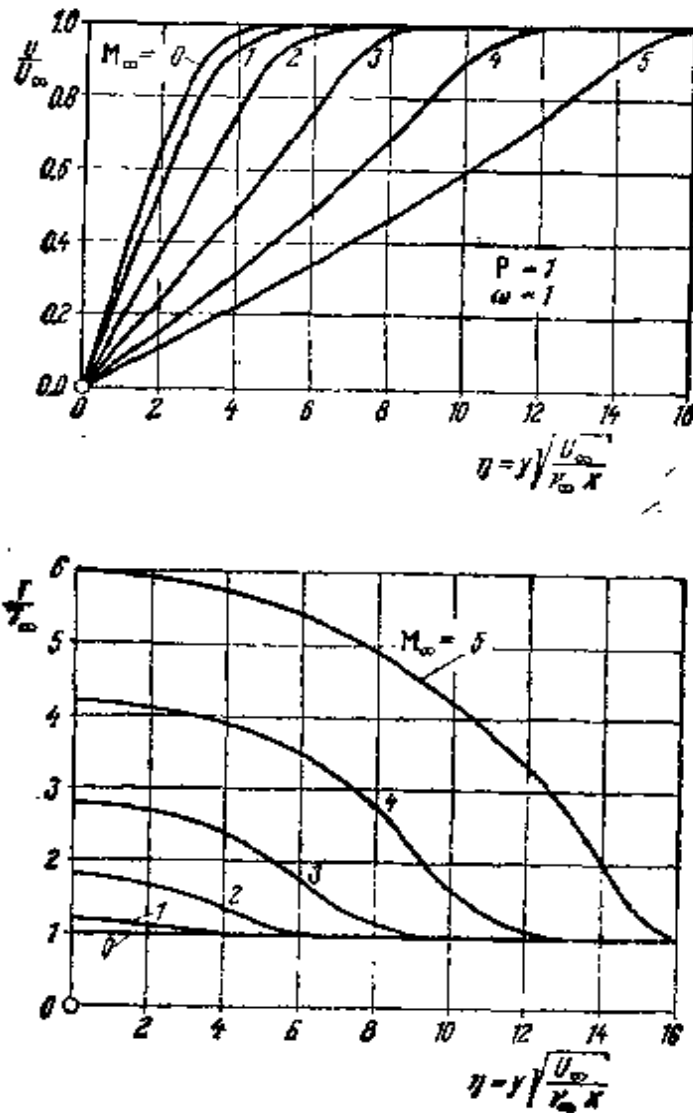


图 13.6 绝热可压缩平板层流边界层中的速度分布和温度分布，
取自 Crocco^[21]

Prandtl 数 $P = 1$, $\omega = 1$, $\gamma = 1.4$ 。到壁面的距离的参考长度
为 $\sqrt{\nu_w x / U_\infty}$

和 H. Wendt 的论文^[44]中，给出了关于 $\bar{P} = 0.7$ (空气)的导热平板的计算结果。这一计算表明：当 Mach 数的值更大时，速度 u/U_∞ 对 $y \sqrt{U_\infty / \nu_w x}$ 的分布曲线与 $P = 1$ 的情形有相当大的偏差。当离开壁面的距离 y 用 $\sqrt{\nu_w x / U_\infty}$ 无量纲化时，可使图 13.6 中所示的那些速度分布曲线几乎重合，见图 13.7，这里的 ν_w 为壁面上空气的运动粘性系数。这一情况的物理意义是，(当 Reynolds 数不变时)边界层厚度随 Mach 数增加而增加的主要原因在于壁面附近获得温升的空气体积增加。A. N. Tifford^[98] 首先指出了这个事

用这种作图方法,已使不同 Mach 数的速度曲线几乎重合。由此可以推断,边界层厚度随 Mach 数增加而迅速增加的主要原因在于:壁面附近获得温升的空气体积增加

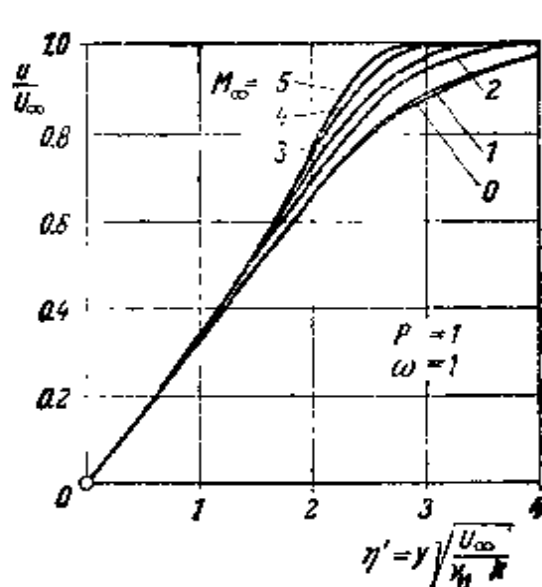


图 13.7 零攻角绝热平板层流边界层中的速度分布;数据与图 13.6 的相同。离壁面的距离用 $\sqrt{\nu_{\infty} x / U_{\infty}}$ 无量纲化。当 $\omega = 1$ 时,有 $\sqrt{\nu_{\infty} / \nu_{\infty}} = T_w / T_{\infty}$

实。

绝热的表面摩擦力系数: 根据 W. Hantzsche 和 H. Wendt 的计算,绝热壁面上表面摩擦力系数随 Mach 数的变化曲线已示于图 13.8 中。当 $\omega = 1$ 时,乘积 $c_f \sqrt{R}$ 与 Mach 数无关,但是对于其它的 ω 值,表面摩擦力系数随 Mach 数的增加而减小,而且 ω 的值愈小,其减小的速率就愈大。图 13.9 比较了绝热平板的几种表面摩擦力系数的数值,它们是由不同的作者求得的,即它们有不同的 Prandtl 数 P 和粘性函数中指数 ω 的数值。这些曲线表明: Prandtl 数对表面摩擦力系数的影响要比指数 ω 的影响小得多。

图 13.10 表示 R. M. O'Donnell^[28] 对可压缩边界层的测量结果。这是在非常细长的圆柱体轴向绕流的边界层中测量的,其中保持 Mach 数 $M_{\infty} = 2.4$ 不变而改变 Reynolds 数。速度分布是

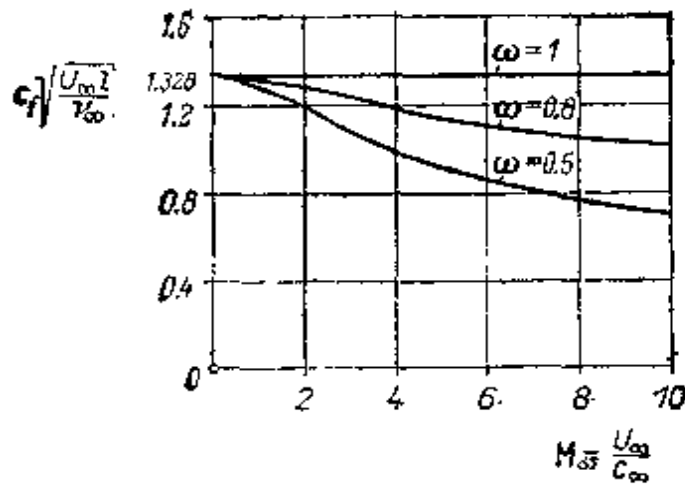


图 13.8 绝热平板上可压缩层流边界层的表面摩擦力系数, $P = 1$, $\gamma = 1.4$ (空气), 引自 Hantzsche 和 Wendt^[44]

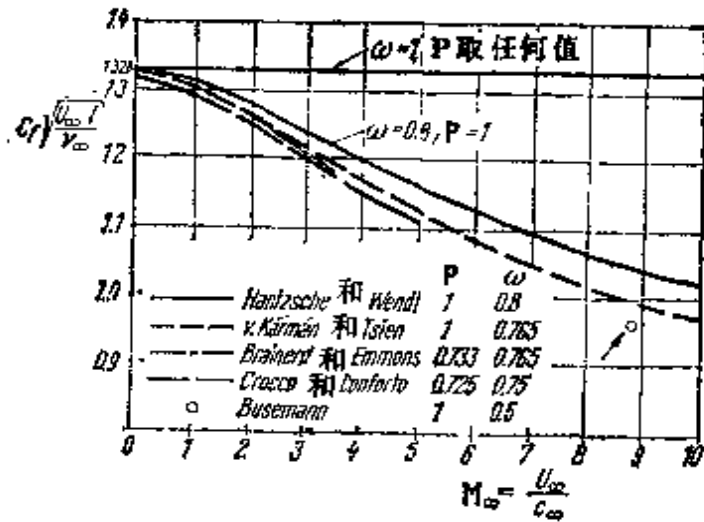


图 13.9 零攻角绝热平板上可压缩层流边界层的表面摩擦力系数, 引自 Rubesin 和 Johnson^[45]

对 y/δ_2 画出的, 其中 δ_2 为公式 (13.75) 所定义的动量厚度。显然, 在离前缘不同距离上的速度剖面是彼此相似的, 并与 D. R. Chapman 和 M. W. Rubesin^[43] 的理论极为一致。

有传热时的速度分布和温度分布: 在有传热出现的一般情形下, 速度分布和温度分布之间的关系可以从式 (13.13a) 导出。当 $P = 1$ 时, 此关系可以写成

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right]$$

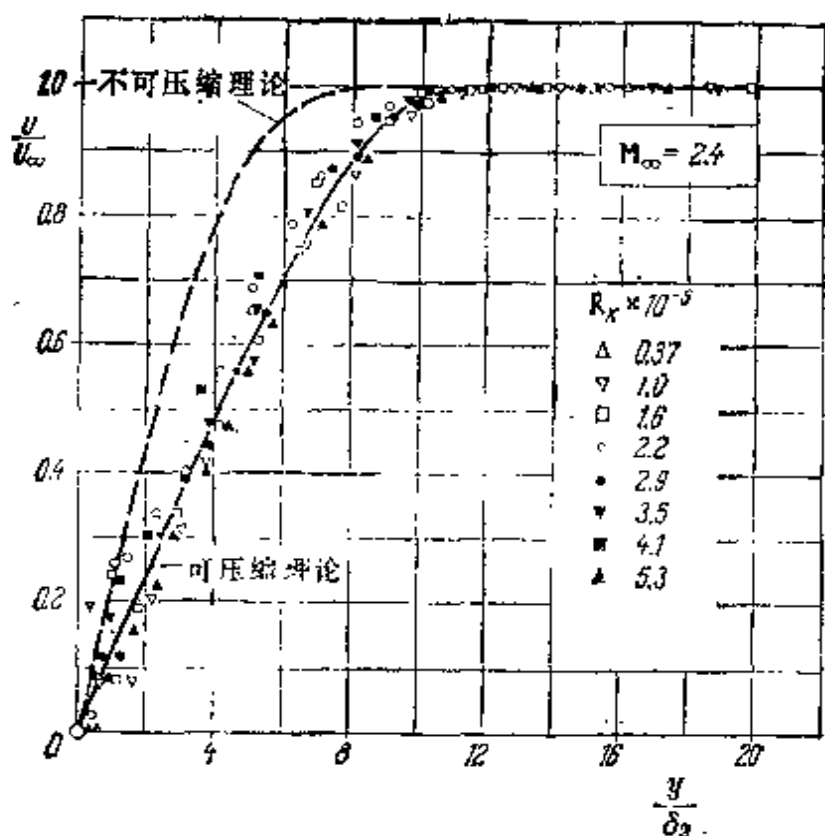


图 13.10 超声速流动中缘热层流边界层速度分布的测量结果，引自 R. M. O'Donne^[128]，Mach 数 $M_\infty = 2.4$ ，理论值引自参考文献 [13]

$$+ \frac{T_w - T_{ad}}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right], \quad (\mathbf{P} = 1), \quad (13.20)$$

其中 T_{ad} 由公式 (13.17) 给定。通过引入恢复系数，上述关系式可以扩展到 Prandtl 数不为 1 的情形，此时写成

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_\infty} = & 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] \\ & + \frac{T_w - T_{ad}}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right]. \end{aligned} \quad (13.21)$$

在这个关系式中，绝热壁温 T_{ad} 应由公式 (13.18) 算出，但是必须认识到这只是一种近似。热量传递的方向则可由公式 (13.21) 导出，并可写成

$$T_w - T_\infty \cong \sqrt{\mathbf{P}} \frac{U_\infty^2}{2c_p}, \quad \text{热量: 壁面} \rightleftharpoons \text{气体}. \quad (13.22)$$

此式与不可压缩流动中的公式 (12.82) 完全相同。

在 W. Hantsche 和 H. Wendt 的第二篇论文^[46] 中, 列举了导热壁面情形的许多例子。通过冷却使壁面温度降到来流温度 ($T_w = T_\infty$) 的情形下的某些结果示于图 13.11 中。将图 13.11 和图 13.6 的速度分布进行比较表明: 导热壁面上的边界层比绝热壁面上的要薄得多。而温度分布的比较表明: 在目前所讨论的情形下, 不管 Mach 数如何, 边界层中最大温升只达到绝热压缩温升的 20% 左右。

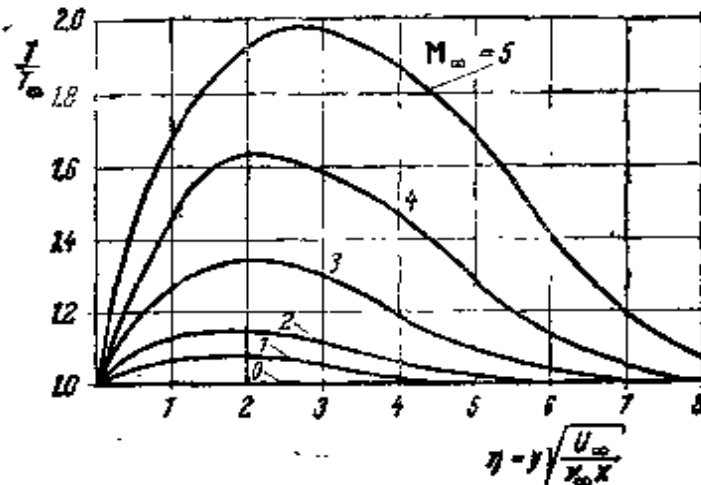
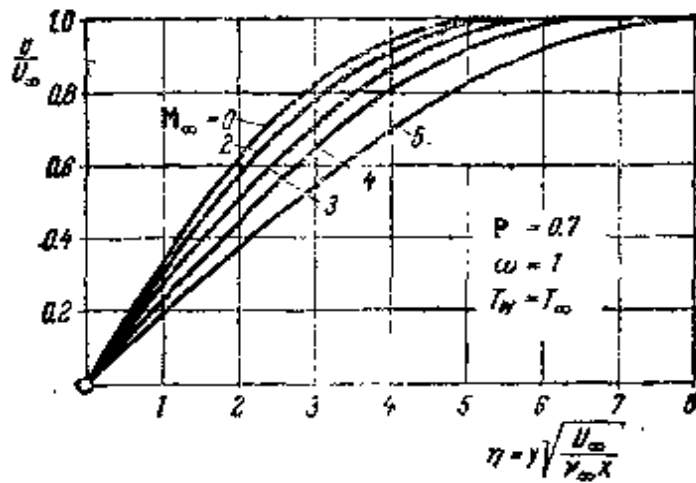


图 13.11 有传热时零攻角平板可压缩层流边界层中的速度分布和温度分布, 引自 Hantsche 和 Wendt^[46]

壁面温度 = 来流温度, $T_w = T_\infty$; $P = 0.7$, $\omega = 1$; $\gamma = 1.4$

由于当 $\omega = 1$ 时, 表面摩擦力系数不依赖于 Mach 数 (图 13.8), 所以传热速率变得和不可压缩气流中的情形相同, 见式 (12.81). 对于高 Mach 数层流边界层和湍流边界层中传热系数和恢复系数的评述, 可参阅 J. Kaye 的文章^[59]. 在这方面, 还可参阅参考文献^[103].

在假设粘性系数为 $\mu/\mu_0 = bT/T_0$ 的前提下, D. R. Chapman 和 M. W. Rubesin^[13] 研究了温度沿壁面变化的情形, 即 $T_w = T_w(x)$ 的情形. 他们的研究表明: 局部热通量 (单位时间内通过单位面积的传热量) 不能仅仅由温度差 $T_w(x) - T_\infty$ 确定, 在很大程度上还依赖于边界层以前的“历史”, 即依赖于所考虑的截面上游的条件. 在壁面温度沿流动方向变化的情形下, 局部 Nusselt 数失去它的意义, 因为使用它就意味着局部热通量正比于 $T_w - T_\infty$, 见式 (12.31), 或者, 当考虑摩擦热时, 意味着局部热通量正比于 $T_w - T_s$.

Th. von Kármán 和钱学森^[33] 在动量积分方程 (第十章) 的基础上, 计算了可压缩平板边界层, 见图 13.9. F. Bouniol 和 E. A. Eichelbrenner^[7], D. Coles^[17], L. Crocco^[21] 以及 R. J. Monaghan^[75] 等也发表了关于平板边界层的近似解. L. L. Moore^[77] 及 G. B. W. Young 和 E. Janssen^[108] 则给出了考虑气体性质变化的层流边界层方程的解.

d. 压力梯度不为零的边界层

1. 精确解. 计算压力梯度不为零的边界层, 要比计算平板边界层更加困难, 因为它的自变量较多. L. Crocco^[21] 很早就发现了一种变换, 对于 (1) $P = 1$ 而粘性系数函数 $\mu(T)$ 是任意的情形, 或 (2) Prandtl 数是任意的而 $\mu/T = \text{常数}$ (即 $\omega = 1$) 的情形, 这种变换可以简化方程的求解工作. 在 $P = 1$ 和 $\omega = 1$ 的绝热壁面特殊情形下, L. Howarth^[48], C. R. Illingworth^[70] 和 K. Stewartson^[94] 发现一种变换, 可以将可压缩边界层方程简化成几乎与不可压缩边界层方程相同的形式.

1.1. Illingworth-Stewartson 变换. 现在来推导 Illingworth-Stewartson 变换, 我们采用一种对参考文献 [94] 稍加修改的推导方法. 首先, 我们的讨论不局限于绝热壁面. 其次, 假设 Prandtl 数 P 可以是任意的, 但为常数. 同时还假定粘性律 $\mu(T)$ 是线性的, 如式 (13.4a), 其中带下标 0 的粘性系数和其他参数均指外流驻点上的值, 常数 b 是用来改进近似的, 以便在所讨论的温度范围内更接近于较精确的 Sutherland 公式 (13.3). 如果以壁面温度 T_w 来选取常数 b , 若 T_w 为常数, 则根据公式 (13.3) 和 (13.4a), 必须令

$$b = \sqrt{\frac{T_w}{T_0}} \cdot \frac{T_0 + S_1}{T_w + S_1}. \quad (13.23)$$

Illingworth-Stewartson 变换引入两个新的坐标, 它们定义为

$$\tilde{x} = \int_0^x b \frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0} dx, \quad (13.24)$$

$$\tilde{y} = \frac{c_1}{c_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy. \quad (13.25)$$

其中 c 为声速, 下标 1 指 x 处的外流 (边界层外缘) 的条件. 因此

$$c_1^2 = (\gamma - 1)c_p T_1 \quad \text{和} \quad c_0^2 = (\gamma - 1)c_p T_0. \quad (13.26)$$

然而, 由于 T_1 只依赖于 x , 所以 $c_1 = c_1(x)$; 又因为 $\rho_1 = \rho_1(x)$, 我们得出 $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ 只是 x 的函数. \tilde{y} 却不同, 由于边界层中密度是 y 的函数, 所以 \tilde{y} 依赖于 y 和 x . 我们也可以反解出这些关系, 将反变换记作

$$x = x(\tilde{x}), \quad \text{而} \quad y = y(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

下面的推导是要用新坐标 \tilde{x} 和 \tilde{y} 来表示边界层方程 (13.5) 和 (13.6). 引入流函数 $\psi(x, y)$, 其定义为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} v, \quad (13.27)$$

于是连续方程自动满足. 把 ψ 看成是 \tilde{x} 和 \tilde{y} 的函数, 因为 $\partial \tilde{x} / \partial y = 0$, 我们求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{d\tilde{x}}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} = \frac{b p_1 c_1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} = \frac{c_1 \rho}{c_0 \rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}}. \end{aligned} \right\} (13.28)$$

于是不难写出速度,例如

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{c_1}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}}. \quad (13.29)$$

此外,在计算过程中消去项 $\partial \tilde{y} / \partial x$,我们可以得出

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 \frac{p_1 b}{\rho_0} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{d\tilde{x}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

假设外流是等熵的,则沿外流流线,驻点焓保持不变,即

$$h_1 = c_p T + \frac{1}{2} u_1^2 = c_p T_0; \quad h = c_p T + \frac{1}{2} u^2, \quad (13.30)^{10}$$

或者利用式(13.26)则有

$$c_1^2 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) u_1^2 = c_0^2. \quad (13.31)$$

由此得出

$$\frac{1}{c_1} \frac{dc_1}{dx} = - \frac{1}{2} (\gamma - 1) \frac{u_1}{c_1^2} \frac{du_1}{dx}, \quad (13.32)$$

又因为

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = b \frac{p_1 c_1}{\rho_0 c_0},$$

于是最后得到

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 \frac{p_1 b}{\rho_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\gamma - 1) \frac{u^2}{c_1^2} u_1 \frac{du_1}{dx}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

借助于公式(13.4a)和完全气体定律 $p = p_1 = \rho RT$, 可以将

1) 在本节中我们发现,用符号 u_1 而不用过去的 U 来表示外流速度更为简单。

运动方程中的粘性项变换成

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\nu_0 b p_1}{p_0} \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (13.34)$$

同时, 根据方程 (13.9) 和 (13.10) 得到

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho_1 T_1} \frac{dp_1}{dx} = \frac{T}{T_1} u_1 \frac{du_1}{dx},$$

或引入无量纲的温度函数 (参考于驻点焓的相对焓差), 其定义为

$$S = \frac{c_p T + \frac{1}{2} u^2}{c_p T_0} - 1 = \frac{h + \frac{1}{2} u^2}{h_0} - 1, \quad (13.35)$$

再利用式 (13.26), 我们得到

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \left\{ (1+S) \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{c_1^2} \right\} u_1 \frac{du_1}{dx}. \quad (13.36)$$

这里 h 表示局部焓, 以区别于驻点焓. 将等式 (13.33), (13.34) 和 (13.36) 代入方程 (13.6), 并除以 ρ , 则导出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} \\ = (1+S) \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^5 \frac{p_0}{p_1 b} u_1 \frac{du_1}{dx} + \nu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2}. \end{aligned} \quad (13.37)$$

令

$$\tilde{u}_1 = \frac{c_0}{c_1} u_1, \quad (13.38)$$

则得

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{c_0} \left(\tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dx} + c_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dx} \right),$$

因此, 借助于等式 (13.31) 和 (13.32), 可得

$$u_1 \frac{du_1}{dx} = \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 \frac{b p_1}{p_0} \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}}. \quad (13.39)$$

最后, 我们定义

$$\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \quad \text{和} \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}}, \quad (13.40)$$

将式 (13.39) 和 (13.40) 代入方程 (13.37), 就得出变换后的运动

方程

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}} (1 + S) + \nu_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (13.41)$$

这一变换后的方程与相应的不可压缩边界层方程的差别仅在于压力项上乘有因子 $(1 + S)$ 。

为了变换能量方程,将方程 (13.6) 的两边同乘以 u , 并与方程 (13.7) 相加。请记住, Prandtl 数为

$$P = \frac{\mu c_p}{k}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_p T}{P} + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.42)$$

利用式 (13.35) 定义的温度函数 S , 可将上式变换成

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial S}{\partial x} + \rho v \frac{\partial S}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{1}{P} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{P-1}{P} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2c_p T_0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

象对式 (13.28) 所做的那样, 用对 \tilde{x} 和 \tilde{y} 的偏导数来表示对 x 和 y 的偏导数, 注意到 $\mu = b\mu_0 p_1 \rho_0 / p_0 \rho$, 并利用定义 (13.40), 则得

$$\tilde{u} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = \nu_0 \left\{ \frac{1}{P} \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{P-1}{P} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \left(\frac{u^2}{2c_p T_0} \right) \right\}. \quad (13.44)$$

式 (13.20) 和 (13.30) 加上关系式

$$\frac{u}{u_1} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \quad (13.45)$$

给出

$$\frac{u^2}{2c_p T_0} = \frac{\frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2} \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \right)^2. \quad (13.46)$$

在这里, $M_1 = u_1/c_1$ 是外流的 Mach 数. 因为

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial y},$$

在方程 (13.44) 中, 可以将式 (13.46) 中 $(\tilde{u}/\tilde{u}_1)^2$ 的系数提到算符 $\partial^2/\partial \tilde{y}^2$ 的前面, 所以, 变换后的能量方程形式为

$$\tilde{u} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = v_0 \left\{ \frac{1}{P} \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{P-1}{P} \frac{\frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2} \frac{\partial^2 \left[\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} \right)^2 \right]}{\partial \tilde{y}^2} \right\}. \quad (13.47)$$

现在, 方程 (13.41) 和 (13.47) 加上连续方程

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (13.48)$$

构成了一组新的边界层方程. 上述连续方程是式 (13.40) 的直接结果.

方程组 (13.5), (13.6), (13.7) 还须加上边界条件

$$y=0: u=v=0 \text{ 和 } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ 或 } T = T_w,$$

以及

$$y=\infty: u = u_1(x); T = T_1(x),$$

其中壁面温度取决于壁面是绝热的还是等温的. 不难看出, 这些边界条件变换成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}=0: \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ 或 } S = S_w, \\ \tilde{y}=\infty: \tilde{u} = \tilde{u}_1(x); S = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

极限情形: 如果 $P = 1$, 则 $S = 0$ 是能量方程 (13.47) 的一个特解. 再利用式 (13.30), 就可导出如式 (13.12) 早已给出的绝热壁面情形中温度和速度之间的关系. 在这种情况下, 方程 (13.41) 完全具有方程 (9.2) 的“不可压缩”形式.

沿着平板有 $dp/dx = 0$, 这意味着 $d\tilde{u}_1/d\tilde{x} = 0$. 于是, 对于 $P = 1$, 我们发现 $S = S_w(1 - \tilde{z}/\tilde{z}_1)$ 是方程 (13.47) 的一个特解, 其中 S_w 为一常数. 这一点是很容易通过代入方程验证的. 利用式 (13.45) 和 (13.30), 又可得到最早由方程 (13.12) 所给出的温度和速度之间的关系. 请记住, 必须将 U_∞ 写成 u_1 , 将 T_∞ 写成 T_1 .

1.2. 自相似解. Illingworth-Stewartson 变换已被用来得出一些精确解和建立许多近似方法. 自相似解在这种精确解中起着重要的作用. 在不可压缩流动中, 如果对 u 和 v 各自乘上一个比例系数, 就能使两个不同位置 x 处的速度剖面形状等同, 我们就认为这个解是自相似解 (见第八章 b). 我们当时指出, 只在有限的几种外流 $u_1(x)$ 的情形下, 才存在着这种自相似解. 在这种情况下, 关于流函数的偏微分方程简化为常微分方程, 解这一常微分方程要比解原来的偏微分方程容易得多.

在诸如参考文献 [48, 49, 50] 等许多研究工作的基础上, T. Y. Li 和 H. T. Nagamatsu^[60, 61] 以一些值得钦佩的研究证明: 在可压缩边界层的情形中, 也存在着这种自相似解. 就速度边界层而论, 这里也是指纵向速度分量 u 的相似性; 而对热边界层说来, 则指驻点焓 $h = c_p T + \frac{1}{2} u^2$ 的相似性. 驻点焓早在式 (13.35)

中以“温度函数”的形式出现过. 在这种情况下, 关于 u , v 和 T 的偏微分方程组简化为关于流函数和驻点焓的两个耦合的常微分方程.

可压缩边界层的自相似解是该方程组的精确解, 所以从本质上讲是非常重要的, 或许更重要的是: 自相似解可以作为标准来鉴定各种近似方法的精度. 由于这些缘故, 现在打算粗略地说明一下从 Illingworth-Stewartson 变换出发导出自相似解的过程. 末了用若干数值结果来结束这个课题. 现在假设式 (13.4a) 的粘性律成立, 这意味着, $\omega = 1$ 和 $P = 1$. 在有传热的边界层情形下, 假定壁面温度 T_w 为任一常数, 所以 S_w 为常数. 在绝热壁面的问题中, 驻点焓由式 (13.12) 给出:

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = c_p T_0,$$

并在整个边界层内保持不变,也就是说 $S = 0$ (还可参阅前节末尾). 在这种情形下,驻点焓剖面的相似性是一种平凡形式.

使用流函数 ϕ ,将方程 (13.41) 和 (13.47) 改写成下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} \\ = \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}} (1 + S) + \nu_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial \tilde{y}^3}, \end{aligned} \quad (13.50)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} = \nu_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (13.51)$$

借助于下述假定引入相似性变量:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A \tilde{x}^q \tilde{u}_1^s \times f(\eta), \\ \tilde{y} &= B \tilde{x}^r \tilde{u}_1^t \times \eta, \\ S &= S(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

其中 A, B, q, r, s, t 起着待定常数的作用, $f(\eta)$ 为未知的流函数,而 $S(\eta)$ 是式 (13.35) 所定义的温度函数,这时认为它只是 η 的函数.

现在把方程 (13.50) 和 (13.51) 变换到坐标 \tilde{x} 和 η 上来,并要求在最后的表达式中必须不出现含 \tilde{x} 的项. 用这种方法,我们将得到关于 $f(\eta)$ 和 $S(\eta)$ 的常微分方程组. T. Y. Li 和 H. T. Nagamatsu^[60] 已经作了这样的计算,他们发现有四类关于 $\tilde{u}_1(\tilde{x})$ 的解. 由这一工作出发, C. B. Cohen^[61] 证明其中三类可以归纳为下述共同的形式

$$\tilde{u}_1 = K \tilde{x}^m \quad (13.53)$$

(K 和 m 为常数). 第四类

$$\tilde{u}_1 = K' \exp(K'' \tilde{x})$$

没有多大实际意义,以后不予考虑.

对于变换后由坐标 \tilde{x} 表示的幂律式 (13.53),我们现在希望确定出其外流 $u_1 = u_1(x)$ 的具体形式. 由式 (13.38) 和 (13.31) 可

得

$$c_1^2 = \frac{c_0^4}{c_0^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\tilde{w}_1^2}. \quad (13.54)$$

由于外流是等熵的,所以

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\gamma, \text{ 故有 } \frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{p_1/p_0}{\rho_1/\rho_0},$$

由此可得

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (13.55)$$

因此,利用式(13.24), (13.53)和(13.54),我们导出

$$dx = \frac{1}{b} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} K^2 \tilde{x}^{2m} \right]^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)} d\tilde{x}. \quad (13.56)$$

上述微分方程只有对于特殊的 m 值才能以封闭的形式求解。如果选取

$$m = m_0 = \frac{\gamma - 1}{3 - 5\gamma}, \quad (13.57)$$

则

$$\frac{3\gamma - 1}{2(\gamma - 1)} = -1 - \frac{1}{2m_0},$$

然后通过积分得到

$$x = \frac{\tilde{x}}{b \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} K^2 \tilde{x}^{2(\gamma-1)/(3-5\gamma)} \right]^{(3-5\gamma)/(\gamma-1)}}. \quad (13.58)$$

根据式(13.53)和(13.54),得出

$$u_1 = \frac{c_1}{c_0} \tilde{w}_1 = K b^{(\gamma-1)/(3-5\gamma)} x^{(\gamma-1)/(3-5\gamma)} = K' x^{(\gamma-1)/(3-5\gamma)}. \quad (13.59)$$

可以看出,在这种特殊情形下,外流 $u_1(x)$ 也是 x 的幂函数,而且其指数与 $\tilde{w}_1(\tilde{x})$ 的相同。根据式(13.59),将适用于单原子、双原子和多原子气体的 γ 值代入 x 的指数中去,对于所有这三类气体,使之具有相似性的外流都是减速的,见下表:

气 体	γ	$m_0 = \frac{\gamma - 1}{3 - 5\gamma}$
单原子的	$\frac{5}{3} = 1.67$	$-\frac{1}{8}$
双原子的或直线多原子的、刚性的	$\frac{7}{5} = 1.40$	$-\frac{1}{10}$
多原子的非直线的、刚性的	$\frac{4}{3} = 1.33$	$-\frac{1}{11}$

当 m 取任意值时, 一般说来, 只能用级数展开来求解方程 (13.56). 然而, 关系式 $u_1 = u_1(x)$ 已不是一个简单的幂函数了. 对于 $m = -1, 0, +\frac{1}{2}, +1$ 以及 $K = 1, b = 1$ 和 $\gamma = 7/5$ 的情形, 图 13.12 中画出了速度分布 $u_1(x)$ 和 $\tilde{u}_1(\tilde{x}) = K\tilde{x}^m$ 的几

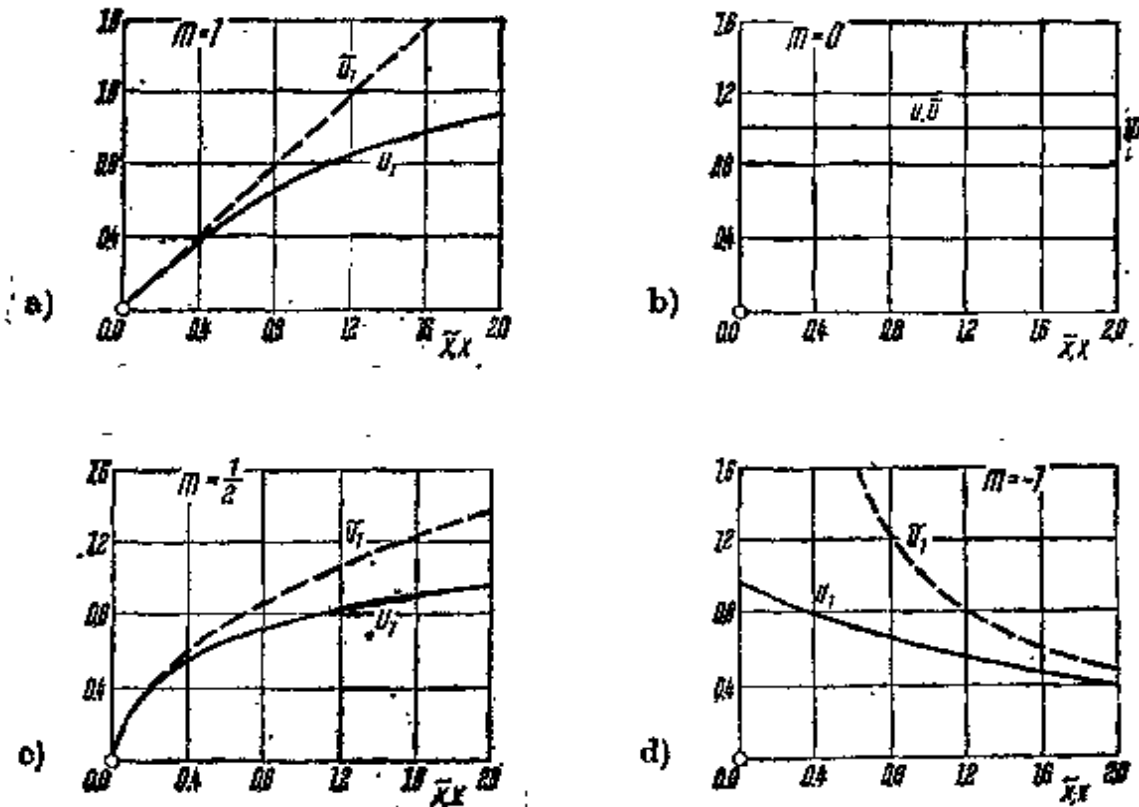


图 13.12 在 $\gamma = 7/5$ 的情形下, 由 Illingworth-Stewartson 变换得到的自相似解的速度分布. 根据式 (13.53) $\tilde{u}_1 = K\tilde{x}^m$; 根据式 (13.59) $u_1 = K'x^m$

x 和 \tilde{x} 的关系由式 (13.56) 给出

m 和 γ 的关系由式 (13.57) 给出

组曲线。

我们现在应用变换 (13.52) 的一个具体形式, 取

$$A = B = \sqrt{2\nu_0/(m+1)}; \quad q = r = s = \frac{1}{2}; \quad t = -\frac{1}{2},$$

由此给出

$$\left. \begin{aligned} \phi &= f(\eta) \sqrt{\frac{2\nu_0}{m+1}} \tilde{u}_1 \tilde{x}, \quad S = S(\eta), \\ \eta &= \tilde{y} \sqrt{\frac{(m+1)\tilde{u}_1}{2\nu_0 \tilde{x}}}, \end{aligned} \right\} \quad (13.60)$$

并将变换后的边界层方程 (13.50) 和 (13.51) 写成下列两个常微分方程:

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' &= \beta(f^2 - 1 - S), \\ S'' + fS' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.61)$$

其中撇表示对 η 的微商。与前面的关系式 (9.7) 中相同, 参数 β 定义为

$$\beta = \frac{2m}{m+1},$$

它反映了外流压力梯度的特征。

请记住,

$$\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{y}},$$

借助于式 (13.60), 由于

$$f' = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_1} = \frac{u}{u_1}, \quad (13.62)$$

所以我们得出结论: f' 是边界层中纵向速度分量的无量纲形式。因为 $y=0$ 和 $y=\infty$ 分别意味着 $\eta=0$ 和 $\eta=\infty$, 所以方程组 (13.61) 的边界条件应写成

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \quad f' = f'' = 0, \quad S = S_w; \\ \eta = \infty: \quad f' = 0, \quad S = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.63)$$

在绝热壁面的情形下, 方程组 (13.61) 中的第二个方程自动满足,

只需解一个方程

$$f''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1),$$

而这个方程与早先给出不可压缩绕楔流动的方程(9.8)相同;我们记得, D. R. Hartree 研究了不同 β 值时这个方程的解. 他当时发现, 对于 $\beta < -0.199$ ($m < -0.0904$) 所有的值, 都将出现分离. 所以在上表的特殊 m 值中, 当壁面绝热时, 前两种情形 (即 $m = -1/8$ 和 $m = -1/10$) 也导致分离.

当壁面允许传热时, 则必须求解整个方程组(13.61). 因为可以用任意的方式规定壁面温度 T_w , 所以这些解将不仅依赖于 β , 而且还依赖于参数

$$S_w = \frac{T_w}{T_0} - 1.$$

T. Y. Li 和 H. T. Nagamatsu^[64] 以及 C. B. Cohen 和 E. Reshotko^[65] 已对这两个参数的许多不同的值求出了相应的解.

值得注意的是, 当 $\beta < 0$ 时, 在满足边界条件(13.63)的前提下, 方程组(13.61)给出两个有物理意义的解 (在绝热壁面的情形下也是这样, 参阅第九章 a). 根据 C. B. Cohen 和 E. Reshotko^[65] 所表示的看法, 其中出现在实验中的一个解, 是由建立作用在发展着的边界层上压力场的初始条件确定的.

对于温度参数 S_w 和 β 不同的值, 图 13.13a, b, c 中曲线给出了其速度分布 $u/u_1 = f'$ 随横向无量纲距离 η 的变化. 图中所选 S_w 的具体值对应于下述情形 (依照次序): 绝热壁面取 $T_w = T_0$; 冷却壁面取 $T_w = 0.2T_0$ (从壁面向流体传热). 在多重解的情形下, 对于一定的 β 值, 较小值的 f' 曲线已用星号加以区别. 值得注意的是, 在加热壁面和有顺压梯度 ($\beta > 0$, 图 13.13c) 的情形下, 在离开壁面的某个范围内, 边界层中速度可以超过外流速度 u_1 . 可以认为这是由于强烈加热使边界层中气体的体积大为增加的缘故. 尽管边界层中流动受到粘性应力的作用而减速, 但是, 外部压力对低密度气体的加速作用比对外流中气体的加速作用更为强烈.

图 13.13d, e 中是根据式(13.35)算出的边界层中焓 S 的分

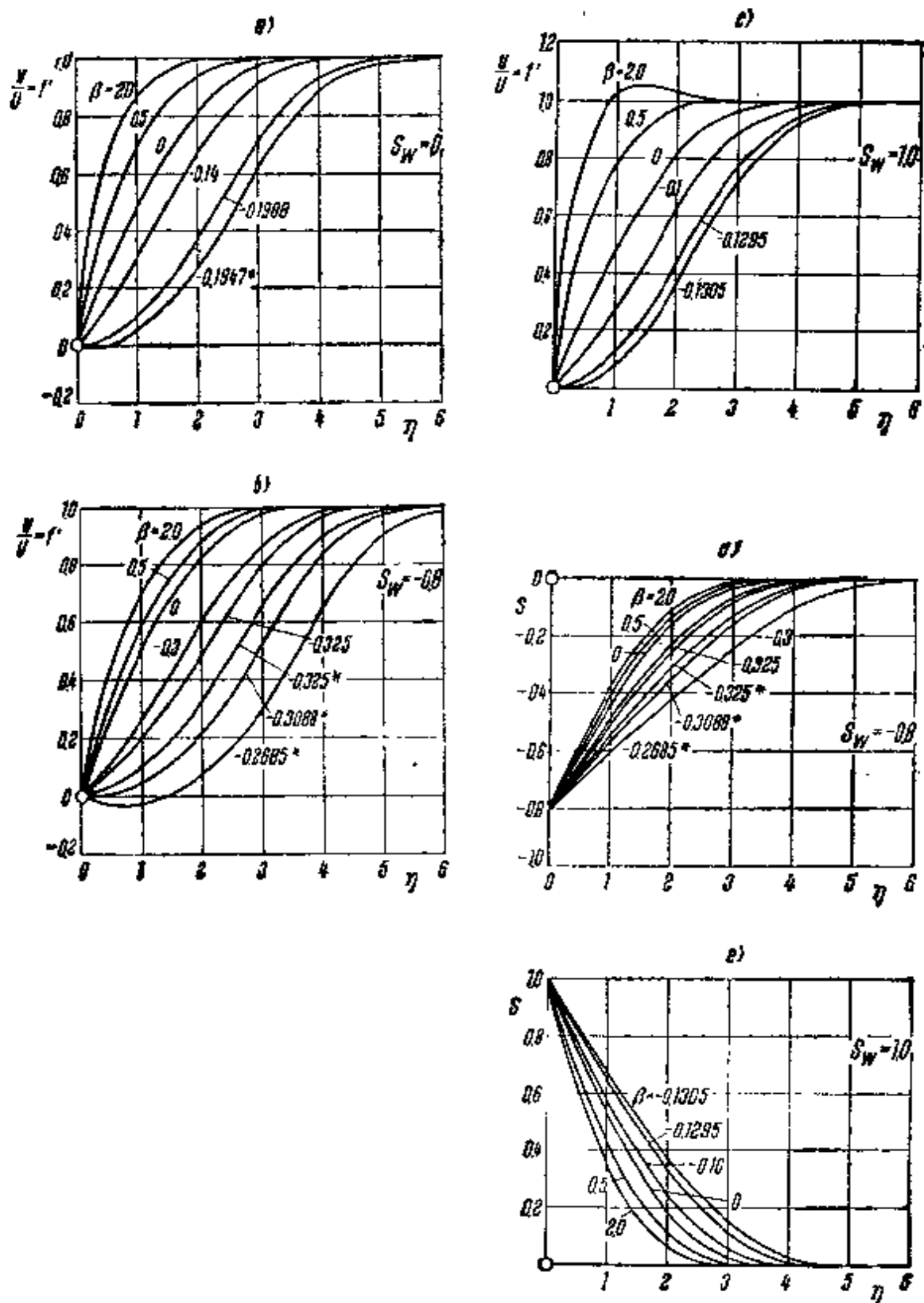


图 13.13 在有压力梯度和传热的情形下，可压缩层流边界层的速度分布和焓分布，引自 C. B. Cohen 和 E. Roshotko^[16a)]，并按式 (13.2) 和 (13.35) 算出 Prandtl 数： $\beta = 1$ ； $\omega = 1$ 。 $U(x) = u_1(x)$ 为外流速度。 a), b), c) 速度分布； d), e) 焓分布； a) $S_w = 0$, $T_w = T_0$, 绝热壁面； b), d) $S_w = -0.8$, $T_w = 0.2T_0$, 冷却壁面， c), e) $S_w = 1.0$, $T_w = 2T_0$, 加热壁面

布, 两者分别对应于 $T_w = 0.2T_0$ 和 $T_w = 2T_0$. 由图看出, 压力梯度对速度剖面的影响要比对焓剖面的影响强烈得多.

图 13.14a, b, c 表示切应力变化. 这种变化可利用式 (13.10), (13.26), (13.29) 和等熵公式 $p_1/p_0 = (\rho_1/\rho_0)^{\gamma}$ 来进行计算. 切应力由下式给出:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = b \mu_0 \tilde{u}_1 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\alpha\gamma - \beta / (\gamma - \beta)} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\tilde{u}_1}{\nu_0 x} f''(\eta). \quad (13.64)$$

图中还有对应于参数 β 和 T_w 为不同数值的 $f''(\eta)$ 曲线. 当外流

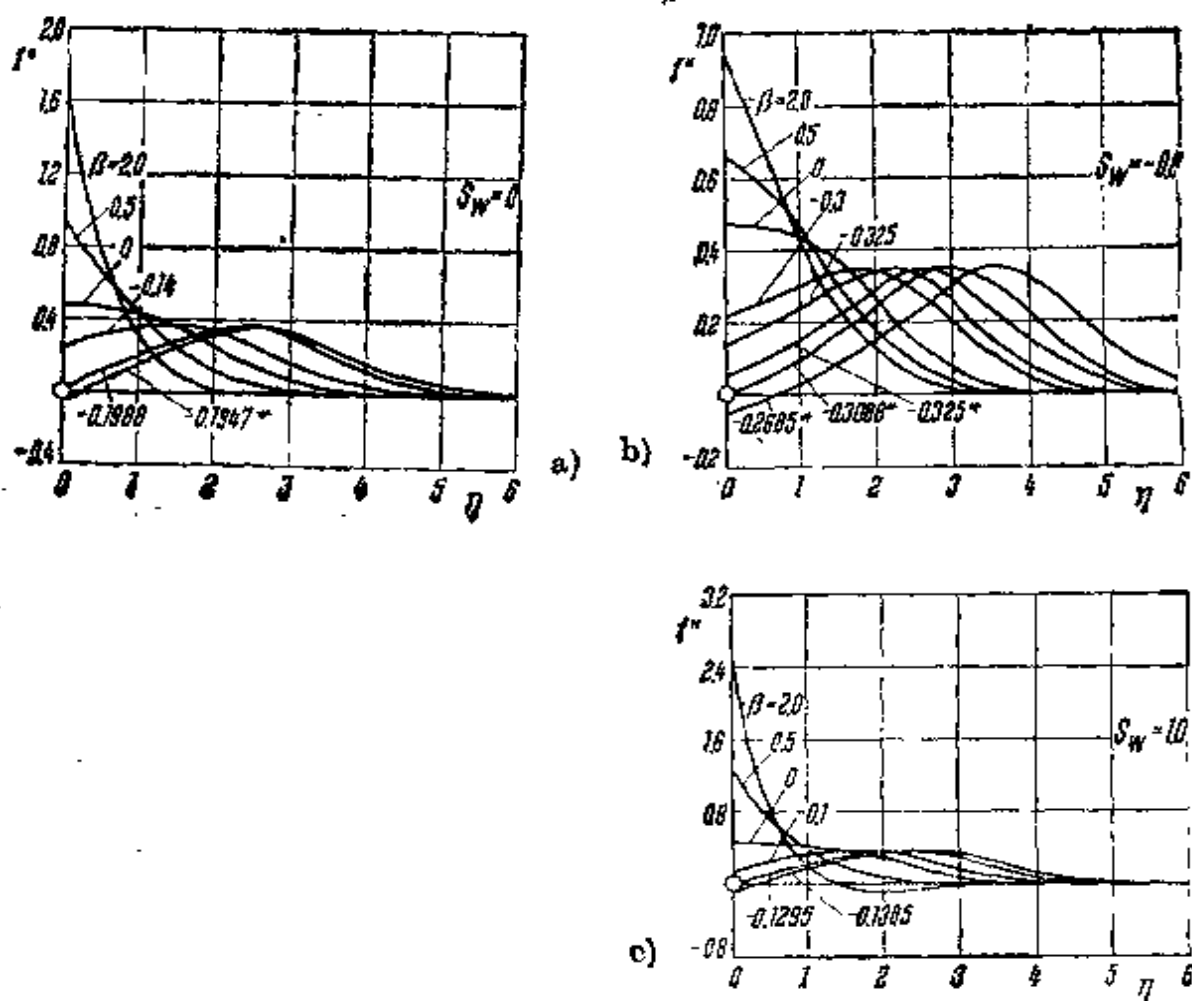


图 13.14 有压力梯度和传热的情形下可压缩层流边界层中切应力分布, 取自 C. B. Cohen 和 E. Reshotko^[16a], 并按式 (13.64) 算出

Prandtl 数 $P = 1$; $\omega = 1$

a) $S_w = 0$, $T_w = T_0$, 绝热壁面

b) $S_w = -0.8$, $T_w = 0.2T_0$, 冷却壁面

c) $S_w = 1.0$, $T_w = 2T_0$, 加热壁面

被加速 ($\beta > 0$) 时,最大切应力就出现在壁面 ($\eta = 0$) 上;当外流被减速 ($\beta < 0$) 时,最大切应力从壁面离开,并随着逆压梯度的增加,即随 β 的绝对值 (β 为负值) 的增加而进一步外移. 引入局部表面摩擦力系数

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_w u_1^2} \quad (13.65)$$

以及 Reynolds 数

$$R_w = \frac{u_1 x}{\nu_w},$$

其中下标 w 指在壁面上取值,于是求得

$$c_f \sqrt{R_w} = f_w'' \sqrt{2(m+1) \frac{x}{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx}}. \quad (13.66)$$

对于不同的 S_w 值, f_w'' 随 β 的变化曲线示于图 13.15 中. 由图看出,压力梯度的改变对加热壁面 ($S_w > 0$) 上 f_w'' 的影响,因而对切应力的影响要比对冷却壁面上的影响大得多. 在 β 为负值的范围内,对于每一个 β 值,存在着两个 τ_w 值. 如前所述,这是因为在这个范围内存在着两个解. 当壁面绝热 ($S_w = 0$) 时, f_w'' 的下面分支曲线给出负的切应力数值,这说明出现了回流. 当壁面加热 ($S_w > 0$) 时,可以找到一些足够小的 $\beta - \beta_{\min}$ 数值. 对于这样的 β 值而言, f_w'' 的两个值都是负的,也就是说流动的方向发生了倒转. 在冷却壁面 ($S_w < 0$) 的情形下,上述 f_w'' 的两个值可以都是正的,说明这样的两个值都能代表无分离的流动图象. 最后可以看出,随着壁面温度的增加,分离点 ($f_w'' = 0$) 向压力增加较慢的方向移动.

为了将变量 η 变换到物理平面上的距离 y , 必须利用式 (13.8), (13.10), (13.24), (13.25) 和 (13.52). 最后可求得

$$y = b \frac{dx}{d\tilde{x}} \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{\nu_0 \tilde{x}}{\tilde{u}_1}} \int_0^\eta \frac{T}{T_0} d\eta. \quad (13.67)$$

积分号前面的系数通过式 (13.53) 来计算,而 x 和 \tilde{x} 之间的函数关

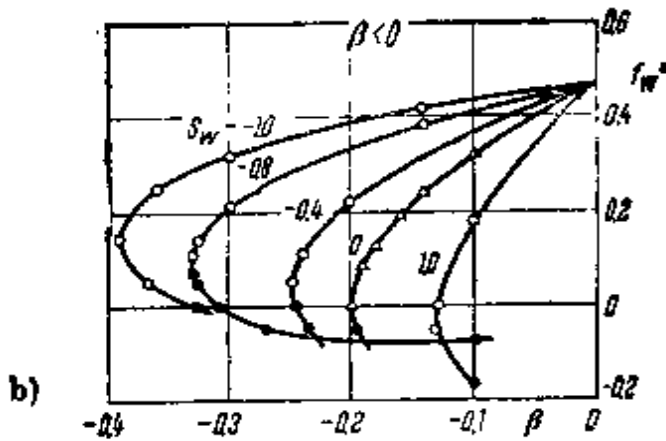
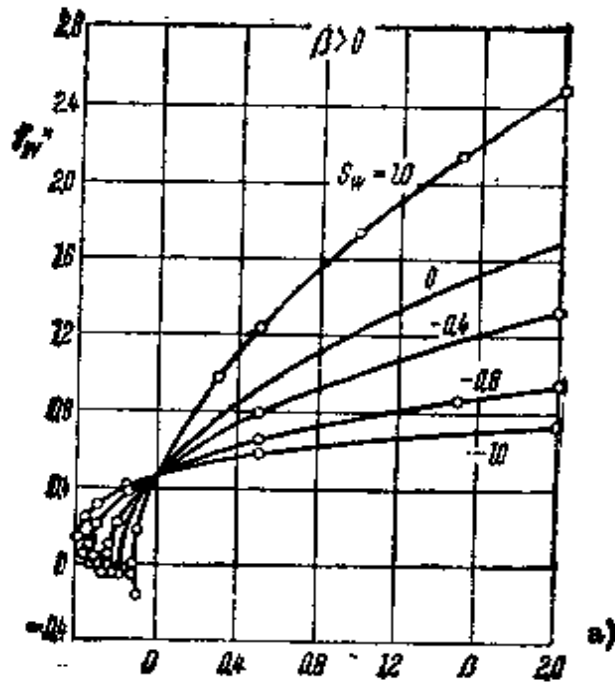


图 13.15 有压力梯度和传热情形下，可压缩层流边界层中的局部表面摩擦系数，取自 C. B. Cohen 和 E. Reshotko⁽¹⁶⁸⁾，并按式 (13.56) 算出

Prandtl 数 $P = 1$ ； $\omega = 1$ ， $S_w = 0$ ；绝热壁面， $S_w < 0$ ；冷却壁面， $S_w > 0$ ；加热壁面

系应该由方程 (13.56) 来确定。根据式 (13.46) 和 (13.62)，被积函数为

$$\frac{T}{T_0} = 1 + S - \frac{u^2}{2c_p T_0}$$

$$= 1 + S(\eta) - \frac{\frac{1}{2}(\gamma - 1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_1^2} [f'(\eta)]^2. \quad (16.68)$$

T. Y. Li 和 H. T. Nagamatsu^[64] 没有用 Illingworth-Stewartson 变换而成功地导出了自相似解的表达式, W. Mangler^[71] 指出了一些代换式, 利用这些式子对任意压力分布情形进行了计算。

E. Reshotko 和 I. E. Beckwith^[86] 发表了关于偏航圆柱上三维边界层的精确计算, 其中考虑了传热以及 Prandtl 数可取任意数值。

2. 近似方法. 为计算可压缩层流边界层而提出的许多近似方法, 大多数基于边界层的动量积分方程和能量积分方程。读者可能记得, 在不可压缩边界层的情形中也是这样。所有这些近似方法都有这样的共同特点, 即它们所牵涉的计算步骤要比(第十章中)不可压缩流动中的计算步骤多得多。从变量数目的增多就可料到, 在可压缩边界层情形中, 可供选择的方法要多得多。在这个问题上, 可查阅 A. D. Young^[306] 和 M. Morduchow^[79] 所写的评论。N. Curle^[26] 发表了更新的综述。

在讨论近似方法时, 必须将只适用于**绝热壁面**的方法与同时也适用于**传热壁面**的方法明确区分开来。

局限于**绝热壁面**的近似方法, 有早期由 L. Howarth^[48] 建立的方法, 以及后来由 H. Schlichting^[92] 对其作了某些修改的方法, 二者都是针对 $P = 1$ 的情形; 另外还有由 E. Gruschwitz^[43], J. A. Zaat^[110] 以及 I. Fluegge-Lotz 和 A. F. Johnson^[36] 等人所建立的几种方法, 这些方法对 Prandtl 数为任意值的情形均能适用。在 $dp/dx = 0$ 的特殊情形下, 前面提到的最后一种方法还可修改成适用于传热壁面的情形。上述所有的方法都基于 $\omega = 1$ 的假定。

近年来的工作主要集中在解壁面有传热的问题上。在限于

$P = 1$ 的方法中, 应该提到 M. Morduchow^[75], C. B. Cohen 和 E. Reshotko^[6a], R. J. Monaghan^[76] 以及 G. Poots^[85] 等人的方法。所有这些方法都限于 $\omega = 1$ 的假定。上述第二、三种方法可用来确定动量厚度、表面摩擦力系数和传热系数。而第一、四种方法还可确定出速度剖面和温度剖面。当 P 和 ω 都与 1 相差不大时, 还可以采用由 R. E. Luxton 和 A. D. Young^[88] 所建立的方法。

由 N. Curle^[24, 25] 和 G. M. Lilley^[65] 所建立的方法对 Prandtl 数为任何值的情形均适用, 不过都是基于由式 (13.4a) 和 (13.23) 给出的粘性律, 其中的常数 b 最多只依赖于 x ; 即函数 $\mu(T)$ 是线性的。N. Curle 的文章计算了有逆压梯度的速度边界层的特征参数, 其中假定了一个事先知道的温度场, 但是允许壁面温度可以变化。同一作者的另一篇文章^[25] 中, 在已知壁面切应力分布的前提下, 就能够计算传热速率。而 G. M. Lilley 在温度沿壁面变化的情形下, 确定出壁面上的切应力和传热系数。由 I. Ginzler^[41] 以及 D. N. M. Morris 和 J. W. Smith^[80] 提出的方法适用于任意的粘性律, 后者还适用于壁面温度变化的情形。

应用 K. T. Yang^[104] 的方法, 能够大大改进一般近似计算所得到的结果。

动量积分方程和能量积分方程: 我们从推导可压缩边界层的动量积分方程和能量积分方程开始, 因为它们是大多数近似方法的出发点。为此, 我们要用到可压缩层流边界层的基本方程组, 即方程 (13.5)–(13.8)。引入局部焓

$$\hat{h} = c_p T \quad (13.69)$$

及驻点焓

$$h = \hat{h} + \frac{1}{2} u^2 = c_p T + \frac{1}{2} u^2, \quad (13.70)$$

就可将能量方程 (13.7) 改写成如下形式:

$$\rho \left(u \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right), \quad (13.71)$$

边界条件为

a) 有传热:

$$\left. \begin{aligned} y = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T_w; \\ y = \infty: \quad u = U(x), \quad \hat{h} = \hat{h}_1(x), \end{aligned} \right\} \quad (13.72a)$$

b) 绝热壁面:

$$\left. \begin{aligned} y = 0: \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} = 0; \\ y = \infty: \quad u = U(x), \quad \hat{h} = \hat{h}_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (13.72b)$$

方程 (13.5), (13.6), (13.8) 和 (13.71) 加上边界条件 (13.72) 组成关于变量 u , v , ρ 和 \hat{h} 的四个方程的方程组。根据 Bernoulli 方程, 压力 $p(x)$ 是已知的, 并由方程 (13.9) 给定, 它在整个边界层厚度上保持不变, 即 $\partial p / \partial y = 0$ 。因为横穿边界层时压力不变, 所以在 x 截面上的各点有

$$\frac{\hat{h}}{\hat{h}_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (13.73)$$

其中 \hat{h}_1 , T_1 , ρ_1 分别为边界层外缘的焓、温度和密度。

现在按照与不可压缩流动中相同的方法引入位移厚度、动量厚度和能量损失厚度, 以及用焓定义的另外几个量。在这方面, 前三个参数是这样定义的: 当 $\rho = \text{常数}$ 时, 应该退化为不可压缩流动中相应的量, 见式 (8.30), (8.31) 和 (8.34)。记速度边界层厚度为 δ , 我们引入如下定义:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U} \right) dy \quad (\text{位移厚度}), \quad (13.74)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (\text{动量厚度}), \quad (13.75)$$

$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy \quad (\text{能量损失厚度}), \quad (13.76)$$

$$\delta_H = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(\frac{\hat{h}}{\hat{h}_1} - 1 \right) dy \quad (\text{焓厚度}), \quad (13.77)$$

$$\delta_u = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (\text{速度厚度}). \quad (13.78)$$

由式 (13.73), (13.74), (13.77) 和 (13.78) 容易证明, 参数 δ_1 , δ_H 和 δ_u 满足关系式

$$\delta_1 - \delta_u = \delta_H. \quad (13.79)$$

采用与不可压缩流动中相同的做法, 将动量方程 (13.6) 和能量方程 (13.71) 对 y 积分, 就能够得到可压缩流动的动量积分方程和能量积分方程。考虑到

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} = - \frac{(1 - M^2)}{U} \frac{dU}{dx},$$

我们得到下述形式的动量积分方程:

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M^2\right) = \frac{\mu_w}{\rho_1 U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w} \quad (13.80)$$

先将方程 (13.6) 两边乘以速度分量 u , 然后对 y 进行积分, 我们得到关于机械能的方程。再利用连续方程, 并作一些简化, 则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\rho_1 U^2 \delta_3) + \rho_1 U^2 \frac{dU}{dx} (\delta_1 - \delta_u) \\ & = \int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy. \end{aligned} \quad (13.81)$$

在上述方程的左边是流动的机械功, 而右边的项代表机械能的耗散。在不可压缩流动中, 因为 $\rho = \text{常数}$, 求得 $\delta_H = 0$, 所以左边第二项为零。其结果使方程 (13.81) 变为方程 (8.35)。

将方程 (13.71) 对 y 积分, 我们得到关于焓增加的方程——习惯上简称为能量方程。由此

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (\rho_1 \hat{h}_1 U \delta_H) + \rho_1 U^2 \frac{dU}{dx} \delta_H \\ & = - \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial \hat{h}}{\partial y}\right)_w + \int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy. \end{aligned} \quad (13.82)$$

上述方程的左边代表气流中焓的改变, 而右边的项表示了由于壁面 (下标 w) 传热引起的焓的改变, 以及通过耗散所产生的焓。注

意，方程 (13.81) 描述了机械能的损失，而方程 (13.82) 描述了焓的增加。通过两式相减，就能得到描述沿 x 方向总焓增加的方程。由此得到

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_1 U \left(h_1 \delta_H - \frac{1}{2} U^2 \delta_3 \right) \right] = - \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w. \quad (13.83)$$

再由式 (13.70) 引入单位质量的驻点焓 h ，我们将方程 (13.83) 变换成下述形式：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u (h - h_1) dy = - \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w. \quad (13.84)$$

上述方程的左边代表气流沿 x 方向驻点焓的增加，而右边描述壁面放出或吸收的热量。

将方程 (13.83) 对 x 进行积分，则得到

$$\frac{1}{2} U^2 \delta_3 = h_1 \delta_H + \frac{1}{\rho_1 U} \int_0^x \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w dx. \quad (13.85)$$

对于绝热壁面，由于 $(\partial h / \partial y)_w = 0$ ，所以方程 (13.85) 的右边为零。为了方便起见，现在引入对应于边界层外缘状态的声速 $c_1^2 = \gamma R T_1$ 。由于这时

$$h_1 = c_p T_1 = \frac{c_1^2}{\gamma - 1},$$

所以有

$$\delta_H = \frac{1}{2} (\gamma - 1) M^2 \delta_3. \quad (13.86)$$

从方程 (13.83) 可知，这里 $M = U / c_1$ 表示边界层外缘处的局部 Mach 数。考虑到关系式 (13.79)，(13.81) 和 (13.86)，我们得到能量积分方程的最后形式

$$\boxed{\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} [3 - (2 - \gamma) M^2] = \frac{2}{\rho_1 U^3} \int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy.} \quad (13.87)$$

方程 (13.80) 和 (13.87) 分别代表绝热壁面可压缩层流边界层中动量方程和能量方程的积分形式。它们成为近似方法中，尤其是

Gruschwitz 提出的近似方法中进一步计算的基础。对于不可压缩流动,即在 $M \rightarrow 0$ 的极限情形下,方程 (13.80) 和 (13.87) 分别变为动量积分方程 (8.32) 和能量积分方程 (8.35)。

Gruschwitz 近似方法: 在下文中,我们只研究大量近似方法中的一个,即 E. Gruschwitz 提出的近似方法。它适用于 $\omega = 1$ 的绝热壁面,不过 Prandtl 数可取任意值。就数值计算的工作量而言,这个方法还是比较简单的。它还有另一个优点,即在趋向不可压缩流动的极限情形时,可以过渡到由 K. Pohlhausen 以及 H. Holstein 和 T. Bohlen 所建立的方法,这两种方法早先在第十章中已作过详细的描述。

我们不准备在此对这种方法作详细讨论,有兴趣的读者可以去查阅本书第六版中的第十三章。这里只把注意力集中在高亚声速绕翼型流动的计算结果上¹⁾。

上述翼型吸力面的位势流压力分布示于图 13.16,图中曲线对应于三个 Mach 数: $M_\infty = 0; 0.6$ 和 0.8 ,而攻角 $\alpha = 0$ 。图中还有边界层外缘温度 T_1 的变化曲线。计算结果示于图 13.17 和 13.18。图 13.17 中曲线分别说明动量厚度 δ_2 、位移厚度 δ_1 及切应力 τ_w 沿翼型吸力面的变化。当 Mach 数增加时,层流分离点稍微向上游移动。动量厚度和壁面上切应力的变化几乎不受 Mach 数的影响,而位移厚度 δ_1 随着 Mach 数的增加而显著增加。最后,图 13.18 中画出沿翼型周线几个位置上的速度分布和温度分布。随着 Mach 数的改变,速度剖面并没有多大的改变,但是,温度剖面却表明,壁面温度随 Mach 数的增加有很大的增加。这是必然的,因为假设了壁面是绝热的,绝热壁面温度 T_w 也示于图 13.16 中。对于壁面绝热、Prandtl 数为 1 以及粘性系数正比于温度的情形, N. Rott 和 L. F. Crabtree^[87] 已给出了积分方法。

由 W. Hantzschke 和 H. Wendt^[45] 计算的轴向超声速绕圆锥流动的情形,是轴对称边界层的一个例子。F. K. Moore^[78] 研究

1) 作者感谢 F. Moser 先生算出这个例子。因为 Gruschwitz 方法不能得出合理的温度分布,所以,这里的温度剖面是以参考文献 [36] 为基础计算的。

图 13.16 至图 13.18 亚声速可压缩流动中 *NACA* 8410 翼型吸力面的层流边界层, 假定壁面绝热, 攻角 $\alpha = 0^\circ$, Mach 数 $M_\infty = U_\infty/c_\infty$; Prandtl 数 $P = 0.725$, 计算基于 E. Gruschwitz^[44] 的近似方法
 S = 分离点

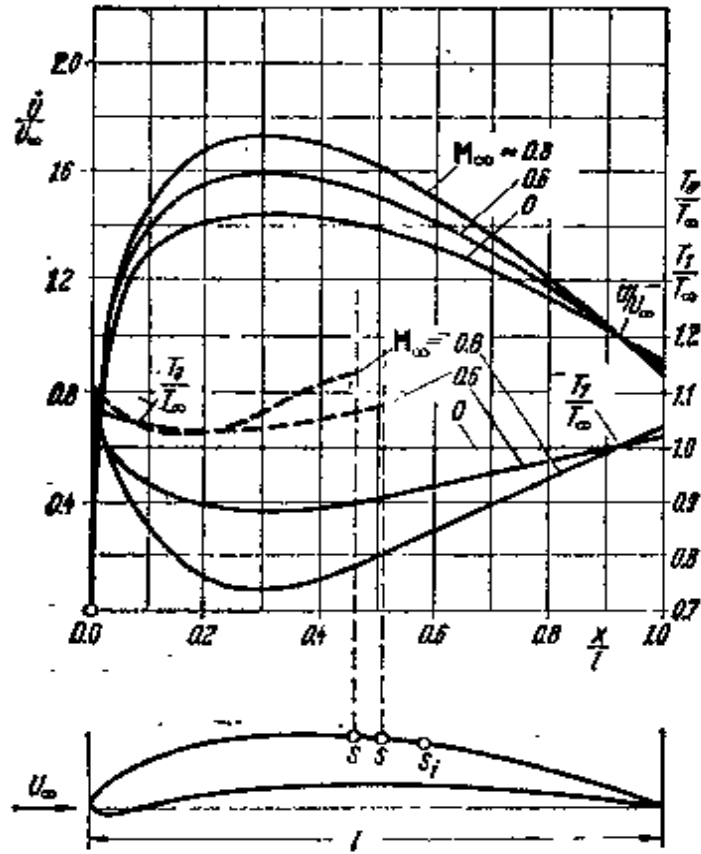


图 13.16 边界层外缘的位势流速度分布 U/U_∞ , 相应的温度分布 T_1/T_∞ 以及绝热壁面温度的变化 T_2/T_∞

了超声速气流中偏航圆锥的边界层, 而 R. Sedney^[93] 讨论了超声速气流中偏航角不大的旋转圆锥的情形。S. T. Chu 和 A. N. Tifford^[15] 以及 J. Yamaga^[103] 对旋转物体进行了另外的一些计算。

利用第十一章 c 中所述的 Mangier 提出的方案, 可以将任何形状旋成体的轴对称边界层计算化为二维流动的计算。这在可压缩流体流动的范围内也是有效的。

R. M. Inman^[51] 分析了可压缩的 Couette 流动, 并计算了绝热壁面和传热壁面情形下的表面摩擦力系数, 但是都基于粘性系

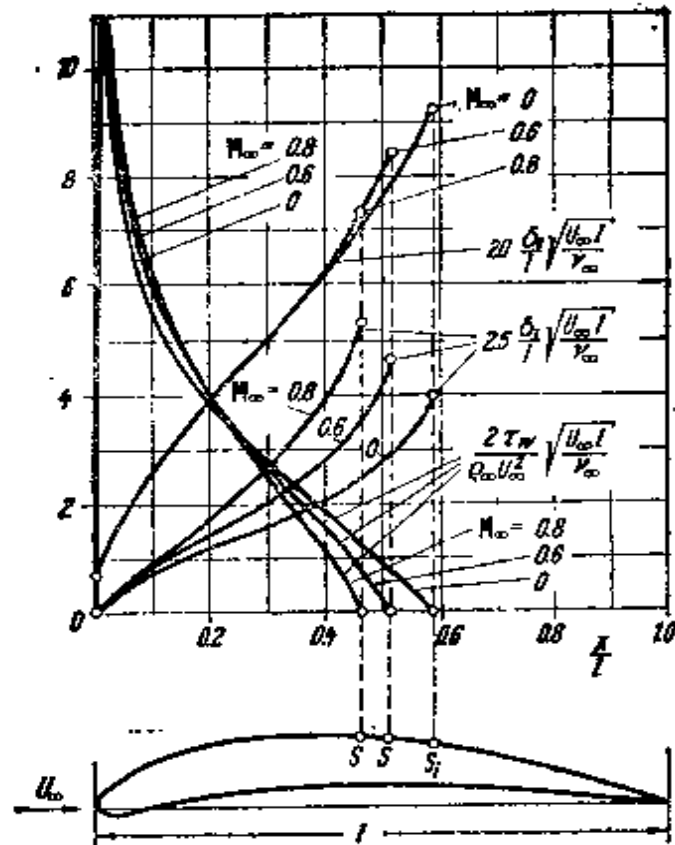


图 13.17 在不同 Mach 数下的动量厚度 δ_2 ，位移厚度 δ_1 和切应力 τ_w

数正比于温度的简化假定。I. E. Beckwith^[5] 证明：如果二次流分量远小于主流分量，则对于任何形状的三维物体的可压缩边界层也可以进行近似计算。

e. 激波与边界层干扰

当物体位于高速气流中或在空气中作高速飞行时，在物体附近会形成局部的超声速区域。流动克服逆压梯度从超声速过渡到亚声速时通常是通过激波来实现的。在通过很薄的激波时，流体的压力、密度和温度的变化率非常大。除去紧贴壁面的邻域之外，变化率大到可以把这种过渡看成是间断的。由于激波常常引起边界层分离，所以对于物体的阻力来说，激波的出现有重要的影响。激波及相应流场的理论计算是非常困难的，我们不准备在此讨论这个课题。实验表明：激波形成过程和边界层形成过程之间存在着

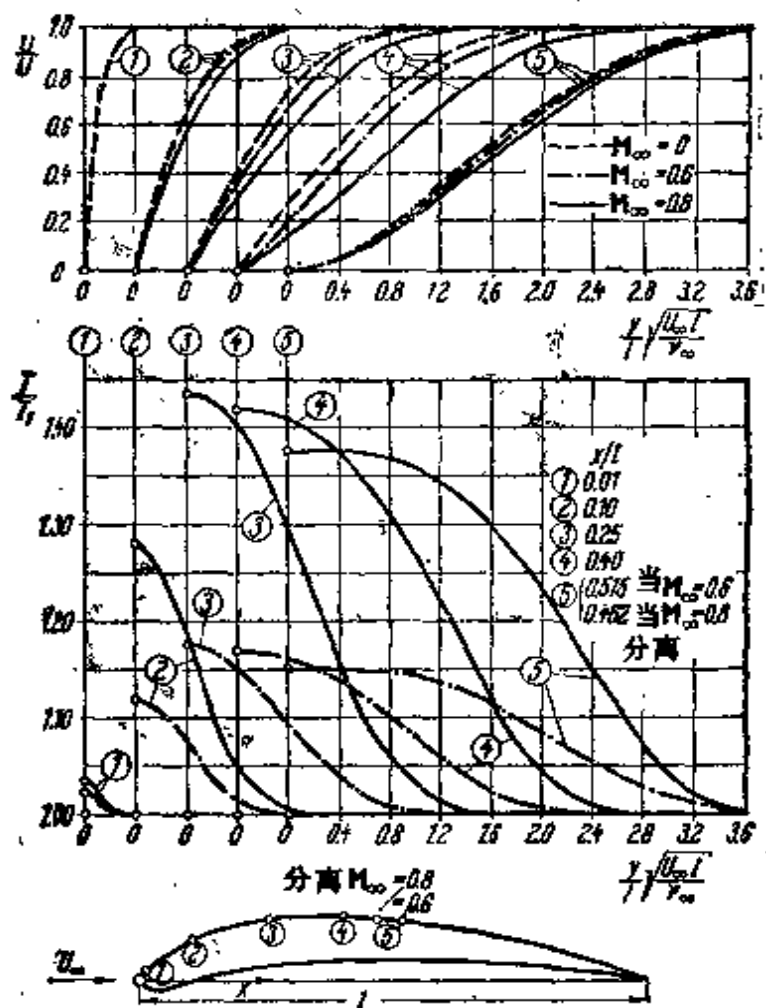


图 13.18 在不同 Mach 数下边界层中的速度分布和温度分布

强烈的相互干扰，由此导致极为复杂的现象。因为边界层的特性主要取决于 Reynolds 数，而激波中的条件则主要取决于 Mach 数。最早是将这两种影响完全分开作系统的研究，这已进行了很长时间。J. Ackeret, F. Feldmann 和 N. Rott^[1], H. W. Liepmann^[63], G. E. Gadd, W. Holder 和 J. D. Regan^[36] 在他们的实验中单独改变 Reynolds 数或 Mach 数，因而成功地对这种复杂的干扰现象提供了某些解释。本节将叙述上面三篇论文中最重要的结果。但是，我们必须说明，至今尚未完全了解这些复杂现象。

因为激波后面，边界层区域和外流区域的分界流线必定平行

于物体的型线，所以边界层中沿流动的压力增加最终一定要和外流的压力增加相同。在边界层中，根据它的特性，壁面附近质点是亚声速运动的，但是激波又只能出现在超声速的气流中，所以很清楚，外流中所产生的激波不能一直达到壁面。由此可见，平行于壁面的压力梯度在壁面附近要比在外流中缓和得多。在激波伸向壁面的那点附近， $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的变化率的量级相同，而在那里也可能出现横向压力梯度。上述两种情况使得熟知的边界层理论的假定失效。

激波的外形取决于边界层是层流的还是湍流的。这两种激波外形是根本不同的，见图 13.19。在基本上垂直的激波射到层流边界层的那点前面不远处，出现一个短腿，结果形成所谓的 λ 激波，见图 13.19a。一般说来，若边界层是湍流的，则正激波不会裂开，因而不会形成 λ 激波，见图 13.19b。从外流射到层流边界层的斜激波，将以扇形膨胀波的形式反射出来，见图 13.30a。但是，若边界层是湍流的，则反射以更集中的膨胀波形式出现（图 13.30b）。

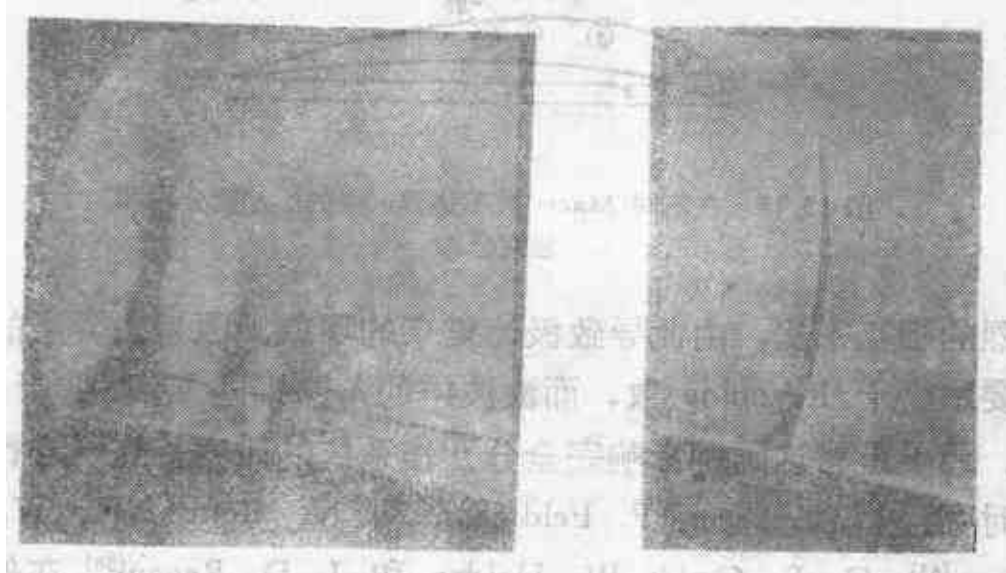


图 13.19 激波的纹影照片：流动方向自左向右，取自 Ackeret, Feldmann 和 Rott^[11]；a) 层流边界层：多重 λ 激波， $M = 1.92$ ， $R_{\delta_2} = 390$ ；b) 湍流边界层：正激波， $M = 1.28$ ， $R_{\delta_2} = 1159$

图 13.20 中等压曲线和图 13.21 中压力曲线表明：沿层流边界层或沿湍流边界层的压力增长率比外流中的缓慢。我们通过压力分布在壁面附近的“扩散”来说明边界层中压力梯度变得平缓的

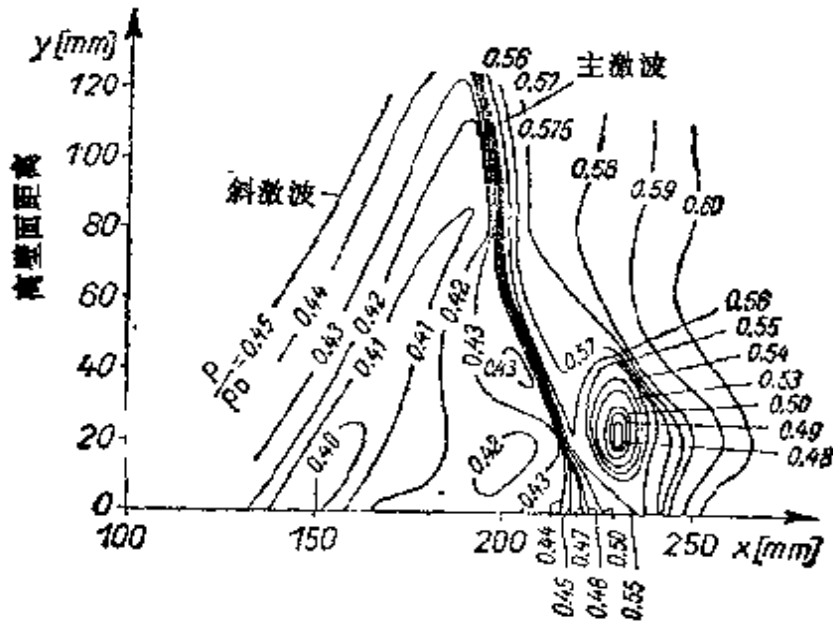


图 13.20 层流流动中激波区的等压线(λ 激波),
取自 Ackeret, Feldmann 和 Rott^[1]

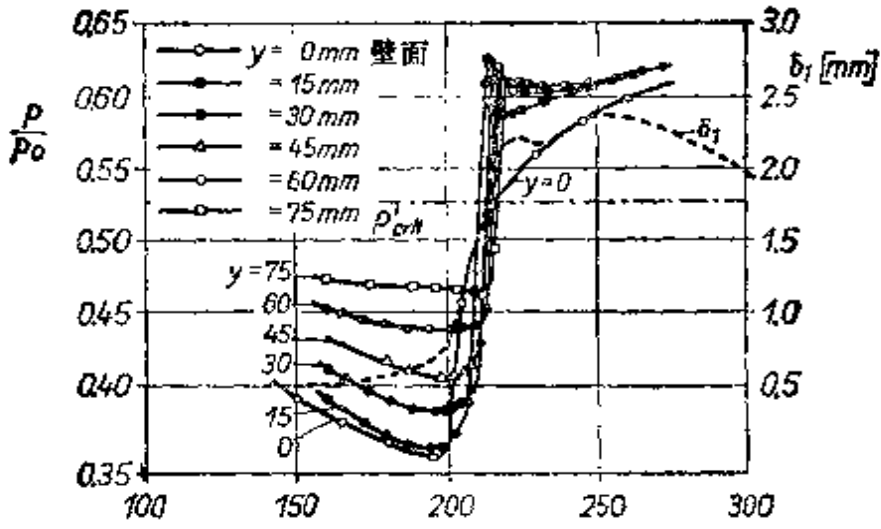


图 13.21 激波区的湍流边界层;离壁面不同距离上的
压力分布,引自 Ackeret, Feldmann 和 Rott^[1]

现象。据观测,层流边界层中的扩散要比湍流边界层中更为显著。由图 13.22 也可看出层流的激波扩散和湍流的激波扩散之间的这种差别。该图是 H. W. Liepmann, A. Roshko 和 S. Dhawan^[64] 的测量结果,给出了平行于超声速气流的平板上的压力变化。这些压力曲线是在平板上由尖楔产生的斜激波与边界层干扰点附近

画出的。湍流边界层中的压力梯度要比层流边界层中的陡得多，扩散(区)宽度在激波与层流边界层干扰的情形下约为 100δ ，而在激波与湍流边界层干扰的情形下，则减为 10δ 左右；这里的符号 δ 表示激波区的边界层厚度。层流边界层的特征是扩散程度更大，只要指出层流边界层中亚声速流动区域从壁面伸展出去的范围要比湍流边界层中的大，就能理解这一点。

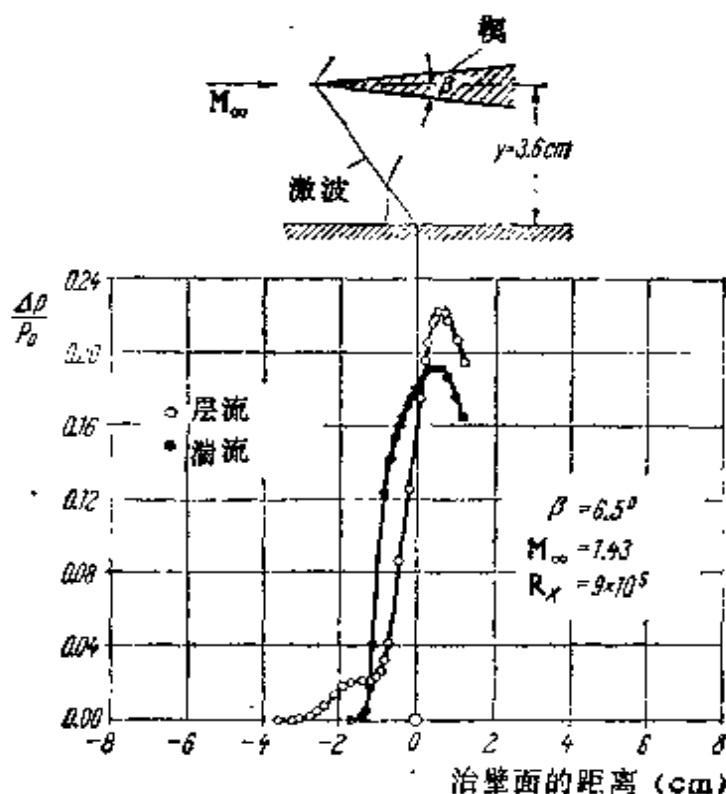


图 13.22 在超声速气流中，激波从层流边界层和湍流边界层反射的区域中沿平板的压力分布，引自 Liepmann, Roshko 和 Dhawan^[64]

边界层厚度：层流 $\delta \approx 0.7\text{mm}$ (0.028in)
湍流 $\delta \approx 1.4\text{mm}$ (0.056in)

不管分离是否出现，激波入射点前的边界层厚度都将增加，边界层外缘的压力增加，因此边界层内的压力也增加，这对应于这样一条弯曲流线，它沿壁面方向凸起，并将外流和边界层流动分开。而在斜激波的反射膨胀波的影响区中，边界层内压力的稍微减小，见图 13.22，这对应于上述分界流线是凹向壁面的。无分离的层流边界层只能承受很小的压力增升，因为外流完全是通过粘性力把压力梯度加给边界层的。而无分离的湍流边界层却能承受大得多

的压力梯度，因为这时湍流的混合运动有助于这个过程。如果边界层中出现分离，则层流边界层和湍流边界层都能承受强激波加给的很大的压力增升。特别是在湍流情形下，在分离的边界层和壁面之间的死水涡可以产生很大的速度，通过粘性的作用推动边界层内缘来克服压力的增升。图 13.23 中示意图表明边界层和死水区在波阵面前如何变厚，以及在其后面又如何变薄。最后，如图 12.23 所示，边界层本身可以完全再附于壁面，在图 13.24 中也可以看到同样的现象。

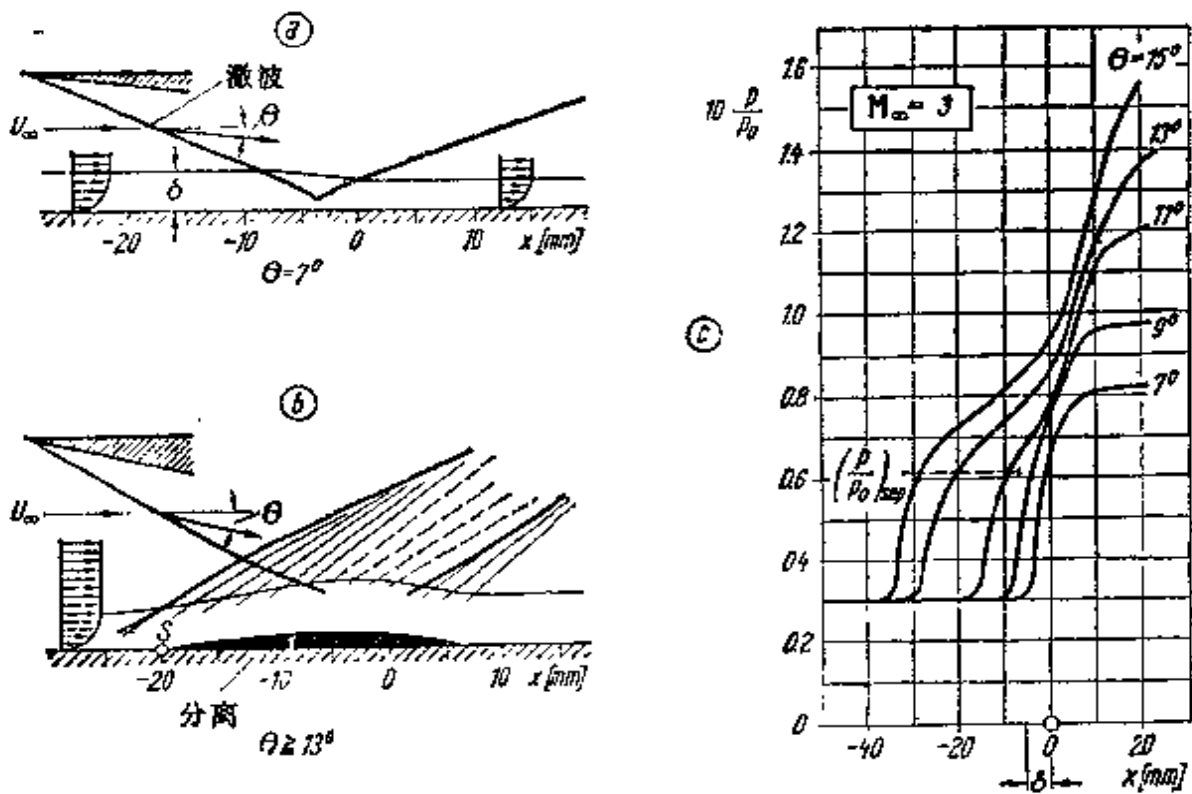


图 13.23 平直壁面上湍流边界层的激波反射，取自 S. M. Bogdonoff 和 C. E. Kepler^[6]。激波前边界层厚度 $\delta \approx 3\text{mm}$ (0.12in)。a) 弱激波，偏转角 $\theta = 7^\circ$ 。反射类似于无摩擦流动中的情形，无边界层分离；b) 强激波，偏转角 $\theta \geq 13^\circ$ 。以一系列压缩波和膨胀波的形式反射，边界层分离；c) 偏转角 θ 不同时的压力分布。分离发生在接近于 $p_{sep}/p_\infty = 2$ 的点上

图 12.23 重新绘出 S. M. Bogdonoff 和 C. E. Kepler^[6] 所测量的一些结果，这是在他们研究斜激波从平直壁面湍流边界层上反射时测得的，外流的 Mach 数 $M_\infty = 3$ 。图 13.23a 和 b 分别说明弱激波和强激波的反射，激波强度由偏转角 θ 的大小来调节。

对弱激波 ($\theta = 7^\circ$) 情形, 反射激波呈现出理想流体理论所预示的图象, 因而边界层不出现分离. 当激波强度增加 ($\theta = 13^\circ$) 时, 反射图象中包含一系列的压缩波和膨胀波. 边界层显示出很大的局部增厚, 由此导致分离. 边界层在反射激波后面比在入射激波前面更厚. 不同偏转角 (因而不同激波强度) 下, 相应的沿壁面压力分布曲线示于图 13.23c. 当 $\theta > 9^\circ$ 时, 出现分离. 产生分离的压力增升与偏转角无关, 其值大致为 $p_{sep}/p_\infty = 2$.

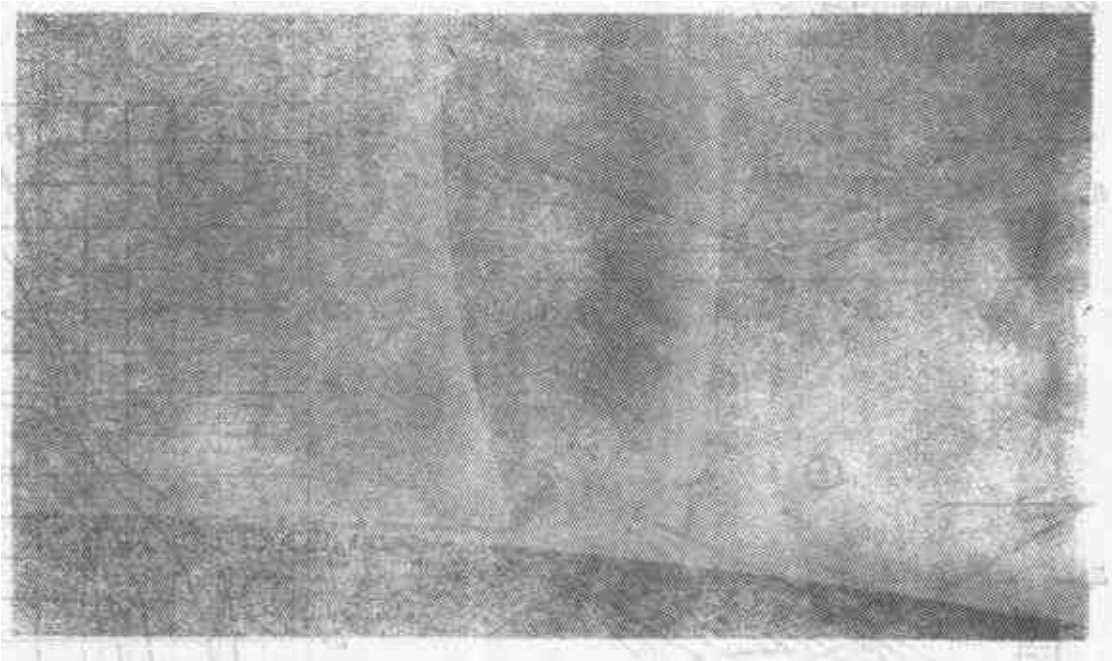


图 13.24 绕翼型流动的纹影照片. 激波与边界层干扰. 实例 (2): 在激波前出现分离, 而在激波后再附的层流边界层;
 $M = 0.84$, $R = 8.45 \times 10^5$, 取自 Liepmann^[63]

在入射激波的附近, 转捩和分离的出现主要受边界层中 Reynolds 数和外流 Mach 数的控制. 当激波很弱以及 Reynolds 数很小时, 整个边界层仍是层流的. 当 Mach 数固定在较小的数值上而增加 Reynolds 数时, 将在激波入射点上引起转捩. 当激波很强 (Mach 数很大) 而 Reynolds 很小时, 由于压力扩散, 层流边界层将在激波的前面分离, 也可以在激波前面发生转捩. 当 Reynolds 数足够大时, 不管边界层是否分离, 边界层转捩总是在激波前面发生. 根据 A. Fage 和 R. Sargent^[30] 所作的观测, 当压力比 p_2/p_1 小于 1.8 时, 湍流边界层不出现分离, 对于正激波, 这时相当于

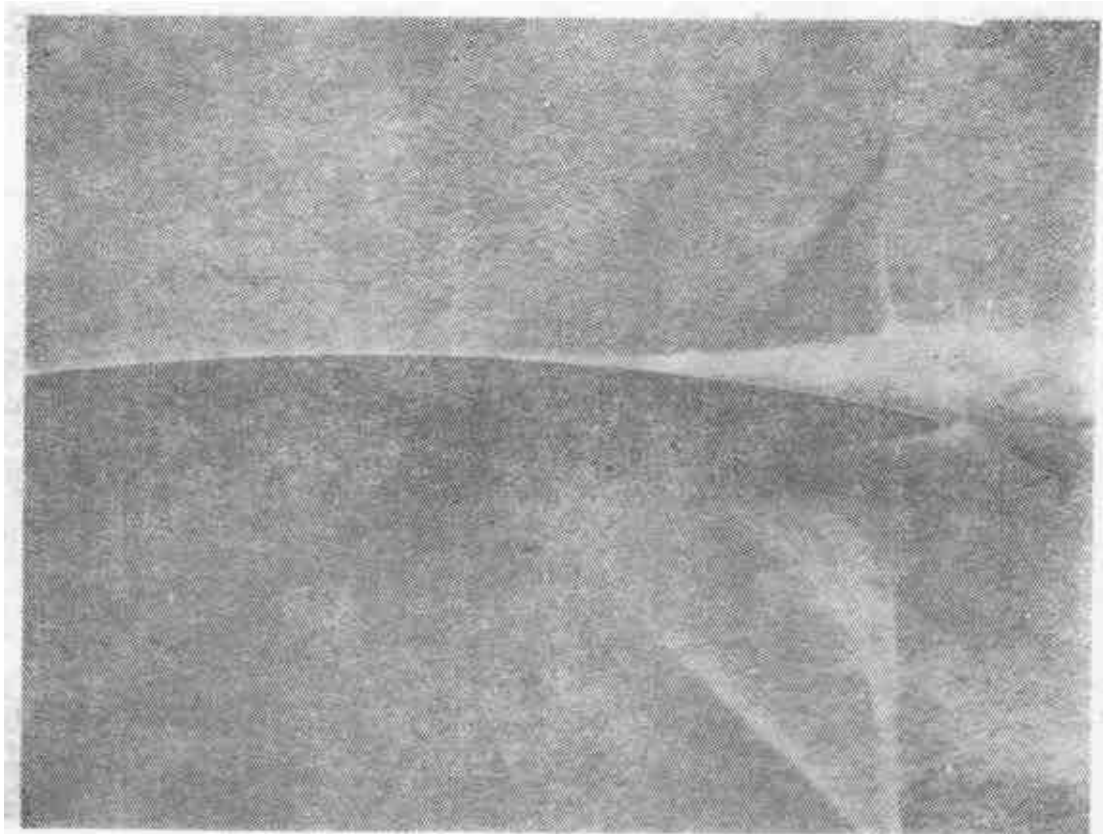


图 13.25 绕翼型流动的纹影照片。实例 (3): 激波后出现分离的层流边界层。 $M = 0.90$, $R = 8.74 \times 10^5$, 取自 Liepmann^[63]

Mach 数 $M_\infty < 1.3$ 。有关激波与边界层干扰的其他实验结果, 可以参阅 W. A. Mair^[69], N. H. Johannesen^[52], O. Bardsley 和 W. A. Mair^[3] 以及 J. Lukasiewicz 和 J. K. Royle^[69] 等人的文章。

近年来, 曾试图通过理论的方法来描述层流边界层与激波的干扰。这种尝试基本上是不成功的, 因为一般说来, 边界层理论的假设在激波附近已不成立。在某些研究中, 基于 Navier-Stokes 方程求出了数值解。有关这个复杂问题近况的评论, 可参阅 J. D. Murphy^[82a], R. W. MacCormack^[14a], J. M. Klineber^[56a], J. C. Carter^[44b] 以及 J. D. Murphy 等^[82b] 的文章。

现在根据纹影照片来说明激波入射到边界层上的各种影响。正如 A. D. Young^[106] 所指出的那样, 可将其分成下列几种情形:

- (1) 前面的边界层是层流的, 并且在激波后面仍然是层流的, 无分离;
- (2) 前面的边界层是层流的, 但是由于逆压梯度的作用, 边界

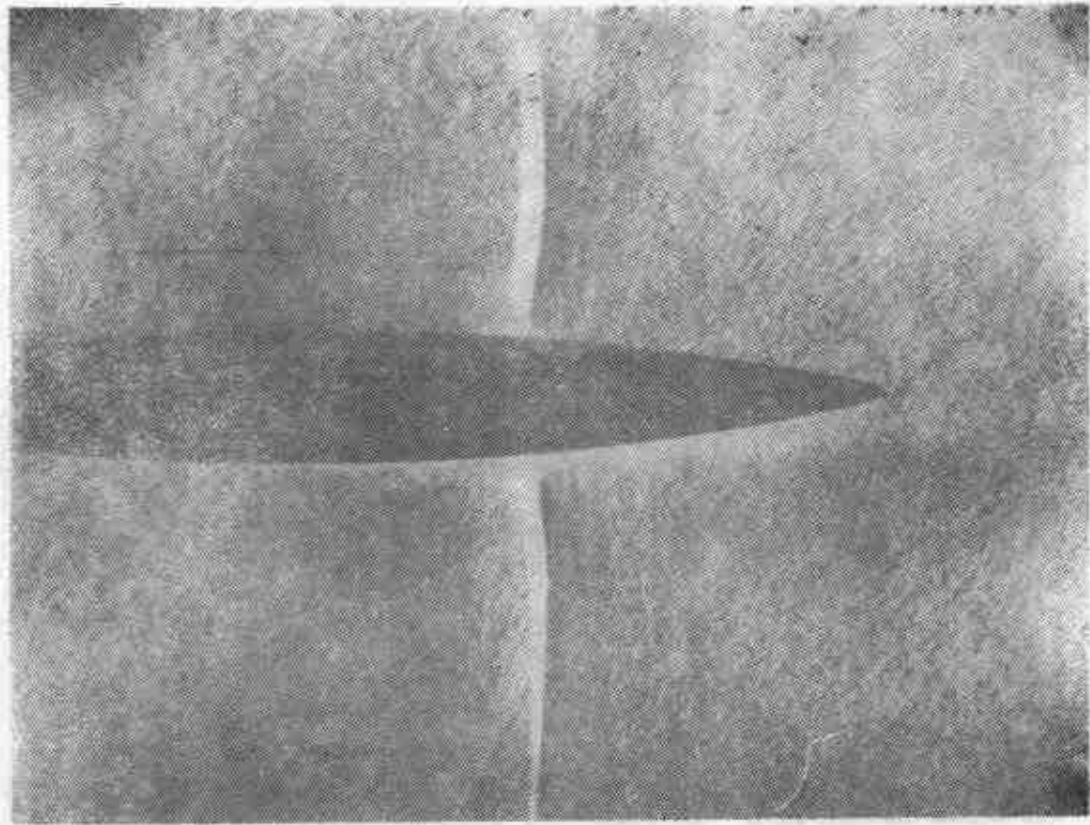


图 13.26 绕翼型流动的纹影照片。激波与边界层干扰。实例 (4): 在激波前转换成湍流的边界层, 没有分离。 $M = 0.85$, $R = 1.69 \times 10^6$, 取自 Liepmann^[63]

层在激波前发生分离, 然后以层流或湍流状态再附于壁面, 见图 13.24¹⁾;

- (3) 前面的边界层是层流的, 但在激波前面完全从壁面分离, 并且不能再附于壁面, 见图 13.25; 正激波并生出 2 分支;
- (4) 前面的边界层是湍流的, 并且不从壁面上分离, 见图 13.26;
- (5) 前面的边界层是湍流的, 但是从壁面上分离, 见图 13.27 和图 13.28.

图 13.30a 和 b 分别说明斜激波从层流边界层和湍流边界层的反射。

1) 感谢加州理工学院 H. W. Liepmann 教授, 承蒙应允采用图 13.24—13.26 和图 13.29—13.30 中的照片, 并热情地为本书出版提供原始照片。

很久以前，A. Busemann^[10] 发表了关于超声速流动中边界层分离的观测资料。超声速风洞通常装有扩压段，它用来从很高的风速中恢复压力。这种扩压段做成收缩-扩张通道的形状，气流通

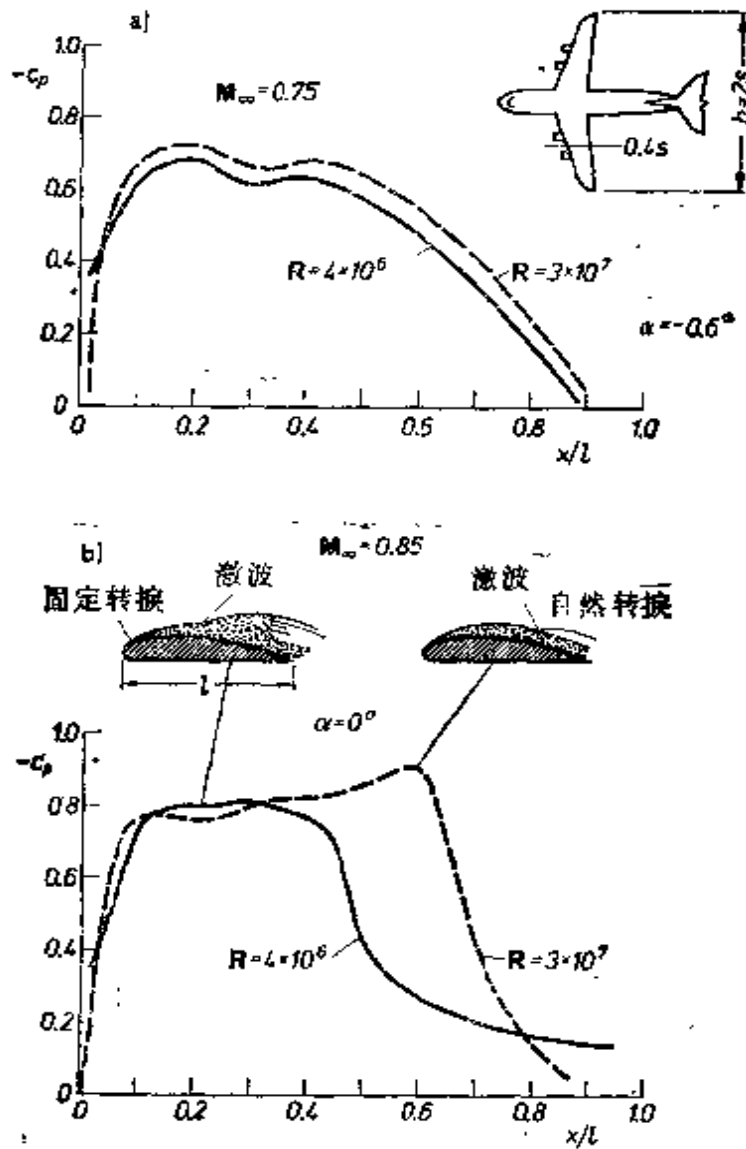


图 13.27 在跨声速范围内 Reynolds 数对翼型表面压力分布的影响，取自 G. L. Loving^[66]； $R = 3 \times 10^7$ 的飞行试验(全尺寸)和 $R = 4 \times 10^6$ 风洞试验间的比较。在自由飞行中自然转换；在风洞试验中激发转换。a) 当 $M_\infty = 0.75$ 时，亚临界压力分布；升力系数 $c_L \approx 0.3$ ； $R = 3 \times 10^7$ 的自由飞行试验和 $R = 4 \times 10^6$ 的风洞实验之间令人满意地一致。b) 当 $M = 0.85$ 时，超临界压力分布；升力系数 $c_L \approx 0.34$ ； $R = 3 \times 10^7$ 的自由飞行试验和 $R = 4 \times 10^6$ 的风洞实验有很大的差别

——风洞(转换点固定)
 ----全尺寸飞行

过扩压段时，在收缩段和扩张段中都有逆压梯度。A. Busemann 观测到：不管 Mach 数的值如何，分离都不取决于收缩角和扩张角，但是总是与逆压梯度有关。在这方面应该认识到，在高 Mach 数下出现的流动特性的变化是与所改变的逆压梯度条件有关的。

下面关于跨声速范围内翼型边界层特性的讨论，实质上涉及后面第二十二章和第二十三章要讨论的湍流边界层的内容。虽然转换过程本身也要在后面的第十六章和第十七章中才讨论，但是，由于转换在这些过程中起着重要的作用，所以我们在这里将插进一些有关的内容。

边界层与外流的干扰在跨声速范围内特别强烈。图 13.27 引自 G. L. Loving^[66]，该图给出了实验结果，并将飞行中(大 Reynolds 数)测量的翼型压力分布与其在风洞中(减小了的 Reynolds 数)测量结果作了比较。这两种情形的边界层在浸湿周长的大部分区域内都是湍流的。在 $M_\infty = 0.75$ (图 13.27a) 时，压力分布仍是亚临界的。虽然风洞实验和飞行试验的 Reynolds 数相差十倍，但是这两种情况测得的压力分布却令人满意地一致。然而，当 $M_\infty = 0.85$ (图 13.27b) 时，翼型上产生了局部的超声速区域，这两种压力分布就有很大的差别。在较大的自由飞行 Reynolds 数 $R = 3 \times 10^7$ 情形下，激波(以及与它相联系的分离点)位置比风洞中 Reynolds 数 $R = 4 \times 10^6$ 的情形下要移向下游很多。这种情况的物理理解或许与下述事实有关，即在 Reynolds 数较低的风洞实验中，边界层相当厚(与翼型厚度相比)，所以将激波以及由它引起的分



图 13.28 平行于高超声速流动的拐角
 ----- 严重过热的拐角

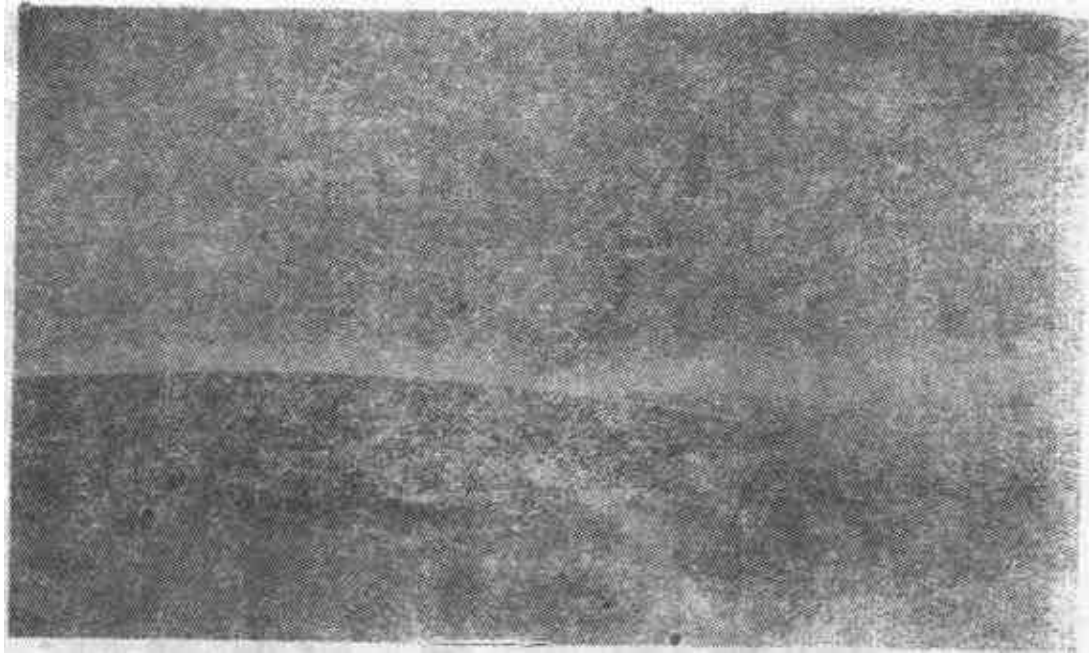


图 13.29 绕翼型流动的纹影照片。激波与边界层干扰，实例
(5)：激波后强烈分离的湍流边界层， $M = 0.90$ ， $R = 1.75 \times 10^6$ ，取自 Liepmann^[63]

离点推向更上游。由此可以推断，Reynolds 数对边界层（因而也对激波及其相关的分离点）的影响在跨声速流动中是十分显著的。因此，在跨声速的 Mach 数范围内，Reynolds 数对翼型的整个气动特性的影响要比在亚声速范围内或纯超声速范围内的影响大得多。由于这个缘故，当我们将跨声速范围内的风洞实验结果用来预言飞行特性时，必须极其小心。有关这个课题的另外一些实验结果，可以从参考文献 [27a, 84, 91] 中找到。

J. J. Kacprzyński^[53] 报道了这一领域中最近非常广泛的实验结果。

高超声速范围内的传热问题发生在空间飞行器和弹道火箭再入地球大气层的时候。当运动物体接近地面时，如果利用空气阻力来进行减速，则由此耗散的大部分能量以热的形式加给物体。无论高超声速边界层是层流的还是湍流的，其中都会发生这种过程。J. C. Rotta^[87a] 发表了一篇综述文章，描述了在二维和旋成体中出现的这方面问题。

还有另一个边界层与激波干扰的重要问题出现在零攻角高超

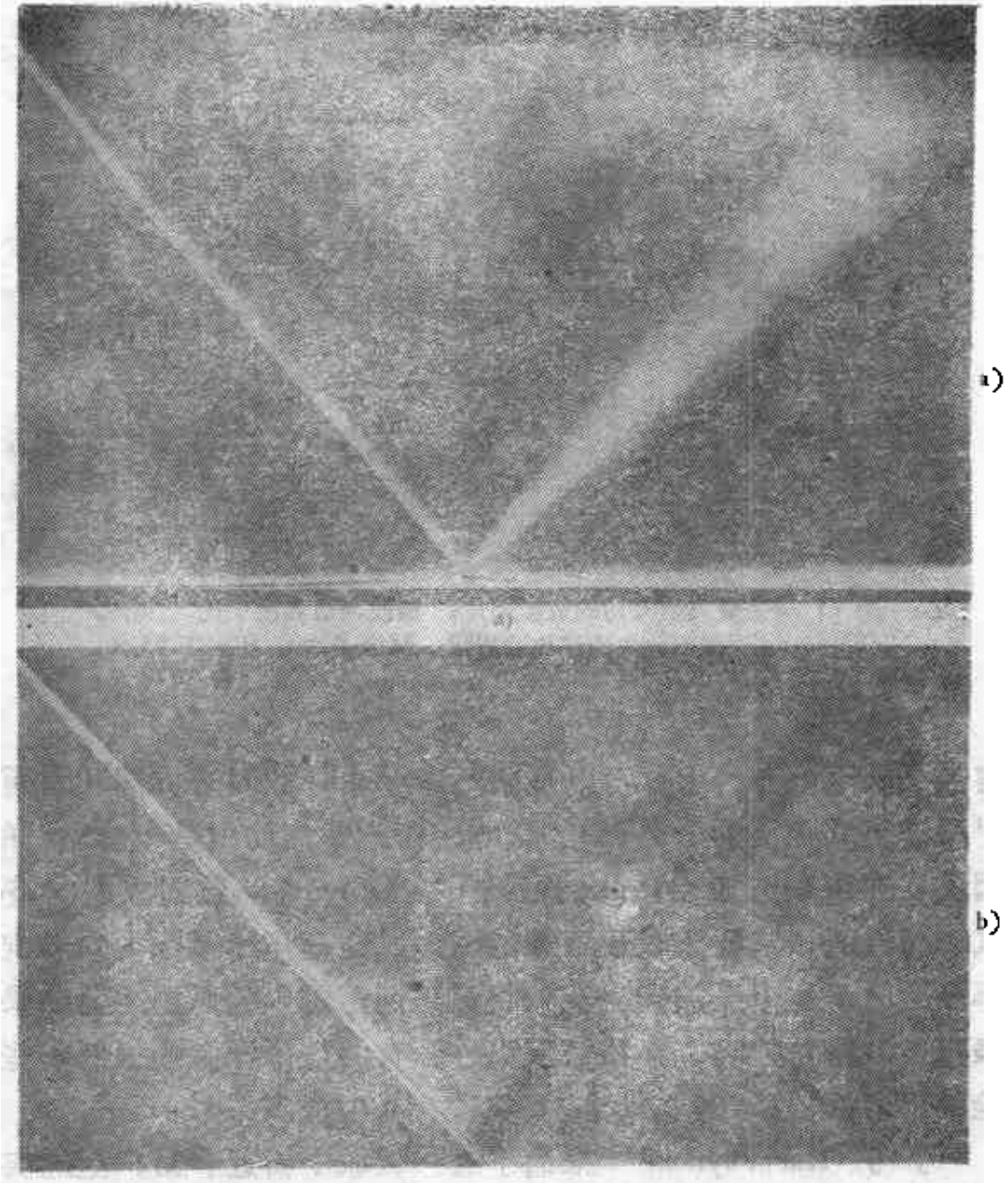


图 13.30a,b 斜波在平板边界层上反射，
 取自 Liepmann, Roshko 和 Dhawan^[64]。
 a) 层流边界层；b) 湍流边界层

声速沿拐角流动中，由于拐角中的耗散速率比附近的二维流动中的大得多，所以拐角中的流动伴随有强烈的加热。在图 12.15 中可以看到这方面的迹象。图中表明，在沿直角拐角的不可压缩流动中，即使壁面温度超过自由流温度，也存在从流体向壁面传递的热量。与此相反，在远离拐角的地方，热流却是从壁面流向流体

的。

只是近年来,即美国试验机 X-15 在 Mach 数 $M = 3$ 至 6 的范围内进行飞行试验时,科学家们才意识到上述问题。R. D. Neumann^[62,99]发表了有关这种现象的报告。图 13.28 提醒读者,这类拐角外形出现在翼根、侧舵、发动机吊舱和吸气式发动机的空气入口处。

最近, K. Kipke 和 D. Hummel^[56] 在 $M = 12 \sim 16$ 这种很高 Mach 数的情形下,完成了高超声速沿拐角流动的实验研究。他们测量了拐角中的压力分布和局部传热率,并发现了激波与边界层干扰区域内异常复杂的结构。拐角中流动产生强烈的分离区,其中局部传热率比二维流中的大十倍。

涉及激波与边界层干扰问题的理论研究不胜枚举。我们只举出下述少数作者: E. A. Mueller^[63], D. Meksyn^[74], M. Honda^[47] 以及 A. Appleton 和 H. J. Davies^[2]。应该特别注意 N. Curle 的文章 [24]。该文研究了传热对平板上压力增升的影响,并说明了计算具有任何壁面温度和任何 Prandtl 数的边界层的近似方法。这种近似方法利用了 G. E. Gadd^[39] 的实验结果。这一实验结果说明: 虽然在分离点上速度梯度 dU/dx 不为零,但是速度 U 本身却近似地保持不变。利用这一简化,在假设未知的压力梯度和边界层厚度增加之间存在某种关系的条件下,就能对方程组进行求解。结果是: 分离点上压力系数与壁面温度无关,但是干扰区延伸的范围正比于 T_w 。所以,在分离处的压力增升反比于 T_w 。

假设 p 与 p_0 相差很小,而且近似有

$$c_p \approx \frac{2}{\gamma M_0^2} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) \approx 1 - \frac{U^2(x)}{U_0^2}, \quad (13.88)$$

N. Curle 计算了本节表 13.1 所引用的函数 $F(X)$ 。Curle 引入下列缩写符号:

$$F = 0.4096(M_0^2 - 1)^{1/2} R^{1/4} \left(1 - \frac{U^2(x)}{U_0^2} \right), \quad (13.89)$$

$$X = 1.820(M_0^2 - 1)^{1/4} R^{1/4} \left(\frac{T_w}{T_1} \right)^{-1} \left(\frac{x}{x_{sep}} - 1 \right). \quad (13.90)$$

下标 sep 指分离点, 下标 0 指激波上游状态, 下标 1 指边界层边缘状态。

分离点上压力系数最后具有下述形式

$$c_{p,sep} = \frac{2}{\gamma M_0^2} \left(\frac{p_{sep}}{p_0} - 1 \right) = 0.825(M_0^2 - 1)^{-1/4} R^{-1/4}, \quad (13.91)$$

其中 $R = U_x/\nu$, p_0 和 M_0 分别为激波上游的压力和 Mach 数。

表 13.1 在激波附近沿平板的压力分布函数 $F(X)$, 根据式 (13.89) 和 (13.90), 取自 N. Curle^[21]

X	$F(X)$	$F'(X)$	X	$F(X)$	$F'(X)$
-7.03	0.02	0.0103	0.70	0.40	0.0885
-5.12	0.05	0.0237	1.86	0.50	0.0828
-4.09	0.08	0.0351	3.21	0.60	0.0645
-3.14	0.12	0.0479	5.03	0.70	0.0465
-2.21	0.17	0.0612	7.61	0.80	0.0323
-1.32	0.23	0.0736	11.75	0.90	0.0174
-0.55	0.29	0.0832	15.52	0.95	0.0101
0	0.338	0.0900	23.33	1.00	0.0042
			∞	1.03	0

图 13.31a 和 b 给出了理论曲线与实验结果比较, 其中实验结果是由 G. E. Gadd 和 J. L. Attridge^[40] 进行测量的。无论是从理论或是从实验, 都可以得出结论: 对于分离区前面的压力, 壁面加热时的值比壁面绝热时要高。这两个图对应于不同的壁面温度, 它们之间的比较使我们相信, 随着壁面温度的增加, 这种影响变得更为显著。

有关分离后的层流边界层与无摩擦的超声速气流干扰区的数值解, 已由 V. N. Vatsa 和 S. D. Bertke^[101], 以及 O. R. Burggraf^[9], G. S. Settles, S. M. Bogdonoff 和 I. E. Vas^[93a] 等人作出。

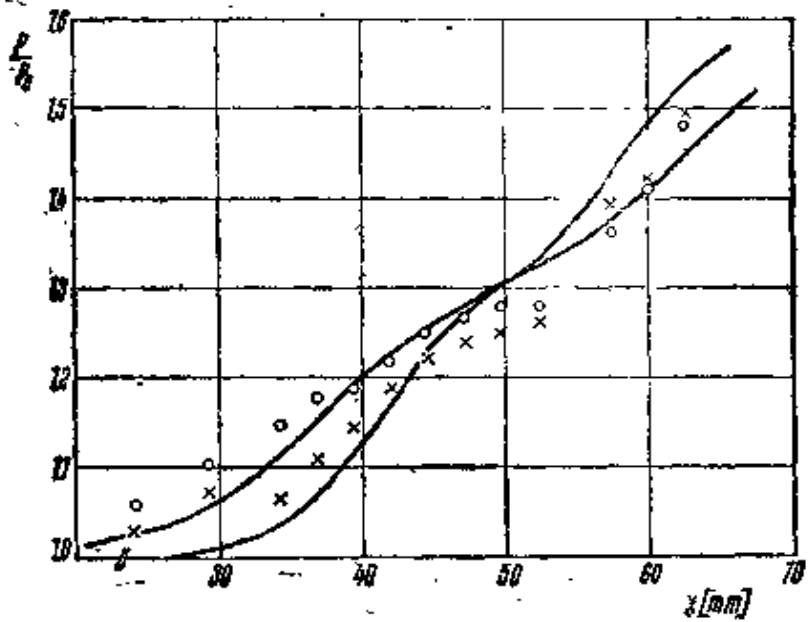
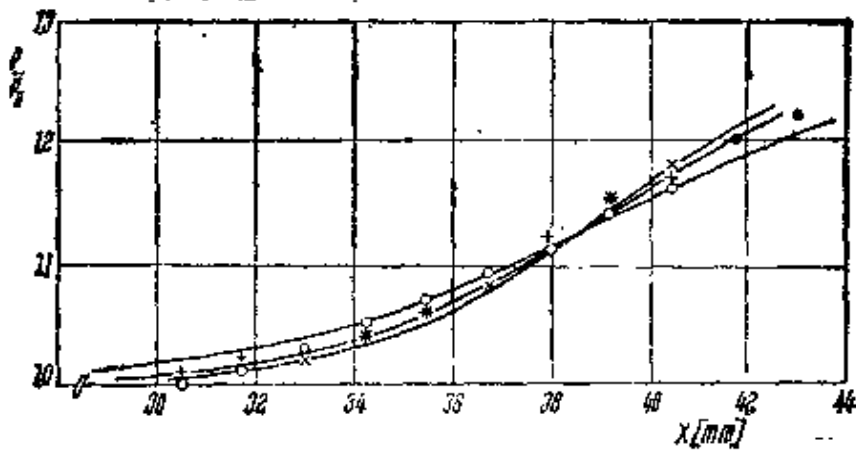


图 13.31a

图 13.31b

$M_0 = 3; R = 4.2 \times 10^5$

+ 加热壁面 $T_w = 1.25T_0$

× 无传热壁面 $T_w = T_0$

○ 冷却壁面 $T_w = 0.88T_0$

$M_0 = 2.7; R = 1.5 \times 10^6$

× 无传热壁面 $T_w = T_0$

○ 冷却壁面 $T_w = 1.5T_0$

图 13.31 与激波相干扰区域内的层流边界层：在壁面温度不同的条件下，超声速气流中零攻角平板上的压力分布。实线：根据 N. Curle 的理论^{[24)}

第十四章 层流边界层控制¹⁾

a. 控制边界层的方法

为了实现人工控制边界层特性的目的，迄今已经提出了好几种方法。这些方法的作用是，通过影响边界层的结构，来按所希望的方向改变整个流动。早在 1904 年 L. Prandtl 发表的第一篇论文中，就叙述了几个控制边界层的实验。他想用适当设计的实验来证明其基本思想的正确性，而且通过这种方法获得了相当出色的成果。图 14.1 表示绕圆柱的流动，在圆柱一侧通过一个小缝进行抽吸。在有抽吸的这一侧，流动附着在圆柱的绝大部分表面上，从而避免了分离；圆柱阻力明显降低，同时由于失去流动图象的对

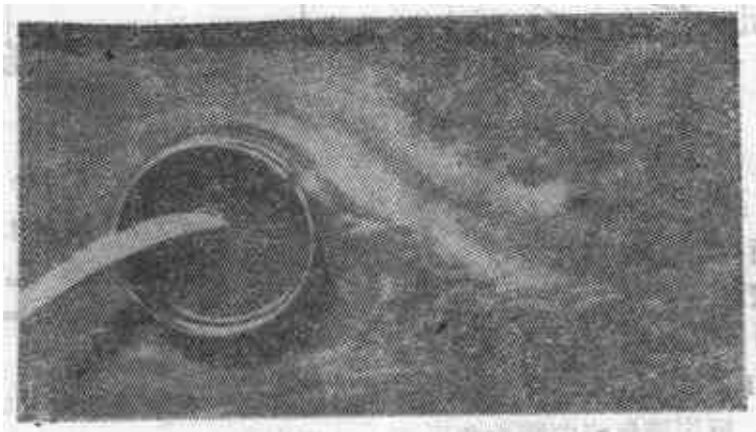


图 14.1 绕一侧有抽吸的圆柱流动，根据 Prandtl

1) W. Wuest 教授参与了本书第五版本章新文稿的准备工作。

称性,引起了很大的横向力。

正如在第十章所说明的,层流边界层不发生分离时只能承受很小的逆压力梯度。和层流相比,在湍流情形下分离的危险大大减小了,因为,由于湍流的混合运动,有动量从外缘向壁面连续流动。但是,即使在湍流中,也常常需要采取某种**边界层控制**的措施来避免分离。边界层控制的问题,特别是在航空工程领域内,一度成了非常重要的问题。在实际应用上,为了减小阻力并获得较高的升力,往往需要防止分离。在实验以及理论分析^[6,75,76]的基础上,已经提出了几种控制边界层的方法。这些方法可以分类如下:

1. 使壁面运动
2. 使边界层加速(吹除)
3. 抽吸
4. 注射不同气体(二组元边界层)
5. 通过采用适当的外形(层流翼型)防止向湍流转捩
6. 冷却壁面

方法 1 至方法 4 就在本章讨论。方法 5 和方法 6 将在第十七章描述,那一章将讨论从层流向湍流转捩的理论。

G. V. Lachmann 的题为“边界层和流动控制”^[44]的论文,有根据当时研究状况写出的边界层控制问题的综述,此外还可参阅 P. K. Chang 的著作^[122]。直到第二次世界大战末期,几乎只有德国从事这方面问题的研究,A. Betz^[9]已经报道了这方面的成就。自从第二次世界大战末期以来,其他国家对这个问题的发

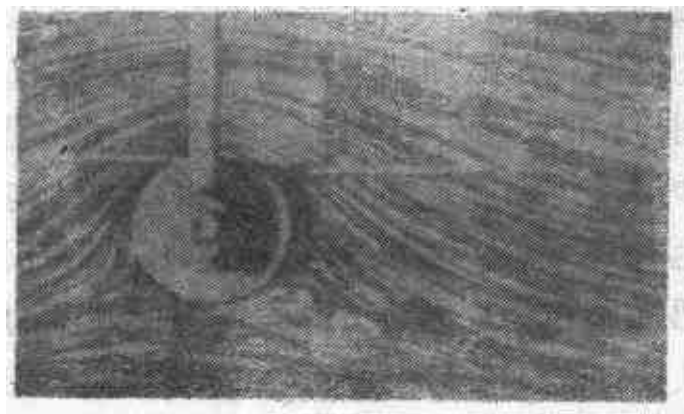


图 14.2 绕旋转圆柱的流动

在文献[44]以及[27, 36, 65, 104]中作出概括。

本章主要处理层流边界层控制问题。有关湍流边界层的问题将在第二十二章 b6 中加以研究。

1. 壁面运动 最明显的避免分离的方法是尽量防止形成边界层。因为边界层是由于流体与固壁之间的速度差造成的，所以尽量消除这个速度差，使得壁面随着流体一起运动，就能避免形成边界层。得到这种结果的最简单的方法是圆柱旋转。图 14.2 表示绕旋转圆柱的流动图象，圆柱放在与其轴线相垂直的流动中。在流动方向与柱面运动方向相同的上侧，完全消除了分离；而在流体运动方向与壁面运动方向相反的下侧，仅发生了不完全的分离。总的来说，这种流动图象非常接近于有环量的绕圆柱无摩擦流动的图象。在垂直于平均流动的方向上，流体对圆柱作用一个相当可观的力；有时称之为 Magnus 效应。例如，打网球“削”球时，就可以看到这种效应。另外，还曾试图利用旋转圆柱上产生的升力来推进船舶（Flettner 旋筒^[4]）。除了旋转圆柱之外，当形状不是圆柱时，使壁面随着流体运动的想法付诸实现是相当复杂的。因此，这种方法并没有得到很多实际应用。然而，A. Favre^[26] 还是对翼型上运动边界的影响进行了全面的实验研究。翼型的一部分上表面做成绕两个转轴运动的环带，所以返回运动发生在模型内部。这种装置表明对于避免分离非常有效，而且在大攻角 ($\alpha = 55^\circ$) 时得到很高的最大升力系数 ($C_{l,max} = 3.5$)。E. Truckenbrodt^[100] 计算出平板尾部随着流体一起运动的平板层流边界层。

2. 边界层加速(吹除) 防止分离的另一种方法，是向边界层中正在减速的流体质点添加能量。用特殊的压缩机从物体内部射出流体（见图 14.3a），或者直接从主流中引出所需要的能量，就可以得到这种结果。通过机翼内的缝隙将减速区与高压区连接起来，就能产生后一种效果（开缝机翼，见图 14.3b）。在这两种情形下，都能把添加的能量传给边界层内靠近壁面的流体质点。当流体射出时（比如用图 14.3a 所示的方法），为了避免射流在出口后面短距离内转化为旋涡，一定要非常注意缝口的形状。后来

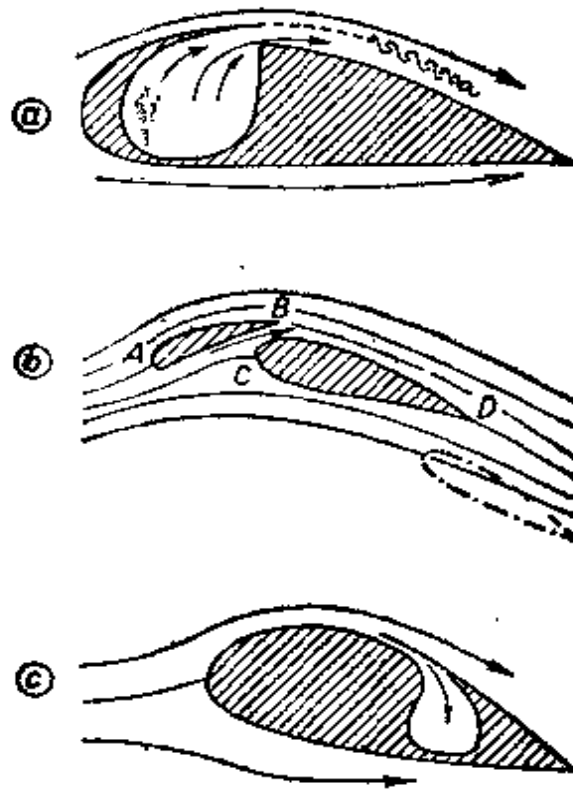


图 14.3 边界层控制的不同方案. a) 流体吹除, b) 开缝机翼, c) 抽吸

在法国所做的实验^[64], 使下述方法非常引人注目: 即在翼型后缘上采用吹除, 用以提高它的最大升力. 通过缝隙吹除大大提高襟翼最大升力的努力也获得了成功 (参看第十二章 b6). 在图 14.3b 所示的开缝机翼情形下^[7], 吹除产生的效果如下: 前缘缝翼 A—B 上形成的边界层在发生分离之前就被带入主流, 同时从 C 点开始形成一个新的边界层. 在适当条件下, 这个新边界层将无分离地到达后缘 D. 用这种方法可以在相当大的攻角下避免分离, 并且可以得到很大的升力. 在图 14.4 中, 对于带有或者不带前缘缝翼和襟翼几种情形的每种翼型, 各画出一条极曲线 (升力系数对阻力系数的关系曲线). 由靠近后缘的襟翼所形成的缝隙中的现象, 大体上与前缘缝翼的现象相同. 可以看出, 升力的增益是非常显著的.

在文献 [13] 中有吹除控制方面新近工作的评论.

3. 抽吸 抽吸的作用在于, 在减速的流体质点行将发生分离

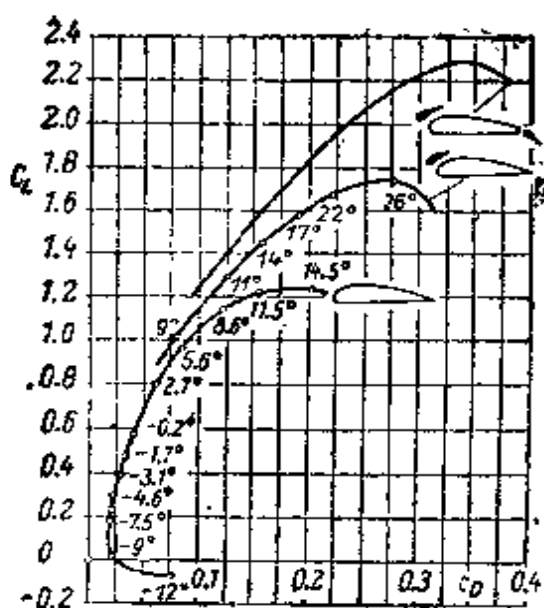


图 14.4 带有前缘缝翼和襟翼的机翼极曲线

之前，就把它们从边界层中吸除，见图 14.3c。而在缝口后而的区域，可以形成一个新的重新能克服一定逆压梯度的边界层。采用适当的缝口结构和在适当条件下，可以完全防止分离。这时，由于没有分离而大大减小压差阻力。L. Prandtl 首先进行了抽吸应用的实验（图 14.1），后来这个办法广泛地应用在飞机机翼设计上。由于采用抽吸，在大攻角时，在上翼面可以得到明显的吸力增加（即较低的绝对压力），从而得到更大的最大升力值。Q. Schrenk^[85] 研究过许多抽吸缝口的方案，以及它们对最大升力的影响，这方面还可参阅文献 [104]。

后来，还利用抽吸降低阻力。利用抽吸缝口的适当安排，能使边界层转捩点向下游移动；由于层流阻力远小于湍流阻力，从而使阻力系数减小（图 14.9）。这种由于抽吸引起的推迟转捩的作用，在于减小边界层的厚度，从而减小转为湍流的倾向^[9]。另外，有抽吸边界层的速度剖面更丰满（图 14.6），比起无抽吸而厚度相等的层流边界层来，它的形状更不容易产生湍流。在第十七章将更充分地讨论与转捩现象有关的问题，特别是那些涉及抽吸的问题。

4. 注射不同的气体 通过多孔壁面向边界层注入与外流不同的轻质气体，可以降低壁面与气流之间的热交换率^[84]。这是采用

这种方法所产生的最重要的作用之一。由于这个原因，这种方案经常用来提供高超声速速度下的热防护。注射在边界层内产生一种混合气体，因此除了动量传递和传热过程以外，还增加了由于扩散引起的传质过程。一般说来，对于沿浓度梯度的扩散而言，一定不要忽略热扩散。当液体薄膜在壁面上蒸发时，或者当壁面材料本身熔化或升华时，也会发生类似的过程。这后一过程将用术语烧蚀来描述，对此我们将在本章 c 中再讨论。

5. 通过采用适当的外形来防止转捩。层流翼型 利用适当形状的物体也可以推迟从层流向湍流的转捩。象抽吸情形一样，其目的也是通过使转捩点向下游移动来降低摩擦阻力。人们已经证实，外流中的压力梯度强烈地影响边界层转捩点的位置。在压力递减时，出现转捩的 Reynolds 数要比压力递增时高得多。压力沿流动方向递减对边界层具有很大的稳定作用；压力沿流动方向递增时作用相反。这种情形在现代低阻翼型上得到应用。将最大厚度截面大大后移，就能得到这种所希望的结果。采用这种方法，翼型的大部分区域是在向下游递减的压力影响下，因而能维持层流边界层。我们将在第十七章再讨论这个问题。

6. 冷却壁面 在一定的超声速马赫数范围内，通过对壁面冷却，完全能使边界层稳定（参看第十七章 e）。冷却还能用来减小边界层厚度，而且这种可能性很重要，例如使密度很低的气体流过风洞喷管时就是如此，不然太厚的边界层会使实验段的有效面积减小到不能容许的程度。

在以上讨论的所有方法中，通过抽吸控制边界层的方法，以及在层流翼型上防止转捩的方法最有实际意义。由于这个原因，已经建立了计算抽吸对边界层流动影响的各种数学方法；现在打算简要地回顾一下。

b. 边界层抽吸

1. 理论结果

1.1. 基本方程 在开始对有抽吸的层流边界层进行数学研究

时,最简单的是首先讨论连续抽吸的情形.可以设想这种情形用多孔壁面来实现.我们将采用普通的坐标系, x 轴沿着壁面, y 轴垂直于壁面,见图 14.5.通过在壁面上规定一个非零的法向速度分量 $v_0(x)$ 来说明抽吸量,在抽吸情形下设 $v_0 < 0$,在吹除情形下设 $v_0 > 0$.我们假设从气流中抽吸的流量非常小,以至只是邻近壁面的流体质点被吸走.这等于说,抽吸速度 v_0 对来流速度 U_∞ 的比值非常小,比如说 $v_0/U_\infty = 0.0001$ 到 $0.01^1)$.在存在抽吸的情形下,仍保留壁面无滑移的条件以及壁面切应力表达式

$$\tau_0 = \mu(\partial u / \partial y)_0.$$

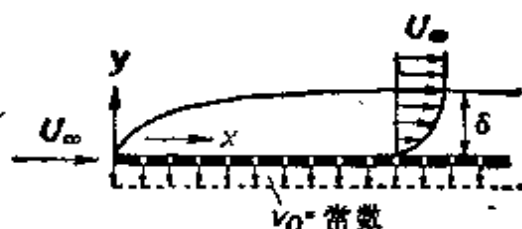


图 14.5 有均匀抽吸的零攻角平板

抽吸的流体流量 Q 用无量纲体积系数表示,设

$$Q = c_D A U_\infty, \quad (14.1)$$

其中 A 表示浸湿面积.对于平板, $Q = b \int_0^l [-v_0(x)] dx$,且 $A = bl$,因此

$$c_D = \frac{1}{l U_\infty} \int_0^l [-v_0(x)] dx, \quad (14.2)$$

而在均匀抽吸情形下, $v_0 = \text{常数}$,所以

$$c_D = \frac{-v_0}{U_\infty}. \quad (14.2a)$$

1) 为了确保壁面有抽吸或有吹除的流动满足边界层理论的简化条件,必须把壁面速度 v_0 的大小限制在 $U_\infty R^{-1/2}$ 的量级,其中 $R = U_\infty l / \nu$, l 表示位于流动中的物体特征长度.在 $R = 10^6$ 时,这个条件给出 $v_0 \sim 0.001 U_\infty$.在抽吸的量级这样小时,就能忽略位势外流的质量损失或“汇效应”.换句话说,可以假设位势流动不受固体表面上的这种吹除或抽吸的影响.

对于可压缩的二维流动,我们有下列微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

其边界条件是

$$\left. \begin{aligned} y=0: u=0, v=v_0(x); \\ y=\infty: u=U(x). \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

显然,对于任意物体形状的一般情形,即对于任意速度函数 $U(x)$ 的情形,上述方程组的积分并没有比无抽吸情形带来更多的困难。

然而,借助上述方程,即使不进行积分也可以定性估计抽吸对分离的影响。沿壁面 ($y=0$) 上的流线,方程 (14.3) 和 (14.4) 给出

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (14.5)$$

可以看出,在逆压梯度范围内 ($dp/dx > 0$), 加上抽吸 ($v_0 < 0$) 会减小壁面上的速度剖面曲率, 根据第七章提出的论点, 这意味着分离点向后移。依照将在第十七章给出的理论, 现在这种情形还有使层流边界层稳定的作用。由抽吸引起的两种作用, 即避免分离和使层流变为湍流的转换点出现在更高 Reynolds 数的作用, 已为实验结果所证实。

W. Wuest^[100] 发表了关于有抽吸边界层的各种计算方法的综述文章。

1.2 精确解。 在第九章 c 所描述的将位势速度展开成弧长的幂级数 (Blasius 级数) 的方法, 原则上也可用于这种情形。但是, 如无抽吸的情形一样, 最后的计算都是很麻烦的^[73]。只有在零攻角平板情形下, 才能得到比较简单的解。

平板: 在有均匀抽吸的零攻角平板情形下 (图 14.5), 可以得到异常简单的解。这组微分方程现在简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (14.5a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14.5b)$$

其边界条件是：在 $y = 0$ 处， $u = 0$ ， $v = v_0 = \text{常数} < 0$ ，和在 $y = \infty$ 处， $u = U_\infty$ 。可以立即看出，这组方程有一个速度与流动长度 x 无关的特解^[52,76]。令 $\partial u / \partial x \equiv 0$ ，由连续方程可以看出 $v(x, y) = v_0 = \text{常数}$ 。因此，运动方程成为

$$v_0 \partial u / \partial y = \nu \partial^2 u / \partial y^2,$$

其解是

$$u(y) = U_\infty [1 - \exp(v_0 y / \nu)]; \quad v(x, y) = v_0 < 0. \quad (14.6)$$

值得指出的是，这个简单解还是完整 Navier-Stokes 方程的精确解。其位移厚度和动量厚度是

$$\delta_1 = \frac{\nu}{-v_0}; \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{-v_0}; \quad (14.7); \quad (14.8)$$

而壁面切应力 $\tau_0 = \mu(\partial u / \partial y)_0$ 是

$$\tau_0 = \rho(-v_0)U_\infty, \quad (14.9)$$

而且与粘性无关。图 14.6 中的曲线 I 画出了这个速度分布。作为比较，曲线 II 表示无抽吸的 Blasius 速度分布。应该注意，这种抽吸速度剖面更丰满些。在有均匀抽吸的零攻角平板上，即使从前缘开始应用抽吸，也只是在离开前缘一定距离上才能得到这

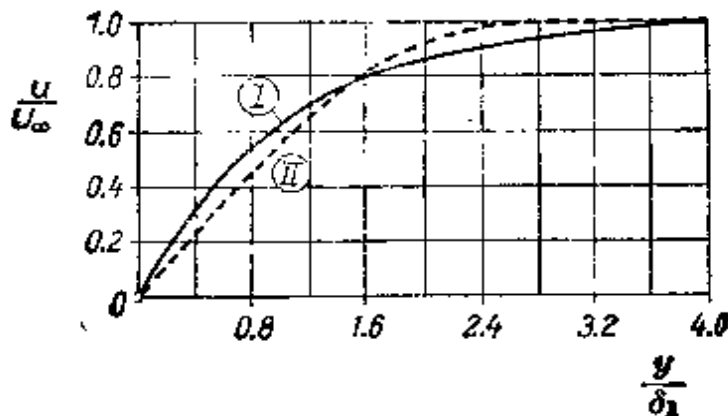


图 14.6 零攻角平板上边界层的速度分布
I. 均匀抽吸；“渐近抽吸剖面”
II. 无抽吸；“Blasius 剖面”

样的解。很明显，边界层从前缘的零厚度开始，然后沿顺流方向不断增加，并渐近地趋向于式(14.7)给出的值。速度剖面只是渐近地，即从实用观点来看在一定的起始长度之后，才达到式(14.6)给出的简单形式。由于这个原因，可以把上述特解看作渐近抽吸剖面。

R. Iglisch^[40] 对起始长度内的流动，即达到渐近状态之前的流

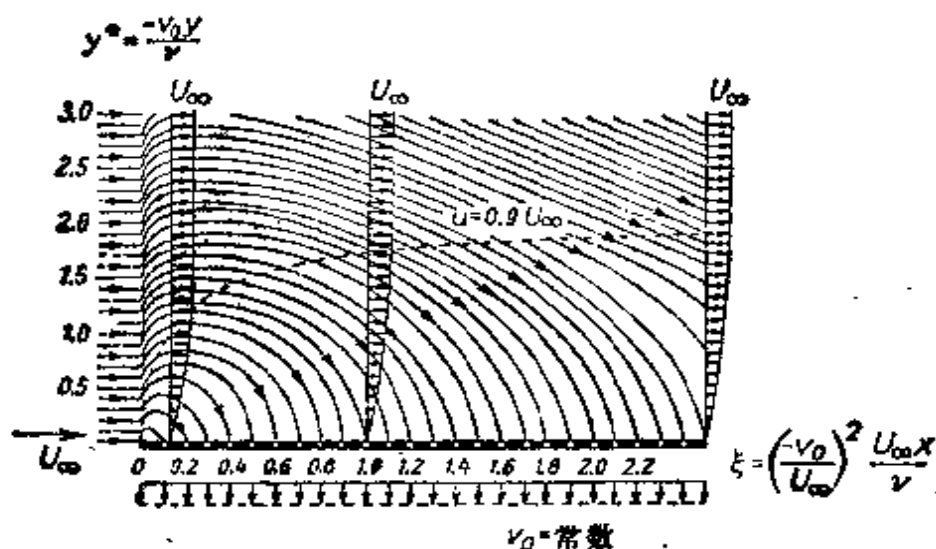


图 14.7 有均匀抽吸的平板；流动图象

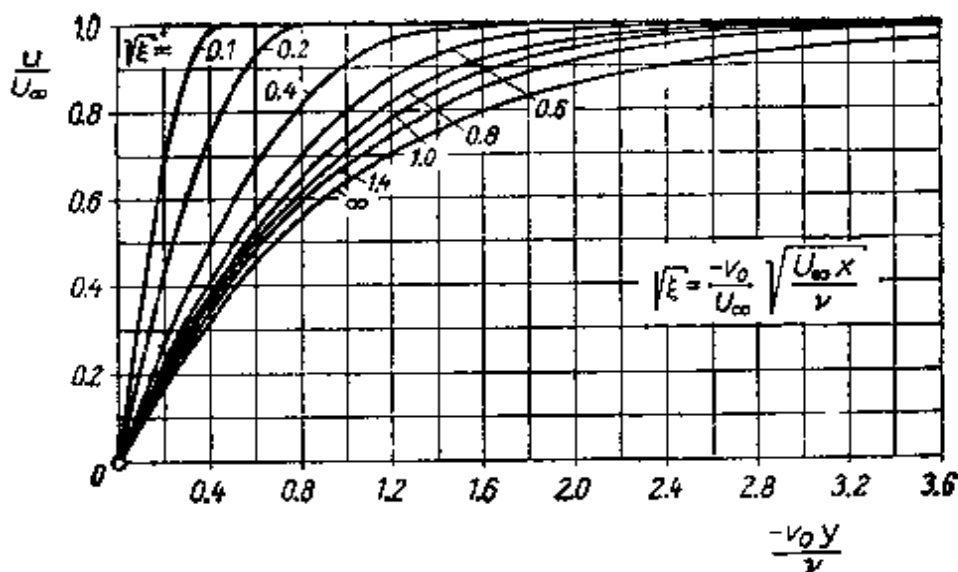


图 14.8 有均匀抽吸的平板，起始长度内的速度剖面，引自 Iglisch^[40]
 $\xi = \infty$ 的曲线相应于式(14.6)的“渐近抽吸剖面”

动,进行了较详细的研究,他证明经过一段长度之后才达到渐近状态,这段长度约为

$$\left(\frac{-v_0}{U_\infty}\right)^2 \frac{U_\infty x}{\nu} = 4 \text{ 或 } c_D \sqrt{R_x} = 2.$$

在起始长度内速度剖面本身是不相似的。在离开前缘一个短距离内,它们实际上与无抽吸情形的速度剖面是一样的 (Blasius 剖面, 见图 7.7)。在图 14.7 中画出了起始长度内的流线图象,图 14.8 中画出了速度剖面。表 14.1 的值描述边界层厚度从平板前缘的零值增加到式 (14.7) 给出的渐近值的过程; 这个表取自 R. Iglisch 的文章。

表 14.1 在有均匀抽吸的零攻角平板起始段内,速度剖面的无量纲边界层厚度 ξ 和形状因子 δ_1/δ_2 , 取自 Iglisch^[41]

$$\xi = \left(\frac{-v_0}{U_\infty}\right) \frac{U_\infty x}{\nu}; \quad \delta_1 \text{——位移厚度}$$

$$\delta_2 \text{——动量厚度}$$

ξ	$\frac{-v_0 \delta_1}{\nu}$	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$
0	0	2.59
0.005	0.114	2.53
0.02	0.211	2.47
0.045	0.303	2.43
0.08	0.381	2.39
0.125	0.450	2.35
0.18	0.511	2.31
0.245	0.566	2.28
0.32	0.614	2.25
0.405	0.658	2.23
0.5	0.695	2.21
0.72	0.761	2.17
0.98	0.812	2.14
1.28	0.853	2.11
2.0	0.911	2.07
2.88	0.948	2.05
5.12	0.983	2.01
8.0	0.996	2.00
∞	1	2

特别有趣的是用抽吸保持层流而引起的阻力减小,因而,也就是有抽吸情形下的摩擦定律.在图 14.9 中画出了这种摩擦定律.在很大 Reynolds 数 $U_\infty l/\nu$ 的情形下,此时平板的主要部分都属于渐近抽吸区,阻力由简单方程 (14.9) 给出,由此可以得出局部阻力系数

$$c'_{f, \infty} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 2 \frac{-v_0}{U_\infty} = 2c_Q. \quad (14.10)^{11}$$

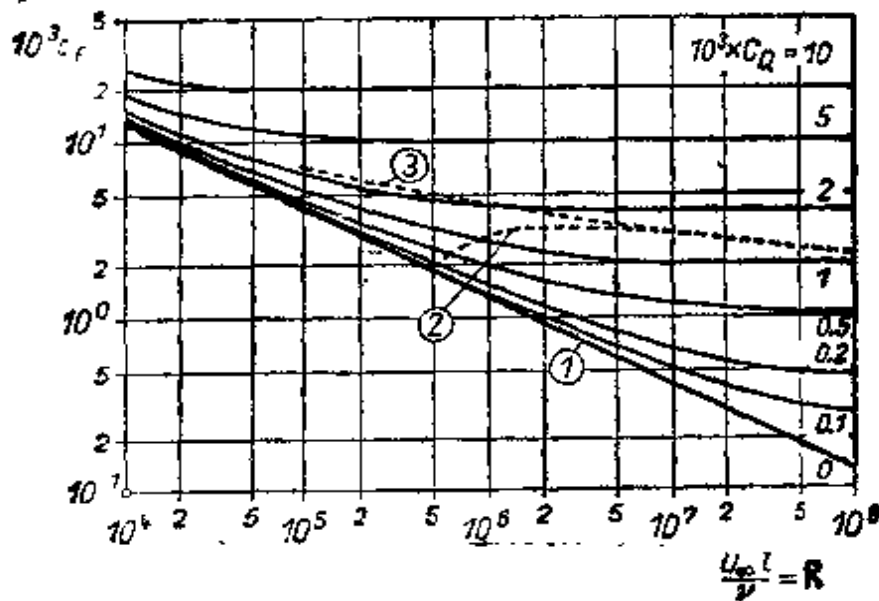


图 14.9 有均匀抽吸的零攻角平板的阻力系数

$c_Q = (-v_0)/U_\infty =$ 抽吸的体积系数

曲线 (1), (2), (3) 属于无抽吸的情形

(1) 层流; (2) 从层流向湍流转换; (3) 完全湍流

在小 Reynolds 数情形下阻力系数比较大,因为平板前部切应力比较大,就是说平板前部属于起始区,那里的边界层比起下游是比较薄的.为了比较起见,在图 14.9 中还画出了无抽吸湍流边界层的

- 1) 这种阻力完全不依赖于粘性.利用 $D = \tau_0 b l$ 和 $Q = (-v_0) b l$, 由式 (14.9) 可以得到

$$D = \rho Q U_\infty$$

这是由于吸收引起的阻力,即置于速度为 U_∞ 的无摩擦流动中且“吞进”流体流量为 Q 的物体所受到的阻力.应用动量定理可以非常简单地导出上述表达式 (参看 Prandtl-Tietjens, Hydro-u. Aeromechanik, vol. II, 1931, p. 140, Engl. transl. by J. P. den Hartog, 1934.)

平板阻力。在第二十一章将更充分地讨论这种情形。只要知道大 Reynolds 数下能确保边界层层流条件的最小抽吸体积系数值，就能从这张曲线图求出阻力的减小。在第十七章将和转捩现象一起研究这个问题。到那时将证明，存在一个“最有利抽吸”的曲线；这条曲线画在图 17.19 中。应该注意，通过抽吸引起的阻力减小是非常显著的，而且所需要的抽吸强度很小，因为它相应于 $c_D = 10^{-4}$ 的量级。H. G. Lew 和 J. B. Fanucci^[47] 得到了可压缩流动中有均匀抽吸的平板解；W. Wuest^[47] 解出了任意横截面柱体的同样问题。

J. M. Kay^[48] 曾用实验来检验这些零攻角平板的理论结果。在试验平板中，没有满足均匀抽吸从前缘开始的假设；这个假设是 Iglisch 理论计算的基础。而且，试验平板的前缘部分根本就没有抽吸。图 14.10 绘出了位移厚度和动量厚度的测量值和计算值的比较。可以看出，这些测量值已经证实了式 (14.7) 和 (14.8) 表示的渐近值。图 14.11 示出不同 ξ 值下的理论计算和测量结果的比较；这些测量结果是由 M. R. Head^[35] 完成的，同样，其一致性也是

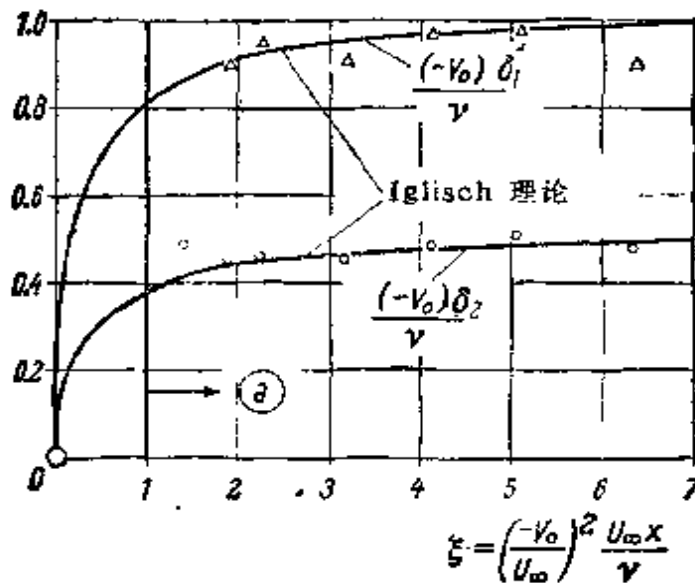


图 14.10 有均匀抽吸的零攻角平板层流边界层。这里的位移厚度 δ_1^* 和动量厚度 δ_2 由 J. M. Kay^[48] 测出。理论曲线取自 R. Iglisch^[40] (表 14.1)。a = 抽吸开始的截面

令人满意的。另外，如将在第十七章中更充分说明的，P.A. Libby, L. Kaufmann 和 R. P. Harington^[49] 所做的测量，证实了抽吸产生很强的稳定作用（提高了临界 Reynolds 数）。M. Jones 和 M. R. Head^[41] 及 A. Rospert^[70] 所做的测量，证实了由于应用抽吸而保持层流所引起的表面摩擦的显著下降，在图 14.9 中画出了这种下降。

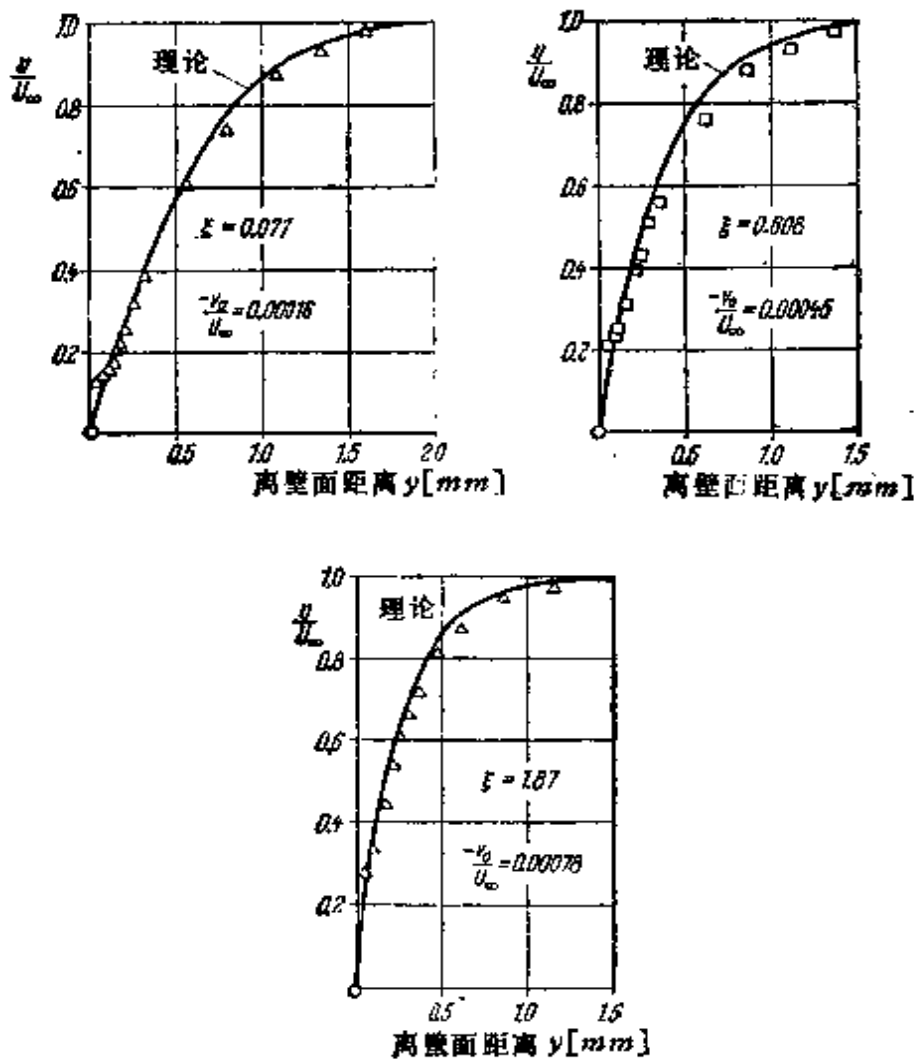


图 14.11 在通过多孔壁面进行抽吸的翼型上层流边界层的速度分布，由 M. R. Head^[37] 完成这些测量；与 R. Iglish 的理论^[40] 作比较

有压力梯度的边界层：只是对于有相似性速度剖面的流动图象的情形，才得出边界层方程 (14.3) 和 (14.4) 的另外一些精确解。第八章中讨论的那种相似解可以推广到包括有抽吸和吹除的边界层。当外部流动速度可以用函数 $U(x) = u_\infty x^m$ 描述而

抽吸速度 v_0 正比于 $x^{(1/2)(m-1)}$ 时, 由边界层方程又可以得出已经熟悉的流函数 $f(\eta)$ 的常微分方程, 这是 Falkner 和 Skan 首先导出的, 即熟知的方程 (9.8):

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0,$$

其中 η 已由式 (9.5) 定义. 从式 (9.5) 出发, 通过检验, 就可以推断出这个方程仍然成立. 在目前的情形下, 在 $\eta = 0$ 的壁面上, 流函数 $f(\eta)$ 的值不为零. 在有抽吸的情形下, 这个值是正的, 而在有吹除时, 它是负的.

H. Schlichting 和 K. Bussmann^[79, 80] 研究了 $m = 0$ 的特殊情形, 这相当于有抽吸的平板, 其抽吸速度为

$$v_0(x) = -\frac{1}{2} C \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}; \quad C > 0, \text{抽吸} \quad (14.11)$$

$$C < 0, \text{吹除}$$

在图 14.12 中画出了几个体积系数下的速度剖面. 值得指出的是, 在有吹除的情形下, 所有速度剖面都有 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ 的拐点. 这一点对研究转换是重要的 (见第十六章). 在速度函数为 $U(x) = u_1 x$ 的有抽吸二维驻点流动问题中, 只要 $v_0 = \text{常数}$, 也可以得到相似性速度剖面. 在前面引用过的 H. Schlichting 和 K. Bussmann 的文章中也研究了这种情形.

对于有抽吸的平板边界层 ($m = 0$), 在参数 C 很宽的范围, H. W. Emmons 和 D. C. Leigh^[81] 以及 J. Steinheuer (参看第七章) 计算出大量的表格. 在 $m \neq 0$ 的情形下, 在很宽的参数值范围内, 还有另外一些数值解^[82]. 图 14.13 中的曲线表示壁面切应力、抽吸速度和外部流动参数 β 之间的关系, 其中壁面切应力正比于 $f''(0)$, 抽吸速度正比于 $f(0)$. 分离点的位置由 $\tau_0 = 0$ 的参数确定, 也就是由 $f''(0) = 0$ 的条件确定. 从图 14.13 很清楚, 即使在急剧减速的流动中 (例如, 当 $\beta = -1$ 时, 即

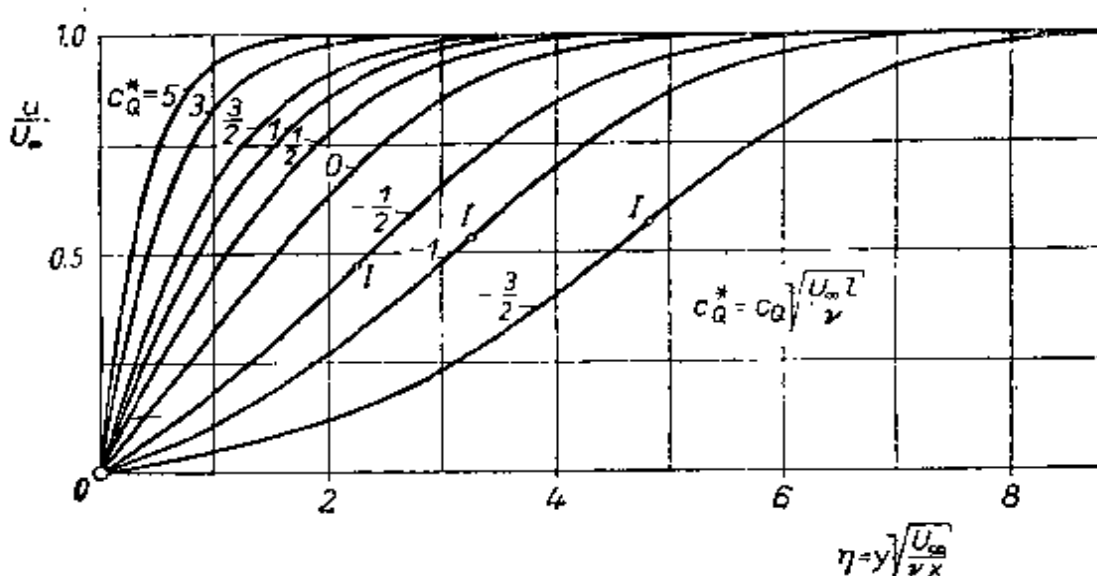


图 14.12 有抽吸和吹除的零攻角平板边界层内的速度分布, 其中抽吸和吹除是根据式 (14.11) 按 $v_0 \sim 1/\sqrt{x}$ 的规律进行的. 根据 H. Schlichting 和 K. Bussmann^[79], $C = c_Q^* =$ 约化的抽吸体积系数. $c_Q^* > 0$: 抽吸; $c_Q^* < 0$: 吹除; I = 拐点

$m = -\frac{1}{3}$ 时), 也可以利用强烈的抽吸消除分离. 当吹除质量流量变大时, 可以看出相应的数值计算变得很困难, 因为速度剖面出现一个纽结. J. Pretsch^[69] 首先发现了这个细节, 他从渐近解的讨论中导出这个结果. E. J. Watson^[102] 研究了抽吸速度较大时上述相似解的渐近性质.

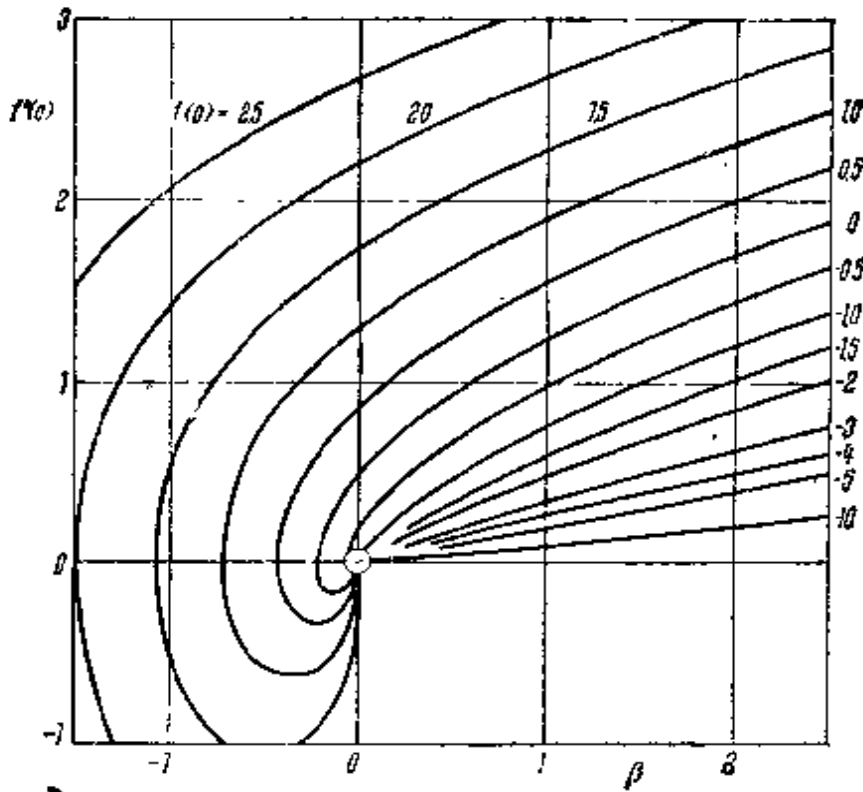


图 14.13 当外流速度为 $U(x) = u_1 x^m$ 时, 对于有抽吸层流边界层, 其壁面切应力 τ_0 和抽吸速度 v_0 的关系, 根据 N. Nickel^[77]. 由 $\tau_0 = 0$, 即 $f''(0) = 0$ 的条件确定分离点位置. 注意:

$$\tau_0 / \rho U^2 = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f''(0),$$

$$v_0 / U = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f(0).$$

$f(0) > 0$ 表示抽吸, $f(0) < 0$ 表示吹除, 且 $\beta = \frac{2m}{m+1}$, 见式(9.7)

外部流动速度为 $U(x) = u_1 x^m$ 的解成为一系列进一步研究的基础, 这些研究的目的在于发现有抽吸或吹除的层流边界层的其他精确解:

- K. D. P. Sinhar^[86] 研究了有抽吸的无限长偏航柱体的问题. 假设沿气流的速度分布正比于 x^m . 这种研究对于后掠翼的边界层控制有一定的意义.
- 当喷出流体的温度与外部流动中流体的温度不同时, 边界层内将形成一个温度剖面. 在文献 [55] 和 [111] 中计算了这种温度边界层. 了解边界层内的温度分布

对于冷却问题特别重要。可以得出，通过从多孔壁面吹出冷却剂的冷却方法，即所谓发汗冷却，比在内部冷却壁面有效得多。在这方面可以参阅 B. Brown^[11, 12], P. L. Donoughe 和 J. N. B. Livingood^[10] 以及 W. Wuest^[109] 的文章。

c) 对于高速流动，冷却问题是非常重要的。G.M. Low^[110] 求得了可压缩流动流过等温平板情形的解；还可参阅文献 [45, 110]。

有抽吸的可压缩边界层：A. D. Young^[111] 和 H. G. Lew^[45] 证明，在均匀抽吸的情形下，对于沿零攻角平板的可压缩流动，也存在渐近解。这可以推导如下：根据方程 (13.5) 和 (13.6)，可以写出连续方程和动量方程

$$\frac{d(\rho v)}{dy} = 0, \quad (14.12)$$

$$\rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right). \quad (14.13)$$

由式 (14.12) 可以得出

$$\rho v = \rho_0 v_0 = \text{常数}.$$

因此，由式 (14.13) 得出

$$\frac{du}{u - U_\infty} = \frac{v_0 \rho_0}{\mu} dy. \quad (14.14)$$

假定粘性定律 $\mu/\mu_\infty = CT/T_\infty$ 成立，可以看出 $\rho\mu = \rho_0\mu_0$ 。于是，式 (14.14) 积分为

$$u(y) = U_\infty \left\{ 1 - \exp \left(\frac{v_0 \rho_\infty y_1}{\mu_0} \right) \right\}, \quad (14.15)$$

其中

$$y_1 = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy. \quad (14.16)$$

上述关系对于任意 Prandtl 数都是成立的。壁面切应力和式 (14.9) 一致，现在是

$$\tau_0 = \rho_0 (-v_0) U_\infty. \quad (14.17)$$

当 $P = 1$ 和壁面绝热时，可以进一步专门研究式 (14.15) 和 (14.16)。计算得到下述显式表达式

$$\frac{v_0 \rho_\infty y}{\mu_0} = \left(\frac{T_s}{T_\infty} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 + \frac{u}{U_\infty} \right\}$$

$$- \ln \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right), \quad (14.18)$$

($P = 1$; 绝热壁). 当流动不可压缩时, 我们有 $T_s = T_\infty$, 同时式 (14.18) 化为式 (14.6).

1.3. 近似解. 在任意物体形状和任意抽吸律的一般情形下, 我们必须采用基于动量方程的近似方法; 在第十章已描述过这些方法. 除了必须注意到壁面上的法向速度分量不为零外, 有抽吸情形的动量方程可以用和以前完全一样的方法求得. 经过如第八章 e 同样的计算, 我们发现, 在离壁面一段距离 $y = h$ 上, 现在法向速度分量的方程成为

$$v_h = v_0 - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

用和第八章 e 完全相同的方法继续进行计算, 最后得到下述有抽吸边界层的动量方程:

$$\frac{d}{dx}(U^2 \delta_2) + \delta_2 U \frac{dU}{dx} - v_0 U = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (14.19)$$

根据 K. Wieghardt^[193] 的讨论, 能量积分方程的形式如下:

$$\frac{d}{dx}(U^3 \delta_3) - v_0 U^2 = 2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho} \frac{du}{dy} dy. \quad (14.20)$$

与方程 (8.32) 和 (8.35) 相比, 这里的附加项分别表示由于壁面抽吸引起的动量和能量的变化.

L. Prandtl^[67] 曾用方程 (14.19) 对刚好足以防止分离的抽吸速度进行了简单估算. 设沿整个长度上的速度剖面与分离点上的速度剖面 (即满足 $\tau_0 = \mu(\partial u / \partial y)_0 = 0$ 的剖面) 相同, 同时正如 Pohlhausen 所假设的, 取 $\Lambda = -12$, 就能由式 (10.22) 导出速度为

$$u = U \left\{ 6 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - 8 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right\}.$$

位移厚度和动量厚度由式 (10.24) 得出, 它们分别是

$$\delta_1 = \frac{2}{5} \delta; \quad \delta_2 = \frac{4}{35} \delta,$$

于是

$$\delta_1 + 2\delta_2 = \frac{22}{35} \delta.$$

将这些值代入方程 (14.19), 并且注意到, 由于边界层厚度不变的假设, $d\delta_2/dx = 0$, 则有

$$v_0 = \frac{22}{35} \delta \frac{dU}{dx}. \quad (14.20a)$$

另外, 根据方程 (14.5), 在 $y = 0$ 上有

$$v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = U \frac{dU}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0. \quad (14.21)$$

在所考虑的情形下, $(\partial u / \partial y)_0 = 0$ 和 $(\partial^2 u / \partial y^2)_0 = 12U / \delta^2$. 因此, 我们由式 (14.21) 得出

$$\delta = \sqrt{\frac{12\nu}{-dU/dx}}, \quad (14.22)$$

并且由式 (14.20a) 和 (14.22) 得出

$$v_0 = -2.18 \sqrt{\nu \left(-\frac{dU}{dx} \right)}. \quad (14.23)$$

可以看出, 这个抽吸速度刚好足以防止沿整个壁面的分离. 作为一个例子, 考虑半径为 R 的圆柱绕流情形, 其后驻点处

$$dU/dx = -2U_\infty/R,$$

并应用式 (14.3), 我们得出为防止分离所应使用的体积系数为

$$c_D \sqrt{\frac{U_\infty R}{\nu}} = 2.18 \sqrt{2} = 3.08.$$

对于使用任意抽吸速度 v_0 的任意形状物体上的边界层计算, H. Schlichting^[77,81] 指出了一种近似计算方法. 这种方法类似于 Kármán-Pohlhausen 方法, 并使用了动量方程. T. P. Torda^[59] 对这个方法做了改进. L. Trilling^[99], B. Thwaites^[39,96] 和 F. Ringleb^[74] 的文章叙述了适用于任意压力分布以及任意抽吸速度分布的一些方法. K. Wieghardt^[103] 将它们推广到轴对称物体的情形, 而 J. T. Stuart^[88a] 解出了旋转圆盘的情形. E. Truckebrodt^[102] 提出了一种近似方法, 它适用于二维以及轴对称情形, 并且由于它特别简单而优于其他方法. 这里, 整个问题已经变成解一个一阶常

微分方程的问题。在无抽吸的极限情形下,即当壁面不可渗透时,这个方程与 A. Walz 给出的方程(参看第十章 b)一样。在图 14.14 中绘出了使用这种方法对 Zhukovskii 翼型计算的结果。可以看出,当抽吸强度增加时,分离点向后缘移动,而且从某个抽吸强度开始根本就不发生分离。

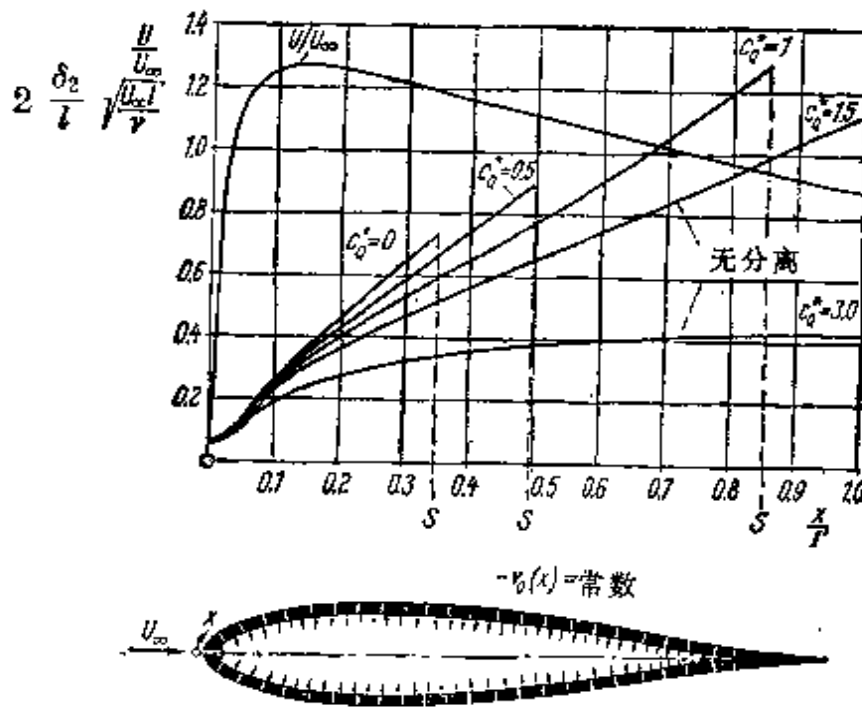


图 14.14 有均匀抽吸的对称 Zhukovskii 翼型上的层流边界层;由 E. Truckenbrodt^[101] 计算, $v_0(x) = \text{常数}$, 攻角 $\alpha = 0$

$\delta_2 =$ 动量厚度; $l =$ 半周长; $c_s^* = c_Q \sqrt{U_\infty l / \nu} =$ 约化抽吸体积系数。随着抽吸增加,即当 $c_s^* > 1.12$ 时,根本就不发生分离

R. Eppler^[23] 提出了一种计算有抽吸的层流和湍流边界层的近似方法,这种方法对数字计算机的程序设计非常适宜。在文献 [49, 55, 111] 中提出了有抽吸和有吹除的可压缩边界层的相应近似方法,其中特别注意到有关传热的问题,这对冷却问题很重要。一些近似方法也可用来计算有吹除和有抽吸的湍流边界层^[14, 30, 76],至少它们可用于平板情形;它们全都使用了 Prandtl 混合长假设(参看第十九章 b)。W. Pechau^[60a] 发表了一种计算有任意外部流动和任意抽吸分布的可压缩层流边界层的近似方法,不过这种方法只用于壁面绝热且 Prandtl 数 $P = 1$ 的特殊情形。

2 关于抽吸的一些实验结果 早在 1904 年 Prandtl 就发表了一组照片,这组照片的流动图象说明,即使在非流线型的钝体(例如圆柱)情形下,抽吸也能使流动附着在壁面上,否则在照片中应该有强烈旋涡结构.图 2.14 和 2.15 说明在扩张槽中使用抽吸对流动的影响.在正常条件下(图 2.13),在迅速扩张槽中,流动会猛烈地从壁面上分离,而通过两边狭缝从两侧进行抽吸,则能使流动完全附着在壁面上(图 2.15).

当把抽吸应用于机翼时,必须辨别可能出现的两种不同性质的问题:

1. 或许是需要通过推迟分离来增加最大升力.
2. 或许是希望保持层流和避免转捩,以便减小表面摩擦力.

我们打算简短地说明一下与这两个问题有关的一些考虑.

2.1. 增加升力. 无论边界层是层流的还是湍流的,都能通过抽吸和吹除提高翼型的最大升力.在讨论湍流边界层的第二十二章 §6 中,将对某些新近的研究工作给予说明.这里,我们先叙述一些比较早期的实验结果.二十年代末和三十年代初,在 Goetti-

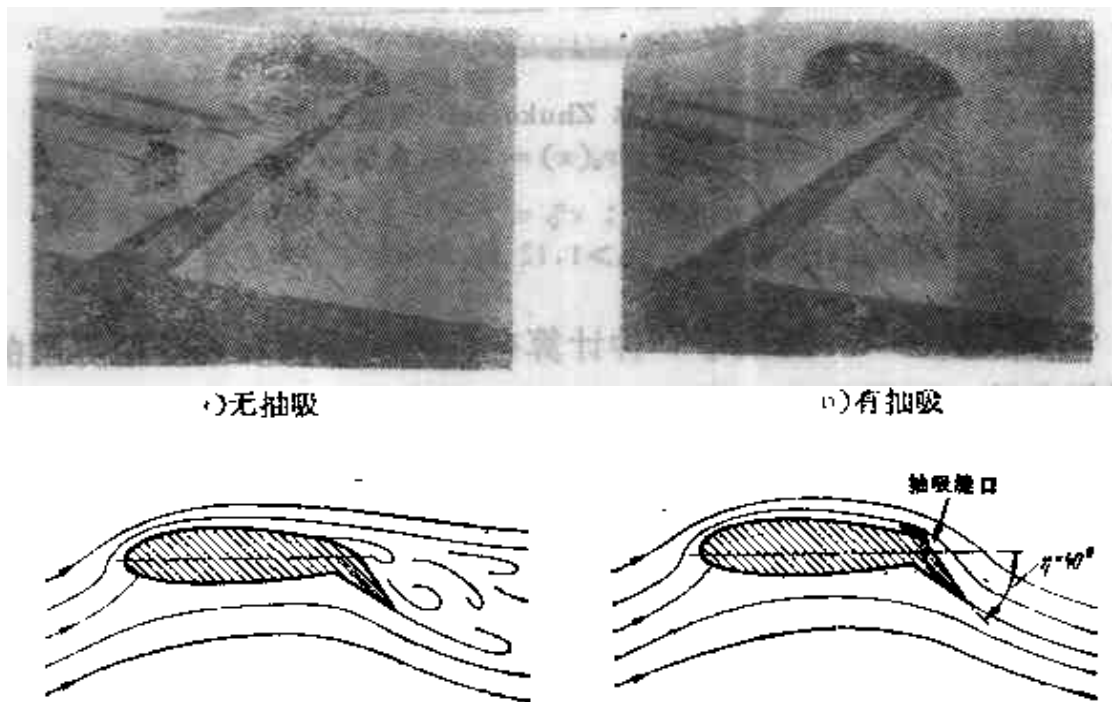


图 14.15 绕 Goettingen 实验飞机机翼的流动;襟翼处于向下的位置;这两幅照片表示无抽吸和有抽吸的流动. a) 无抽吸: 流场从襟翼上分离, b) 有抽吸: 流动附着于襟翼

ngen 的 Aerodynamische Versuchsanstalt 由 O. Schrenk 指导制定的一项研究计划的执行期间，曾汇集了大量有关利用抽吸增加升力系数的实验资料。抽吸的作用在于，比起无抽吸的情形，能在更大攻角下保持位势流动的图象。在文献 [84] 中，O. Schrenk 对这项工作发表了一篇综合评述。这些实验的水平达到了如此先进的程度^[89]，以致在三十年代末 Göttingen 的这个研究所就能造出两架实验飞机，其中利用抽吸来改进性能。J. Stueper^[93] 对这些实验飞机作了详细叙述。图 14.15 示出其中一架实验飞机机翼流场的照片。在机翼和襟翼之间的缝隙内采用了抽吸，抽吸的作用可以清楚地从照片中显示的线丝状态推断出来：当无抽吸时（图 14.15a），流动完全从襟翼上分离，而接通抽吸时，流动又完全附着于襟翼（图 14.15b）。A. Gerber^[30] 系统地研究了某些抽吸状况，例如，最佳缝口形状，缝口附近的速度分布，缝口周围的压力分布，等等。

后来在英国^[58, 59] 和美国^[88]，对薄翼型的抽吸作用进行了广泛的研究。因为在大攻角下，薄翼上表面的头部附近出现一个尖的负压峰值，所以必须在那里采用抽吸。在这方面，重要的是要知道，是采用多孔壁面抽吸（均匀抽吸），还是采用一系列缝口的抽吸。图 14.16 中的曲线画出了后掠翼上连续抽吸与缝口抽吸两者

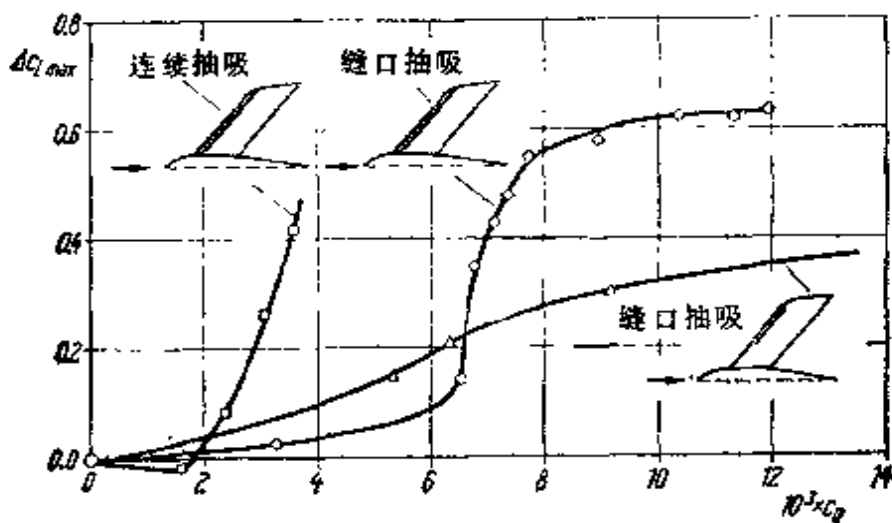


图 14.16 通过抽吸提高后掠翼的最大升力，连续抽吸和缝口抽吸的比较，由 F. D. Poppleton^[66] 测量
Reynolds 数 $R = 1.3 \times 10^6$ ；缝口相对宽度 $s/l = 0.004$

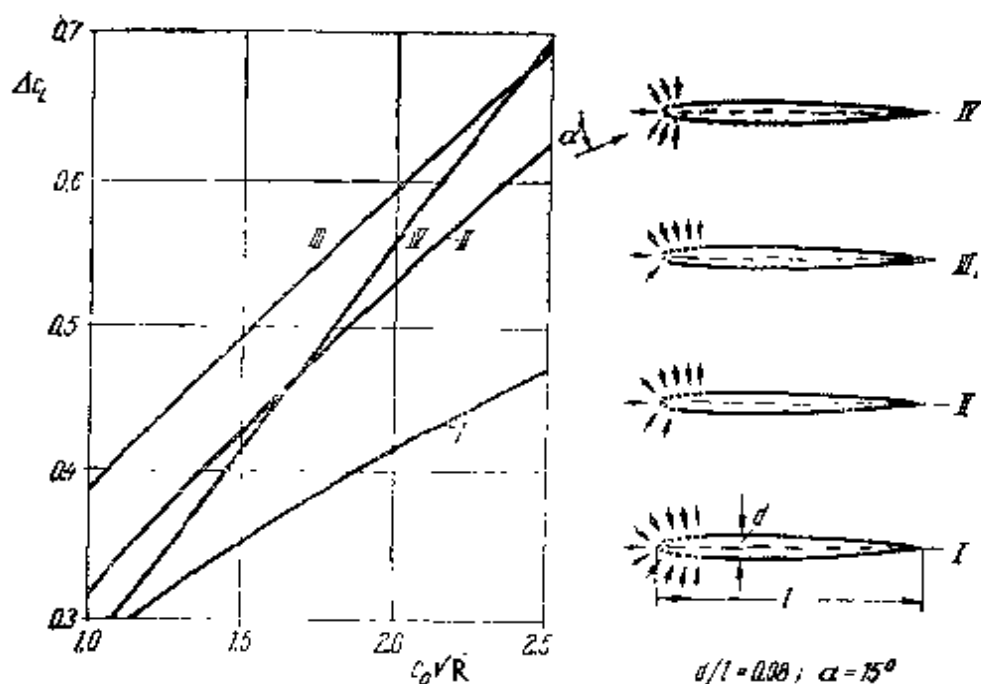


图 14.17 在攻角 $\alpha = 15^\circ$ 的 8% 厚度翼型上改变多孔抽吸表面位置对升力系数增量的影响

结果之间的比较,由 E. D. Poppleton^[66] 测量;此外还可参看文献 [38]。很明显,当采用连续抽吸时,用大大减小的质量流量可以得到同样大的升力系数增量。图 14.17 中的曲线有关于头部抽吸区最佳位置的数据资料。在厚度为 8% 的对称翼型上所做的实验似乎表明,当连续抽吸限于机翼上表面并且大约延伸到 $0.15l$ 时,这种连续抽吸最有效。为避免分离所需要的最小质量流量,不仅依赖于多孔表面的位置和范围,更重要的还依赖于 Reynolds 数。当将模型实验结果应用于全尺寸翼型时,这当然是一种非常重要的考虑。图 14.18 中示出了该质量流量与 Reynolds 数关系的一些数据。它们是基于 N. Gregory 和 W. S. Walker^[32] 对薄对称翼型所做的测量画出的。图中实线是在固定攻角 $\alpha = 14^\circ$ 下为避免分离所需要的最小抽吸体积流量与 Reynolds 数的关系曲线。为了比较起见,图中还画出了几条根据纯层流理论得出的 $c_Q\sqrt{R} = \text{常数}$ 的曲线。

2.2. 减小阻力。 首先 H. Holstein^[37], 接着 J. Ackeret, M.

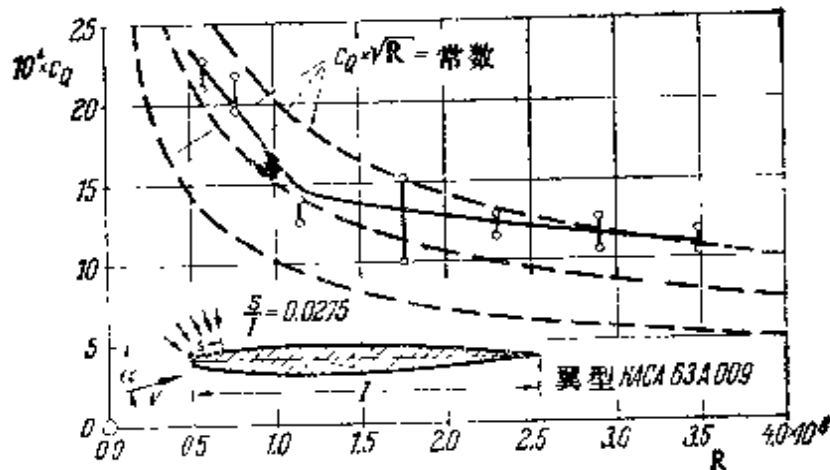


图 14.18 在攻角 $\alpha = 14^\circ$ 时为防止分离所需要的最小抽吸体积流量与 Reynolds 数的关系。根据 Gregory 和 Walker^[32]

Ras 和 W. Pfenninger^[3] 作了通过抽吸能维持边界层层流状态的实验验证。关于利用抽吸维持层流来降低阻力的问题，W. Pfenninger^[61] 做了大量实验。图 14.19 引用了他在装有大量抽吸缝口的薄翼上获得的一些结果。图 14.19a 中实线是阻力系数最佳值随 Reynolds 数变化的关系曲线。可以看出，即使把抽气泵的功率消耗算进阻力，阻力也有明显的减小。曲线图还表明，在中等升力系数情形下，即使 Reynolds 数很大，阻力系数值也不比零攻角平板的高多少。而且，图 14.19b 说明，在升力系数值 c_L 的很大范围内都存在这种低阻力值。另外，实验还表明，利用抽吸保持层流而引起的阻力降低，在很大程度上依赖于对缝口形状的仔细修整。如果不采取这种预防措施，流动会受到缝口的很大影响，以致容易发生向湍流转捩，在这方面还可参看 N. Gregory 的文章^[33]。在一篇美国人的文章^[40]中，仔细研究了利用多孔壁面的连续抽吸来维持层流直至很高 Reynolds 数（量级为 $R = 20 \times 10^6$ ）的可能性。在这种情形下，即使考虑到为维持层流所需要的机械功，也可以获得阻力显著减小的效果。

当试图通过抽吸，或者如已讲过的，仅仅通过给出适当外形来维持层流边界层时，最重要的是对位势速度要有很好的了解。在

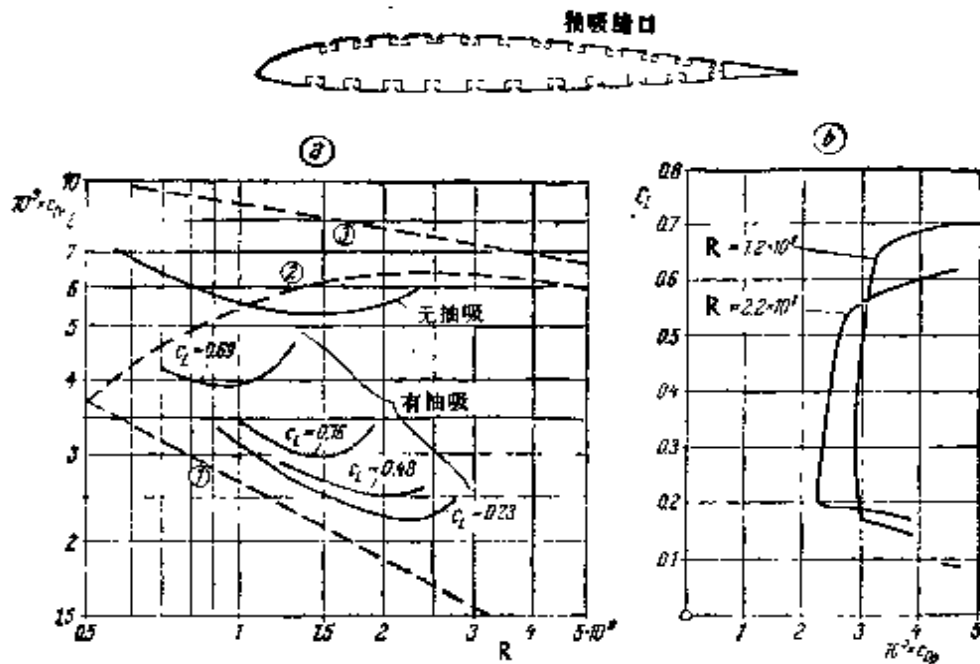


图 14.19 用大量缝口抽吸推迟转换来减小翼型阻力,引自 W. Pfenninger^[61], 泵的能量损耗已计入阻力系数
a) 阻力系数最佳值随 Reynolds 数 R 变化的关系曲线
曲线(1),(2)和(3)无抽吸;(1)平板,层流;(2)平板,转换;(3)平板,充分发展的湍流
b) 两个不同 Reynolds 数下的极曲线, 在一个升力系数 C_L 值增加的区域存在非常低的阻力系数

每种情形下,都必须在截面的尽可能大的部分上使压力降低。有关这个问题的大量实验是 S. Goldstein^[51] 及其合作者们做的。计算能确定出具有所规定的位势速度分布的翼型截面形状。为了得到直到后缘都保持层流的翼型,有人曾建议采用这样一些外形,它们在整个长度上都显示出压力降低(速度增加),只是在一个位置上突然出现压力增高,如图 14.20 所示。假若按 Griffith^[73] 的建议将吸缝安排在压力跳跃点上,则能保证在一些厚翼上直到吸缝都是层流边界层,而且在吸缝之后也能防止分离。B. Regenscheit^[71,72] 和 B. Thwaites^[94] 建议通过改变抽吸强度来“调整”厚翼的升力,因而得到不依赖于攻角的升力。后来有许多利用从边界层吸出的空气来提高喷气式飞机推力的建议。

F. X. Wortmann^[105] 和 W. Pfenninger^[62,63] 的文章报道了关

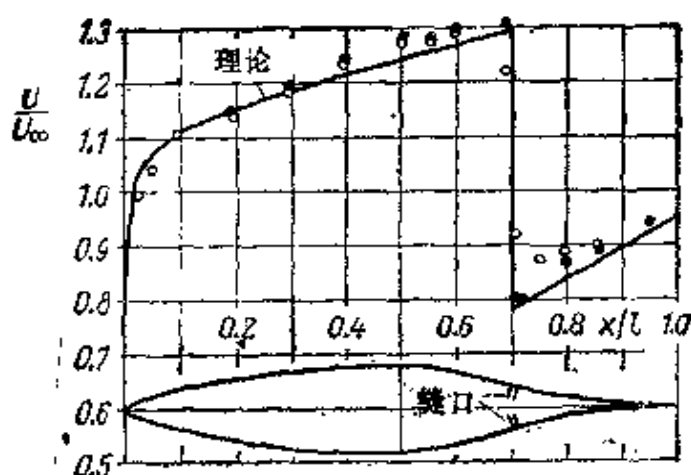


图 14.20 有抽吸对称翼型上的理论速度分布和实验速度分布;根据 Goldstein^[51]
 $c_L = 0; R = 3.85 \times 10^6$
 \circ = 无抽吸的测量值;
 \bullet = 有抽吸的测量值

于层流翼型设计和推迟后掠翼转捩的更新的成果。

G. V. Lachmann^[43] 和 C. R. Pankhurst^[59] 提出了一篇关于飞机结构和边界层控制问题的综合评论。M. H. Smith^[88] 的文章有大量的参考文献目录。

在有抽吸的边界层中，从层流向湍流的转捩过程将在第十七章 c 详细研究。

c. 注射不同的气体(二组元边界层)

1. 理论结果

1.1. 基本方程。 当空间飞行器返回稠密大气层时，在飞行器头部或者沿壁面的边界层内产生的滞止作用会引起很高的温度。为了将传入飞行器的热量减小到很小的部分，可以通过多孔壁面向外注射轻质气体或液体。这种轻质气体或蒸发的液体将沿着壁面形成一个薄层。如果容许壁面材料(例如石墨、玻璃或者合成材料)升华而减小壁厚(烧蚀)，则也能产生类似的效果。在所有这些情形下，都会形成其中有两种或多种气体并经过扩散而互相混合的边界层。

在流动的混合气体中，每种组元 i 都以各自不同的平均速度 w_i 运动。为了描述速度场，最好引进一个平均或质心速度 $w = \sum \rho_i w_i / \sum \rho_i$ ，其中 $\sum \rho_i = \rho$ 表示总的密度。速度 w_i 对质心速度 w 的偏离叫做这种组元的扩散速度 W_i ，所以

$$w_i = W_i + w.$$

由于 w 的定义，我们一定有 $\sum \rho_i W_i = 0$ ，并且对于每种组元 i ，可以写出如下形式的质量守恒定律：

$$\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{w}_i) = \operatorname{div}\{\rho_i(\mathbf{w} + \mathbf{W}_i)\} = 0, \quad (14.24)$$

对所有组元求和,可以得到连续方程

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \quad (14.25)$$

它具有式(3.1)那种熟悉的形式.

在无外流场情形下,这种扩散流动基本上是由浓度梯度以及热扩散引起的,后者在有温度梯度时产生质量流动.在二元情形下,可以写出扩散定律如下:

$$c_1 \mathbf{W}_1 = -D_{12}(\operatorname{grad} c_1 + k_T \operatorname{grad} \ln T), \quad (14.26)$$

其中 D_{12} 表示二元扩散系数, k_T 是热扩散比,而 $c_1 = \rho_1/\rho$ 是第一种气体(假设是从壁面流出的气体)的质量浓度.二元扩散系数只稍稍依赖于浓度,而其受温度影响的方式则与运动粘性系数相同.热扩散比 k_T 基本上依赖于浓度,并常常用下述相当粗糙的关系式来近似:

$$k_T = \alpha c_1(1 - c_1), \quad (14.27)$$

这个关系式是由 Onsager, Furry 和 Jones 给出的.这里假设对这些气体的每种特定组合,其热扩散系数 α 都等于常数.

将式(14.26)代入第一组元的质守恒定律,式(14.24),并考虑到式(14.25),则可以得到

$$\rho \left(u \frac{\partial c_1}{\partial x} + v \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \operatorname{div}\{\rho D_{12}(\operatorname{grad} c_1 + k_T \operatorname{grad} \ln T)\}.$$

我们现在可以将通常的边界层简化用到该方程的右边,于是相对于 $\partial/\partial y$ 项,可以略掉 $\partial/\partial x$ 项.用这种方法可以得到**浓度方程**

$$\rho \left(u \frac{\partial c_1}{\partial x} + v \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho D_{12} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right) \right\} \quad (14.28)$$

对于第二组元,相应的方程也是成立的:但是,如果使用方程(14.28)的修正形式,则第二个方程就成为不必要的了,因为 $c_1 + c_2 = 1$.因此,第二个方程要用连续方程(14.25)代替.

混合气体动量方程与单一气体动量方程是一样的,并写成

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (14.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (14.30)$$

其中 ρ 和 μ 除了熟悉的对温度的依赖关系外,现在还依赖于浓度.

推导混合气体的能量方程,必须适当考虑普通的热传导、扩散引起的传热以及热扩散引起的传热.这里只限于讨论完全气体,我们引进混合气体焓

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2. \quad (14.31)$$

因为推导过程很冗长,所以我们只引用边界层近似的结果:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &+ \frac{RTk_T}{c_1 c_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho D_{12} \left\{ \frac{\partial c_1}{\partial y} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right\} \frac{\partial}{\partial y} \{ (h_1 - h_2) \\
 & + \frac{RTk_T}{c_1 c_2} \}. \tag{14.32}
 \end{aligned}$$

这里 R 代表普适气体常数。如果忽略热扩散，则把下面划线的各项删去。在这个方程的推导中已经利用了 Onsager 原理，根据这个原理，热通量矢量中关于浓度梯度的系数与质量通量中关于温度梯度的系数相同。

速度与温度的边界条件与单一气体的边界层条件相同。除此之外，还必须补充两个新的关于浓度的边界条件。在远离壁面的地方只有外部流动气体，就是说，在 $y = \infty$

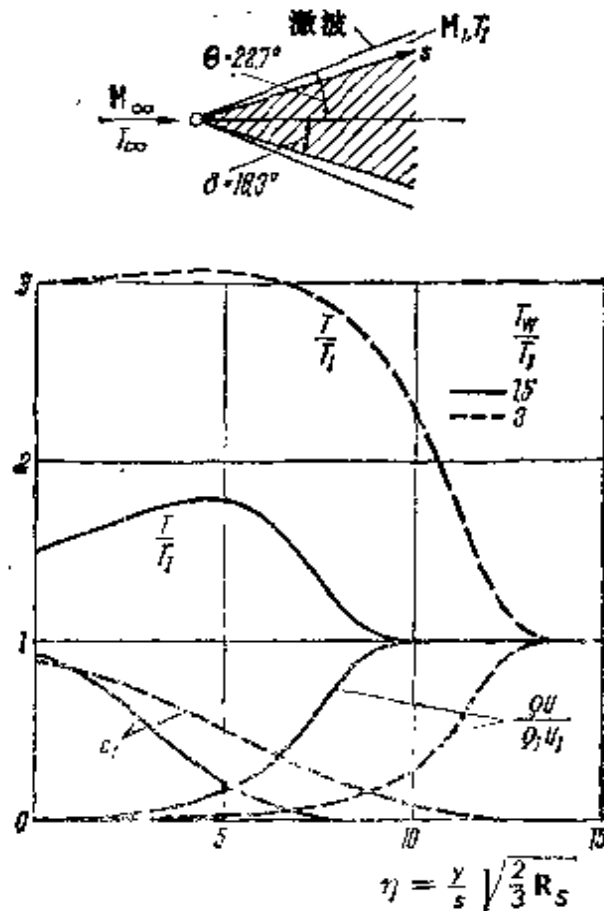


图 14.21 在有氢气注射到空气中的情形下，超声速速度 $M_\infty = 12.9$ 的圆锥层流二维边界层，根据 W. Wuecht^[10]，在壁面温度 T_w 与外流温度 T_1 不同比值下的速度分布 u ，温度分布 T 和浓度分布 c_1 。注射速度：

$$\begin{aligned}
 v/u_1 &= 0.2(\rho_1/\rho_w) \sqrt{2R_s/3}; \\
 \eta &= \sqrt{3R_s/2} (y/s); R_s = u_1 s / \nu_1; M_\infty = 12.9; \\
 T_w &= -50^\circ\text{C}; M_1 = 5; T_1 = 1023^\circ\text{C}.
 \end{aligned}$$

处壁面上产生的气体的浓度 c_1 等于零，第二个边界条件必须在壁面上给出，在大多数情形下，可以假设外部流动的气体不能穿过壁面，就是说外流气体的扩散速度与壁面上引射气体的速度 v_w 大小相等而符号相反，因为

$$c_2 W_2 = (1 - c_1) W_1 = c_1 W_1,$$

并考虑到式 (14.26)，我们得到壁面条件是

$$v_w = \left\{ \frac{D_{12}}{1 - c_1} (\rho \text{grad} c_1 + k_T \text{grad} \ln T) \right\}_w. \quad (14.33)$$

方程 (14.25), (14.28), (14.29) 和 (14.32) 构成一组关于四个量 u , v , T 和 c_1 的四个方程。

1.2. 精确解. 为了求解这组抛物线型的偏微分方程，目前有各种数值方法^[27, 42]以及高速电子计算机供我们使用，借助于这些方法和计算机，则能在可容许的时间内得到几乎与精确解任意接近的近似。流体的性质可以表示为随位置变化的变量，并且可以指定任意的边界条件。如果按照一种确定的方式规定外部流动速度、引射速度以及壁面温度，就能得到相似解。在这种情形下，这组偏微分方程可以化为一组常微分方程，而后者可以进行数值积分。对于不可压缩绕楔流动（包括驻点流动^[102, 291]）、可压缩零攻角平板流动、以及楔和锥上的超声速边界层^[110]，都存在这种数值结果。图 14.21 中的曲线，是通过例子说明在有氮气注射下，圆锥上的层流速度、温度和浓度边界层。

J. Steinheuer^[24] 给出为计算层流、高超声速、二组元边界层而设计的一种方法，他将这种方法应用到用热解特氟隆进行烧蚀冷却的例子中去。

目前提到的所有数值方法，都略去了起源于热扩散的那些项，即在方程 (14.32) 中下面划线的各项。就表面摩擦力和传热率计算来说，这种简化有时是可以允许的。实验表明，在有热扩散时，绝热壁面的平衡温度并不降低，而基于这种简化方法的计算，则总是预示出这样一种降低。

在有蒸发或有升华的流动中出现的双物质边界层的精确计算，给我们带来相当大的困难。这时蒸发物质的速度分布（即吹除的速度分布）和在相界面上沿流动方向的温度分布不能任意规定。这两种分布是作为耦合传热、传质的结果自然形成的，两者事先都是未知的。在这方面，W. Splett stoesser^[50] 计算了大量的解，其中蒸发率以及局部满足的能量平衡关系是在方程 (14.33) 的基础上计算出来的。

F. Eisfeld^[21] 发表了几个二组元混合流动的解，混合流动是在有二氧化碳薄膜绝热蒸发的情形下产生的，并且蒸发率取一种特殊的数学形式。在这项工作中，他发现平面薄膜的这种绝热蒸发过程可以导致自相似解，参阅第八章。在这种情形下，可以得出局部蒸发率必须遵守 $1/\sqrt{x}$ 型的规律，如图 14.12 中说明的，这就是得到自相似解的零攻角平板上的抽吸或引射的法向速度分布。同时薄膜表面上的温度和浓度都是相同的。

1.3. 近似解. 如果假设 Prandtl 数 P 和 Schmidt 数 $S_c = \nu/D_{12}$ 都等于 1，同时粘性系数是温度的线性函数，就能简化这个问题。利用这些假设，C. R. Fandlers^[25] 计算了有轻质气体注射时的壁面切应力；他还讨论了相对于基本气体改变分子质量比的情形。关于外部流动速度分布和引射速度分布更一般的情形，可以用积分方程进行

分析^[109]。

2. 实验结果

对于向超声速层流边界层注入外来气体的大多数实验研究，几乎无例外地集中在测量绝热壁平衡温度上。

当边界层含有几种组元时，因为每种组元的流量依赖于其余所有组元的流量，所以这种精确的计算会变得很冗长。如果在某个特定状态下确定出多组元扩散系数，并采用性质不变的模型，则可以带来相当大的简化。即使在性质强烈变化的情形下，这样一种模型给出的解也与精确解非常一致^[77]。

更大量的实验是在湍流边界层情形下做出的（参看第二十二章）。由于对烧蚀的详细过程只有部分的了解，所以烧蚀传热的计算仍建立在粗糙的半经验方程的基础上^[32]。

第十五章 非定常边界层¹⁾

a. 非定常边界层计算的概述

到目前为止，我们所研究的求解边界层方程的例子都是对定常运动而言的。它们是实际应用中最重要的情形。然而，在本章我们将讨论几个依赖于时间的运动，即讨论几个非定常边界层的例子。

最普通的非定常边界层的例子，出现在**运动由静止开始**或者运动呈周期变化的时候。如果运动是从静止开始的，在某一刻之前，物体和流体的速度都为零。在该时刻运动开始，我们可以认为，或者被拖动的物体通过静止的流体，或者物体静止而外部流体的运动随时间变化。运动开始以后，起初在物体附近形成一层很薄的边界层，从物体速度到外部流动速度的过渡就发生在这个薄层内。运动刚刚开始时，除了物体附近很薄的薄层以外，整个流体空间的流动都是无旋的和有势的。边界层的厚度随着时间而增加。当边界层继续发展时，研究在什么时候首先出现分离(倒流)是很重要的。第五章第4节中早已讨论过一个这样的例子，它是关于壁面附近流动的 Navier-Stokes 方程的精确解，这个壁面从静止突然加速，并且沿着平行于自身平面的方向运动。管内流动的起动过程(参看第五章6)也属于这种类型。

非定常边界层的其它例子还出现在：当物体在静止流体中作周期运动，或者物体静止而流体作周期运动的时候，在自身平面内振动的壁面附近的流体运动(见第五章7)就是这类问题的例子。

1. 边界层方程 第七章 a 中已经导出了非定常边界层的基本

1) 十分感谢 K. Gersten 教授，他为本书第五版修订了这一章的内容。

方程。在一般情形下,如果流动是二维非定常可压缩的,那么我们必须采用下列关于速度场和温度场的方程(参见方程(12.50a—c)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (15.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (15.2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (15.3)$$

$$p = \rho RT, \quad (15.4)$$

$$\mu = \mu(T). \quad (15.5)$$

边界条件是:

$$y = 0: u = U_w(t), v = 0, T = T_w(x, t);$$

$$y = \infty: u = U(x, t), T = T_\infty(x, t).$$

其中,如果壁面运动,那么 $U_w(t)$ 表示壁面的速度,而 $U(x, t)$ 表示外部无粘流动的速度,这个速度与压力的关系为

$$- \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (15.6)$$

这个方程可以直接从方程(15.2)略去粘性项得出。一般说来,把坐标系选取在定常的外部流动上较为方便。就不可压缩流动而言,这些不同的坐标系都是等价的(参看文献[27])。但是,在非定常流动中,分离点的定义却与坐标系的选择密切相关(参看文献[33])。在下文中我们将认为,对于与固体表面相连的坐标系,分离出现在 $(\partial u / \partial y)_w$ 为零的点上。

与定常边界层完全类似,也可以根据非定常边界层流动的微分方程导出积分关系式。这些关系式是:

$$U \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (\rho - \rho_{\infty}) dy + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\infty} U \delta_1) + \frac{\partial U}{\partial x} \rho_{\infty} U \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\infty} U^2 \delta_2) = \tau_0, \quad (15.7)$$

$$c_p T_{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (\rho_{\infty} - \rho) dy + \left(\rho_{\infty} c_p \frac{\partial T_{\infty}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta_1 + \rho_{\infty} U \frac{\partial U}{\partial t} \delta_H + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\infty} c_p T_{\infty} U \delta_H) + \rho_{\infty} U^2 \frac{\partial U}{\partial x} \delta_H = \int_0^{\infty} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (15.8)$$

式中 δ_1 表示位移厚度, δ_2 表示动量厚度, δ_H 表示热焓厚度, 它们分别由前面的式 (13.74), (13.75) 和 (13.77) 所定义. 另外, $U(x, t)$, $\rho_{\infty}(x, t)$ 和 $T_{\infty}(x, t)$ 都表示无摩擦外部流动的量, 在定常流动的特殊情形下, 可以重新得到为我们所知的关系式 (13.80) 和 (13.82). 当流动为不可压缩时, (15.7) 和 (15.8) 分别简化为:

$$\frac{\partial}{\partial t} (U \delta_1) + U \frac{\partial U}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta_2) = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial t} (U^2 \delta_2) + U \frac{\partial \delta_2}{\partial x} + 3 \delta_2 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^{\infty} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (15.10)$$

如果流动是定常的, 则方程 (15.9) 就变得与方程 (8.35) 一样, 而方程 (15.10) 则化为方程 (8.32).

我们的研究将从分析不可压缩流体的非定常边界层开始. 在本章 f 中将讨论一些可压缩流动非定常边界层方程的解.

2. 逐次近似法 在大多数情形下, 可以采用逐次近似法对非定常边界层方程 (15.1)~(15.3) 进行积分. 这种方法基于下述物理推理: 运动自静止开始以后, 最初时刻边界层非常薄, 方程 (15.2) 中的粘性项 $\nu(\partial^2 u / \partial y^2)$ 非常大, 而对流项却仍为通常值. 于是, 这个粘性项将与非定常加速度项 $\partial u / \partial t$ 和压力项相平衡.

最初, $\partial U/\partial t$ 的贡献是最主要的. 如果我们把坐标系选取在物体上, 并且假定物体静止而流体作相对运动, 那么可以假设速度是由两项组成的:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t). \quad (15.11)$$

在这些条件下, 一次近似值 u_0 满足线性微分方程

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (15.12)$$

其边界条件是 $y=0, u_0=0$; $y=\infty, u_0=U(x, t)$. 根据方程 (15.2) 可以得到关于二次近似值 u_1 的方程, 其中对流项用 u_0 计算, 并且现在在这里计及对流压力项. 由此我们有

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad (15.13)$$

其边界条件是 $y=0, u_1=0$ 和 $y=\infty, u_1=0$. 这也是一个线性方程. 除了方程 (15.12) 和 (15.13) 之外, 我们还有关于 u_0, v_0 和 u_1, v_1 的连续方程. 用类似的方法可以得到更高次的近似值 u_2, u_3, \dots . 同样的方法也可以应用于周期性边界层的研究. 然而, 当讨论高次近似值时, 逐次近似法的复杂程度将迅速增加.

3. 关于周期性外部流动的林家翘方法 林家翘仿照湍流研究中所使用的近似(将在第十八章叙述), 提出了另一种方法, 它可以用来求解在自由流中含有周期运动的问题. 这种方法依赖于对所研究的物理量作出适当的平均, 同时依赖于对描述边界层内振动速度分量方程的线性化. 另一方面, 描述平均流动的完整方程保持不变.

如果自由流速度 $U(x, t)$ 有振动分量, 则可以写成

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x, t), \quad (15.14)$$

其中一杠表示对一个周期时间的平均值. 因此, 周期分量 $U_1(x, t)$ 的平均值为零. 即

$$\bar{U}_1(x, t) = 0. \quad (15.15)$$

边界层的速度分量 u 和 v 以及压力 p 也可以分解成平均值和周期分量两部分:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \bar{u}(x, y) + u_1(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \bar{v}(x, y) + v_1(x, y, t), \\ p(x, t) &= \bar{p}(x) + p_1(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

并且

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{p}_1 = 0. \quad (15.17)$$

将式 (15.14) 代入方程 (15.6), 取平均后得到

$$\bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + U_1 \overline{\frac{\partial U_1}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (15.18)$$

从方程 (15.6) 中减去上式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ - U_1 \overline{\frac{\partial U_1}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

类似地, 根据方程 (15.2) 可以得到

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + F(x, y), \quad (15.20)$$

其中

$$\begin{aligned} F(x, y) &= U_1 \overline{\frac{\partial U_1}{\partial x}} - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad (15.21) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(u_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad (15.22) \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ &\quad - U_1 \overline{\frac{\partial U_1}{\partial x}} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

这个理论的主要简化在于方程 (15.22) 中仅保留下面划线的三项, 因此方程是线性的, 并简化成

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (15.23)$$

如果用振动频率 n 组成的所谓“ac”边界层厚度为

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2\nu}{n}}, \quad (15.24)$$

同时假定 $U(x, t)$ 等于 $U(x)$ 时的定常边界层厚度为 δ ，通过量级估计可以证明，当 δ_0 比 δ 小得多时，上述近似是有效的。因此，当这种近似法有效时，必须有

$$\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right) \ll 1. \quad (15.25)$$

实际上，这就限制了这种理论只适用于频率很高的情形。应该记得，在第五章 a7 所讨论的振动平板问题的解中，曾出现过式 (15.24) 表示的量 δ_0 。

方程 (15.23) 是线性的，并且与所谓的热传导方程 (5.17) 有关系。方程 (15.23) 描述边界层速度剖面的振动分量 u_1 ，并且可以通过给定的位势流动的振动分量 U_1 单独求解，因为这种线性过程使得它与平均运动无关。流动的法向分量可以根据连续方程 (15.1) 进行计算，连续方程也可以分解成平均部分

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (15.26)$$

和振动部分

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (15.27)$$

解出振动分量 $u_1(x, y, t)$ 和 $v_1(x, y, t)$ 以后，可以回到方程 (15.21)，并且计算出出现在方程 (15.20) 中的函数 $F(x, y)$ 。方程 (15.20) 现在描述平均流动 $\bar{u}(x, y)$ 。

应该指出，平均流动方程 (15.20) 与定常状态边界层方程的形式是相同的。其差别仅在于出现了一个附加项 $F(x, y)$ ；现在这一项与来源于压力梯度的项 $\bar{U} \cdot d\bar{U}/dx$ 起相同的作用。这两项在微分方程中都代表已知函数。它们的唯一区别是：平均压力梯度 $\bar{U} \cdot d\bar{U}/dx$ 是外流“施加”在边界层上的，它与纵坐标 y 无

关,而附加项 $F(x, y)$ 却是 y 的函数。

由于存在振动分量,这种平均流动不同于从一开始就对位势速度 $U(x, t)$ 取平均所得到的平均流动。显然,函数 $F(x, y)$ 的出现就是这种差别的证据;其根源在于微分方程的非线性。

以后第十八章和第十九章中将会讲到:定常湍流的基本特征在于,在平均流动速度上叠加了一个随机的、三维的、准周期的脉动。因此,自由流是湍流的问题与现在所讨论的问题具有相同的性质;这两类问题中,不仅自由流速度 U 的大小有变化,而且还涉及自由流速度方向的变化。在大多数情形下,习惯上都是略去自由流的脉动,从而把流动看成是定常的,并用位势速度 $\bar{U}(x)$ 代替 $U(x, t)$ 来进行计算。这等价于略去了方程(15.20)中的附加项 $F(x, y)$,于是必然得到不同于 $\bar{u}(x, y)$ 的平均速度剖面。以上论述清楚地表明,进行两种运算(即取平均与解方程)的次序并不是无关紧要的,它会影响到最后的结果。

4. 定常流动受轻微扰动时的级数展开法 一些非定常的边界层问题常常都包含一个基本的定常流动和一个叠加在它上面的非定常小扰动。如果这种扰动与基本的定常流动相比是很小的,那么就可以把方程分开成关于定常扰动的非线性边界层方程。一个著名的例子就是当外部流动速度的形式为

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \varepsilon U_1(x, t) + \dots, \quad (15.28)$$

时的情形,其中 ε 表示非常小的数。M. J. Lighthill^[27] 详尽地研究了当外部扰动是单纯谐波时这种最重要的特殊情形。当可以用表达式

$$T_w(x, t) = \bar{T}_w(x) + \varepsilon T_{w1}(x, t) \quad (15.29)$$

表示壁面温度时,或者当壁面本身作很小的、非定常的扰动运动(物体振动)时,也可以采用这和相同的线性形式。

在这种情形下,我们首先假定动力学边界层和热边界层的解具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t) + \dots, \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y, t) + \varepsilon^2 v_2(x, y, t) + \dots, \\ T(x, y, t) &= T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y, t) + \varepsilon^2 T_2(x, y, t) + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (15.30)$$

把式(15.30)所假定的形式代入方程(15.1)~(15.3),然后把得到的项按 ε 的幂次进行整理。根据要求,这些乘以 ε 不同幂次的微分表达式必须各自为零,由此可以得到各阶的微分方程。当 $\rho = \text{常数}$,外部流动具有式(15.28)的形式,并且壁面温度可以用式(15.29)表示时,这种情形下的各阶微分方程为:

零阶方程(定常的基本流动):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0, \\ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \\ u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

边界条件是

$$\begin{aligned} y=0: u_0 = v_0 = 0; T_0 = \bar{T}_w(x), \\ y=\infty: u_0 = \bar{U}(x); T_0 = T_\infty. \end{aligned}$$

一阶方程(纯非定常流动):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{d\bar{U}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

边界条件是

$$\begin{aligned} y=0: u_1 = v_1 = 0; T_1 = T_{w1}(x, t), \\ y=\infty: u_1 = U_1(x, t); T_1 = 0. \end{aligned}$$

二阶方程(定常和非定常项):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ &+ v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_2}{\partial y} \\ &+ v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

边界条件是

$$\begin{aligned} y=0: u_2 = v_2 = T_2 = 0, \\ y=\infty: u_2 = T_2 = 0. \end{aligned}$$

更高阶的方程也有相应的结构形式。值得指出的是:除了零阶方程以外,上述方程组都是线性的,可以逐次求解。如果方程(15.1)~(15.3)具有假定形式(15.30)的精确到 δ^n 阶的解,那么一般说来,通过上述方法得到的解与精确解的不同之处只在于 δ^{n+1} 阶的项。

本章 §3 中将讨论这种方法在计算周期边界层中的应用。F. K. Moore^[31], S. Ostrach^[32], F. K. Moore 和 S. Ostrach^[33] 以及 E. M. Sparrow^[30] 等人使用了一种类似的级数展开法,但是是按下列形式的幂次展开:

$$\frac{x^k}{U^{k+1}} \frac{\partial^k U}{\partial t^k}, \text{ 和 } \frac{1}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U}\right)^k \frac{\partial^k T_w}{\partial t^k}, \quad (15.34)$$

(参看本章 f2 节).

5. 相似解和半相似解 在研究二维定常边界层理论时 (见第八章 b), 我们把这样一类解称为相似解: 对于它们, 利用适当的相似变换, 可以将依赖于两个变量 x 和 y 的解化成只依赖于一个变量 η 的解. 类似地, 如果可以把依赖于三个自变量 x, y, t 的解, 化成只依赖于一个自变量的解, 我们就说这种非定常二维问题的解也属于这类相似解. H. Schuh^[46] 和 Th. Geis^[10] 指出了所有这种可以化成一个变量的解, 也就是具有如下形式的解:

$$u(x, y, t) = U(x, t) \cdot H(\eta), \text{ 其中 } \eta = \frac{y}{N(x, t)}. \quad (15.35)$$

例如形式为 $U(x, t) = mx/t$ 和本章 c 中将提到的 $U(x, t) = Ct^n$ 的外部流动都属于这种类型. K. T. Yang^[71] 分析了外部流动的形式为 $U(x, t) = x/(a + bt)$ 时的相似解, 其中 a 和 b 均为常数.

如果可以找到把三个自变量 x, y, t 化成两个自变量的变换, 那么所得到的解就称为半相似解^[21]. 特别是当变量可以化成 y 和 x/t 时, 这样的解又称为准定常解 (见文献 [7]). I. Tani^[56] 找到了这种类型的解, 在这种情形下, 外部流动可以表示为

$$U(x, t) = U_0 - x/(T - t),$$

其中 U_0 和 T 都是常数. H. A. Hassan^[19] 研究了更为普遍的半相似解; 也可参看文献 [21].

6. 近似解 当外部流动 $U(x, t)$ 是自变量的任意函数时, 试图在一般情形下求解完整的方程组将会遇到极大的困难. 基于这个原因, 人们往往不得不采用近似方法, 例如采用类似于第十章中所讨论的 Kármán-Pohlhausen 法. H. Schuh^[46], L. A. Rozin^[42] 和 K. T. Yang^[72] 等人对于不可压缩的非定常边界层详细地阐述了这种方法. 文献 [72] 还研究了热边界层的问题. 方程 (15.9) 和 (15.10) 所给出的积分关系成为这里的出发点. 因为在边界层

厚度上的积分过程只能消去一个自变量 y ，因此方程依然是偏微分方程。

b. 运动突然起动以后边界层的形成

现在，我们来分析从静止开始运动以后的最初状态。如果认为流体静止，而物体迅速加速，或者换言之，假定物体突然起动，那么正如 H. Blasius^[8] 所指出的，这种问题可以大大简化。在这种情形下，物体立即达到全速，而且在此以后速度保持不变。在象前面所采用的与物体连结的坐标系中，位势流动由下述条件来确定：

$$\left. \begin{array}{l} t \leq 0: U(x, t) = 0, \\ t > 0: U(x, t) = U(x); \end{array} \right\} \quad (15.36)$$

其中 $U(x)$ 表示定常状态下绕物体的位势流动。在这种特殊情形下，我们有 $\partial U / \partial t = 0$ 。因此，一次近似的微分方程 (15.12) 简化为

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (15.37)$$

其中，在 $y = 0$ 处， $u_0 = 0$ ；在 $y = \infty$ 处， $u_0 = U(x)$ 。这个方程与一维热传导方程完全相同。对于平板在自身平面内突然起动，而远离平板处流体为静止的情形，第五章第 4 节中已求解了这个方程。现在可以引进一个新的无量纲变量(相似性变换)

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (15.38)$$

用这种方法，我们得到用下述形式表示的解：

$$u_0(x, y, t) = U(x) \times \zeta'_0(\eta) = U(x) \operatorname{erf} \eta. \quad (15.39)$$

这就是对于二维和轴对称两种情形的一次近似值。另外，如果位势速度与 x 无关，即有 $U = U_0 = \text{常数}$ (零攻角平板)，那么式 (15.39) 就是方程 (15.2) 的精确解。因为这时方程 (15.13) 中的对流项与压力项都为零，所以 $u_1 \equiv 0$ 。然而，用这种方法得到的解并不是这个问题的完整的解，它只适用于足够远的下游区域，在那里可以忽略前缘的影响，其流动特征就象无限长平板一样。严

格地讲,完整的解还必须满足这样的条件:对于所有的 y 和 t , 都有 $u(0, y, t) = 0$. 文献 [54] 中给出了这种完整的解.

在一般情形下,当外部流动 $U(x, t)$ 依赖于空间坐标时,还必须区分二维情形和轴对称情形.

1. 二维情形 我们从讨论二维情形入手. 在这种情形下,我们假定流函数用时间的幂级数表示,并规定它有如下形式:

$$\phi(x, y, t) = 2\sqrt{vt} \left\{ U\zeta_0(\eta) + tU \frac{dU}{dx} \zeta_1(\eta) + \dots \right\}. \quad (15.40)$$

因此,速度分量 $u = \partial\phi/\partial y$ 和 $v = -\partial\phi/\partial x$ 分别变成:

$$\left. \begin{aligned} u &= U\zeta'_0 + tU \frac{dU}{dx} \zeta'_1 + \dots, \\ -v &= 2\sqrt{vt} \left\{ \frac{dU}{dx} \zeta_0 + t \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + U \frac{d^2U}{dx^2} \right] \zeta_1 + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.41)$$

将这些表达式代入方程 (15.12), 我们得到关于一次近似的微分方程:

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0, \quad (15.42)$$

其边界条件是: $\eta = 0$ 时, $\zeta_0 = \zeta'_0 = 0$; $\eta = \infty$ 时, $\zeta_0 = 1$. 方程 (15.42) 与方程 (5.21) 是相同的, ζ_0 的解给在式 (15.39) 中. 图 15.1 画出了函数 ζ_0 的曲线.

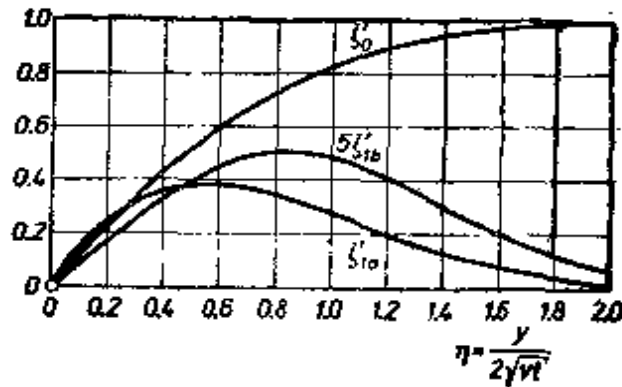


图 15.1 突然运动时非定常边界层的速度分布函数 ζ_0 , $\zeta_1 = \zeta'_{1a}$ 和 ζ'_{1b} . 见式 (15.41) 和式 (15.50)

把方程 (15.13) 与 (15.40) 结合起来, 可以得到关于二次近似 $\zeta_1(\eta)$ 的微分方程, 其形式为

$$\zeta_1'' + 2\eta\zeta_1' - 4\zeta_1' = 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' - 1),$$

其边界条件是: $\eta = 0$ 时, $\zeta_1 = \zeta_1' = 0$; $\eta = \infty$ 时, $\zeta_1 = 0$.

H. Blasius 得到的解是:

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) \operatorname{erfc}(\eta) + \frac{1}{2} (2\eta^2 - 1) \operatorname{erfc}^2(\eta) \\ & + \frac{2}{\pi} \exp(-2\eta^2) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) + 2 \operatorname{erfc}(\eta) \\ & - \frac{4}{3\pi} \exp(-\eta^2) + \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}} \right) \left\{ \eta \exp(-\eta^2) \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2 + 1) \operatorname{erfc}(\eta) \right\}. \end{aligned} \quad (15.43)$$

图 15.1 中还画出了函数 ζ_1 的曲线(作为函数 ζ_1 给出)。为了计算的需要, 这两个函数的初始斜率可以分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0''(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128; \\ \zeta_1'(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right) = 1.607. \end{aligned} \right\} \quad (15.44)$$

S. Goldstein 和 L. Rosenhead^[14] 得到了用时间表示的流函数展开式的三次近似项的精确表达式。以前, E. Boltze^[9] 在讨论轴对称问题时, 曾得到一个不太精确的解(参见下一节)。

借助于二次近似可以回答分离点的位置问题。在这方面, 我们将讨论圆柱体和椭圆柱的情形。这时, 关于分离点的条件可以表示为:

$$y = 0 \text{ 时, } \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

由此得到如下关于分离时间 t_s 的条件:

$$\zeta_0''(0) + \zeta_1'(0)t_s \frac{dU}{dx} = 0,$$

这可以由式 (15.41) 看出。利用式 (15.44) 的值, 上式变为

$$1 + \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \frac{dU}{dx} t_s = 0. \quad (15.45)$$

方程 (15.45) 可以使我们计算出给定位置处分离开始的时刻。显然分离只出现在 dU/dx 为负值的地方。最先分离的点发生在 dU/dx 的绝对值最大的地方。然而，不能由此得出分离点一定与后驻点相重合，以后在椭圆柱的例子中将证明这一点。

例：圆柱体

关于半径为 R 的圆柱绕流，当流速为 U_∞ 时我们得到

$$U(x) = 2U_\infty \sin \frac{x}{R} \text{ 和 } \frac{dU}{dx} = 2 \frac{U_\infty}{R} \cos \frac{x}{R},$$

其中 x 表示由前驻点量起的弧长。梯度 dU/dx 的绝对值在后驻点处最大，同时由式 (15.45) 可以看出，分离出现的时刻为

$$t_s = \frac{R/U_\infty}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)}, \quad (15.46)$$

直到分离开始时所走的距离为 $s_s = t_s U_\infty$ ，因此

$$s_s = \frac{R}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)} = 0.351R.$$

I. Proudman 和 K. Johnson^[33a] 对于圆柱体突然加速的问题，计算了后驻点附近的边界层；他们是在 Navier-Stokes 方程基础上求解这个问题的。也可参看 M. Katagiri^[25a]。

例：椭圆柱^[16, 53]

设椭圆柱的两个半轴分别为 a 和 b 。令它们的比值为 $k = b/a$ ，但并不规定它们的相对大小，所以有 $a \geq b$ 。椭圆方程可以写为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

引入角坐标 ϕ ，其定义为

$$\frac{x}{a} = \cos \phi, \quad \frac{y}{b} = \sin \phi.$$

并且假定椭圆柱以速度 U_∞ 沿平行于 a 轴的方向突然起动。我们可以写出椭圆周线上的速度分布为：

$$\frac{U(\phi)}{U_\infty} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2 \cos^2 \phi}},$$

而速度梯度为

$$\frac{a}{U_\infty} \frac{dU}{ds} = \frac{(1+k)k^2 \cos\phi}{(\sin^2\phi + k^2 \cos^2\phi)^2}$$

不难证明, 如果 $k^2 < 4/3$, 则速度梯度的最大值与后驻点重合, 如果 $k^2 > 4/3$, 则速度梯度的最大值位于 $\phi = \phi_m$ 处, 其中

$$\cos^2\phi_m = \frac{1}{3(k^2 - 1)}$$

因此速度梯度的最大值变成

$$\left. \begin{aligned} k^2 \leq \frac{4}{3}: \frac{b}{U_\infty} \left(\frac{dU}{ds} \right)_m &= \frac{1+k}{k}, \\ k^2 \geq \frac{4}{3}: \frac{b}{U_\infty} \left(\frac{dU}{ds} \right)_m &= \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{k^3(1+k)}{\sqrt{k^2-1}} \end{aligned} \right\} \quad (15.47)$$

把式(15.47)的值代入方程(15.45), 就可以求出直到分离开始时所经过的时间, 即

$$\left. \begin{aligned} t_s \frac{U_\infty}{a} &= \frac{k^2}{\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)(1+k)}, \quad k^2 \leq \frac{4}{3}; \\ t_s \frac{U_\infty}{b} &= \frac{16\sqrt{k^2-1}}{\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)3\sqrt{3}k^3(1+k)}, \quad k^2 \geq \frac{4}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (15.48)$$

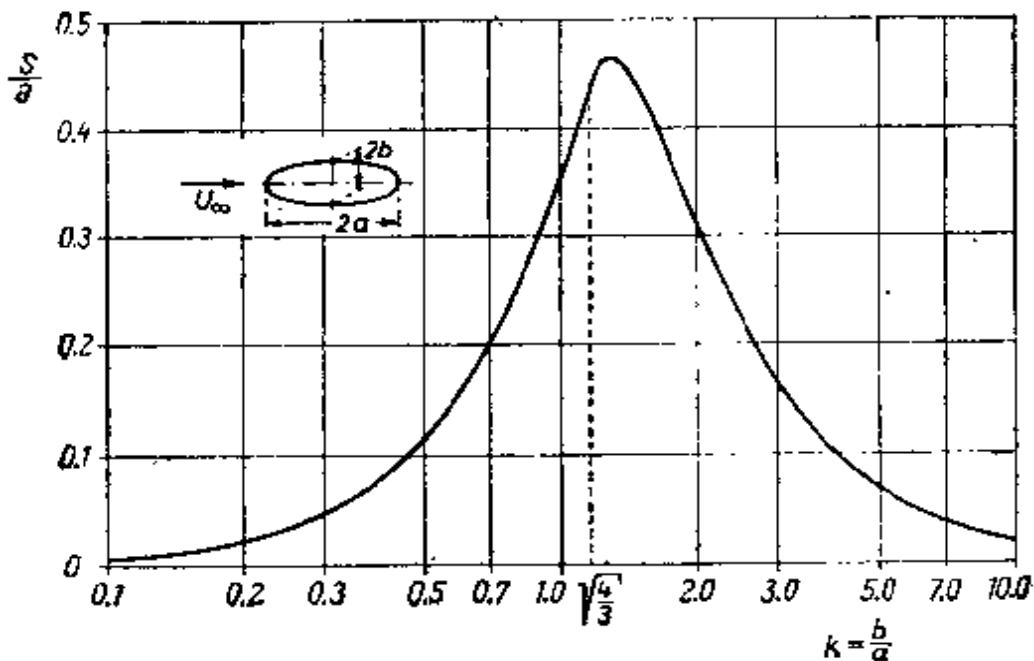


图 15.2 椭圆柱由静止突然加速直到分离开始时所通过的距离 s

图 15.2 绘出了直到分离开始时椭圆柱所通过的距离 s 与两轴比值

$$k = \frac{b}{a}$$

的关系, 其中 $s = t_s U_\infty$. 最先出现分离的位置可以表示为:

当 $k^2 \leq \frac{4}{3}$ 时, $y_s = 0$,

当 $k^2 \geq \frac{4}{3}$ 时, $\frac{y_s^2}{b^2} = 1 - \frac{1}{3(k^2 - 1)}$.

当 $k = 1$ 时, 或 (15.48) 变成关于圆柱的公式 (15.46). 从这个值起, 分离开始的时间 t_s 随着

$$k = \frac{b}{a}$$

的增加而减小, 并且分离点的位置从 a 轴的端点向 b 轴的端点移动. 在 $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ 的极限情形下, 即对于一块与运动方向相垂直的平板, 则有 $t_s = 0$ 和 $y_s = b$. 因此, 在平板与运动方向相垂直的情形下, 当运动开始时就立即出现分离, 而且分离发生在平板的边缘上.

W. Tollmien^[60] 在 1924 年发表的 Goettingen 论文中, 用类似的方法计算了突然转动的旋转圆柱上边界层的形成过程. 在这种情形下, 柱体上切向速度与流动速度方向相同的一侧, 分离受到抑制.

H. J. Lugt^[28a] 的文章中研究了椭圆柱在一定倾角下的加速过程. 作者成功地计算了起始涡的形成过程, 其 Reynolds 数范围是 $R = Vd/\nu = 15 \sim 200$. 读者也可以查阅 D. Dumitrescu 和 M. D. Cazacu^[92] 的文章, 这篇文章讨论了同样的问题, 但研究对象是有攻角的平板. 对于平板垂直于来流的情形也可参看图 4.2.

2. 轴对称问题 E. Boltze^[9] 在他的 Goettingen 论文中, 研究了轴对称物体突然加速时边界层的形成过程. 现在, 我们来讨论旋成体上的边界层, 旋成体的形状由 $r(x)$ 确定 (图 11.6), 它在 $t = 0$ 时开始运动. 加速是脉冲式的, 并且柱体沿自身的轴线方向运动. 这里相应的方程是 (15.2) 和 (11.27b). 同时方程的解也可以表示成一次近似值 u_0 和二次近似值 u_1 之和, 这两个近似值分别由式 (15.12) 和 (15.13) 所定义. 考虑到连续方程形式的改变, 我们引入另一种流函数, 即

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

并且假定流函数的形式为

15
五二

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = 2\sqrt{\nu t} \left\{ rU\zeta_0(\eta) + \epsilon \left[rU \frac{dU}{dx} \zeta_{1a}(\eta) \right. \right. \\ \left. \left. + U^2 \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}(\eta) \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (15.49)$$

因此

$$\frac{u}{U} = \zeta_0' + \epsilon \left[\frac{dU}{dx} \zeta_{1a}' + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}' \right]. \quad (15.50)$$

其中变量 η 和二维问题中的 η (见式 (15.38)) 有相同的含意。正如已经提到的, 由方程 (15.12) 得到的关于 ζ_0 的微分方程与关于二维问题的方程 (15.42) 是相同的。对于以时间表示的展开式中的二次近似, 现在我们可以从方程 (15.13) 得到下述关于 ζ_{1a} 和 ζ_{1b} 的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{1a}'' + 2\eta\zeta_{1a}' - 4\zeta_{1a} &= 4(\zeta_0'^2 - 1 - \zeta_0\zeta_0''), \\ \zeta_{1b}'' + 2\eta\zeta_{1b}' - 4\zeta_{1b} &= -4\zeta_0\zeta_0'. \end{aligned} \right\} \quad (15.51)$$

其边界条件是

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad \zeta_{1a} = \zeta_{1a}' = 0; \quad \zeta_{1b} = \zeta_{1b}' = 0; \\ \eta = \infty: \quad \zeta_{1a} = 0; \quad \zeta_{1b} = 0. \end{aligned}$$

关于 ζ_{1a} 的方程与二维问题中关于 ζ_1 的方程完全相同, E. Boltze^[9] 用数值方法求解了关于 ζ_{1a} 的方程。根据图 15.1 可以看出 ζ_{1a} 和 ζ_{1b} 的特征, ζ_{1b} 的初始斜率是 $\zeta_{1b}'(0) = 0.169$ 。

分离的开始由条件 $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$ 来确定, 根据式 (15.50), 它给出

$$\zeta_0''(0) + \epsilon \left[\frac{dU}{dx} \zeta_{1a}'(0) + \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \zeta_{1b}'(0) \right] = 0,$$

或者, 利用上述 $\zeta_0''(0)$, $\zeta_{1a}'(0) = \zeta_0''(0)$ 及 $\zeta_{1b}'(0)$ 的数值, 则有

$$1 + \epsilon \left[\frac{dU}{dx} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right) + 0.150 \frac{U}{r} \frac{dr}{dx} \right] = 0. \quad (12.52)$$

E. Boltze 还计算了流函数展开式 (15.49) 中的另外两项。

例: 圆球

作为算例, E. Boltze 计算了圆球上边界层的形成过程, 圆球

由静止突然起动。用 R 表示圆球半径， U_∞ 表示自由流速度。在这种情形下，我们有

$$r = R \sin \frac{x}{R}; \quad U(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{x}{R}.$$

现在，分离的开始可以由方程 (15.52) 得到，或者由下式得到：

$$1 + t_s \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R} 1.573 \cos \frac{x}{R} = 0.$$

分离最先出现在后驻点处，也就是在

$$\cos\left(\frac{x}{R}\right) = -1$$

的地方。由此得到

$$\frac{3}{2} t_s \frac{U_\infty}{R} = 1/1.573 = 0.635.$$

考虑到 E. Boltze 计算的流函数展开式中的另外两项的值，我们得到这个常数的更精确的值为 0.589。因此，突然起动的圆球出现分离的时刻为：

$$t_s = 0.392 \frac{R}{U_\infty}. \quad (15.53)$$

在这个时间内，圆球走过的距离是 $s_s = U_\infty t_s = 0.392 R$ ，或者，大约是圆球半径的 40%。分离点从最初 $\phi = \pi$ 处先快后慢地移向 $\phi \approx 110^\circ$ 处，这正是定常流动时分离点的位置，也就是在无限长时间以后才会达到的位置。图 15.3 表示某一中间时刻的流线图象和速度分布，这一时刻对应于圆球走了 $0.6R$ 的距离。当半径 $R = 10\text{cm}$ (大约 4in) 和速度 $U_\infty = 10\text{cm/s}$ (大约 0.33ft/s) 时，相应的时间为 0.6 秒。图 15.3 画出了流线的图形，为了清楚起见，图中边界层厚度的线尺度有所夸大。以水为例，

$$\nu = 0.01 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s} \text{ (大约 } 0.1 \times 10^{-4} \text{ft}^2/\text{s}),$$

厚度放大了 30 倍左右。在如图所示的封闭旋涡中速度的绝对值很小，而在通过分离点的流线 $\phi = 0$ 的外侧，速度梯度和环量最大。

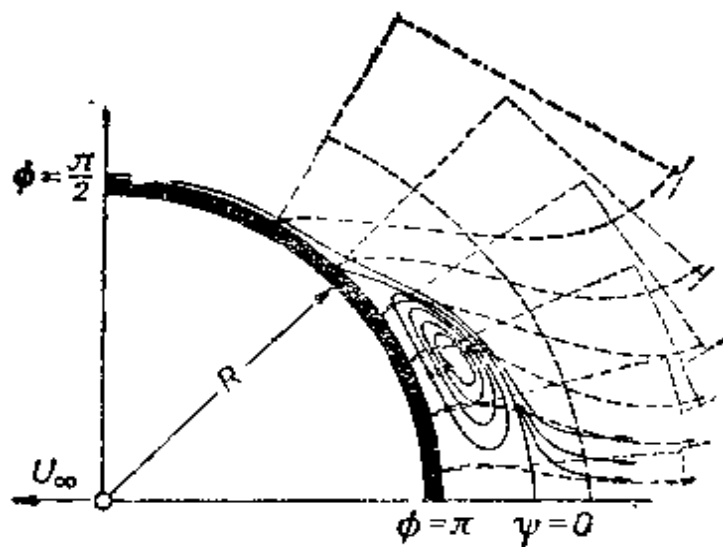


图 15.3 在突然加速的圆球背风面上,分离开始以后的边界层;引自 Boltze^[59],圆球走了 $0.6R$ 的距离

只要加速的时间远小于分离开始以前所经过的时间,那么,上述理论所采取的理想化的瞬时加速过程,就是对实际情形的一个很好的近似。

K. H. Thiriot^[58] 在 Goettingen 大学提出的论文中,研究了旋转圆盘上边界层的形成过程。他讨论了圆盘在静止流体中突然加速到某一等角速度的情形,以及圆盘和流体一起转动,然后圆盘突然停止运动的情形。对于前一种情形,运动的最终状态就是 W. G. Cochran 给出的在静止流体中旋转圆盘的解,这已在第五章 11 中讨论过。对于第二个问题,运动的最终状态就是 U. T. Boedewadt 所得到的解,这已在第十章 a 中作过讨论,这是流体在固定平面上旋转的问题。K. H. Thiriot^[57] 在另一篇文章中讨论了所有这些情形的推广。他考察了圆盘和流体一起转动,然后圆盘突然加速或突然减速时的情形,这时圆盘角速度的变化与流体角速度相比是一个小量。值得注意的是在这种旋转圆盘附近也形成一个稳定的边界层。S. D. Nigam^[34] 计算了圆盘突然起动的以后边界层增长的详细过程。

E. M. Sparrow 和 J. L. Gregg^[51] 求解了圆盘以变角速度旋

转的问题。C. R. Illingworth^[25] 和 Y. D. Wadhwa^[64] 研究了旋成体转动时边界层增长的问题。H. Wundt^[70] 讨论了偏航圆柱体突然加速的问题，这构成了三维非定常边界层的另一个实例。其它三维非定常边界层的解可以在参考文献 [20, 21, 22, 52 和 53] 中找到。

W. Wuest^[69] 求得了一些物体的三维非定常边界层的解，这些物体在垂直于主流的方向上作非定常运动。其中，一个例子是圆柱在定常横向流动中作轴向周期振动的问题。另一个例子是楔在平行其前缘的方向上作简谐振动的情形，作为特殊情况，这个例子包括了平板振动和驻点流动的振动问题。

c. 加速运动中边界层的形成

H. Blasius 计算了二维流动中物体作匀加速运动时边界层的形成过程。其结果与物体突然开始运动的结果非常类似。这时，物体的位势速度可以用下述方式给定

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0: U(x, t) &= 0, \\ t > 0: U(x, t) &= t \times \omega(x). \end{aligned} \right\} \quad (15.54)$$

现在，也可以假设一个如式 (15.11) 给定的用逐次近似值表示的级数。于是，这些近似值满足方程 (15.12) 和 (15.13)。假定流函数对时间的展开式有如下形式：

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= 2\sqrt{vt} \left\{ t\omega \xi_0(\eta) + t^2 \omega \frac{d\omega}{dx} \xi_1(\eta) + \dots \right\}, \\ u(x, y, t) &= U \left(\xi_0 + t^2 \frac{d\omega}{dx} \xi_1 + \dots \right), \end{aligned} \quad (15.55)$$

则可以导出下列关于 $\xi_0(\eta)$ 和 $\xi_1(\eta)$ 的微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \xi_0''' + 2\eta\xi_0'' - 4\xi_0' &= -4 \\ \xi_1''' + 2\eta\xi_1'' - 12\xi_1' &= -4 + 4(\xi_0^2 - \xi_0\xi_0'') \end{aligned} \right\}, \quad (15.56)$$

其边界条件是

$$\begin{aligned} \eta = 0: \xi_0 &= \xi_0' = 0, \quad \xi_1 = \xi_1' = 0, \\ \eta = \infty: \xi_0 &= 1, \quad \xi_1 = 0. \end{aligned}$$

关于函数 ξ_0 的解，由 H. Blasius 给出的形式为：

$$\xi_0 = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2) - (1 + 2\eta^2) \operatorname{erfc} \eta. \quad (15.57)$$

Blasius 还以封闭形式给出了关于 ξ_1 的解。计算分离所需要的初始斜率是：

$$\begin{aligned} \xi_0'(0) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 2.257; \\ \xi_1'(0) &= \frac{31}{15\sqrt{\pi}} - \frac{256}{225\sqrt{\pi^3}} = 0.427 \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 0.964. \end{aligned}$$

方程(15.55)给出了这种情形下分离开始的时刻,如果只取展开式的前两项,则可以得到

$$\zeta_0''(0) + t_i^2 \frac{dw}{dx} \zeta_1''(0) = 0,$$

或者,利用上述 $\zeta_0''(0)$ 和 $\zeta_1''(0)$ 的数值,则有

$$1 + 0.427 t_i^2 \frac{dw}{dx} = 0,$$

所以

$$t_i^2 \frac{dw}{dx} = -2.34.$$

这个表达式也可以写成如下形式:

$$1 + 0.427 t_i \frac{dU}{dx} = 0.$$

与式(15.45)相比可以看出,当 dU/dx 值相同时,突然起动的分离要比匀加速运动的分离出现得更早.

H. Blasius 还计算了展开式的另外两项,利用这两项的值,可以得到下列关于 t_i 方程的改进形式:

$$1 + 0.427 \frac{dw}{dx} t_i^2 - 0.026 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 t_i^4 - 0.01w \frac{d^2w}{dx^2} t_i^4 = 0.$$

对于柱体情形,当柱体相对于流动方向对称放置时,在后驻点处上式最后一项为零,由此得到

$$t_i^2 \frac{dw}{dx} = -2.08. \quad (15.58)$$

例: 圆柱体

对于圆柱体情形,我们有

$$U(x, t) = tw(x) = 2bt \sin \frac{x}{R},$$

其中 b 表示等加速度. 因此,

$$w(x) = 2b \sin \frac{x}{R},$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2b}{R} \cos \frac{x}{R}.$$

在这种情形下,最先发生分离的点也与后驻点 ($\cos(x/R) = -1$) 相重合. 这样,由式(15.58)可以得到

$$t_i^2 = 1.04 \frac{R}{b}.$$

直到分离开始为止,圆柱体走过的距离为

$$s = \frac{1}{2} b t^2,$$

因而可写成 $s = 0.52R$, 这个距离也比突然运动情形下的距离大. 在本章 b 中关于最先出现分离点的讨论, 对目前的情形依然适用. 图 15.4 给出了上述情形下的流线图象, 它是基于 Blasius 的文章绘制的. 这个图象对应的时间为

$$T = t\sqrt{b/R} = 1.58,$$

而圆柱走过的距离等于 $1.25R$. 假定 $R = 10\text{cm}$ (大约 4in), $b = 0.1\text{cm/s}^2$ (大约 $0.04\text{in/s}^2 = 0.0033\text{ft/s}^2$), 那么我们得到

$$\sqrt{b/R} = 0.1 \text{ 秒}^{-1},$$

而运动开始以后所经过的时间是 $t = 15.8$ 秒. 图 15.4 表示所求得的边界层的形状. 和图 15.3 一样, 其中放大了边界层厚度的线尺度. 对于水而言, $\nu = 0.01 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ (大约 $0.1 \times 10^{-4}\text{ft}^2/\text{s}$), 厚度放大到 $\sqrt{10}$ 倍左右.

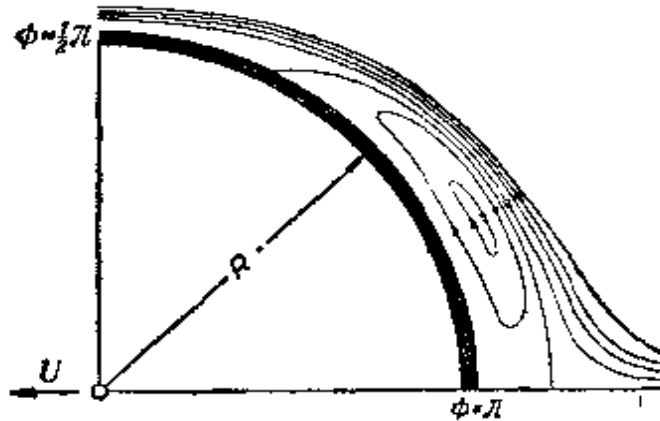


图 15.4 作匀加速运动的圆柱体背风面上, 分离开始以后的边界层 (Blasius)

速度: $U(t) = b \times t$; 在 $T = t\sqrt{b/R} = 1.58$

时的图象; 在 $T_s = t_s\sqrt{b/R} = 1.02$ 时最先出现分离

H.Goertler^[15] 推广了这种加速运动期间边界层形成过程的理论计算方法. 他假设位势流动的速度表达式为 $U(x,t) = \omega(x)t^n$, 其中 $n = 0, 1, 2, 3, 4$. 当 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时, 可分别得到上述突然起动和匀加速运动的情形. 在 $n = 0 \sim 4$ 的情形下, H.Goertler 给出了用时间幂次项表示的流函数展开式中首项的显式表达式. 并且在壁面上计算出了第二项和它的初始斜率, 从而可以计算分离开始的时刻和所走过的距离(可以用圆柱体为例). 在这方面, 还可以参考 E.J.Watson^[63] 的文章.

d. 起动过程的实验研究

借助以上所讨论的解析方法, 可以研究边界层形成的过程. 但

是分离开始以后，这种解析方法就逐渐无能为力了。在分离开始以后，边界层外边的流动图象出现明显的改变，尤其是在钝体(例如圆柱体)的背风面：因此，根据位势理论导出的理论压力分布所作的计算，对分离以后的过程给出的是不精确的描述。图 15.5 的一组照片说明了圆柱绕流图象的发展过程。图 15.5a 显示流动刚开始时的无摩擦位势流动图象。图 15.5b 表示后驻点上刚刚开始分离时的图象。图 15.5c 表明分离点已经向上游移动了很大的距离。通过分离点的流线包围了一个流速很小的区域，这条流线的内侧涡量最大，进而形成一个涡面。随着图象的不断发展，涡面

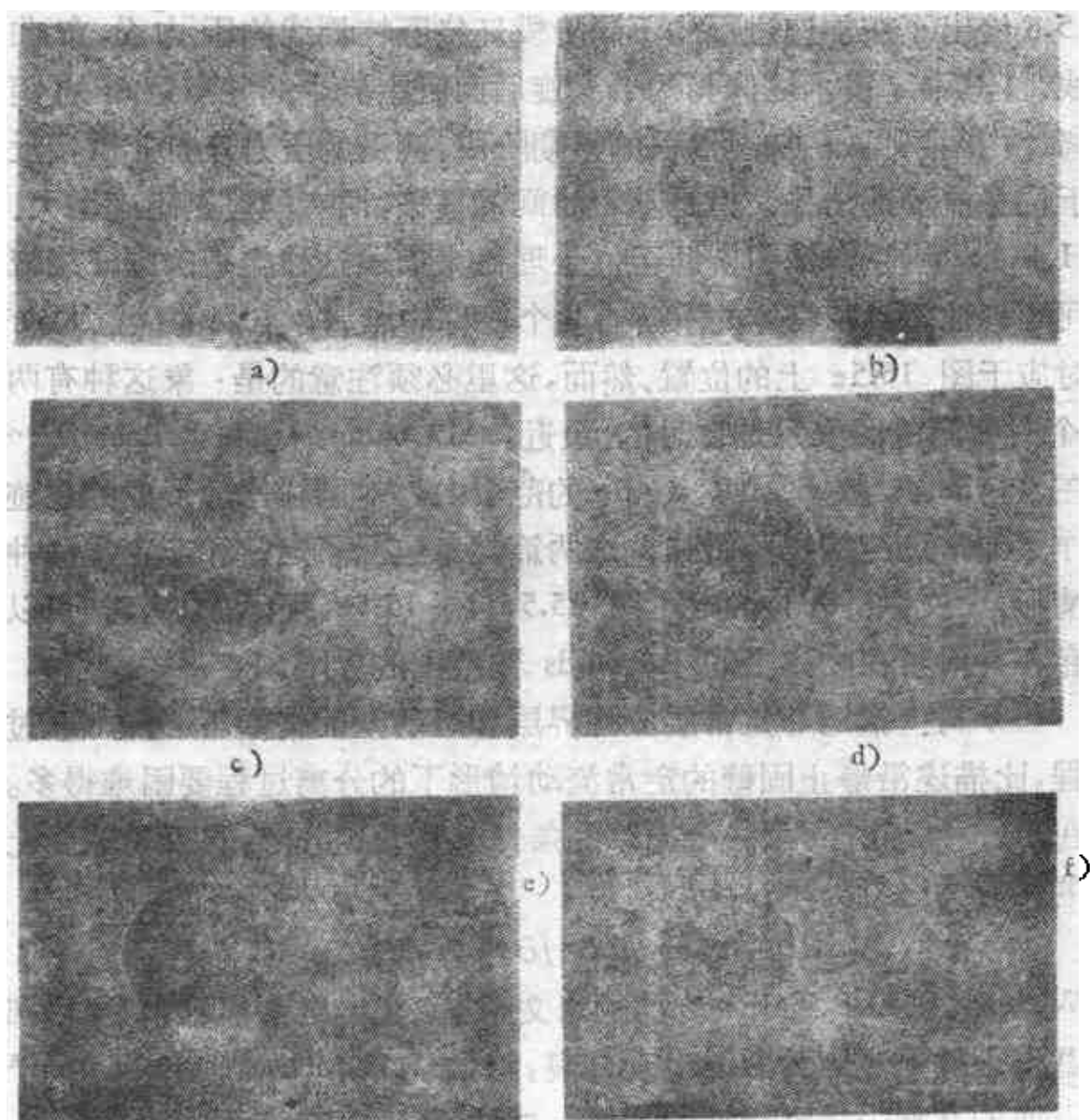


图 15.5a~f 圆柱绕流中涡的形成，圆柱从静止开始加速运动 (L.Prandtl)

卷起并形成了如图 15.5d 所示的两个集中的涡。在这两个涡的后面自由流中，可以看出有一个驻点。这个驻点与通过分离点的两条流线的交点相重合。图 15.5e 表明旋涡在继续增长。随着时间的推移，旋涡变成不稳定的。最后如图 15.5f 所示的那样，它们终于被外部流动带着离开了物体。在定常状态下，运动有脉动，并且物体周围的压力分布明显地不同于位势流动理论所确定的结果。

M.Schwabe^[47] 在圆柱体上，很详细地研究了上述现象。特别是，他测量了从静止开始的加速过程中圆柱周围的压力分布。图 15.6 给出了在加速过程的不同阶段环绕圆柱周线的压力分布曲线。其中 d 表示柱体与两个涡旋后面自由流中的驻点之间的距离。由图可见，在加速过程的早期阶段，测量的压力分布非常接近于位势流动的结果。但是随着时间的推移，两者的差别迅速增大。H.Rubach^[48] 曾试图借助于位势理论来描述这种类型的圆柱绕流问题。他假设在物体的下游有两个对称的点涡，点涡的位置大致对应于图 15.5e 上的位置。然而，这里必须注意的是：象这种有两个对称涡的图象只是暂时的。最近，M.Coutanceau 和 R.Bouard^[9b,c] 在 Reynolds 数 $5 < R < 40$ 的范围内，对圆柱体后形成的尾迹作了非常广泛的实验研究。这两篇文章包括了定常和非定常两种情形。文献 [9c] 确定了图 15.5d 和 15.5e 所示的“涡对”可以存在并附着在物体上的 Reynolds 数范围的界限。

分离：描述非定常层流边界层和运动壁面情形下的分离过程，比描述沿静止固壁的定常流动情形下的分离过程要困难得多。在后一种情形下，用一个简单的条件就能确定分离，这就是壁面上的切应力必须为零：

$$\tau_0 = \mu(\partial u / \partial y)_0 = 0.$$

W.Sears 和 D.P.Telionis^[47a] 的论文指出，在非定常流动中，当内部驻点上的切应力为零时出现分离，正如 F.K.Moore^[33] 和 N.Rott^[38] 以前的文章中早已指出的那样。因此，分离时在流体内部有

$$u = 0 \text{ 以及 } \partial u / \partial y = 0.$$

这个条件称为 **Moore-Rott-Sears 准则**。在物理上,这个条件描述层流边界层的破裂。在一定程度上,这种有分离的二维非定常边界层,与平板和它上面的短粗物体之间拐角处形成的三维边界层呈现出相同的特征。在图 11.20 和 11.21 所示的情形下,流动形成一个分离面;也可参阅文献 [47b, c]。

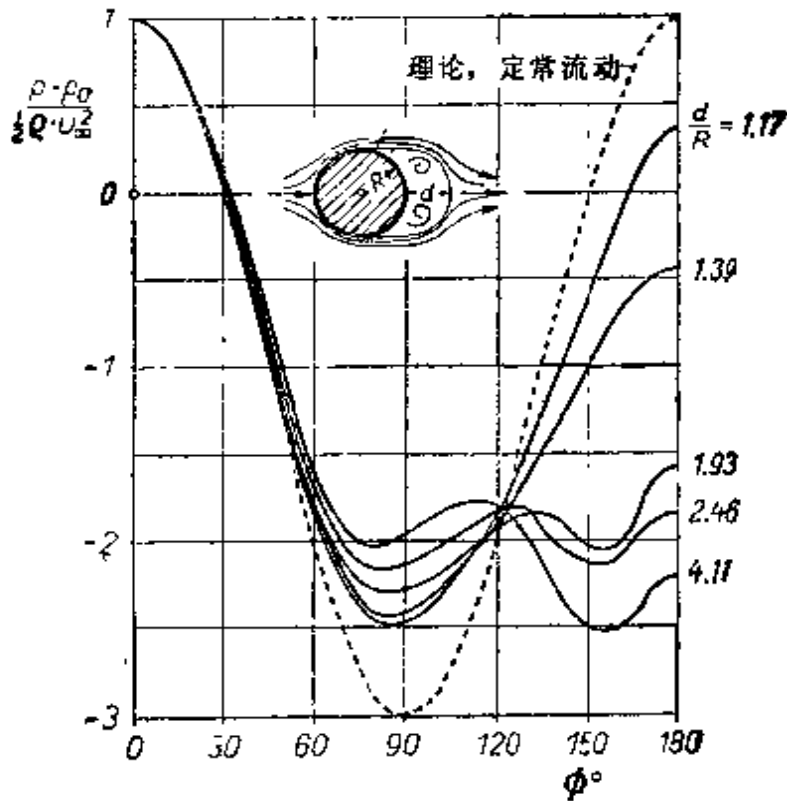


图 15.6 起动过程中在圆柱周围测量的压力分布,引自 M.Schwabe^[47]

S.Taneda^[56a] 给出了关于绕钝体非定常流动的广泛评论,其中附有许多极好的流动照片。

最后,值得指出的是:在细长体情形(例如长轴平行于流动方向的细长椭圆柱体)或者在翼型情形下,分离过程的尺度大大减小,因此,在大多数情形下,这种物体上的实验压力分布与位势理论所给出的压力分布是十分一致的(也看图 1.11)。

e. 周期性的边界层流动

1. 静止流体中的振动柱体 为了给出一个周期性边界层流动

的例子，我们现在来计算在静止流体中物体以小振幅作往复简谐振动时的边界层。这是第五章第7节中所讨论的在自身平面内作简谐振动的平板边界层问题的推广。

本节将要证明，在静止流体中物体很小的振动会诱导出特征二次流，这种二次流的性质是这样的：尽管物体的运动只是单纯的周期性运动，但是传递给整个流体的却是定常运动。例如，在 Kundt 管中造成烟尘图象时就会出现这种效应，这种效应在声学中具有一定的重要性。

对于我们将要讨论的圆柱体而言，假定它的位势速度分布可以表示为 $U_0(x)$ 。那么，在圆频率为 n 的周期性振动的情形下，位势流动可以表示为

$$U(x, t) = U_0(x) \cos(nt). \quad (15.59)$$

现在，我们采用与固体连结的坐标系。这样就可以应用方程 (15.1) 和 (15.2)，而压力分布则由方程 (15.6) 给出。边界条件是：在 $y = 0$ 处， $u = 0$ ； $y = \infty$ 处， $u = U$ 。

可以尝试采用从静止开始加速的情形所使用的方法来求解这个问题，即采用如式 (15.11) 所定义的速度分布函数，并借助于方程 (15.12) 和 (15.13) 来计算逐次近似值。

如果

$$\left| U \frac{\partial U}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|,$$

那么这种方法是可取的。现在 $U \partial U / \partial x \sim U_m^2 / d$ ，其中 d 表示物体的线尺度（例如圆柱的直径）。另一方面， $\partial U / \partial t \sim U_m \times n$ ，其中 U_m 表示物体的最大速度。因此，我们有

$$U \frac{\partial U}{\partial x} / \frac{\partial U}{\partial t} \sim \frac{U_m}{nd}.$$

最大速度 U_m 正比于 $n \times s$ ，其中 s 是振幅，所以

$$U \frac{\partial U}{\partial x} / \frac{\partial U}{\partial t} \sim \frac{s}{d} \ll 1.$$

上述讨论表明：这里提出的求解方法可以适用于振动的振幅选小

于物体尺寸的情形。

H. Schlichting^[41] 完成了这个计算 (也可参看文献 [36])。因为微分方程是线性的, 因此这里采用复数符号似乎更为方便。在这种情形下, 式 (15.59) 可以写成

$$U(x, t) = U_0(x) e^{int},$$

并且约定只对所述复数的实部赋予物理意义。引入一个无量纲坐标 η , 定义

$$\eta = y \sqrt{\frac{n}{\nu}}, \quad (15.60)$$

同时假设流函数的一次近似值 ψ_0 具有如下形式:

$$\psi_0(x, y, t) = \sqrt{\frac{\nu}{n}} U_0(x) \zeta_0(\eta) e^{int},$$

因此,

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y, t) &= U_0(x) \zeta_0' e^{int}; \\ v_0(x, y, t) &= -\frac{dU_0}{dx} \sqrt{\frac{\nu}{n}} \zeta_0 e^{int}. \end{aligned} \right\} \quad (15.61)$$

根据方程 (15.12) 可以得到下列关于 $\zeta_0(\eta)$ 的微分方程:

$$i\zeta_0' - \zeta_0'' = i,$$

其边界条件是: 在 $\eta = 0$ 处, $\zeta_0 = \zeta_0' = 0$; $\eta = \infty$ 处, $\zeta_0' = 1$ 。这个方程的解是

$$\zeta_0' = 1 - \exp\{-(1-i)\eta/\sqrt{2}\}.$$

如果还回到用实数符号¹⁾ 表示, 我们得到函数

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= U_0(x) [\cos(nt) - \exp(-\eta/\sqrt{2}) \\ &\quad \times \cos(nt - \eta/\sqrt{2})] \end{aligned} \quad (15.62)$$

这就是速度分布函数的一次近似值。它与式 (5.26a) 关于振动平板的解相同²⁾。

1) 这是为了适合于计算方程 (15.13) 右边的对流项的需要。

2) 应该指出, 与第五章 a7 不同, 这里坐标系取在物体上; 另外, 无量纲坐标 η 与那里所用的 η 相比少因子 $\sqrt{2}$ 。

如果现在根据方程 (15.13) 来计算二次近似值 $u_1(x, y, t)$, 则可以看出, 方程右边的对流项将出现具有 $\cos^2 n t$ 的项, 而这些项可以化成 $\cos 2n t$ 项, $\sin 2n t$ 项和定常状态项(即与时间无关的项). 考虑到这些情况, 我们可以把流函数的二次近似值表示成如下形式:

$$\phi_1(x, y, t) = \sqrt{\frac{\nu}{n}} U_0(x) \frac{dU_0}{dx} \frac{1}{n} \{ \zeta_{1a}(\eta) e^{2in t} + \zeta_{1b}(\eta) \},$$

因此有

$$u_1(x, y, t) = U_0(x) \frac{dU_0}{dx} \frac{1}{n} \{ \zeta'_{1a} e^{2in t} + \zeta'_{1b} \},$$

其中 ζ_{1a} 和 ζ_{1b} 分别表示二次近似值的周期性成分和定态成分. 由方程 (15.13) 看出, 这两个函数满足下列微分方程:

$$\begin{aligned} 2i\zeta'_{1a} - \zeta_{1a}''' &= \frac{1}{2} (1 - \zeta_0'^2 + \zeta_0 \zeta_0''), \\ -\zeta_{1b}''' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_0' \bar{\zeta}_0' + \frac{1}{4} (\zeta_0 \zeta_0'' + \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0''). \end{aligned}$$

其中符号上面的一杠表示对应的共轭复数.

周期性成分的法向分量和切向分量在壁面上必须为零, 然而, 在远离壁面处只是切向分量为零. 设

$$\eta' = \eta / \sqrt{2},$$

则得到

$$\begin{aligned} \zeta'_{1a} &= -\frac{i}{2} \exp[-(1+i)\sqrt{2}\eta'] + \frac{i}{2} \exp[-(1+i)\eta'] \\ &\quad - \frac{i-1}{2} \eta' \exp[-(1+i)\eta']. \end{aligned}$$

在考虑定态成分时, 可以发现只能满足壁面上的边界条件, 而在远离壁面处切向分量可以是不为零的有限值. 例如

$$\begin{aligned} \zeta'_{1b} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \exp(-2\eta') + 2 \sin \eta' \exp(-\eta') \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \eta' \exp(-\eta') - \frac{\eta'}{2} (\cos \eta' - \sin \eta') \end{aligned}$$

$$\times \exp(-\eta'),$$

所以

$$\zeta'_{ib}(\infty) = -\frac{3}{4}.$$

由此看出,二次近似值包含一个定态项,它在远离物体处(即在边界层之外)并不为零.它的大小可以表示为

$$u_2(x, \infty) = -\frac{3}{4n} U_0 \frac{dU_0}{dx}. \quad (15.63)$$

这样,上述讨论使我们得到一个值得注意的结论:相对于时间是周期性的位势流动,由于粘性力的作用,在远离壁面处会诱导出一个二次(‘流’)的定常运动.它的大小由式(15.63)给出,并与粘性系数无关.这个定态速度分量使流体质点沿着平行于壁面的位势速度分量的振幅减小的方向流动.

这种流动的一个例子示于图 15.7 中,该图是静止流体中振动圆柱周围的定常流动的流线图象.图 15.8 是圆柱在充满水的容器中振动时,柱体周围流动图象的照片.用来摄影的照相机与圆柱一起运动,同时水面上撒有显示流动的金属粉末.由于曝光时间长以及金属粉末作往复运动,因此粉末在照片上表现为一条条的宽带.流体质点从上方和下方向着圆柱流动,然后沿平行于圆柱往复运动的方向向两边流走.这与图 15.7 所示的理论流线图象是

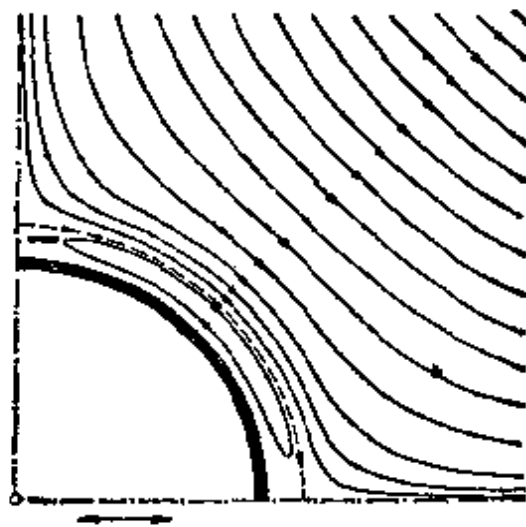


图 15.7 振动圆柱附近定常二次流的流线图象

十分一致的。E.N.Andrade^[13] 也发表了类似的照片，他在圆柱体周围诱发出驻声波，并且通过注入烟的办法显示出所引起的二次流。

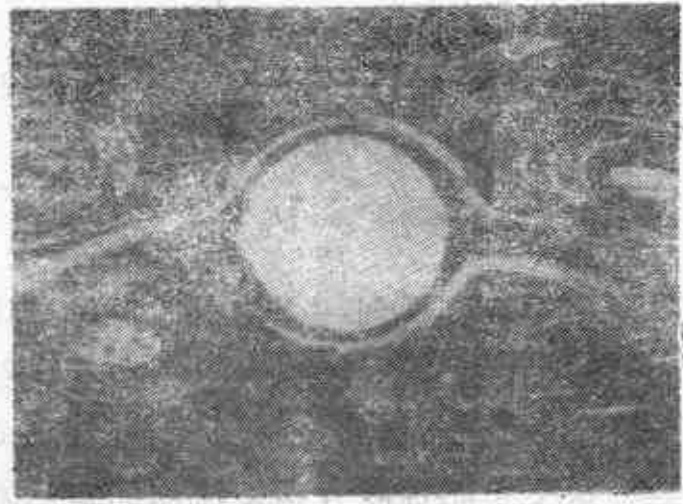


图 15.8 振动圆柱附近的二次流。照相机与圆柱一起运动。由于曝光时间长和金属粉末的往复运动，用来显示流动的金属粉末呈现为宽的条带，引自 Schlichting^[44]

这里，值得注意的是：式 (15.62) 中的一次近似值 u_0 表明，和强迫振动相比，不同流体层振动的相位移是不同的，并且它们的振幅从壁面向外逐渐减小。第五章中讨论过的一些解也呈现出相同的特性。一次近似值 u_0 以及第五章的解是利用不包含以下对流项的微分方程得到的，这些对流项是

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad U \frac{\partial U}{\partial x}.$$

因此可以说，相位移与 y 的关系以及振幅随着离开壁面的距离而逐渐衰减，这些都只是由粘性作用引起的。另一方面，在二次近似值 u_1 中，出现了一项并非是周期性的项，这一项代表叠加在振动运动上的定常流动。由此也可以说：二次流动起源于对流项，它是由于惯性和粘性之间的相互作用产生的。应该记住：略去对流项的简化得到的是没有二次流动的解，因此，对这种流动可能给出使人误解的解释。一般说来，只有当这种解至少进行到二阶近似时才会出现二次流。

上面讨论的现象为 Kundt 的烟尘图象提供了一个简单的解释，这种图象可以用来证明管内驻声波的存在。这种声波属于纵波，同时声波振幅的最大值位于驻波的最大振幅点（见图 15.9）。这样，在管内诱导出了二次流动。在壁面附近，二次流的速度方向从最大振幅点指向波节。显然，为了满足连续性的要求，在远离壁面处，速度必然要改变方向。这就引起了“二次流”效应，即烟尘粒子的位移，从而使烟尘粒子在波节处形成小的堆积。

根据以上的叙述，可以清楚地看出用来产生 Kundt 图象的烟尘量具有很大的重要性。烟尘量太大要发生搅动。当管子受激振动时，烟尘可以到达内部流动区。因此，这就不可能使烟尘从最大振幅点移走。相反，如果烟尘量取得过小，则壁面附近的流动影响将变得更为强烈，很快就使得最大振幅点上变成无烟尘的。在关于声学的出版物中已经详细研究了这些与振动相伴随的定常流动问题，参看文献 [68]。

A. Gosh^[17] 完成了绕轴对称椭球流动类似研究，这种椭球在静止流体中绕着它的对称轴振动；也可参阅 D. Roy^[40, 41] 的文章。



图 15.9 形成 Kundt 烟尘图象的说明

AM = 振幅最大点

N = 振动节点

2. 谐振的林家翘理论 上节讨论了在静止流体中含有振动的典型例子。但是在实际应用中，在流动流体上叠加这种振动的问题更为重要，当然也更难于分析。借助于本章 a 中所叙述的林家翘理论^[28]，可以深入了解这类过程。

如果外部振动用以下函数描述，即

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \sin nt, \quad (15.64)$$

则由方程 (15.23) 可以求得纵向速度 u 的振动分量为

$$u_1(x, y, t) = U_1(x) \{ \sin nt - [\exp(-y/\delta_0)] \cdot [\sin(n t - y/\delta_0)] \}. \quad (15.65)$$

值得注意的是纵向扰动分量 $u_1(x, y, t)$ 相对于外部流动的相位移仍然依赖于坐标 y 。借助于连续方程(15.27)可以得到横向分量 $v_1(x, y, t)$ ，它也呈现出这种典型的相位移。由于已经得到 $u_1(x, y, t)$ 和 $v_1(x, y, t)$ 的表达式，根据式(15.21)可以计算出表观压力梯度 $F(x, y)$ 。它取以下形式：

$$F(x, y) = \frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1}{dx} \bar{F} \left(\frac{y}{\delta_0} \right), \quad (15.66)$$

其中

$$\bar{F} \left(\frac{y}{\delta_0} \right) = \exp(-y/\delta_0) [(2 + y/\delta_0) \cos(y/\delta_0) - (1 - y/\delta_0) \sin(y/\delta_0) - \exp(-2y/\delta_0)]. \quad (15.67)$$

这个函数的曲线见图 15.10。表达式(15.66)表明，真实的平均速度剖面 \bar{u} 和假定 $F(x, y) = 0$ 时所产生的准定常速度剖面 u_1 之间的偏差，主要取决于振动的振幅 $U_1(x)$ 和振幅沿着流动的变化

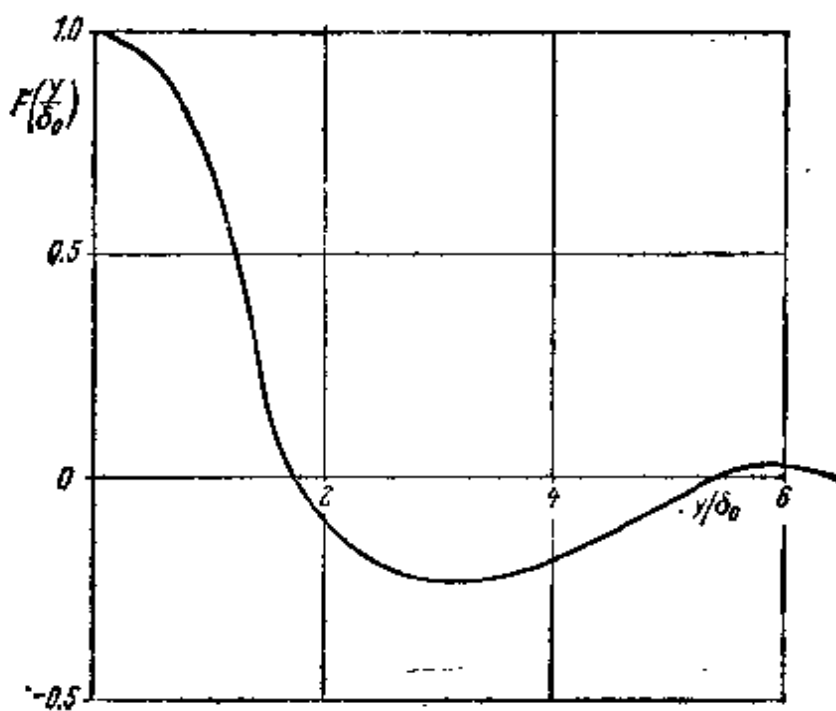


图 15.10 当外部流动中只有单一的谐振分量时，由式(15.67)得到的函数 $\bar{F}(y/\delta_0)$ 的曲线

$\partial U_1 / \partial x$ 。特别地，如果沿着流动振幅保持不变，也就是 $U_1 = \text{常数}$ ，那么，即使振幅很大，这个速度剖面也不会产生变化。根据图 15.10 的曲线，可以推断速度剖面的最大相对修正量出现在壁面附近，因为在壁面附近 $\bar{F}(y/\delta_0)$ 有最大值 $\bar{F}(0) = 1$ 。由于最靠近壁面的流体质点以比较小的加速度运动，因此，在壁面附近附加压力梯度将产生最大的变化。

如果有频率为 $kn (k = 1, 2, \dots)$ 的谐振频谱，即对于自由流速度有

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \sum_k U_{1k}(x) \sin(knt), \quad (15.68)$$

则可以简单地得到

$$F(x, y) = \sum_k \frac{1}{2} U_{1k} \frac{dU_{1k}}{dx} \bar{F}\left(\frac{y}{\delta_{0k}}\right), \quad (15.69)$$

其中

$$\delta_{0k} = \sqrt{\frac{2\nu}{kn}}$$

如前所述，层流分离点的位置显然受到外部振动的影响，因此分离点本身必然也在振动。最后，林家翘的方法导出一个有价值的结论：这种基本的振动在边界层内诱导出更高次的谐振动。

3. 有很小谐扰动的外部流动 许多文章研究了外部流动作微小谐振动的问题，所使用的方法就是本章 a3 中叙述的对扰动参数进行级数展开。假设外部流动的形式为

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \varepsilon U_1(x)e^{i* t}, \quad (15.70)$$

我们注意到对于这种情形，大多数的研究都限于计算一次近似值，即根据式 (15.30) 计算函数 u_1 、 v_1 和 T_1 。M.J.Lighthill^[21] 系统地阐述了函数 $\bar{U}(x)$ 和 $U_1(x)$ 为任意形式时求解方程 (15.32) 的近似方法。E.Hori^[24] 讨论了函数 $\bar{U}(x)$ 和 $U_1(x)$ 可以表示成幂级数形式的特殊情形。而 N.Rott 和 M.L.Rosenzweig^[23] 则检验了当函数 $\bar{U}(x)$ 和 $U_1(x)$ 是 x 的一次方时的例子。M.B.Glauert^[12] 和 N.Rott^[22] 所研究的驻点流动的例子以及 A.Gosh^[17] 和 S.Gibbelato^{[11][22]} 所研究的沿零攻角平板的流动，将在下面予以叙述。另外，A.Gosh^[17] 与 P.G.Hill 和 A.H.Stenuing^[22] 还对非定常边界层作了实验测量。

假定外部流动的形式为

$$U(x, t) = cx^m(1 + \varepsilon e^{i* t}) = \bar{U}(1 + \varepsilon e^{i* t}), \quad (15.71)$$

那么，由方程组 (15.31) 可以得到求相似解时已熟悉的微分方程 (9.8) 和 (9.8a)，即

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1 - f^2) = 0, \quad (15.72)$$

$$\frac{1}{P} \theta'' + \frac{m+1}{2} f \theta' = 0, \quad (15.73)$$

并有

$$u_0 = cx^m f'(\eta) \text{ 和 } \frac{T_0 - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\eta),$$

其中

$$\eta = y \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}}.$$

在方程组 (15.32) 中假定

$$u_1 = \varepsilon e^{i\pi x / \bar{U}} \Phi(\xi, \eta), \quad (15.74)$$

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \varepsilon e^{i\pi x / \bar{U}} \Theta(\xi, \eta), \quad (15.75)$$

其中

$$\xi = \frac{i\pi x}{\bar{U}}. \quad (15.75a)$$

这样,我们可以得到如下关于辅助函数 $\Phi(\xi, \eta)$ 和 $\Theta(\xi, \eta)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f \Phi_{\eta\eta} - (\xi + 2mf') \Phi_{\eta\xi} + \frac{m+1}{2} f' \Phi \\ - (1-m)f' \xi \Phi_{\eta\xi} + (1-m)f'' \xi \Phi_\xi + \xi + 2m = 0, \end{aligned} \quad (15.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \Theta_{\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f \Theta_{\eta\xi} - (1-m)f' \xi \Theta_\xi - \xi \Theta \\ = - \frac{m+1}{2} \Phi \theta' - (1-m) \xi \Phi_\xi \theta', \end{aligned} \quad (15.77)$$

其边界条件是

$$\begin{aligned} \eta = 0: \Phi = \Phi_\eta = \Phi_\xi = \Theta = 0, \\ \eta = \infty: \Phi_\eta = 1; \Theta = 0. \end{aligned} \quad (15.78)$$

上述微分方程通常都是用级数展开形式先对小 ξ 值求解,然后对大 ξ 值求解. 对于小 ξ 值,假定

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Phi_k(\eta); \quad \Theta(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \theta_k(\eta). \quad (15.79)$$

我们可以得到关于函数 $\Phi_k(\eta)$ 和 $\theta_k(\eta)$ 的常微分方程. 这两个函数在 $\eta=0$ 处的导数用来计算壁面上的切应力和局部 Nusselt 数. 用这种方法,我们可以导出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_f \sqrt{R_x} &= \frac{\tau_0}{\mu \bar{U} \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}}} \\ &= f''(0) + \varepsilon e^{i\pi x / \bar{U}} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \Phi_k'(0), \end{aligned} \quad (15.80)$$

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = - \left\{ \theta'(0) + \varepsilon e^{i\pi x / \bar{U}} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \theta_k'(0) \right\}. \quad (15.81)$$

按照 V.K. Moore 的文章 [31] (也可参看 A.Gosh^[17] 和 S.Gibbiate^[12]), 零攻角平板问题可以用如下表达式表示:

$$\frac{1}{2} c_f \sqrt{R_x} = 0.332 + se^{i\pi t} \left\{ 0.498 + 0.470 \left(\frac{\pi x}{U_\infty} \right)^2 + \dots + i \left(0.849 \frac{\pi x}{U_\infty} + \dots \right) \right\} \quad (15.82)$$

$$\frac{N_x}{\sqrt{R_x}} = 0.296 + se^{i\pi t} \left[0.148 + 0.125 \left(\frac{\pi x}{U_\infty} \right)^2 + \dots - i \left(0.021 \frac{\pi x}{U_\infty} + \dots \right) \right], \quad (P = 0.72). \quad (15.83)$$

用 $\pi = 0$ 代入, 就可以得到准定常解. 这就是说, 在每一瞬间这个解就象在该瞬时外流速度下的定常解一样. 当 $\pi \neq 0$ 时, 出现了虚数项, 这意味着边界层相对于外部流动有了相位移, 而且速度的相位移和温度的相位移是不同的. 切应力的最大值超前于外部流动的最大值 (在 $\pi x/U_\infty \rightarrow \infty$ 的极限情形下, 相位角趋于 45°), 而温度的最大值滞后于外部流动的最大值 (在 $\pi x/U_\infty \rightarrow \infty$ 的极限情形下, 相位角趋于 90°). 另外, 还可以证明: 当 $\pi x/U_\infty$ 的值很大时, 切应力振动的振幅可以无限制地增大, 而热通量的振幅随着 $\pi x/U_\infty$ 的增大却逐渐减小为零.

当方程组 (15.33) 的解进行到二阶时, 可以发现函数 $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$ 和 $T_2(x, y, t)$ 将包含一个两倍频率的谐波部分和一个与时间无关的、附加的定常部分. 后者改变了基本流动, 我们把它解释为二次流动, 这与上一节所讲的二次流动是完全类似的.

对于驻点流动, 有 $U_1(x) = \text{常数}$, 正如 M.B.Glauert^[13] 所证明的那样, 可以发现这时 u_2 , v_2 和所有更高阶的项全都为零. 因此, 由 u_1 和 v_1 项所增大的基本流动构成一个精确解, 并且也是完整的 Navier-Stokes 方程的精确解 (也可参看文献 [67]). 采用适当的变量转换, 上述情形可以得到振动壁面上的驻点流动解, 文献 [13, 67, 2] 首先给出了这些解. 由 J.T.Stuart^[23] 求得并由 J.Watson^[65] 引伸的关于无限平板具有抽吸和周期性外部流动情形下的解, 与上述驻点流情形的解密切相关. J.Kestin, P.F.Macder 和 H.E.Wang^[16] 详细研究了其外部流动受行波扰动情况下的沿零攻角平板的流动. W.Wuest^[66] 解出了圆柱体沿轴向振动时其周围的三维流动问题.

4. 圆管内的振动流动 在周期性压差的影响下流体通过管道的流动问题, 是边界层内振动流动的又一个例子. 例如, 在往复活塞的作用下就会出现这类流动, Th.Sexl^[48] 和 S.Uchida^[63] 给出了这类流动的理论. 现在假设管子很长, 并且横截面是圆的, 用 x 表示圆管的轴向坐标, 用 r 表示到管轴的径向距离. 在上述假设下, 可以认为流动与 x 无关. 如果轴向速度分量 u 与 x 无关, 则径向速度分量以及平行于管轴的对流项必然都为零. 因此, Navier-Stokes 方程 (3.36) 的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (15.84)$$

因为这个方程不包含其它的简化，所以它是精确的。其边界条件是：在 $r = R$ 处(管壁上)， $u = 0$ 。我们假定由运动活塞所引起的压力梯度是某种谐波，并可表示为

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = K \cos nt, \quad (15.85)$$

其中 K 为常数。为了方便起见，再次使用复数符号，并令

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = K e^{int},$$

同样，认为只是实部有物理意义。

假设速度函数的形式为 $u(r, t) = f(r) e^{int}$ ，因而根据方程 (15.84)，我们得到下列关于函数 $f(r)$ 的微分方程：

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{in}{\nu} f(r) = -\frac{K}{\nu},$$

它的解可以表示为

$$u(r, t) = -i \frac{K}{n} e^{int} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{-in}{\nu}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\frac{-in}{\nu}} \right)} \right\}. \quad (15.86)$$

式中 J_0 表示零阶第一类 Bessel 函数。由于方程 (15.84) 是线性的，所以对于不同的频率由式 (15.86) 所得到的解可以进行叠加。因为这个解式中出现了具有复自变量的 Bessel 函数，所以要全面讨论任意 n 值时的解是颇繁杂的，但是可以证明，圆频率 n 很大和很小的极限情形却是非常简单的。

如果把 Bessel 函数展开成级数，并且只保留到二次项，则可以得到当无量纲组合量 $\sqrt{n/\nu} R$ 非常小(很缓慢的振动)时适用的表达式：

$$u(r, t) = -i \frac{K}{n} e^{int} \left\{ 1 - \frac{1 + \frac{in}{4\nu} r^2}{1 + \frac{in}{4\nu} R^2} \right\}, \quad (15.87)$$

其实部为

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{K}{4\nu} e^{int} (R^2 - r^2) \right] \\ = \frac{K}{4\nu} (R^2 - r^2) \cos(nt).$$

可以看出速度分布与激发压力分布同相，而振幅与定常流动中的情形一样，仍然是半径的抛物函数。

利用 Bessel 函数的渐近展开式

$$J_0(z) \rightarrow \sqrt{2/\pi z} e^{i(z - \pi/4)},$$

则可以得到 $\sqrt{n/\nu} R$ 值很大时的表达式：

$$u(r, t) = -\frac{iK}{n} e^{int} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} \right. \\ \left. \times \exp \left[- (1 + i) \sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r) \right] \right\}, \quad (15.88)$$

其实部为

$$u(r, t) = \frac{K}{n} \left\{ \sin nt - \sqrt{\frac{R}{r}} \right. \\ \left. \times \exp \left(-\sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r) \sin [nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r)] \right) \right\}.$$

只要 $\sqrt{n/\nu} R$ 很大，则随着离开壁面距离 $(R - r)$ 的增加，式中第二项迅速减小。因此，在远离壁面的地方只有第一项是主要的；不难看出这一项与距离无关。这个解具有典型的边界层的形式，因为在远离壁面处，流体仿佛作无摩擦运动，不过，对于激发力而言，它的相位移了半个周期。

示意图 15.11 表示在中等振动频率 ($\sqrt{n/\nu} R = 5$) 时一个周期内不同时刻的速度剖面。把速度剖面与压力梯度随时间变化的曲线进行比较（压力梯度曲线画在图 15.11 的下方），可以清楚地

看出,管轴上的流动滞后于管壁附近流体层内的流动.应该指出的是: 根据上一节的叙述,因为在微分方程(15.84)中不出现非线性的惯性项,因此,本解没有二次流动.另一方面,我们却可以清楚地辨别出特征相位移和振幅衰减(参看文献[27]).

E.G.Richardson 和 E.Tyler^[37] 从实验上研究了上述类型的流动,他们测量了关于速度平方的时间平均值(用 $\overline{u^2}$ 表示). 在快速振动的情形下,根据式(15.88)得到表达式

$$\begin{aligned} \overline{u^2}(r) = & \frac{K^2}{2n^2} \left\{ 1 - 2 \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left[-\sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r) \right] \right. \\ & \times \cos \left[\sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r) \right] + \frac{R}{r} \\ & \left. \times \exp \left[-2 \sqrt{\frac{n}{2\nu}} (R - r) \right] \right\}. \end{aligned}$$

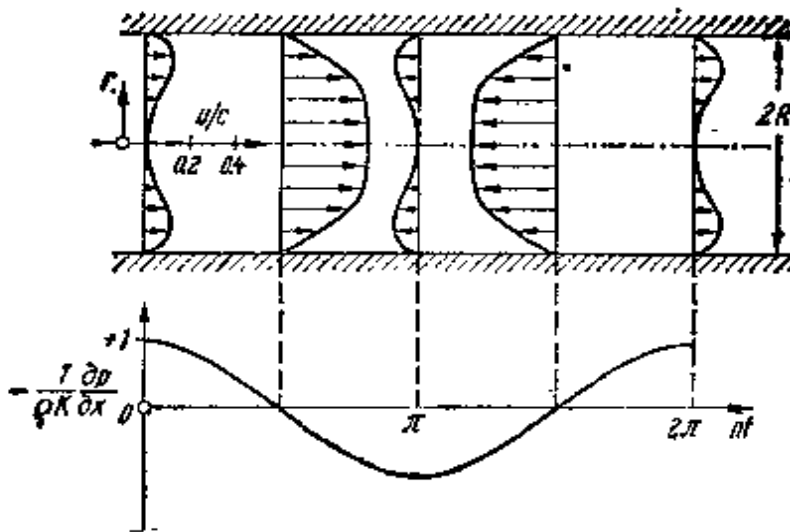


图 15.11 振动管流在一个周期内不同时刻的速度分布, 引自 S. ucnida [63]

$$\begin{aligned} \text{压力梯度: } -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho K \cos(nt); \quad k = \sqrt{\frac{n}{\nu}} R = 5; \\ c &= \frac{Kk^4}{8n} = 3.125 \frac{K}{n} \end{aligned}$$

如果离开管壁的距离 $y = R - r$ 远小于圆管半径 R , 那么比值 R/r 可以用 1 来代替. 因此,通过引入离开管壁的无量纲距离

$$\eta = (R - r) \sqrt{n/2\nu} = y \sqrt{n/2\nu},$$

则有

$$\frac{\overline{u^2(y)}}{\overline{K^2/2n^2}} = 1 - 2 \cos \eta \exp(-\eta) + \exp(-2\eta). \quad (15.89)$$

在图 15.12 中画出了这个平均值对 η 的变化曲线。最大值与管轴（最大距离）并不重合，而是出现在管壁附近

$$\eta = y \sqrt{n/2\nu} = 2.28$$

处。这个值与测量值 (E. G. Richardson^[37] 的“环状效应”) 是非常一致的。在这方面，读者还可以参考 M. Z. Krzywoblocki 对可压缩流体所作的计算 (第十一章文献 [61])。

最近，R. B. Kinney 和他的同事们^[26a,b,44a]成功地计算了绕升力翼型的非定常粘性流动。其中包括了在前缘和后缘处开始的涡旋的发展过程。

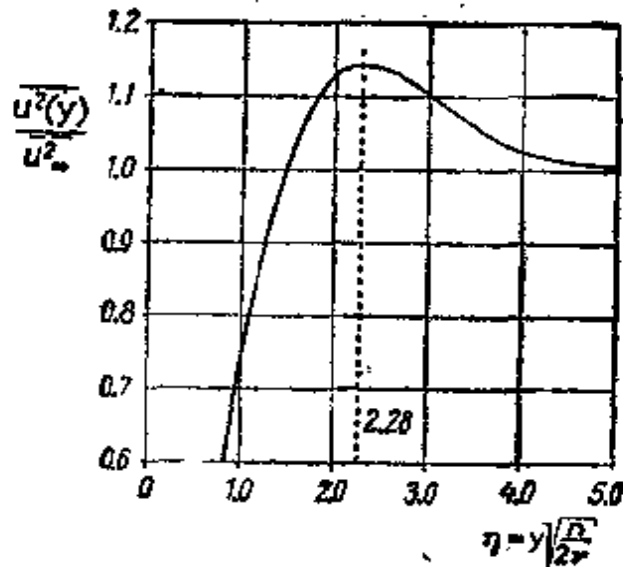


图 15.12 周期性管流中速度平方的时间平均值的变化 (E. G. Richardson^[37] 的“环状效应”) y = 离开管壁的距离; $\overline{u^2_\infty} = K^2/2n^2$ = 远离管壁处速度平方的时间平均值

f. 非定常可压缩边界层

当代，超声速空气动力学的迅速发展使人们对非定常可压缩边界层产生了日益增长的兴趣。例如，在空气动力学研究中所使用的激波管或者类似的装置中，激波或者膨胀波系后面就会出现这种类型的边界层。透彻地了解非定常可压缩边界层，对于计算高速飞行物体作减速或者加速飞行时的阻力和传热量也是必不可少的。由于气动加热，这时飞行器的表面温度可能随时间变化。下面我们举两个简单的非定常层流可压缩边界层的例子。第一个例子讨论运动正激波波后边界层的形成。第二个例子讨论变速和变表面温度的零攻角平板。希望深入了解非定常可压缩边界层的读者也可以参阅 E. Becker^[6] 和 K. Stewartson^[54] 的综述评论。

为了简单起见，我们只限于研究比热和 Prandtl 数都为常数，并且粘性系数正比于绝对温度(式 (13.4a) 中 $\omega = 1$) 的完全气体。这种二维动力边界层和热边界层现在可以由方程 (15.1) 到 (15.5) 连同它们的边界条件来确定。连续方程可以通过引入流函数 $\psi(x, y, t)$ 得到满足，于是速度分量和流函数的关系可以用下列公式表示：

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right), \quad (15.90)$$

其中，新的纵坐标定义为

$$\bar{y} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy; \quad (15.91)$$

这个坐标可以称为“离开壁面的等效不可压缩距离”。符号 ρ_0 表示适当的参考密度(这里也可以参照第十三章 d1.1 中的做法)。

1. 运动正激波波后的边界层 图 15.13 解释了我们所感兴趣的第一个问题；这就是以等速度 U_0 运动的正激波进入静止流体以后产生的边界层。静止流体的状态用下标 0 表示。激波波后、边界层之外的气体状态用下标 ∞ 表示。下面我们假定激波波后的外部流动参数与 x 和 t 无关，从而把这个问题简化。这种假定相

当于忽略了增长着的边界层对外部流动的影响(可以预料在激波管中外部流动是会感受到这种影响的)。其结果是以上所阐述的问题将导致一组相似剖面,于是可以将它化成单一变量的问题,这个变量为

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\nu_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}} = \int_0^y \frac{(\rho/\rho_0) dy}{\sqrt{\nu_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)}}, \quad (15.92)$$

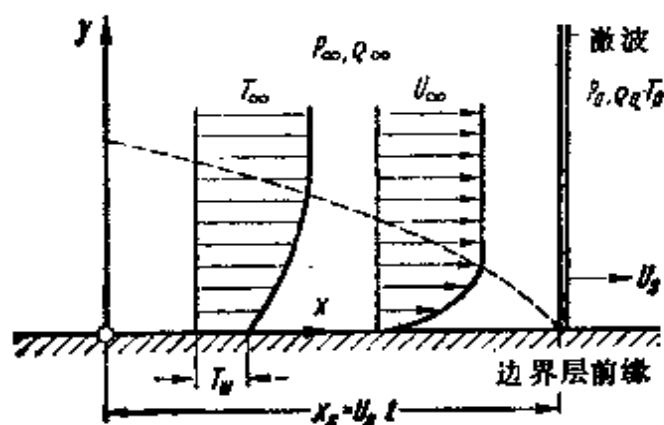


图 15.13 以速度 U_s 运动的正激波波后形成的边界层

它代替了原来的三个变量 x, y, t 。假定流函数的形式为

$$\phi(x, y, t) = U_\infty \sqrt{\nu_0 \left(t - \frac{x}{U_s} \right)} f(\eta), \quad (15.93)$$

则可以用如下公式来描述边界层内的速度分布,即

$$u = U_\infty f'(\eta). \quad (15.94)$$

把上述形式的流函数和对应的形式为

$$T = T_\infty \theta(\eta) \quad (15.95)$$

的温度分布代入方程(15.1)–(15.5),可以推导出下列关于函数 $f(\eta)$ 和 $\theta(\eta)$ 的常微分方程组。这些方程是

$$f''' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) f'' = 0, \quad (15.96)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \theta'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) \theta' = - \frac{U_\infty^2}{c_p T_\infty} f'^2. \quad (15.97)$$

需要满足的边界条件可以记为:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: f = f' = 0, \theta = \frac{T_w}{T_\infty}; \\ \eta = \infty: f = 1, \theta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.98)$$

图 15.14a 中画出了由方程 (15.96) 求得的解 $u/U_\infty = f(\eta)$. 图中曲线族的参数 U_∞/U_s 表征激波的强度. U_∞/U_s 的最大可能值为 $(U_\infty/U_s)_{\max} = 2/(\gamma + 1)$, 它相应于激波强度为无限大; 当 $\gamma = 1.4$ 时, 得到 $(U_\infty/U_s)_{\max} = 0.83$. 那些负的 U_∞/U_s 值相应于假想的非定常连续膨胀的扇形区, 并且设想每一个扇形区汇集成一个锋面. 在 $U_\infty/U_s = 0$ 的特殊情形下, 得到所谓的 Rayleigh 问题(第五章 a4 中的 Stokes 第一问题), 即研究平板壁面突然起动的问题. 由图 15.14a 看出, 正激波波后边界层的厚度大于所谓 Rayleigh 问题的边界层厚度. 这意味着, 在激波通过以后的某一时间间隔 $(t - x/U_s)$ 内, 某一给定位置上边界层增长的厚度大于突然起动平板上起动以后经过相同时间间隔所形成的边界层厚度. 对于膨胀波情况则相反.

关于 $\theta(\eta)$ 的线性微分方程 (15.97) 的解可以表示成两个基本解的线性组合形式, 其定义如下:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{T_\infty} &= \theta(\eta) - 1 \\ &= \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 r(\eta) - \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 r(0) + 1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right\} s(\eta). \end{aligned} \quad (15.99)$$

函数 $r(\eta)$ 和 $s(\eta)$ 是下列常微分方程:

$$\frac{1}{P} r'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) r' = -2f'', \quad (15.100)$$

$$\frac{1}{P} s'' + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{U_\infty}{U_s} f \right) s' = 0, \quad (15.101)$$

以及边界条件

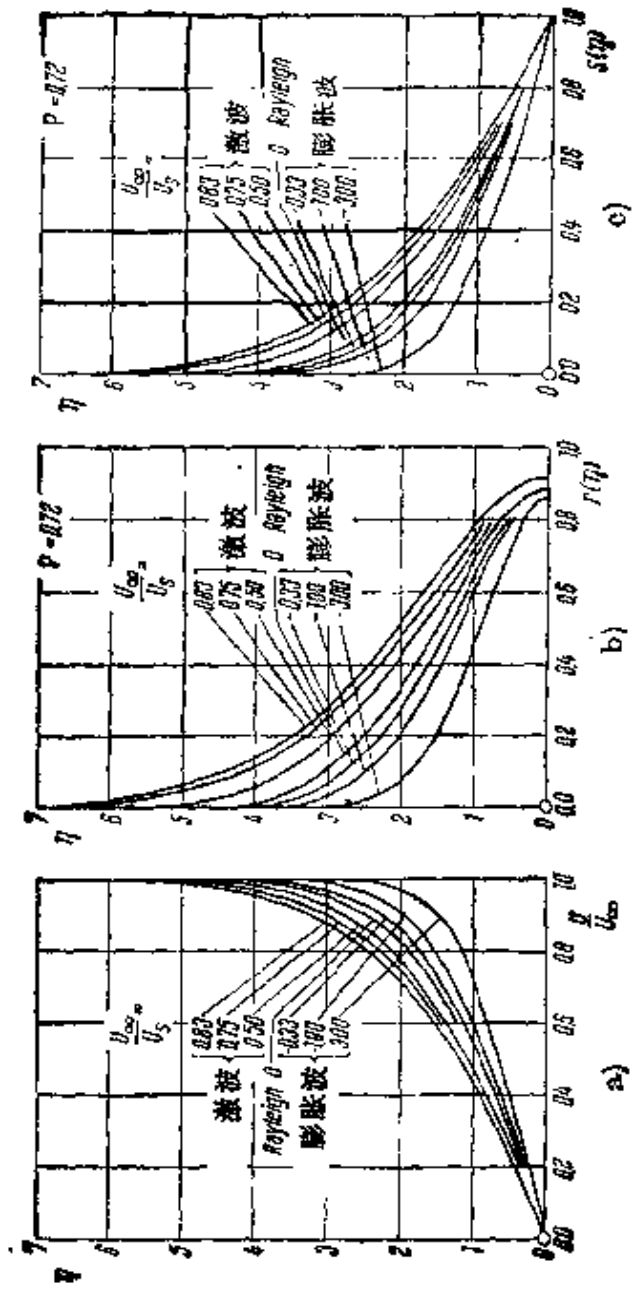


图 15.14 在等速正激波波后由式 (15.94) 和 (15.106) 计算
 的层流边界层内的速度分布和温度分布, 引自 H. Mirels^[29],
 参数 U_∞/U_5 , 表征波的强度

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: r' = 0, s = 1; \\ \eta = \infty: r = 0, s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.102)$$

的解。在图 15.14 b 和 c 中画出了 $P = 0.72$ 时的解。其中数值 $r(0)$ 是恢复温度 T_r (即绝热壁面的表面温度) 的量度。在绝热壁情形下, $\theta'(0) = 0$, 因此, $s(\eta) = 0$ 。根据式 (15.99), 绝热壁温度是

$$T_r = T_\infty \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 r(0) \right\}. \quad (15.103)$$

如果 $P = 1$, 则有 $r(0) = 1$, 这时绝热壁温度变得与驻点温度相同 (参看式 (13.17))。当气体的 Prandtl 数略小于 1 时, 按照 H. Mirels^[29] 的办法, 可以采用近似表达式

$$r(0) = P^\alpha,$$

其中

$$\alpha = 0.39 - \frac{0.02}{1 - (U_\infty/U_s)} \quad \text{对 } \frac{U_\infty}{U_s} > 0 \text{ (压缩波)}, \quad (15.104)$$

$$\alpha = 0.50 - \frac{0.13}{1 - (U_\infty/U_s)} \quad \text{对 } \frac{U_\infty}{U_s} < 0 \text{ (膨胀波)}. \quad (15.105)$$

因此, 温度分布最后变成

$$T - T_\infty = \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 T_\infty'(\eta) + (T_w - T_r)s(\eta). \quad (15.106)$$

关于表面摩擦力系数

$$c_f' = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_w U_\infty^2},$$

可以求得

$$c_f' \sqrt{R} = 2f''(0), \quad (15.107)$$

而局部 Nusselt 数是

$$N = \frac{q}{T_w - T_r} \frac{U_\infty^2 \left(1 - \frac{x}{U_s} \right)}{k_w} = R_s'(0), \quad (15.108)$$

其中

$$\mathbf{R} = \frac{U_\infty^2}{\nu_w} \left(1 - \frac{x}{U_\infty} \right).$$

再一次按照 H. Mirels^[29] 的文章, 当 Prandtl 数接近于 1 时, 可以采用下述近似公式:

$$c_f \sqrt{\mathbf{R}} = 1.128 \sqrt{1 - \beta \frac{U_\infty}{U_s}}, \quad (15.109)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} c_f \mathbf{R}^2, \quad (15.110)$$

其中, 对于压缩波 ($U_\infty/U_s > 0$)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 0.346, \\ \lambda &= 0.35 + \frac{0.15}{1 - (U_\infty/U_s)}, \end{aligned} \right\} \quad (15.111)$$

而对于膨胀波 ($U_\infty/U_s < 0$)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 0.375, \\ \lambda &= 0.48 + \frac{0.02}{1 - (U_\infty/U_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (15.112)$$

在压缩波情况下, 边界层厚度大于所谓的 Rayleigh 值, 这就使得切应力、表面摩擦力系数和 Nusselt 数都小于它们的 Rayleigh 值. 对于膨胀波情况正相反. 在 $\mathbf{P} = 1$ 的特殊情形下, 传热公式变成简单的 Reynolds 比拟关系式

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} c_f \mathbf{R}, \quad (\mathbf{P} = 1) \quad (15.113)$$

正如式 (12.56b) 一样, 该式是读者所熟悉的.

以上讨论的等速激波波后的边界层问题是一种理想化的特殊情形, 在这种情形下, 可以通过适当选取坐标系而将问题化为定常问题, 在所选取的这种坐标系中, 激波是静止的. E. Becker^[3,4,6,7] 与 H. Mirels 和 J. Hamman^[30] 的文章讨论了这个问题的更一般的解.

2. 变自由流速度和变表面温度的零攻角平板 第二个例子讨论自由流速度 $U_\infty(t)$ 以及表面温度 $T_w(t)$ 随时间变化情形下平板上的可压缩边界层. 在这种情况下, 可以通过方程

$$\psi_{\bar{y}t} + \psi_{\bar{y}}\psi_{x\bar{y}} - \psi_x\psi_{\bar{y}\bar{y}} = \dot{U}_\infty + \nu_\infty\psi_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}}, \quad (15.114)$$

$$\begin{aligned} \theta_t + \theta \frac{\dot{T}_w}{T_w - T_\infty} + \psi_{\bar{y}}\theta_x - \psi_x\theta_{\bar{y}} \\ = \frac{\nu_\infty}{P} \left\{ \theta_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{\mu_\infty/k_\infty}{T_w - T_\infty} \phi_{\bar{y}\bar{y}} \right\}, \end{aligned} \quad (15.115)$$

来确定式 (15.90) 中的流函数 ψ 和温度分布

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

方程中已经消去了压力梯度项, 变量 \bar{y} 的定义见式 (15.91), \dot{U}_∞ 和 \dot{T}_w 分别表示自由流速度和表面温度对时间的导数. 为了得出这些解, 假设有下列形式的级数展开式:

$$\psi = \sqrt{\nu_\infty U_\infty x} \{ F(\eta) + \zeta_0 f_0(\eta) + \zeta_1 f_1(\eta) + \dots \}, \quad (15.116)$$

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0(\eta) + \beta_1 \theta_1(\eta) + \beta_2 \theta_2(\eta) + \dots + \zeta_0 h_0(\eta) \\ + \zeta_1 h_1(\eta) + \zeta_2 h_2(\eta) + \dots + \frac{U_\infty^2}{2c_p(T_w - T_\infty)} \\ \times \{ S(\eta) + \zeta_0 s_0(\eta) + \zeta_1 s_1(\eta) + \dots \}. \end{aligned} \quad (15.117)$$

其中

$$\eta = \frac{\bar{y}}{2x} \frac{U_\infty x}{\nu_\infty}$$

是新定义的量纲坐标, 同时还采用了下列缩写符号:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 = \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right), \zeta_1 = \frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right)^2, \dots \text{等} \\ \beta_1 = \frac{\dot{T}_w}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right), \beta_2 = \frac{\ddot{T}_w}{T_w - T_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right)^2, \dots \text{等} \end{aligned} \right\} \quad (15.118)$$

把上式代入边界层微分方程, 可以发现函数 $F(\eta)$, $f_0(\eta)$, \dots 都满足常微分方程. 文献 [35, 49] 中给出了当 $P = 0.72$ 时这些函数的解. 函数 $F(\eta)$, $\theta_0(\eta)$ 和 $S(\eta)$ 与用 U_∞ 作为瞬时速度的定常问题(准定常流动)的解是完全相同的. 而其余的项表示对准定常解的偏差.

在壁面上, 切应力 τ_w 与准定常流动切应力 τ_{w0} 的比值可以

表示为

$$\frac{T_w}{T_{w1}} = 1 + \frac{x}{U_1} \left\{ 2.555 \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} - 1.414 \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} \left(\frac{x}{U_\infty} \right) + \dots \right\}. \quad (15.119)$$

相应地, 在壁面上, 当 $P = 0.72$ 时热通量的比值(参看文献 [50]) 表示为

$$\begin{aligned} \frac{q}{q_1} = 1 + \frac{x}{U_\infty} & \left\{ 2.39 \frac{T_w}{T_w - T_\infty} + \dots \right. \\ & - \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty} \left[0.0692 \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_w} \right. \\ & \left. \left. - 0.0448 \frac{T_\infty - T_w}{T_w - T_w} \right] + \dots \right\}. \quad (15.120) \end{aligned}$$

其中作为参考量使用的准静态流动的绝热壁温, 应该由下式计算:

$$T_w = T_\infty + 0.848 \frac{U_\infty^2}{2c_p}. \quad (15.121)$$

正如 H. Tsuji^[62] 所指出的, 在使用上述方法的时候应该认识到, 一般说来, $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ 的表达式对规定的 $U_\infty(t)$ 和 $T_w(t)$ 的形式是相互依赖的, 这方面也可以参看 H. D. Harris 和 A. D. Young^[73] 的文章。

近几年, 非定常层流边界层的理论有了很大的发展, 这方面的资料可以从以下三本会议文集中找到。第一本是 E. A. Eichelbrenner 主编的 IUTAM 会议上的报告 “Recent Research on Unsteady Boundary Layer”, Quebec, 1972^[74]。第二本是 R. B. Kinney 主编的 1975 年在 Arizona 大学举行的专题会议资料 “Unsteady Aerodynamics”^[75]。第三本是 1977 年举行的 AGARD 会议的文集^[76]。另外, N. Riley 的评论性文章^[37a] 也是值得参考的。

参 考 文 献

第一章

- [1] Achenbach, E.: Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers. *JFM* 64, 565—575 (1972).
- [1a] Bailey, A. B., and Hiatt, J.: Sphere drag coefficients for a broad range of Mach and Reynolds numbers. *AIAA J.* 10, 1436—1440 (1972).
- [1b] Bailey, A. B., and Starr, R. F.: Sphere drag at transonic speeds and high Reynolds numbers. *AIAA J.* 14, 1631 (1976).
- [2] Betz, A.: Untersuchung einer Joukowski'schen Tragfläche. *ZFM* 6, 173—179 (1915).
- [3] Flachsbart, O.: Neuere Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. *Phys. Z.* 28, 461—469 (1927).
- [4] Flachsbart, O.: Winddruck auf Gasbehälter. Reports of the AVA in Göttingen, IVth Series, 134—138 (1932).
- [5] Fuhrmann, G.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Diss. Göttingen 1910; *Jb. Motorluftschiff-Studienges.* V 63—123 (1911/12).
- [6] Hagen, G.: Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. *Pogg. Ann.* 46, 423—442 (1839).
- [7] Homann, F.: Einfluss grosser Zähigkeit bei Strömung um Zylinder. *Forsch. Ing.-Wes.* 7, 1—10 (1936).
- [8] Jones, G. W., Cinotta, J. J., and Walker, R. W.: Aerodynamic forces on a stationary and oscillating circular cylinder at high Reynolds numbers. *NAOA TR R-300* (1969).
- [9] Neumann, A.: Luftwiderstand von Kugeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten. *Allgem. Wärmetechnik* 4, 217—221 (1953).
- [10] Neumann, A., and Pfeiffer, H.: Über die Grenzschichtströmung am Zylinder bei hohen Geschwindigkeiten. *Advances in Aeronautical Sciences* (Th. von Kármán, ed.) Vol. 3, 185—206, London, 1962.
- [11] Poiseuille, J.: Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes Rendus* 11, 941—967 and 1041—1048 (1840); 12, 112—115 (1841); in more detail: *Mémoires des Savants Étrangers* 9 (1846).
- [12] Reynolds, O.: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 174, 935—982 (1883) or *Scientific Papers* II, 61.
- [13] Roshko, A.: Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds numbers. *JFM* 10, 345—356 (1961); see also: On the aerodynamic drag of cylinders at high Reynolds numbers. Paper presented at the US Japan Research Seminar on Wind Loads on Structures, Univ. of Hawaii, Oct. 1970.
- [14] Taneda, S.: Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan* 11, 302—307 (1958).

第二章

- [1] Achenbach, E.: Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers. *JFM* 64, 565—575 (1972).
- [2] Berger, E., and Wille, R.: Periodic flow phenomena. *Annual Review of Fluid Mech.* 4, 313—340 (1972).
- [3] Berger, E.: Bestimmung der hydrodynamischen Grössen einer Kármánschen Wirbelstrasse aus Hitzdrahtmessungen bei kleinen Reynolds-Zahlen. *ZFW* 12, 41—59 (1964).
- [3a] Bearman, P. W.: On the vortex shedding from a circular cylinder in the critical Reynolds number range. *JFM* 37, 577—585 (1969).
- [4] Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1907; *Z. Math. u. Phys.* 56, 1—37 (1908); Engl. transl. in *NACA TM* 1256.
- [5] Blenk, H., Fuchs, D., and Liebers, L.: Über die Messung von Wirbelfrequenzen. *Luftfahrtforschung* 12, 38—41 (1935).
- [6] Burgers, J. M.: The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. *Proc. First International Congress for Applied Mechanics*, Delft, 113—128 (1924).
- [7] Chang, P. K.: Separation of flow. Pergamon Press, Washington D.C., 1970.
- [8] Cermak, J. E.: Application of fluid mechanics to wind engineering — A Freeman Scholar lecture. *Trans. ASME Fluids Engineering* 97, Ser. 1, 9—38 (1975); see also: Laboratory simulation of the atmospheric boundary layer. *AIAA J.* 9, 1746—1754 (1971).

- [8a] Cermak, J. E.: Aerodynamics of buildings. Annual Review of Fluid Mech. 8, 75-105 (1976).
- [9] Cermak, J. E., and Sadeh, W. Z.: Wind-tunnel simulation of wind loading on structures. Meeting Preprint 1417, ASCE National Structural Engineering Meeting, Baltimore, Maryland, 19-23 April, 1971.
- [10] Davenport, A. G.: The relationship of wind structure to wind loading. Proc. Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, Great Britain, 26-28 June 1963. Her Majesty's Stationary Office, London, Vol. 1, 54-112 (1965).
- [11] Demun, U.: Ein Beitrag zur Stabilitätstheorie der Wirbelstrassen unter Berücksichtigung endlicher und zeitlich wachsender Wirbelkernrurchmesser. Ing.-Arch. 22, 400-410 (1954).
- [12] Dubs, W.: Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenbild von Wasser und Nitrobenzol. Helv. phys. Acta 12, 169-228 (1939).
- [13] Dargin, W. W., and Karlason, S. K. F.: On the phenomenon of vortex street breakdown. Klasse 1914, 177-190; see also Coll. Works II, 597-608.
- [14] Eiffel, G.: Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. Comptes Rendus 155, 1597 (1912).
- [14a] Försching, H. W.: Aeroelastische Probleme an Hochbaukonstruktionen in freier Windumströmung. Vulkan-Verlag, Essen, Haus der Technik, Part 347, 9-18 (1976).
- [15] Frimberger, R.: Experimentelle Untersuchungen an der Kármán'schen Wirbelstrasse. ZFW 5, 355-359 (1957).
- [16] Hansen, M.: Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte. ZAMM 8, 185-199 (1928); NACA TM 585 (1930).
- [17] van der Hegge Zijne, B. G.: Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Thesis Delft 1924.
- [18] Heinemann, H. J., Lawaczeck, O., and Bütefisch, K. A.: Kármán vortices and their frequency determination in the wakes of profiles in the sub- and transonic regime. Symposium Transonicum II Göttingen, Sept. 1975. Springer Verlag, 1976, pp. 75-82; see also: AGARD-Conférence Proc. No. 177, Unsteady Phenomena in Turbomachinery (1976).
- [19] Hucho, W. H.: Einfluss der Vorderwagenform auf Widerstand, Giermoment und Seitenkraft von Kastenwagen. ZFW 20, 341-351 (1972).
- [20] von Kármán, Th.: Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 509-517 (1911) and 547-556 (1912); see also Coll. Works I, 324-338.
- [21] von Kármán, Th., and Rubach, H.: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Phys. Z. 13, 49-59 (1912); see also Coll. Works I, 339-353.
- [22] Lin, C. C.: On periodically oscillating wakes in the Oseen approximation. R. v. Mises Anniversary Volume, Studies in Mathematics and Mechanics, Academic Press, New York, 1950, 170-176.
- [23] Möller, E.: Luftwiderstandsmessungen am Volkswagen-Lieferwagen. Automobiltechnische Z. 53, 1-4 (1951).
- [23a] Novak, I.: Strouhal number of bodies and their systems (in Russian). Strojnicky Casopis 26, 72-89 (1975).
- [24] Owen, M., Griffin, S., and Bamberg, E.: The vortex-street wakes of vibrating cylinders. JFM 66, 553-576 (1974).
- [25] Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proc. 3rd Intern. Math. Congr. Heidelberg 1904, 484-491. Reprinted in: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927; see also Coll. Works II, 575-584; Engl. transl. NACA TM 452 (1928).
- [26] Prandtl, L.: Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1914, 177-190; see also Coll. Works II, 597-608.
- [27] Prandtl, L., and Tietjens, O.: Hydro- und Aeromechanik (based on Prandtl's lectures). Vol. I and II, Berlin, 1929 and 1931; Engl. transl. by L. Rosenhead (Vol. I) and J. P. den Hartog (Vol. II), New York, 1934.
- [28] Relf, E. F., and Simmons, L. F. G.: The frequencies of eddies generated by the motion of circular cylinders through a fluid. ARC RM 917, London (1924).
- [29] Reynolds, O.: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. Roy. Soc. 174, 935-982 (1883); see also Scientific Papers 2, 51.
- [30] Ribner, H. S., Etkins, B., and Nally, K. K.: Noise research in Canada: Physical and bio-acoustic. Proc. First Int. Congress Aero. Sci. Madrid, Pergamon Press, London, Vol. 1, 393-411 (1959).
- [31] Roshko, A.: Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. JFM 10, 345-356 (1961).
- [32] Roshko, A.: On the development of turbulent wakes from vortex streets. NACA Rep. 1191 (1954).

- [32a] Rosenhead, L.: The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Roy. Soc. A* 134, 170 (1931).
- [33] Rubach, H.: Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares bei zylindrischen Körpern. *Diss. Göttingen* 1914; *VDI-Forschungsheft* 185 (1916).
- [33a] Sarpkaya, T.: An inviscid model of two-dimensional vortex shedding for transient and asymptotically steady flow over an inclined plate. *JFM* 68, 109—128 (1975).
- [34] Sadeh, W.Z., and Cermak, J.E.: Turbulence effect on wall pressure fluctuations. *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 98, No. EM 6, Proc. Paper 9445, 189—198 (1972).
- [35] Schlichting, H.: Aerodynamische Untersuchungen an Kraftfahrzeugen. *Rep. Techn. Hochschule Braunschweig*, 130—139 (1954).
- [36] Schrenk, O.: Versuche mit Absaugeflügeln. *Luftfahrtforschung* XII, 10—27 (1935).
- [37] Strouhal, V.: Über eine besondere Art der Tonerregung. *Ann. Phys. und Chemie, New Series* 5, 216—251 (1878).
- [38] Timme, A.: Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln. *Ing.-Arch.* 25, 205—225 (1957).
- [38a] Wedemeyer, E.: Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte. *Ing.-Arch.* 30, 187—200 (1961).
- [39] Wieselsberger, C.: Der Luftwiderstand von Kugeln. *ZFM* 5, 140—144 (1914).

第三章

- [1] de Groot, S.R., and Mazur, P.: *Non-equilibrium thermodynamics*. North-Holland Publ. Co., 1962.
- [2] Föppl, A.: *Vorlesungen über technische Mechanik*. Vol. 5, Teubner, Leipzig, 1922.
- [3] Hopf, L.: *Zähe Flüssigkeiten*. Contribution to: *Handbuch der Physik*, Vol. VII (H. Geiger and K. Schöel, ed.), Berlin, 1927.
- [4] Keestin, J.: *A course in thermodynamics*. Vol. 1, Blaisdell, 1965.
- [5] Keestin, J.: *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Rep. No. 66—7, Lab. d'Aérothermique, Meudon, 1966.
- [6] Lamb, H.: *Hydrodynamics*. 6th ed., Cambridge, 1937; also Dover, 1945.
- [7] Love, A.E.H.: *The mathematical theory of elasticity*. 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1926.
- [8] Meixner, J., and Reik, H.G.: *Thermodynamik der irreversiblen Prozesse*. Contribution to *Handbuch der Physik*, Vol. III/2 (S. Flugge, ed.), Springer, 1959, pp. 413—523.
- [9] Navier, M.: *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. *Mém. de l'Acad. de Sci.* 8, 389—416 (1827).
- [10] Poisson, S.D.: *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*. *J. de l'École polytechn.* 13, 139—186 (1831).
- [11] Prager, W.: *Introduction to mechanics of continua*. Ginn & Co., 1961.
- [12] Prigogine, I.: *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Dunod-Descar, 1947.
- [13] Stokes, G.G.: On the theories of internal friction of fluids in motion. *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8, 287—305 (1845).
- [14] de St. Venant, B.: Note à joindre un mémoire sur la dynamique des fluides. *Comptes Rendus* 17, 1240—1244 (1843).
- [15] Tollmien, W.: Grenzschichttheorie. *Handbuch der Exper.-Physik*, Vol. IV, Part. 1, 241—287 (1931).

第四章

- [1] Fäckeret, J.: Über exakte-Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen. *ZAMP* 3, 259—271 (1952).
- [1a] Apelt, C.J.: The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds numbers 40 and 44. *British ARC RM* 3175 (1961).
- [1b] Allen, D.N. De G., and Southwell, R.V.: Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 8, 129—146 (1955).
- [1c] Coutanceau, M., and Bouard, R.: Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow. *JFM* 79, 231—256 (1977).
- [1d] Coutanceau, M., and Bouard, R.: Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 2. Unsteady flow. *JFM* 79, 257—272 (1977).
- [2] Dennis, S.C.R., and Gau-Zu Chang: Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100. *JFM* 72, 471—489 (1970).
- [3] Fromm, J.E., and Harlow, F.H.: Numerical solutions of the problem of vortex street development. *Phys. of Fluids* 6, 975—982 (1963); see also: *ALAA Selected Reprints, Computational Fluid Dynamics* (C.K. Chu, ed.), 82—89 (1968) and *AGARD Lecture Series* 34 (1971).

- [4] Hamel, G.: Über die Potentialströmung zäher Flüssigkeiten. *ZAMM* 21, 129–139 (1941).
- [5] Jenson, V.G.: Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers (< 40). *Proc. Roy. Soc. London A* 249, 316–366 (1959).
- [5a] Keller, H.B., and Takami, H.: Numerical studies of steady viscous flow about cylinders. Numerical solutions of non-linear differential equations. *Proc. Adv. Symp. at Univ. of Wisconsin, Madison, 1966* (D. Greenspan, ed.), J. Wiley & Sons, New York, 1968, pp. 115–140.
- [6] Thom, A.: Flow past circular cylinders at low speeds. *Proc. Roy. Soc. London A* 111, 651–669 (1933).
- [7] Thom, A., and Apple, C.J.: Field computations in engineering and physics. Van Nostrand, London, 1961.

第五章

- [1] Abramowitz, M.: On backflow of a viscous fluid in a diverging channel. *J. Math. Phys.* 28, 1–21 (1949).
- [2] Batchelor, G.K.: Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady non-rotationally symmetric flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 4, 29–41 (1951).
- [3] Becker, E.: Eine einfache Verallgemeinerung der Rayleigh-Grenzschicht. *ZAMP* 11, 146–152 (1960).
- [4] Berker, R.: Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. *Contribution to: Handbuch der Physik* (S. Flügge, ed.) VIII/2, 1–394, Berlin, 1963.
- [5] Blasius, H.: Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite. *Z. Math. u. Physik* 58, 225 (1910).
- [6] Catherall, D., and Mangler, K.W.: The integration of the two-dimensional laminar boundary-layer equations past the point of vanishing skin friction. *JFM* 26, 103–132 (1968).
- [7] Cochran, W.G.: The flow due to a rotating disk. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 30, 365–375 (1934).
- [7a] Florent, P. and Peube, J.L.: Écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques poreux. *J. Mécanique* 14, 435–459 (1975).
- [8] Frössling, N.: Verdunstung, Wärmeübertragung und Geschwindigkeitsverteilung bei zwei-dimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. *Lunds. Univ. Årsskr. N. F. Afd. 2*, 35, No. 4 (1940).
- [9] Gerbers, W.: Zur instationären, laminaren Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit in kreiszylindrischen Rohren. *Z. angew. Physik* 3, 267–271 (1951).
- [10] Hagen, G.: Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Rohren. *Pogg. Ann.* 46, 423–442 (1839).
- [11] Hamel, G.: Spiralförmige Bewegung zäher Flüssigkeiten. *Jahresber. Dt. Mathematiker-Vereinigung* 25, 34–60 (1916).
- [12] Hiemenz, K.: Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. *Thesis Göttingen* 1911. *Dingl. Polytech. J.* 326, 321 (1911).
- [13] Homann, F.: Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel. *ZAMM* 16, 153–164 (1936); *Forsch. Ing.-Wes.* 7, 1–10 (1936).
- [14] Howarth, L.: On the calculation of the steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. *ARC RM* 1632 (1935).
- [15] von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM* 1, 233–252 (1921); *NACA TM* 1092 (1946); see also: *Coll. Works* II, 70–97.
- [16] Kempf, G.: Über Reibungswiderstand rotierender Scheiben. *Vorträge auf dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik*, Innsbruck Congr. 1922; Berlin, 1924, 168.
- [17] Kirde, K.: Untersuchungen über die zeitliche Weiterentwicklung eines Wirbels mit vorgegebener Anfangsverteilung. *Ing.-Arch.* 31, 385–404 (1962).
- [18a] Mellor, G. L., Chapple, P. J. and Stokes, V. K.: On the flow between a rotating and a stationary disk. *JFM* 31, 95–112 (1968).
- [18] Kuiken, H.K.: The effect of normal blowing on the flow near a rotating disk of infinite extent. *JFM* 47, 789–798 (1971).
- [19] Millsaps, K., and Pohlhausen, K.: Thermal distribution in Jeffrey-Hamel flows between nonparallel plane walls. *JAS* 20, 187–196 (1953).
- [20] Müller, W.: Zum Problem der Anlaufströmung einer Flüssigkeit im geraden Rohr mit Kreisring- und Kreisquerschnitt. *ZAMM* 16, 227–238 (1936).
- [21] Oseen, C.W.: *Ark. f. Math. Astron. och. Fys.* 7 (1913); *Hydromechanik*, Leipzig, 1927, p. 82.
- [22] Poiseuille, J.: Recherches expérimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre. *Comptes Rendus* 11, 961–967 and 1041–1048 (1840); 12, 112 (1841); in more detail: *Memoires des Savants Etrangers* 9 (1846).

- [23] Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre. 6th ed., 500, 1965; Engl. transl. Blackie and Son, London, 1952.
- [24] Punnis, B.: Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr, Diss. Göttingen 1947.
- [25] Rayleigh, Lord: On the motion of solid bodies through viscous liquid, *Phil. Mag.* **21**, 697—711 (1911); also *Sci. Papers VI*, 29.
- [26] Riabouchinsky, D.: *Bull. de l'Institut Aerodyn. de Koutchino*, **5**, 5—34 Moscow (1914); see also *J. Roy. Aero. Soc.* **39**, 340—348 and 377—379 (1935).
- [27] Riabouchinsky, D.: Sur la résistance de frottement des disques tournant dans un fluide et les équations intégrales appliquées à ce problème. *Comptes Rendus* **233**, 899—901 (1851).
- [27a] Roberts, S. M. and Shipman, J. S.: Computing of the flow between a rotating and a stationary disk. *JFM* **73**, 53—63 (1976).
- [28] Rogers, M. G., and Lance, G. N.: The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. *JFM* **7**, 617—631 (1960).
- [28a] Rott, N.: Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. *Quart. Appl. Math.* **13**, 444—451 (1955/56).
- [29] Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. *VDI-Forschungsheft* **248** (1922).
- [29a] Schobeiri, M. T.: Näherungslösungen der Navier-Stokes'schen Differentialgleichung für eine zweidimensionale stationäre Laminarströmung konstanter Viskosität in konvexen und konkaven Diffusoren und Düsen. *ZAMP* **27**, 9—21 (1976).
- [30] Schlichting, H.: Laminare Kanaleinlaufströmung. *ZAMM* **14**, 368—373 (1934).
- [31] Schmidt, W.: Ein einfaches Messverfahren für Drehmomente. *Z. VDI* **65**, 441—444 (1921).
- [32] Sparrow, E. M., and Gregg, J. L.: Mass transfer, flow and heat transfer about a rotating disk. *Transactions ASME, J. Heat Transfer* **82**, 294—302 (1960).
- [33] Steinbeuer, J.: Eine exakte Lösung der instationären Couette-Strömung. *Proc. Scientific Soc. of Braunschweig XVII*, 154—164 (1955).
- [34] Stewartson, K.: On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 333—341 (1953).
- [35] Stokes, G. G.: On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Camb. Phil. Trans.* **IX**, 8 (1851); *Math. and Phys. Papers, Cambridge*, **III**, 1—141 (1901).
- [36] Stuart, J. T.: A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Roy. Soc. London A* **231**, 116—130 (1955).
- [37] Szymanski, F.: Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique. *J. de math. pures et appliquées, Series 9*, **11**, 67 (1932); see also *Proc. Intern. Congr. Appl. Mech. Stockholm I*, 249 (1930).
- [38] Tao, L. N., and Donovan, W. F.: Through-flow in concentric and eccentric annuli of fine clearance with and without relative motion of the boundaries. *Trans. ASME* **77**, 1291—1301 (1955).
- [39] Theodorsen, Th., and Regier, A.: Experiments on drag of revolving discs, cylinders, and streamline rods at high speeds. *NACA Rep.* **793** (1944).
- [40] Timme, A.: Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln. *Ing.-Arch.* **25**, 205—225 (1957).
- [41] Watson, J.: A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **11**, 302—325 (1958).
- [42] Watson, J.: The two-dimensional laminar flow near the stagnation point of a cylinder which has an arbitrary transverse motion. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **12**, 175—190 (1959).

第六章

- [1] Bauer, K.: Einfluss der endlichen Breite des Gleitlagers auf Tragfähigkeit und Reibung. *Forsch. Ing.-Wes.* **14**, 48—62 (1943).
- [2] Constantinescu, V. N.: Analysis of bearings operating in turbulent regime. *Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng.* **84**, 139—151 (1962).
- [3] Constantinescu, V. N.: On the influence of inertia forces in turbulent and laminar self-acting films. *Trans. ASME, Series E, J. Lubrication Technology* **92**, 473—481 (1970).
- [4] Constantinescu, V. N.: On gas lubrication in turbulent regime. *Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng.* **86**, 475—482 (1964).
- [5] Frössel, W.: Reibungswiderstand und Tragkraft eines Gleitschuhes endlicher Breite. *Forsch. Ing.-Wes.* **13**, 65—75 (1942).
- [6] Gumbel, L., and Everling, E.: *Reibung und Schmierung im Maschinenbau*, Berlin, 1925.
- [7] Hele-Shaw, H. S.: Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions. *Trans. Inst. Nav. Arch.* **XI**, 25 (1898); see also *Nature* **58**, 84 (1898) and *Proc. Roy. Inst.* **16**, 49 (1899).

- [9] Kahlert, W.: Der Einfluss der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie. Diss. Braunschweig 1947; Ing.-Arch. 16, 321–342 (1948).
- [9] Michell, A. G. M.: Z. Math. u. Phys. 52, S. 123 (1905); see also Ostwald's Klassiker No. 218.
- [10] Nahme, F.: Beiträge zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. Ing.-Arch. 11, 191–209 (1940).
- [11] Oseen, C. W.: Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Ark. f. Math. Astron. och Fys. 6, No. 29 (1910).
- [12] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand: Aerodynamic Theory III, 34–208 (1935).
- [13] Riegels, F.: Zur Kritik des Hele-Shaw-Versuches. Diss. Göttingen 1938; ZAMM 18, 95–106 (1938).
- [14] Saibel, E. A., and Macken, N. A.: The fluid mechanics of lubrication. Annual Review of Fluid Mech. (M. Van Dyke, ed.) 6, 185–212 (1973).
- [15] Saibel, E. A., and Macken, N. A.: Non-laminar behavior in bearings. Critical review of the literature. Trans. ASME, Series F, J. Lubrication Technology 96, 174–181 (1974).
- [16] Sommerfeld, A.: Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z. Math. u. Physik 60, 97 (1904); also Ostwald's Klassiker No. 218, p. 108, and: Zur Theorie der Schmiermittelreibung. Z. Techn. Phys. 2, 58 (1921); also Ostwald's Klassiker No. 218, p. 181.
- [17] Stokes, G. G.: On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Camb. Phil. Soc. 9, Part II, 8–106 (1851) or Coll. Papers III, 55.
- [18] Taylor, G. I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. A 223, 289–293 (1923).
- [19] Wilcock, D. F.: Turbulence in high-speed journal bearings. Trans. ASME 72, 825 (1950).
- [20] Vogelpohl, G.: Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forschungsheft 386 (1937).
- [21] Vogelpohl, G.: Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze. Z. VDI 91, 379 (1949).
- [22] Vogelpohl, G.: Betriebssichere Gleitlager. Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb. Vol. I, Springer-Verlag, 2nd. ed., Berlin, 1967.

第七章

- [1] Baird, L.: Skin friction. J. Roy. Aero. Soc. 19, 3 (1925).
- [2] Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. 56, 1–37 (1908). Engl. transl. in NACA TM 1256.
- [3] Boley, B. A., and Friedman, M. B.: On the viscous flow around the leading edge of a flat plate. JASS 26, 453–454 (1959).
- [4] Burgers, J. M.: The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. First Intern. Congr. of Appl. Mech., Delft 1924 (C. B. Biezeno and J. M. Burgers, ed.) Delft, 1925, pp. 113–128.
- [5] Carrier, G. F., and Lin, C. C.: On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quart. Appl. Math. VI, 63–68 (1948).
- [6] Dhawan, S.: Direct measurements of skin friction. NACA Rep. 1121 (1953).
- [7] Van Dyke, M.: Higher approximations in boundary layer theory. Part 1: General analysis. JFM 24, 161–177 (1962). Part 2: Application to leading edges. JFM 14, 481–495 (1962). Part 3: Parabola in uniform stream. JFM 19, 145–159 (1964).
- [8] Van Dyke, M.: Perturbation methods in fluid mechanics. Academic Press, New York, 1964.
- [9] Van Dyke, M.: Higher-order boundary layer theory. Annual Review of Fluid Mech. 1, 265–282 (1969).
- [10] Gersten, K.: Grenzschichteffekte höherer Ordnung. Anniversary volume commemorating Professor H. Schlichting's 65th anniversary (Sept. 30, 1972). Rep. 72/5 Inst. f. Strömungsmech. Techn. Univ. at Braunschweig, 29–53 (1972).
- [11] Gersten, K.: Die Verdrängungsdicke bei Grenzschichten höherer Ordnung. ZAMM 54, 165–171 (1974).
- [12] Gersten, K., and Gross, J. F.: Higher-order boundary layer theory. Fluid Dynamics Transactions (1975).
- [13] Goldstein, S.: Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 1–30 (1930); see also: Modern developments in fluid dynamics, Vol. 1, 135, Oxford, 1938.
- [14] Hansen, M.: Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM 8, 185–199 (1928); NACA TM 585 (1930).
- [15] Van der Hegge-Zijnen, B. G.: Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Thesis, Delft 1924.
- [16] Howarth, L.: On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London A 164, 547–579 (1938).
- [17] Imai, I.: Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. JAS 24, 155–156 (1957).

- [18] Liepman, H. W., and Dhawan, S.: Direct measurements of local skin friction in low-speed and high-speed flow. Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. 869 (1951).
- [18a] Melnik, R. E., and Chow, R.: Asymptotic theory of two-dimensional trailing edge flows. Grumman Research Department Rep. RE-510 (1975).
- [18b] Messiter, A. F.: Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math. 18, 241-257 (1970).
- [19] Meksyn, D.: New methods in laminar boundary layer theory. London, 1961.
- [20] Nikuradse, J.: Laminiare Reibungsschichten an der längsangeströmten Platte. Monograph. Zentrale f. wiss. Berichtswesen, Berlin, 1942.
- [21] Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proc. Third Intern. Math. Congr. Heidelberg 1904. Reprinted in: Vier Abhandlungen zur Hydro- und Aerodynamik. Göttingen, 1927; NACA TM 452 (1928); see also: Coll. Works II, 575-584 (1961).
- [22] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand: Aerodynamic Theory III, 34-208 (1935).
- [23] Rotta, J. C.: Grenzschichttheorie zweiter Ordnung für ebene und achsensymmetrische Hyperschallströmung. ZFW 16, 329-334 (1967).
- [24] Schmidt, H., and Schröder, K.: Laminiare Grenzschichten. Ein kritischer Literaturbericht. Part I: Grundlagen der Grenzschichttheorie. Luftfahrtforschung 19, 65-97 (1942).
- [25] Steinheuer, J.: Die Lösungen der Blasiuschen Grenzschichtdifferentialgleichung. Proc. Wiss. Ges. Braunschweig XX, 96-125 (1938).
- [25a] Stewartson, K.: Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. Adv. Appl. Mech. 14, 146-239, Academic Press, New York, 1974.
- [26] Tollmien, W.: Grenzschichttheorie. Handbuch der Exper.-Physik IV, Part I, 241-287 (1931).
- [27] Töpfer, C.: Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. 60, 397-398 (1912).
- [28] Weyl, H.: Concerning the differential equations of some boundary layer problems. Proc. Nat. Acad. Sci. Washington 27, 578-583 (1941).
- [29] Weyl, H.: On the differential equations of the simplest boundary layer problems. Ann. Math. 43, 381-407 (1942).
- [30] Janour, Z.: Resistance of a flat plate at low Reynolds numbers. NACA TM 1316 (1951).

第八章

- [1] Betz, A.: Zur Berechnung des Überganges laminarer Grenzschichten in die Außenströmung. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 63-70.
- [2] Falkner, V. M., and Skan, S. W.: Some approximate solutions of the boundary layer equations. Phil. Mag. 12, 865-896 (1931); ARC RM. 1314 (1930).
- [3] Geis, Th.: Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. Fifty years of boundary layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 294-303.
- [4] Goldstein, S.: A note on the boundary layer equations. Proc. Cambr. Phil. Soc. 36, 338-340 (1939).
- [5] Gruschwitz, E.: Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch. 2, 321-346 (1931).
- [6] Hartree, D. R.: On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, Part II, 223-239 (1937).
- [6a] Holt, M.: Basic developments in fluid dynamics. Contribution of F. Schultz-Grunow and W. Brenner, 377-430, New York, 1965.
- [7] von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233-253 (1921). Eng. transl. in NACA TM 1092; see also Coll. Works II, 70-97, London 1966.
- [8] Luckert, H. J.: Über die Integration der Differentialgleichung einer Gleitschicht in zäher Flüssigkeit. Diss. Berlin 1933, reprinted in: Schriften des Math. Seminars, Inst. f. angew. Math. der Univ. Berlin 1, 245 (1933).
- [9] Mangler, W.: Die "ähnlichen" Lösungen der Prandtlischen Grenzschichtgleichungen. ZAMM 23, 241-251 (1943).
- [10] von Mises, R.: Bemerkungen zur Hydrodynamik. ZAMM 7, 425-431 (1927).
- [11] Prandtl, L.: Zur Berechnung der Grenzschichten. ZAMM 18, 77-82 (1938); see also Coll. Works II, 663-672, J. Roy. Aero. Soc. 45, 35-40 (1941), and NACA TM 959 (1940).
- [12] Riegels, F., and Zaat, J.: Zum Übergang von Grenzschichten in die ungestörte Strömung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 42-45 (1947).
- [13] Rosenhead, L., and Simpson, J. H.: Note on the velocity distribution in the wake behind a flat plate placed along the stream. Proc. Cambr. Phil. Soc. 32, 285-291 (1936).
- [14] Schröder, K.: Verwendung der Differenzenrechnung zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Math. Nachr. 4, 439-467 (1951).

- [15] Schuh, H.: Über die "ähnlichen" Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung in inkompressibler Strömung. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 147—152.
- [16a] Schultz-Grunow, F., and Henseler, H.: Ähnliche Grenzschichtlösungen zweiter Ordnung für Strömungs- und Temperaturgrenzschichten an longitudinal gekrümmten Wänden mit Grenzschichtbeeinflussung. Wärme- und Stoffübertragung 7, 214—219 (1968).
- [16] Tollmien, W.: Über das Verhalten einer Strömung längs einer Wand am äusseren Rand ihrer Reibungsschicht. Betz Anniversary Volume, 218—224 (1945).
- [17] Wieghardt, K.: Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 231—242 (1948).

第九章

- [1] Andrade, E.N.: The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet. The plane jet. Proc. Phys. Soc. London 51, 784—793 (1939).
- [2] Baxter, D.C., and Flügge-Lotz, I.: The solution of compressible laminar boundary layer problems by a finite difference method. Part II: Further discussion of the method and computation of examples. Techn. Rep. 110, Div. Eng. Mech., Stanford Univ. (1967); short version: ZAMP 9b, 81—96 (1958).
- [3] Bickley, W.: The plane jet. Phil. Mag. Ser. 7, 23, 727—731 (1939).
- [4] Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. 56, 1—37 (1908); Engl. transl. in NACA TM 1256.
- [5] Blottner, F.G.: Finite difference methods of solution of the boundary-layer equations. AIAA J. 8, 193—205 (1970).
- [5a] Blottner, F.G.: Investigation of some finite difference techniques for solving the boundary layer equations. Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 6, 1—30 (1975).
- [6] Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: A finite difference method for calculating compressible laminar and turbulent boundary layers. Trans. ASME, J. Basic Eng. 92, 523—536 (1970).
- [7] Chapman, D.R.: Laminar mixing of a compressible fluid. NACA TN 1800 (1949).
- [8] Chapman, D.R.: Theoretical analysis of heat transfer in regions of separated flow. NACA TN 3792 (1956).
- [9] Chen, K.K., and Libby, P.A.: Boundary layers with small departures from the Falkner-Skan profile. JFM 33, 243—282 (1958).
- [10] Christian, W.J.: Improved numerical solution of the Blasius problem with three point boundary condition. JASS 28, 911—912 (1961).
- [11] Davis, R.T.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations for symmetric laminar incompressible flow past a parabola. JFM 57, 417—433 (1972).
- [12] Devan, L.: Second order incompressible laminar boundary layer development on a two-dimensional semi-infinite body. Ph. D. Thesis, Univ. of California at Los Angeles, 1964.
- [13] Denison, M.R., and Baum, E.: Compressible free shear layer with finite initial thickness. AIAA J. 1, 342—349 (1963).
- [14] Dewey, C.F., and Gross, F.: Exact similar solutions of the laminar boundary layer equations. Advances in Heat Transfer Vol. 1, Academic Press, New York, 1967, 317—446.
- [15] Evans, H.L.: Laminar boundary layer theory. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1968.
- [16] Fage, A.: The airflow around a circular cylinder in the region where the boundary separates from the surface. Phil. Mag. 7, 253 (1929).
- [17] Fage, A., and Falkner, V.M.: Further experiments on the flow around a circular cylinder. ARC RM 1369 (1931).
- [18] Falkner, V.M.: A further investigation of solution of boundary layer. ARC RM 1884 (1939).
- [19] Falkner, V.M.: Simplified calculation of the laminar boundary layer. ARC RM 1895 (1941).
- [20] Fannloepp, T., and Flügge-Lotz, I.: The compressible boundary layer along a wave-shaped wall. Ing.-Arch. 33, 24—35 (1963).
- [21] Flügge-Lotz, I., and Blottner, F.G.: Computation of the compressible laminar boundary layer flow including displacement thickness interaction using finite difference methods. Stanford Univ. Div. Eng. Mech. Tech. Rep. 131 (1962). Shortened version in Journal de Mécanique 2, 397—423 (1963).
- [22] Flügge-Lotz, I.: The computation of the laminar compressible boundary layer. Dep. Mech. Eng. Stanford Univ., Rep. R. 352—30—7 (1954).
- [23] Frossling, N.: Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zwei-dimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds. Univ. Årsskr. N. F. Afd. 2, 36, No. 4 (1940); see also NACA TM 1432.
- [24] Gersten, K., and Gross, J.F.: The second-order boundary-layer along a circular cylinder in supersonic flows. Int. J. Heat Mass Transfer 16, 2241—2260 (1973).
The leading edge of a swept cylinder. Int. J. Heat Mass Transfer 16 (1972).

- [25] Gersten, K., Gross, J.F., and Börger, G.: Die Grenzschicht höherer Ordnung an der Stau-
linie eines schiebenden Zylinders mit starkem Ausblasen. *Z. Flugwiss.* 20, 330-341 (1972).
- [26] Goldstein, S.: On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body.
Proc. Roy. Soc. London A 142, 545-562 (1933).
- [27] Goldstein, S. (ed.): *Modern developments in fluid dynamics*, Vol. 1, 105. Clarendon Press,
Oxford, 1938.
- [28] Goldstein, S.: On laminar boundary layer flow near a position of separation. *Quart. J.
Mech. Appl. Math.* 1, 43-69 (1948).
- [29] Görtler, H.: Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. *Ing.-
Arch.* 16, 173-187 (1948).
- [30] Görtler, H.: Einfluss einer schwachen Wandwelligkeit auf den Verlauf der laminaren Grenz-
schichten. Parts I and II. *ZAMM* 25/27, 233-244 (1947) and 28, 13-22 (1948).
- [31] Görtler, H.: Zur Approximation stationärer laminarer Grenzschichtströmungen mit Hilfe
der abgebrochenen Blasius'schen Reihe. *Arch. Math.* 1, No. 3, 235-240 (1949).
- [32] Görtler, H.: Reibungswiderstand einer schwach gewellten längsangeströmten Platte. *Arch.
Math.* 1, 450-453 (1949).
- [33] Görtler, H.: Eine neue Reihenentwicklung für laminare Grenzschichten. *ZAMM* 32, 270-
271 (1952).
- [34] Görtler, H.: A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows. *J.
Math. Mech.* 6, 1-66 (1957).
- [35] Görtler, H., and Witting, H.: Zu den Tanischen Grenzschichten. *Österr. Ing.-Archiv* 11,
111-122 (1957).
- [36] Hahnemann, H., and Ehret, L.: Der Druckverlust der laminaren Strömung in der Anlauf-
strecke von geraden, ebenen Spalten. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 21-36 (1941).
- [37] Hahnemann, H., and Ehret, L.: Der Strömungswiderstand in geraden, ebenen Spalten
unter Berücksichtigung der Einlaufverluste. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 186-207 (1942).
- [38] Hartree, D.R.: A solution of the laminar boundary layer equation for retarded flow. *ARC
RM 2426* (1949).
- [39] Hiemenz, K.: Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom einge-
tauchten geraden Kreiszylinder. Thesis Göttingen 1911; *Dingl. Polytechn. J.* 326, 321 (1911).
- [40] Howarth, L.: On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a
cylinder in a stream. *ARC RM 1632* (1935).
- [41] Howarth, L.: On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proc. Roy. Soc.
London A* 164, 547-579 (1938).
- [42] Jaffe, N.A., and Smith, A.M.O.: Calculation of laminar boundary layers by means of a
differential-difference method. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 12 (D. Kückemann,
ed.), Pergamon Press, 1972.
- [42a] Keller, H.B.: Numerical methods in boundary layer theory. *Ann. Rev. Fluid Mech.* (M. van
Dyke, ed.) 10, 417-433 (1978).
- [43] Krzywoblocki, M.Z.: On steady, laminar two-dimensional jets in compressible viscous
gases far behind the slit. *Quart. Appl. Math.* 7, 313 (1949).
- [44] Leigh, D.C.F.: The laminar boundary layer equation: A method of solution by means of
an automatic computer. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 51, 320-332 (1955).
- [44a] Lessen, M.: On the stability of the laminar free boundary layer between parallel streams.
NACA Rep. 979 (1950); see also Sc. D. Thesis, MIT (1948).
- [45] Lock, R.C.: The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel
streams. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 4, 42-63 (1951).
- [46] Mills, R.H.: A note on some accelerated boundary layer velocity profiles. *JAS* 5, 325 (1938).
- [47] Papenfuss, H.D.: Higher-order solutions for the incompressible, three-dimensional bound-
ary-layer flow at the stagnation point of a general body. *Archives of Mechanics* (Warsaw)
26, 459-478 (1974).
- [48] Papenfuss, H.D.: Mass-transfer effects on the three-dimensional second order boundary-
layer flow at the stagnation point of blunt bodies. *Mech. Res. Comm.* 1, 285-290 (1974).
- [49] Pai, S.I.: *Fluid dynamics of jets*. D. Van Nostrand Company, New York, 1954.
- [50] Pohlhausen, K.: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Grenz-
schicht. *ZAMM* 1, 252-268 (1921).
- [51] Potter, O.E.: Laminar boundary layers at the interface of co-current parallel streams.
Quart. J. Mech. Appl. Math. 10, 302 (1957).
- [52] Reeves, B.L., and Kippenhan, C.J.: A particular class of similar solutions of the equations
of motion and energy of a viscous fluid. *JASS* 29, 38-47 (1962).
- [53] Richtmeyer, R.D.: *Difference methods for initial value problems*. Interscience, New York,
1957.
- [54] Schiller, L., and Linke, W.: Druck- und Reibungswiderstand des Zylinders bei Reynolds-
schen Zahlen 500 bis 40000. *ZFM* 24, 193-198 (1933).
- [55] Schiller, L.: Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung (im Kreisrohr) und
ihre Bedeutung für die Zähigkeitsmessungen. *ZAMM* 2, 86-106 (1922).

- [56] Schlichting, H.: Laminare Strahlenausbreitung. *ZAMM* 13, 266–268 (1933).
- [57] Schlichting, H.: Laminare Kanaleinlaufströmung. *ZAMM* 14, 368–373 (1934).
- [57a] Schlichting, H.: Grenzschichttheorie. Engl. transl. by Kestin, J.: *Boundary-layer theory*. 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1968.
- [58] Schroeder, K.: Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. FB 1741 (1943); later expanded and reprinted in *Math. Nachr.* 4, 439–467 (1951).
- [59] Schultz-Grunow, F., and Henseker, H.: Ähnliche Grenzschichtlösungen zweiter Ordnung für Strömungs- und Temperaturgrenzschichten an longitudinal gekrümmten Wänden mit Grenzschichtbeeinflussung. *Wärme- und Stoffübertragung* 1, 214–219 (1968).
- [60] Smith, A.M.O., and Clutter, D.W.: Solution of the incompressible boundary layer equations. *AIAA J.* 1, 2062–2071 (1963).
- [61] Smith, A.M.O., and Cebeci, T.: Numerical solution of the turbulent boundary-layer equations. McDonnell-Douglas Rep. No. DAC 33735 (1967).
- [63] Steinheuer, J.: Similar solutions for the laminar wall jet in a decelerating outer flow. *AIAA J.* 6, 2198–2200 (1968).
- [64] Stewartson, K.: Further solutions of the Falkner-Skan equation. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50, 454–465 (1954).
- [65] Smolderen, E.: Numerical methods in fluid dynamics. AGARD Lecture Ser. No. 48 (1972).
- [66] Tani, I.: On the solution of the laminar boundary layer equations. *J. Phys. Soc. Japan* 4, 149–154 (1949). See also: Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 193–200 (1955).
- [67] Thom, A.: The laminar boundary layer of the front part of a cylinder. ARC RM 1176 (1928); see also ARC RM 1194 (1929).
- [68] Tifford, A.N.: Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers. Part 4: Universal series solutions. WADC Techn. Rep. 53–288 (1954).
- [69] Tollmien, W.: Grenzschichten. *Handbuch der Exper. Physik* IV, Part I, 241–287 (1931).
- [70] Ulrich, A.: Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder. *Arch. Math.* 2, 33–41 (1949).
- [71] Van Dyke, M.: Entry flow in a channel. *JFM* 44, 813–823 (1970).
- [72] Witting, H.: Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschichttheorie. *Arch. Math.* 4, 247–256 (1953).
- [73] Anonymous: Interpolation and allied tables. Prepared by H.M. Nautical Almanac Office. H.M. Stationary Office (1956).

第十章

- [1] Brown, S.N., and Stewartson, K.: Laminar separation. *Annual Review of Fluid Mech.* 1, 45–72 (1969).
- [2] Bussmann, K., and Ulrich, A.: Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes. Preprint Jb. dt. Luftfahrtforschung 1943 in. *Techn. Berichte* 10, No. 9 (1943); NACA TM 1185 (1947).
- [2a] Chan, Y.Y.: Loitsianskii's method for boundary layers with suction and injection. *AIAA J.* 7, 562–563 (1969).
- [2b] Briley, W.R., and McDonald, D.H.: Numerical prediction of incompressible separation bubbles. *JFM* 69, 631–656 (1975).
- [2c] Chang, P.K.: *Separation of flow*. Pergamon Press, New York, 1970.
- [3] Glauert, M.B., and Lighthill, M.J.: The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. *Proc. Roy. Soc. A* 230, 188–203 (1955).
- [3a] Crimi, P., and Reeves, B.L.: Analysis of leading edge separation bubbles on airfoils. *AIAA J.* 12, 1548–1555 (1976).
- [4] Goldstein, S.: On laminar boundary layer flow near a point of separation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1, 43–69 (1948).
- [4a] Gaster, M.: The structure and behaviour of laminar separation bubbles. AGARD Conf. Proc. 7, 819–854 (1966).
- [5] Holstein, H., and Bohlen, T.: Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsverfahren von K. Poljhausen genügen. *Lilienthal-Bericht* S. 10, 5–16 (1940).
- [5a] Horton, H.P.: A semi-empirical theory for the growth and bursting of laminar separation bubbles. *Aero. Res. Council, Current Paper* No. 107 (1967).
- [6] Van Ingen, J.L.: On the calculation of laminar separation bubbles in two-dimensional incompressible flow. AGARD Conf. Proc. Flow Separation. No. 153, 11–1 to 11–16 (1975).
- [7] von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM* 1, 233–252 (1921); NACA 1092 (1946); see also *Coll. Works* 11, 70–97 (1956).

- [8] Kotschin, N. J., and Loitsianskii, L. G.: Über eine angenäherte Methode der Berechnung der Laminalgrenzschicht. Dokl. Akad. Nauk, SSSR 36, No. 9 (1942); see also: An approximate method of calculating the laminar boundary layer. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS 46, 262-266 (1942).
- [9] Loitsianskii, L. G.: Laminarnyi pogranichnyi sloi. Fizmatgiz Moscow. Geran. transl. by H. Limberg: Laminare Grenzschichten. Akademie-Verlag, Berlin, 1967.
- [10] Loitsianskii, L. G.: Mekhanika zhidkosti i gazov. Nauka, Moscow, 1973.
- [11] Loitsianskii, L. G.: Universal'nye uravnenia i parametricheskie priblizhenia v teorii laminarnykh pogranichnykh sloev. Prikl. Mat. i Mekh. XXIX, No. 1 (1955). See also: The universal equations and parametric approximations in the theory of laminar boundary layers. J. Appl. Math. Mech. (PMM) 29, 70-87 (1965).
- [12] Loitsianskii, L. G.: Sur la méthode paramétrique de la théorie de la couche limite laminaire. Proc. 11th Intern. Congress Appl. Mech., Munich 1966 (H. Görtler, ed.). Springer Verlag, Berlin, 1966, 722-728.
- [13] Meksyn, L.: Integration of the boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. A 237, 543-559 (1956).
- [14] Ozerova, E. F., and Situnji, L. M.: Approximate two-parameter solution of the equation for steady-state laminar boundary layers (in Russian). Trudy Lenings. Polyt. Inst. No. 343 (1970).
- [15] Pohlhausen, K.: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM 7, 252-268 (1921).
- [16] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand (ed.): Aerodynamic Theory III, 34-298 (1935).
- [17] Pretsch, J.: Die laminare-Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Anströmung. Luftfahrtforschung 78, 397-402 (1941).
- [18] Rosenhead, L. (ed.): Laminar boundary layers. Clarendon Press, Oxford, 1963.
- [19] Schlichting, H., and Ulrich, A.: Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. Jb. dt. Luftfahrtforschung 1, 8-35 (1942); see also: Lilienthal-Bericht S 10, 75-125 (1940).
- [20] Schönauer, W.: Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Grenzschichtgleichung für stationäre, laminare, inkompressible Strömung. Ing.-Arch. 33, 173-189 (1964).
- [21] Schubauer, G. B.: Airflow in a separating laminar boundary layer. NACA Rep. 527 (1935).
- [21a] Stratford, B. S.: Flow in the laminar boundary layer near separation. ARC, RM 3002, 1-27 (1957).
- [22] Tani, I.: On the solution of the laminar boundary layer equations. Fifty years of boundary layer research (H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 193-200.
- [23] Tani, I.: Low speed flows involving bubble separation. Progress in Aeronautical Sciences 5, 70-103 (1964).
- [24] Truckenbrodt, E.: Näherungslösungen der Strömungsmechanik und ihre physikalische Deutung. Nineteenth Prandtl Memorial Lecture. ZFW 24, 177-188 (1976).
- [25] Walz, A.: Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht. Lilienthal-Bericht 141, 6-12 (1941).
- [26] Watson, E. J., and Preston, J. H.: An approximate solution of two flat plate boundary layer problems. ARC RM 2337 (1951).
- [27] Wieghardt, K.: Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Ing.-Arch. 16, 231-242 (1949).
- [28] Young, A. D., and Horton, H. P.: Some results of investigations of separation bubbles. AGARD Conf. Proc. Flow Separation 4, Part II, 779-818 (1966).
- [29] Williams, J. C. III: Incompressible boundary layer separation. Annual Review of Fluid Mech. 9, 113-144 (1977).

第十一章

- [1] AGARD Conference Proceedings No. 168 on "Flow Separation" (1975) containing 42 contributions.
- [2] Andrade, E. N., and Tsien, H. S.: The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet. Proc. Phys. Soc. London 49, 381-391 (1937).
- [3] Ashkenas, H., and Riddell, F. R.: Investigation of the turbulent boundary layer on a yawed flat plate. NACA TN 3383 (1955).
- [4] Bammer, J., and Schoen, I.: Die Strömung von Flüssigkeiten in rotierenden Hohlwellen. Z. VDI 90, 81-87 (1948).
- [5] Bammer, K., and Klauken, H.: Nebentotwasser hinter Leitradern von axialen Strömungsmaschinen. Ing.-Arch. 17, 357-380 (1949).
- [5a] Banks, W. H. C.: The boundary layer on a rotating sphere. Quart. J. Mech. Appl. Math. 18, 443-454 (1952).

- [6] Becker, E.: Berechnung der Reibungsschichten mit schwacher Sekundärströmung nach dem Impulverfahren. ZFW 7, 163-175 (1959); see also: Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung No. 13 (1956) and ZAMM-Sonderheft 3-8 (1956); Diss. Göttingen 1954.
- [7] Binnie, A.M., and Harris, D.P.: The application of boundary layer theory to swirling liquid flow through a nozzle. Quart. J. Mech. Appl. Math. 3, 89-106 (1950).
- [8] Black, J.: A note on the vortex patterns in the boundary layer flow of a swept-back wing. J. Roy. Aero. Soc. 56, 279-285 (1952).
- [9] Bädewadt, U.T.: Die Drehströmung über festem Grund ZAMM 20, 241-253 (1940).
- [10] Boltze, E.: Grenzschichten an Rotationskörpern. Diss. Göttingen 1908.
- [11] Burgers, J.M.: Some considerations on the development of boundary layer in the case of flows having a rotational component. Kon. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam 45, No. 1-5, 13-25 (1941).
- [12] Carrier, G.F.: The boundary layer in a corner. Quart. Appl. Math. 4, 367-370 (1946).
- [13] Chu, S.T., and Tifford, A.N.: The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution. JAS 21, 325-346 (1954).
- [14] Golitz, L., and Görtler, H.: Rohrströmung mit schwachem Drall. ZAMP 5, 93-110 (1954).
- [15] Cooke, J.C.: The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders. Proc. Camb. Phil. Soc. 46, 645-648 (1950).
- [16] Cooke, J.C.: Pohlhausen's method for three-dimensional laminar boundary layers. Aero. Quart. J. Part I, 51-80 (1951).
- [17] Cooke, J.C.: On Pohlhausen's method with application to a swirl problem of Taylor. JAS 29, 486-490 (1952).
- [18] Cooke, J.C.: The flow of fluids along cylinders. Quart. J. Mech. Appl. Math. 10, 312-321 (1957).
- [19] Cooke, J.C., and Hall, M.G.: Boundary layers in three dimensions. Progress in Aeronautical Sciences 2, 221-282, Pergamon Press, London, 1962.
- [19a] Crabtree, L.F., Kuechemann, D., and Sowerby, L.: Three-dimensional boundary layers. Chapter in: L. Rosenhead (ed.): Laminar boundary layers. Clarendon Press, Oxford, 1963, p. 409-451.
- [20] Das, A.: Untersuchungen über den Einfluss von Grenzschichtzonen auf die aerodynamischen Eigenschaften von Pfeil- und Deltaflügeln. Diss. Braunschweig 1959; ZFW 7, 227-242 (1959).
- [21] Dienemann, W.: Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Diss. Braunschweig 1951; ZAMM 33, 89-109 (1953); see also JAS 18, 64-65 (1951).
- [21a] Dumarque, P., Laghoviter, G., and Dagueneq, M.: Détermination des lignes de courant pariétales sur un corps de révolution tournant autour de son axe dans un fluide au repos. ZAMP 26, 325-336 (1975).
- [21b] Dwyer, H.A.: Solution of a three-dimensional boundary-layer flow with separation. AIAA J., 6, 1336-1342 (1968).
- [22] Eichelbrenner, E.A., and Oudart, A.: Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle. Application à un corps fuselé incliné sur le vent. ONERA-Publication No. 76, Chatillon, 1955.
- [23] Eichelbrenner, E.A.: Décollement laminaire en trois dimensions sur un obstacle fini. ONERA-Publication No. 89, Chatillon, 1957.
- [24] Eichelbrenner, E.A.: Three-dimensional boundary layers. Annual Review of Fluid Mech. 5, 339-360 (1973).
- [25] Elder, J.W.: The flow past a flat plate of finite width. JFM 9, 133-153 (1960).
- [26] Fadnis, B.S.: Boundary layer on rotating spheroids. ZAMP 5, 156-163 (1954).
- [27] Fage, A.: Experiments on a sphere at critical Reynolds-numbers. ARC RM 1766 (1936).
- [28] Fogarty, L.E.: The laminar boundary layer on a rotating blade. JAS 18, 247-252 (1951).
- [29] Frössling, N.: Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds. Univ. Arsskr. N. F. Avd. 2, 35, No. 4 (1940).
- [29a] Furuya, Y., and Nakamura, I.: Velocity profiles in the skewed boundary layers on some rotating bodies in axial flow. J. Appl. Mech. 37, 17-24 (1970).
- [30] Furuya, Y., Nakamura, K., and Kawachi, H.: The experiment on the skewed boundary layer on a rotating body. Bulletin of JSME 9, 702-710 (1966).
- [31] Furuya, Y., and Nakamura, I.: An experimental investigation of the skewed boundary layer on a rotating body (2nd Report). Bulletin of JSME 11, 107-246 (1968).
- [32] Garbsch, K.: Über die Grenzschicht an der Wand eines Trichters mit innerer Wirbel- und Radialströmung. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 471-486; see also: ZAMM-Sonderheft 11-17 (1956).
- [33] Gies, Th.: Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern. Fifty years of boundary-layer research, (W. Tollmien, and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 204-303.

- [34] Geis, Th.: „Ähnliche“ dreidimensionale Grenzschichten. *J. Rat. Mech. Analysis* 5, 643—686 (1956).
- [35] Geissler, W.: Berechnung der Potentialströmung um rotationssymmetrische Rumpfe, Ringprofile und Triebwerkeinläufe. *ZFW* 20, 457—462 (1972).
- [36] Geissler, W.: Berechnung der dreidimensionalen laminaren Grenzschicht an angestellten Rotationskörpern mit Ablösung. *AVA-Bericht 74 A 19* (1974); *Ing.-Arch.* 43, 413—425 (1974).
- [37] Geissler, W.: The three-dimensional laminar boundary layer over a body of revolution at incidence and with separation. *AVA-Bericht 74 A 08* (1974); *AIAA J.* 12, 1743—1745 (1974).
- [38] Gersten, K.: Corner interference effects. *AGARD Rep.* 299 (1959).
- [39] Gersten, K.: Die Grenzschichtströmung in einer rechtwinkligen Ecke. *ZAMM* 39, 428—429 (1959).
- [40] Gauer, M. B.: The wall jet. *JFM* 1, 625—643 (1956).
- [41] Gauer, M. B., and Lighthill, M. J.: The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. *Proc. Roy. Soc. London A* 230, 188—203 (1955).
- [42] Görtler, H.: Die laminare Grenzschicht am schiebenden Zylinder. *Arch. Math. J. Fasc.* 3, 216—231 (1952).
- [43] Görtler, H.: Decay of swirl in an axially symmetrical jet far from the orifice. *Revista Math. Hisp.-Amer.* IV, Ser. 14, 143—178 (1954).
- [44] Grohne, D.: Zur laminaren Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel. *ZAMM-Sonderheft* 17—20 (1956).
- [45] Gruschwitz, E.: Turbulente Reibungsschichten mit Sekundärströmung. *Ing.-Arch.* 6, 355—365 (1935).
- [45a] Hama, F. R., and Peterson, L. F.: Axisymmetric laminar wake behind a slender body of revolution. *JFM* 76, 1—15 (1976).
- [46] Hannah, D. M.: Forced flow against a rotating disc. *ARC RM* 2772 (1952).
- [47] Hansen, A. G., Herzig, H. Z., and Costello, G. R.: A visualization study of secondary flows in cascades. *NACA TN* 2947 (1953).
- [48] Hansen, A. G., and Herzig, H. Z.: Cross flows in laminar incompressible boundary layers. *NACA TN* 3651 (1956).
- [49] Hayes, W. D.: The three-dimensional boundary layer. *NAVORD Rep.* 1313 (1951).
- [50] Hoskin, N. E.: The laminar boundary layer on a rotating sphere. *Fifty years of boundary layer research* (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 127—131.
- [51] Howarth, L.: Note on the boundary layer on a rotating sphere. *Phil. Mag.* VII, 42, 1308—1315 (1951).
- [52] Howarth, L.: The boundary layer in three-dimensional flow. Part I. *Phil. Mag.* VII, 42, 239—243 (1951).
- [53] Howarth, L.: The boundary layer in three-dimensional flow. Part II: The flow near a stagnation point. *Phil. Mag.* VII, 42, 1433—1440 (1951).
- [54] Illingworth, C. R.: The laminar boundary layer of a rotating body of revolution. *Phil. Mag.* 44, 361—389 (1953).
- [55] Jacobs, W.: Systematische Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln. *Ing.-Arch.* 18, 344—362 (1950).
- [56] Johnston, J. P.: On the three-dimensional turbulent boundary layer generated by secondary flow. *Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng.* 82, 233—248 (1960).
- [57] Johnston, J. P.: The turbulent boundary layer at a plane of symmetry in a three-dimensional flow. *Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng.* 82, 622—628 (1960).
- [58] Jones, R. T.: Effects of sweep-back on boundary layer and separation. *NACA Rep.* 884 (1947).
- [59] Jungelaus, G.: Grenzschichtuntersuchungen in rotierenden Kanälen und bei scherenden Strömungen. *Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung* No. 11, Göttingen (1955).
- [60] Kelly, H. R.: A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. *JAS* 21, 634 (1954).
- [61] Krzywoblocki, M. Z.: On steady, laminar round jets in compressible viscous gases far behind the mouth. *Österr. Ing.-Arch.* 3, 373—383 (1949).
- [62] Krzywoblocki, M. Z.: On the boundary layer in a corner by use of the relaxation method. *GANITA VII*, No. 2, 77—112 (1956).
- [63] Küchemann, D.: Aircraft shapes and their aerodynamics for flight at supersonic speeds. *Advances in Aeronautical Sciences* 3, 221—252 (1962).
- [64] Küchemann, D.: The effect of viscosity on the type of flow on swept wings. *Proc. Symposium Nat'l. Phys. Lab. (NPL)* 1955.
- [65] Langhaar, H.: Steady flow in the transition length of a straight tube. *J. Appl. Mech.* 9, A 55—A 58 (1942).
- [66] Liebe, W.: Der Grenzschichtum. *Interavia* 7, 215—217 (1952).
- [67] Lees, H. G.: A simple laminar boundary layer with secondary flow. *JAS* 22, 35—40 (1955).

- [68] Ludwig, H.: Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System. *Ing.-Arch.* 19, 296—308 (1951).
- [69] Luthander, S., and Rydberg, A.: Experimentelle Untersuchungen über den Luftwiderstand bei einer um eine mit der Windrichtung parallele Achse rotierenden Kugel. *Phys. Z.* 36, 552—558 (1935).
- [70] Mager, A.: Three-dimensional laminar boundary layer with small cross-flow. *JAS* 21, 835—845 (1954).
- [71] Mager, A.: Thick laminar boundary layer under sudden perturbation. Fifty years of boundary layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 21—33.
- [71a] Mager, A.: Three-dimensional boundary layers. Princeton University Series, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. Princeton University Press. Vol. IV, 286—394 (1964).
- [72] Mangler, W.: Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *ZAMM* 23, 97—103 (1943).
- [73] Martin, J. C.: On the Magnus effects caused by the boundary-layer displacement thickness on the bodies of revolution at small angles of attack. *JAS* 24, 421—429 (1957).
- [74] Michalke, A.: Theoretische und experimentelle Untersuchung einer rotationssymmetrischen laminaren Düsegrenzschicht. *Ing.-Arch.* 31, 268—279 (1962).
- [75] Millikan, C. B.: The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. *Trans. ASME* 54, 20—43 (1932).
- [76] Möller, W.: Experimentelle Untersuchungen zur Hydrodynamik der Kugel. *Phys. Z.* 39, 87—89 (1938).
- [77] Moore, F. K.: Three-dimensional laminar boundary layer flow. *JAS* 20, 525—534 (1953).
- [78] Moore, F. K.: Three-dimensional boundary layer theory. *Advances in Appl. Mech.* 14, 159—228 (1956).
- [79] Nakamura, I.: The laminar boundary layer on a spinning body of arbitrary shape in axial flow. *Research Bulletin No. XVI*, 76, 31—45 (1972).
- [80] Nakamura, I., Yamashita, S., and Furuya, Y.: The thick turbulent boundary layers on rotating cylinders in axial flow. Second Intern. Symposium Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Sept. 1972.
- [81] Nigam, S. D.: Note on the boundary layer on a rotating sphere. *ZAMP* 5, 151—155 (1954).
- [81a] Nydahl, J. E.: Heat transfer for the Bödewadt problem. Dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 1971.
- [82] Oman, R.: The three-dimensional laminar boundary layer along a corner. *Sc. D. Thesis*, MIT, Cambridge, Mass., 1959.
- [83] Pack, D. C.: Laminar flow in an axially symmetrical jet of compressible fluid, far from the orifice. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50, 98—104 (1954).
- [84] Parr, O.: Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. *Diss.* Braunschweig 1962; *Ing.-Arch.* 32, 393—413 (1963); see also: Die Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper. *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 53, 260—271 (1959), and: Flow in the three-dimensional boundary layer on a spinning body of revolution. *AIAA J.* 2, 362—363 (1964).
- [85] Pfeleiderer, C.: Untersuchungen auf dem Gebiet der Kreisradmaschinen. *VDI-Forschungsheft No. 295* (1927).
- [86] Prandtl, L.: Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. *Betz-Festschrift 1945*, 134—141, or *Coll. Works* 2, 679—686 (1961).
- [87] Pretsch, J.: Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Anströmung. *Luftfahrtforschung* 18, 397—402 (1941).
- [88] Probst, R. F., and Elliot, D.: The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary-layer flow. *JAS* 23, 208—224 (1956).
- [89] Punnis, B.: Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr. *Diss.* Göttingen 1947.
- [90] Queijo, M. J., Jaquet, B. M., and Wolhart, W. D.: Wind-tunnel investigation at low speed of the effects of chordwise wing fences and horizontal-tail position on the static longitudinal stability characteristics of an airplane model with a 36° swept-back wing. *NACA Rep.* 1203 (1954).
- [91] Rainbird, W. J., Crabbe, R. S., and Jurawicz, L. S.: The flow separation about cones at incidence. *Nat. Res. Council Canada, DMENAE Quart. Bull.* 1963 (2).
- [91a] Raju, K. G. R., Looser, J., and Plate, E. J.: Velocity profiles and fence for a turbulent boundary layer along smooth and rough plates. *JFM* 76, 383—399 (1976).
- [92] Ran, Vasant: Ähnliche Lösungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in der inkompressiblen laminaren Grenzschicht entlang einer rechtwinkligen Ecke. Ein theoretischer Beitrag zum Problem der Interferenz von Grenzschichten. *Diss.* Braunschweig 1966; *Jb. WGL* 156—178 (1966).
- [93] Rott, N., and Crabtree, L. F.: Simplified laminar boundary layer calculation for bodies of revolution and for yawed wings. *JAS* 19, 553—565 (1952).
- [93a] Rubin, S. G.: Incompressible flow along a corner. *JFM* 26, 97—110 (1966).

- [94] Sawatzki, O.: Strömungsfeld um eine rotierende Kugel. *Acta Mech.* 9, 159—214 (1970).
- [95] Sears, R. A., and Bond, R.: Skin friction and heat-transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow. *JAS* 18, 871—875 (1951).
- [96] Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. *Forsch. Ing.-Wes.* Heft 428, (1922); *ZAMM* 2, 96—106 (1922); *Phys. Z.* 23, 14 (1922).
- [97] Schlichting, H.: Laminare Strahlausbreitung. *ZAMM* 13, 260—263 (1933).
- [98] Schlichting, H., and Trübenbrodt, E.: Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe. *ZAMM* 32, 97—111 (1952).
- [99] Schlichting, H.: Die laminare Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper. *Ing.-Arch.* 21, 227—244 (1953).
- [100] Schlichting, H.: Three-dimensional boundary layer flow. *Lecture at the IXth Convention of the International Association for Hydraulic Research at Dubrovnik/Jugoslavia*, Sept. 1961. *Proc. Neuvième Assemblée Générale de l'Association Internationale de Recherches Hydrauliques, Dubrovnik*, 1262—1290; see also DPL-Rep. 195 (1961).
- [101] Schlichting, H.: *Grenzschichttheorie*. 5th ed., G. Braun Verlag, Karlsruhe, 1965.
- [102] Scholkenmeier, F. W.: Die laminare Reibungsschicht an rotationsasymmetrischen Körpern. *Diss. Braunschweig* 1943. Shortened version in *Arch. Math.* 1, 270—277 (1949).
- [103] Sears, W. R.: Boundary layer of yawed cylinders. *JAS* 15, 49—52 (1948).
- [103a] Sears, W. R.: Boundary layers in three-dimensional flow. *Appl. Mech. Rev.* 7, 281—285 (1954).
- [104] Sedney, R.: Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow. *JAS* 24, 430—436 (1957).
- [105] Squire, H. B.: The round laminar jet. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 4, 321—329 (1951).
- [106] Squire, H. B.: Radial jets. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.). Braunschweig, 1955, 47—54.
- [106a] Sparrow, E. M., Lin, S., and Lundgren, T. S.: Flow development in the hydrodynamic entrance region of tubes and ducts. *Phys. Fluids* 7, 333—347 (1964).
- [107] Steinheuer, T.: Three-dimensional boundary layers on rotating bodies and in corners. *AGARDograph No. 97, Part 2*, 567—611 (1966).
- [108] Stewartson, K., and Howarth, L.: On the flow past a quarter infinite plate using Oseen's equations. *JFM* 7, 1—21 (1960).
- [109] Stewartson, K.: Viscous flow past a quarter infinite plate. *JAS* 28, 1—10 (1961).
- [110] Talbot, L.: Laminar swirling pipe flow. *J. Appl. Mech.* 27, 1—7 (1954).
- [110a] Tan, S.: On laminar boundary layer over a rotating blade. *JAS* 20, 780—781 (1953).
- [111] Taylor, G. I.: The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 3, 129—139 (1950).
- [112] Tetervin, N.: Boundary-layer momentum equations for three-dimensional flow. *NACA TN 1479* (1947).
- [113] Tifford, A. N., and Chu, S. T.: On the flow around a rotating disc in a uniform stream. *JAS* 19, 284—285 (1952).
- [114] Timman, R.: The theory of three-dimensional boundary layers. *Boundary layer effects in aerodynamics*. Proc. of a Symposium held at NPL, London, 1955.
- [115] Timman, R., and Zaat, J. A.: Neue Rechenmethode für dreidimensionale laminare Grenzschichten. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 432—445.
- [116] Tomotika, S.: Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream. *ARC RM. 1678* (1935).
- [117] Tomotika, S., and Imai, I.: On the transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer of a sphere. *Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo* 13, 389—423 (1938); and Tomotika, S.: *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 20 (1938).
- [118] Trübenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern. *Ing.-Arch.* 22, 21—35 (1954).
- [119] Trübenbrodt, E.: Die turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe. *ZAMM* 34, 150—162 (1954).
- [120] Vogelpohl, G.: Die Strömung der Wirbelquelle zwischen ebenen Wänden mit Berücksichtigung der Wandreibung. *ZAMM* 24, 289—294 (1944).
- [121] Weber, H. E.: The boundary layer inside a conical surface due to swirl. *J. Appl. Mech.* 23, 587—592 (1956).
- [122] Wieghardt, K.: Einige Grenzschichtmessungen an Rotationskörpern. *Schiffstechnik* 3, 102—103 (1955/56).
- [123] Wieselberger, G.: Über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers. *Phys. Z.* 28, 84—88 (1927).
- [124] Wild, J. M.: The boundary layer of yawed infinite wings. *JAS* 16, 41—45 (1949).
- [125] Yamaga, J.: An approximate solution of the laminar boundary layer on a rotating body of revolution in uniform compressible flow. *Proc. 6th Japan. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 295—298 (1956).

- [126] Young, A. D.: Some special boundary-layer problems (20th Prandtl Memorial Lecture). *ZFW 1*, 401—414 (1977).
- [127] Zamir, M., and Young, A. D.: Experimental investigation of the boundary layer in a streamwise corner. *Aero. Quart.* **21**, 313—339 (1970).

第 一 章

- [1] Allen, H. J., and Look, B. C.: A method for calculating heat transfer in the laminar flow regions of bodies. NACA Rep. 764 (1943).
- [2] Ambrok, G. S.: The effect of surface temperature variability on heat exchange in laminar flow in a boundary layer. *Soviet Phys. Techn. Phys.* **2**, 738—748 (1957). Translation of *Zh. Tekh. Fiz.* **27**, 812—821 (1957).
- [3] Bjorklund, G. S., and Kays, W. M.: Heat transfer between concentric rotating cylinders. *J. Heat Transfer* **81**, 175—186 (1959).
- [4] Brun, E. A., Diep, A., and Kestin, J.: Sur un nouveau type des tourbillons longitudinaux dans l'écoulement autour d'un cylindre. *C. R. Acad. Sci.* **263**, 742 (1966).
- [5] Buyuktur, A. R., Kestin, J., and Maeder, P. F.: Influence of combined pressure gradient and turbulence on the transfer of heat from a plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* **7**, 1175—1186 (1964).
- [6] Ten Bosch, M.: *Die Wärmeübertragung*. Berlin, 1936.
- [7] Brun, E. A.: Selected combustion problems. Vol. *11*, 185—198, AGARD, Pergamon Press, London, 1956.
- [8] Chapman, D. R., and Rubesin, M. W.: Temperature and velocity profiles in the compressible, laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. *JAS* **16**, 547—565 (1949).
- [9] Davies, D. R., and Bourne, D. E.: On the calculation of heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layers I. The laminar case. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 457—467 (1956); see also *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **12**, 337—339 (1959).
- [10] Dewey, C. F., and Gross, J. F.: Exact similar solution of the laminar boundary-layer equations. *Advances in Heat Transfer* **4**, 317—446 (1967).
- [11] Dienemann, W.: Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Diss. Braunschweig 1961; *ZAMM* **33**, 89—109 (1953); see also *JAS* **18**, 64—65 (1951).
- [12] Donoughe, P. L., and Livingood, J. N. B.: Exact solutions of laminar boundary layer equations with constant property values for porous wall with variable temperature. NACA Rep. 1229 (1955).
- [12a] Driest, E. R. van: Convective heat transfer in gases. Princeton University Series, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. *V*, 339—427 (1959).
- [13] Eckert, E. R. G., and Drake, R. M.: *Heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [14] Eckert, E.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. 3rd ed., Berlin, 1966.
- [15] Eckert, E., and Drewitz, O.: Der Wärmeübergang an eine mit großer Geschwindigkeit längsangeströmte Platte. *Forsch. Ing.-Wes.* **11**, 116—124 (1940).
- [16] Eckert, E.: Temperaturmessungen in schnell strömenden Gasen. *Z. VDI* **84**, 813—817 (1940).
- [17] Eckert, E., and Weise, W.: Die Temperatur unbeheizter Körper in einem Gasstrom hoher Geschwindigkeit. *Forsch. Ing.-Wes.* **12**, 40—50 (1941).
- [18] Eckert, E., and Drewitz, O.: Die Berechnung des Temperaturfeldes in der laminaren Grenzschicht schnell angeströmter unbeheizter Körper. *Luftfahrtforschung* **19**, 189—196 (1942).
- [19] Eckert, E.: Die Berechnung des Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. *VDI-Forschungsheft* **416** (1942).
- [20] Eckert, E., and Weise, W.: Messung der Temperaturverteilung auf der Oberfläche schnell angeströmter unbeheizter Körper. *Forsch. Ing.-Wes.* **13**, 246—254 (1942).
- [21] Eckert, E. R. G., and Soehngen, E.: Distribution of heat transfer coefficients around circular cylinders in cross-flow at Reynolds numbers from 20 to 500. *Trans. ASME* **74**, 343—347 (1952).
- [22] Eckert, E. R. G., and Jackson, T. W.: Analysis of turbulent free convection boundary layer on a flat plate. NACA Rep. 1015 (1951).
- [23] Eckert, E. R. G., and Livingood, J. N. B.: Method for calculation of laminar heat transfer in air flow around cylinders of arbitrary cross-section (including large temperature differences and transpiration cooling). NACA Rep. 1118 (1953).
- [24] Eckert, E. R. G., and Diaguila, A. J.: Experimental investigation of free-convection heat transfer in vertical tube at large Grashof numbers. NACA Rep. 1211 (1955).
- [25] Eckert, E. R. G., and Livingood, J. N. B.: Calculations of laminar heat transfer around cylinders of arbitrary cross-section and transpiration cooled walls with application to turbine blade cooling. NACA Rep. 1220 (1955).

- [26] Eckert, E. R. G., Hartnett, J. P., and Birkebeck, R.: Simplified equations for calculating local and total heat flux to non-isothermal surface. *JAS* 24, 549-551 (1957).
- [27] Edwards, A., and Furber, B.N.: The influence of free stream turbulence on heat transfer by convection from an isolated region of a plane surface in parallel air flow. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 170, 941 (1956).
- [28] Ede, A.J.: Advances in free convection. *Advances in Heat Transfer*, Acad. Press, 4, 1-64 (1967).
- [29] Eichhorn, R.: The effect of mass transfer on free convection. *J. Heat Transfer* 82, 260-263, (1960).
- [30] Eichhorn, R., Eckert, E.R.G., and Anderson, A.D.: An experimental study of the effects of nonuniform wall temperature on heat transfer in laminar and turbulent axisymmetric flow along a cylinder. *J. Heat Transfer* 82, 349-350 (1960).
- [31] Elies, F.: Der Wärmeübergang einer geheizten Platte an strömende Luft. *Abhandl. Aerodyn. Inst. TH Aachen*, Heft 9 (1930); *ZAMM* 9, 434-453 (1929) and 10, 1-14 (1930).
- [32] Evans, H.L.: Mass transfer through laminar boundary layers. 3a. Similar solution to the b-equation when $B = 0$ and $\sigma \geq 0.5$. *Int. J. Heat Mass Transfer* 3, 26-41 (1961).
- [33] Evans, H.L.: Mass transfer through laminar boundary layers. 7. Further similar solutions to the b-equation for the case $B = 0$. *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 35-37 (1962).
- [34] Evans, H.L.: *Laminar boundary layer theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.
- [35] Fage, A., and Falkner, V.M.: Relation between heat transfer and surface friction for laminar flow. *ARC RM* 1408 (1931).
- [36] Fischer, P.: Ähnlichkeitsbedingungen für Strömungsvorgänge mit gleichzeitigem Wärmeübergang. *ZAMM* 43, T 122-T 125 (1963).
- [37] Frick, C.W., and McCullough, G.B.: A method for determining the rate of heat transfer from a wing or streamlined body. *NACA Rep.* 830 (1945).
- [38] Fritzsche, A.F., Bodnarscu, M., Kirschner, O., and Esdorn, H.: Probleme der Wärmeübertragung. *VDI-Forschungsheft* 450 (1955).
- [39] Frössling, N.: Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationsymmetrischer Grenzschichtströmung. *Lunds Univ. Arsk.*, N. F. Avd. 2, 36, No. 4 (1940); see also *NACA TM* 1432; see also *Lunds Univ. Arsk.*, N. F. Avd. 2, 154, No. 3 (1958).
- [40] Frössling, N.: Calculating by series expansion of the heat transfer in laminar, constant-property boundary layers at non-isothermal surfaces. *Archiv för Fysik* 17, 143-151 (1958).
- [41] Frössling, N.: Problems of heat transfer across laminar boundary layers. *Theory and fundamental research in heat transfer*. *Proc. Ann. Meeting of the American Soc. of Mech. Engrs.* (J.A. Clark, ed.), Pergamon Press, 181-202, 1963.
- [42] Giedt, W.H.: Investigation of variation of point unit heat transfer coefficient around a cylinder normal to an airstream. *Trans. ASME* 71, 375-381 (1949).
- [43] Giedt, W.H.: Effect of turbulence level of incident air stream on local heat transfer and skin friction on a cylinder. *JAS* 18, 725-730, 766 (1951).
- [44] Gersten, K., and Körner, H.: Wärmeübergang unter Berücksichtigung der Reibungswärme bei laminaren Keilströmungen mit veränderlicher Temperatur und Normalgeschwindigkeit entlang der Wand. *Intern. J. Heat Mass Transfer* 11, 655-673 (1968).
- [45] Görtler, H.: Über eine Analogie zwischen Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden. *Ing.-Arch.* 28, 71-78 (1959).
- [46] Goland, L.: A theoretical investigation of heat transfer in the laminar flow regions of airfoils. *JAS* 17, 436-440 (1950).
- [47] Grigull, U.: Wärmeübertragung in laminarer Strömung mit Reibungswärme. *Chemie-Ingenieur-Technik* 480-483 (1955).
- [48] Grigull, U.: *Technische Thermodynamik*, 3rd ed., 194 p., Berlin, 1977.
- [49] De Groff, H.M.: On-viscous heating. *JAS* 23, 395-396 (1956).
- [50] Guba, C.R., and Yih, C.S.: Laminar convection of heat from two-dimensional bodies with variable wall temperatures. *Proc. 5th Midw. Conf. Fluid Mech.* 29-40 (1957).
- [51] Hara, T.: Heat transfer by laminar free convection about a vertical flat plate with large temperature difference. *Bull. JSME* 1, 251-254 (1958).
- [52] Hartnett, J.P.: Heat transfer from a non-isothermal disk rotating in still air. *J. Appl. Mech.* 26, 672-673 (1959).
- [53] Hassan, H.A.: On heat transfer to laminar boundary layers. *JASS* 26, 404 (1959).
- [54] Hausenblas, H.: Die nicht isotherme Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalten und Kapillarrohren. *Ing.-Arch.* 18, 151-166 (1950).
- [55] Van Der Hegge-Zijnen, B.G.: Heat transfer from horizontal cylinders to a turbulent air flow. *Appl. Sci. Res. A* 7, 205-223 (1957).
- [56] Hermant, R.: Wärmeübertragung bei freier Strömung am waagerechten Zylinder in zweiatomigen Gasen. *VDI-Forschungsheft* 379 (1936).

- [56] Hilpert, R.: Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom. *Forsch. Ing.-Wes.* 4, 215—224 (1933).
- [57] Howarth, L.: Velocity and temperature distribution for a flow along a flat plate. *Proc. Roy. Soc. London A* 164, 364—377 (1936).
- [58] Illingworth, C.R.: Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 46, 469—478 (1950).
- [59] Imai, I.: On the heat transfer to constant property laminar boundary layer with power function free stream velocity and wall temperature distributions. *Quart. Appl. Math.* 16, 33—45 (1958).
- [60] Jakob, M.: *Heat transfer, I and II*. McGraw-Hill, New York, 1949 and 1957.
- [61] Jodlbauer, K.: Das Temperatur und Geschwindigkeitsfeld um ein geheiztes Rohr bei freier Konvektion. *Forsch. Ing.-Wes.* 4, 157—172 (1933).
- [62] Johnson, D. V., and Hartnett, J. P.: Heat transfer from a cylinder in crossflow with transpiration cooling. *J. Heat Transfer* 85, 173—179 (1963).
- [63] Kayalar, L.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen über den Einfluß des Turbulenzgrades auf den Wärmeübergang in der Umgebung des Staupunktes eines Kreiszyllinders. *Diss. Braunschweig* 1968; *Forsch. Ing.-Wes.* 35, 157—167 (1969).
- [64] Kestin, J., Maeder, P.F., and Sogin, H.H.: The influence of turbulence on the transfer of heat to cylinders near the stagnation point. *ZAMP* 12, 115—132 (1961).
- [65] Kestin, J.: The effect of free-stream turbulence on heat transfer rates. *Advances in Heat Transfer* (Th. Irvin and J.P. Hartnett, ed.) Acad. Press, Vol. 3, 1—32 (1966).
- [66] Kestin, J., Maeder, P.F., and Wang, H.E.: On boundary layers associated with oscillating streams. *Appl. Sci. Res. A* 10, 1 (1961).
- [67] Kestin, J., and Maeder, P.F.: Influence of turbulence on transfer of heat from cylinders. *NACA TN* 4018 (1964).
- [68] Kestin, J., Maeder, P.F., and Wang, H.E.: Influence of turbulence on the transfer of heat from plates with and without a pressure gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer* 3, 133—154 (1961).
- [68a] Kestin, J., and Peres, L.N.: The transfer of heat across a turbulent boundary layer at very high Prandtl numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 355—371 (1962).
- [69] Klein, J., and Tribus, M.: Forced convection from non-isothermal surfaces. *Heat Transfer Symposium, Engineering Research Institute, Univ. of Michigan, Aug. 1952*.
- [70] Knudsen, J.G., and Katz, D.L.: *Fluid dynamics and heat transfer*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [71] Ko, S.Y.: Calculation of local heat transfer coefficients on slender surfaces of revolution by the Mangler transformation. *JAS* 25, 62—63 (1958).
- [72] Kroujilin, G.: The heat transfer of a circular cylinder in a transverse airflow in the range of $Re = 6000 - 425000$. *Techn. Physics USSR* 5, 289—297 (1938).
- [73] Le Fevre, E.J.: Laminar free convection from a vertical plane surface. *Mech. Eng. Res. Lab., Heat* 113, Gt. Britain, 1956.
- [74] Le Fur, B.: Nouvelle méthode de résolution par itération des équations dynamiques et thermiques de la couche limite laminaire. *Publ. Sci. et Techn. du Ministère de l'Air*, No. 383 (1962).
- [75] Le Fur, B.: Convection de la chaleur en régime laminaire dans le cas d'un gradient de pression et d'une température de paroi quelconques, le fluide étant à propriétés physiques constantes. *Int. J. Heat Mass Transfer* 1, 68—80 (1960).
- [76] Levêque, M.A.: Les lois de la transmission de chaleur par convection. *Ann. Mines* 13, 201—239 (1928).
- [77] Levy, S.: Heat transfer to constant property laminar boundary layer flows with power-function free-stream velocity and wall temperature variation. *JAS* 19, 341—348 (1952).
- [78] Liepmann, H.W.: A simple derivation of Lighthill's heat transfer formula. *JFM* 3, 357—360 (1958).
- [79] Lietzke, A.F.: Theoretical and experimental investigation of heat transfer by laminar natural convection between parallel plates. *NACA Rep.* 1223 (1955).
- [80] Lighthill, M.J.: Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. *Proc. Roy. Soc. London A* 202, 359—377 (1950).
- [81] Lorenz, H.H.: Die Wärmeübertragung an einer ebenen senkrechten Platte an Öl bei natürlicher Konvektion. *Z. Techn. Physik* 362 (1934).
- [82] Lowery, G.W., and Vachon, R.J.: The effect of turbulence on heat transfer from heated cylinders. *Int. J. Heat Mass Transfer* 18, 1229—1242 (1975).
- [83] Maisel, D.S., and Sherwood, T.K.: Evaporation of liquids into turbulent gas streams. *Chem. Eng. Progr.* 46, 131—138 (1950).
- [84] Neksyn, D.: Plate thermometer. *ZAMP* 11, 63—68 (1960).
- [85] Merk, H.J.: Rapid calculations for boundary layer heat transfer using wedge solutions and asymptotic expansions. *JFM* 5, 460—480 (1959).

- [86] Millsaps, K., and Pohlhausen, K.: Thermal distribution in Jeffery-Hamel flows between non-parallel plane walls. *JAS* 20, 187-196 (1953).
- [86a] Millsaps, K., and Pohlhausen, K.: Heat transfer by laminar flow from a rotating plate.
- [87] Morgan, A. J. A.: On the Couette flow of a compressible viscous, heat conducting, perfect gas. *JAS* 24, 315-316 (1957).
- [88] Morgan, V. T.: The overall convection heat transfer from smooth circular cylinders. *Advances in Heat Transfer* 11, 199-265 (1975).
- [89] Morgan, G. W., Pipkin, A. C., and Warner, W. H.: On heat transfer in laminar boundary layer flows of liquids having a very small Prandtl number. *JAS* 25, 173-180 (1958).
- [90] Nahme, R.: Beiträge zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. *Ing.-Arch.* 11, 191-209 (1940).
- [91] Nusselt, W.: Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. *Ges. Ing.* 38, 477 (1915).
- [92] Oldroyd, J. G.: Calculations concerning theoretical values of boundary layer thickness and coefficients of friction and heat transfer for steady two-dimensional flow in an incompressible boundary layer with main stream velocity $U \sim x^m$ or $U \sim x^x$. *Phil. Mag.* 36, 587-600 (1945).
- [93] Ostrach, S.: An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force. *NACA Rep.* 1111 (1953).
- [94] Pohlhausen, E.: Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. *ZAMM* 1, 115-121 (1921).
- [95] Prandtl, L.: Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand in Flüssigkeiten. *Phys. Z.* 11, 1072-1078 (1910); see also *Coll. Works* 11, 535-596 (1961).
- [96] Raithby, G. D., and Hollands, K. G. T.: A general method of obtaining approximate solutions to laminar and turbulent free convection problems. *Advances in Heat Transfer* 11, 265-315 (1975).
- [97] Reeves, B. L., and Kipperhan, Ch. J.: On a particular class of similar solutions of the equations of motion and energy of a viscous fluid. *JASS* 29, 38-47 (1962).
- [98] Reynolds, O.: On the extent and action of the heating surface for steam boilers. *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* 14, 7-12 (1874).
- [99] Richardson, E. G.: The aerodynamic characteristics of a cylinder having a heated boundary layer. *Phil. Mag.* 23, 681-692 (1937).
- [100] Sato, K., and Sage, B. H.: Thermal transfer in turbulent gas streams; Effect of turbulence on macroscopic transport from spheres. *Trans. ASME* 80, 1380-1388 (1958).
- [101] Schlichting, H.: Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung. *ZAMM* 31, 78-83 (1951).
- [102] Schlichting, H.: Der Wärmeübergang an einer längsangeströmten Platte mit veränderlicher Wandtemperatur. *Forsch. Ing.-Wes.* 17, 1-8 (1951).
- [103] Schlichting, H.: A survey on some recent research investigations on boundary layers and heat transfer. *J. Appl. Mech.* 38, 289-300 (1971).
- [104] Schmidt, E., and Beckmann, W.: Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer Wärme abgebenden, senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. *Forsch. Ing.-Wes.* 1, 391-404 (1930).
- [105] Schmidt, E.: Schlierenaufnahmen der Temperaturfelder in der Nähe wärmeabgebender Körper. *Forsch. Ing.-Wes.* 3, 181-189 (1932).
- [106] Schmidt, E.: Einführung in die technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik, 10th ed. Berlin, 1963.
- [107] Schmidt, E., and Wenner, K.: Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylinders. *Forsch. Ing.-Wes.* 12, 65-73 (1941).
- [108] Schmidt, E.: Thermische Auftriebsströmungen und Wärmeübergang. Vierte Ludwig-Prandtl-Gedächtnisvorlesung, *ZFW* 8, 273-284 (1960).
- [109] Schuh, H.: Einige Probleme bei freier Strömung zäher Flüssigkeiten. *Göttinger Monographien* Bd. B, Grenzschichten, 1946.
- [110] Schuh, H.: Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an einer ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und für das Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen. *ZAMM* 25/27, 54-60 (1947).
- [111] Schuh, H.: Ein neues Verfahren zur Berechnung des Wärmeüberganges in ebenen und rotationssymmetrischen laminaren Grenzschichten bei konstanter und veränderlicher Wandtemperatur. *Forsch. Ing.-Wes.* 20, 37-47 (1954); see also: Schuh, H.: A new method for calculating laminar heat transfer on cylinders of arbitrary cross-section and on bodies of revolution at constant and variable wall temperature. *KTH Aero. TN* 33 (1953).
- [112] Schuh, H.: On asymptotic solutions for the heat transfer at varying wall temperatures in a laminar boundary layer with Hartree's velocity profiles. *JAS* 20, 146-147 (1953).
- [113] Seban, R. A.: The influence of free-stream turbulence on the local transfer from cylinders. *Trans. ASME Ser. C, J. Heat Transfer* 82, 101-107 (1960).

- [114] Shao Wen Yean: Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection. *JAS* 16, 741-748 (1949).
- [115] Shell, J. L.: Die Wärmeübergangszahl von Kugelflächen. *Bhfl. Acad. Sci. Nat. Belgrade* 4, 189 (1938).
- [116] Sickmann, J.: The calculation of the thermal laminar boundary layer on a rotating sphere. *ZAMP* 13, 468-482 (1962); see also AGARD Rep. 283 (1960).
- [117] Singh, S.N.: Heat transfer by laminar flow from a rotating sphere. *Appl. Sci. Res. A* 2, 197-205 (1960).
- [118] Skopets, M.B.: Approximate method for integrating the equations of a laminar boundary layer in an incompressible gas in the presence of heat transfer. *Soviet Phys. Techn. Phys.* 4, 411-419 (1959). Translation of *Zh. Tekh. Fiz* 29, 461-471 (1959).
- [119] Smith, A. G., and Spalding, D. B.: Heat transfer in a laminar boundary layer with constant fluid properties and constant wall temperature. *J. Roy. Aero. Soc.* 62, 60-64 (1958).
- [120] Spalding, D. B.: Heat transfer from surfaces of non-uniform temperature. *JFM* 4, 22-32 (1958).
- [121] Spalding, D. B., and Evans, H. L.: Mass transfer through laminar boundary layers. 3. Similar solutions to the b-equation. *Int. J. Heat Mass Transfer* 2, 314-341 (1961).
- [122] Spalding, D. B., and Pun, W.M.: A review of methods for predicting heat transfer coefficients for laminar uniform-property boundary layer flows. *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 239-250 (1962).
- [123] Sparrow, E.M.: The thermal boundary layer on a non-isothermal surface with non-uniform free stream velocity. *JFM* 4, 321-329 (1958).
- [124] Sparrow, E.M., and Cess, R.D.: Free convection with blowing or suction. *J. Heat Transfer* 83, 387-389 (1961).
- [125] Sparrow, E.M., Eichhorn, R., and Gregg, J.L.: Combined forced and free convection in a boundary layer flow. *Physics of Fluids* 2, 319-328 (1959).
- [126] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Details of exact low Prandtl number boundary layer solutions for forced and for free convection. *NASA Memo.* 2-27-59 E (1959).
- [127] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Similar solutions for free convection from a non isothermal vertical plate. *Trans. ASME* 80, 379-386 (1958).
- [128] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: The effect of a non isothermal free stream on boundary layer heat transfer. *J. Appl. Mech.* 26, 161-165 (1959).
- [129] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number. *J. Heat Transfer* 81, 249-251 (1959).
- [130] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk. *J. Heat Transfer* 82, 294-302 (1960).
- [131] Squire, H. B.: Section of: *Modern Developments in Fluids Dynamics* (S. Goldstein, ed.), Oxford, 11, 623-627 (1938).
- [132] Squire, H.B.: Heat transfer calculation for aerofoils. *ARC RM* 1986 (1942).
- [133] Squire, H.B.: Note on the effect of variable wall temperature on heat transfer. *ARC RM* 2753 (1953).
- [134] Stewart, W.E., and Prober, R.: Heat transfer and diffusion in wedge flows with rapid mass transfer. *Int. J. Heat Transfer* 5, 1149-1163 (1962).
- [135] Stojanovic, D.: Similar temperature boundary layers. *JASS* 26, 571-574 (1959).
- [136] Sugawara, S., Sato, T., Komatsu, H., and Osaka, H.: The effect of free stream turbulence on heat transfer from a flat plate. *NACA TM* 1441 (1958).
- [137] Suter, S.P.: Vorticity amplification in stagnation point flow and its effect on heat transfer. *JFM* 21, 513-534 (1965).
- [138] Tien, C.L.: Heat transfer by laminar flow from a rotating cone. *J. Heat Transfer* 82, 252-253 (1960).
- [139] Tifford, A.N.: The thermodynamics of the laminar boundary layer of a heated body in a high speed gas flow field. *JAS* 12, 241-251 (1945).
- [140] Tifford, A.N., and Chu, S.T.: Heat transfer in laminar boundary layers subject to surface pressure and temperature distributions. *Proc. Second Midwestern Conf. Fluid Mech.* 1949, 363-377 (1949).
- [141] Tifford, A.N., and Chu, S.T.: On the flow and temperature field in forced flow against a rotating disc. *Proc. Second U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1955, 793-800 (1955).
- [142] Touloukian, Y. S., Hawkins, G. A., and Jakob, M.: Heat transfer by free convection from heated vertical surfaces to liquids. *Trans. ASME* 70, 13-23 (1948).
- [143] Vogelpohl, G.: Der Übergang der Reibungswärme von Lagern: aus der Schmierschicht in die Gleitflächen. - Temperaturverteilung und thermische Anlaufstrecke in parallelen Schmierlichtern bei Erwärmung durch innere Reibung. *VDI-Forschungsheft* 425 (1949).
- [144] Vasanta Ram. Ähnliche Lösungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in der inkompressiblen laminaren Grenzschicht entlang einer rechtwinkligen Ecke. Ein theoretischer Beitrag zum Problem der Interferenz von Grenzschichten. *Diss. Braunschweig* 1966; *Jb. WGL* 1966, 156-178 (1967).

- [145] Yamaga, J.: An approximate solution of the laminar flow heat-transfer in a rotating axially symmetrical body surface in a uniform incompressible flow. *J. Mech. Lab. Japan* 3, No. 1, 1-14 (1956).
- [146] Yang, K.T.: Possible similarity solutions for laminar free convection on vertical plates and cylinders. *J. Appl. Mech.* 27, 230-236 (1960).

第十三章

- [1] Ackeret, J., Feldmann, F., and Rott, N.: Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen. Report No. 10 of the Inst. of Aerodynamics ETH Zürich 1946; see also NACA TM 1113 (1947).
- [2] Appleton, J.P., and Davies, H.J.: A note on the interaction of a normal shock wave with a thermal boundary layer. *JAS* 25, 722-723 (1958).
- [3] Bardsley, O., and Mair, W.A.: Separation of the boundary layer at a slightly blunt leading edge in supersonic flow. *Phil. Mag.* 43, 338, 344-352 (1952).
- [4] Barry, F.W., Shapiro, H.A., and Neumann, E.P.: Some experiments on the interaction of shock waves with boundary layers on a flat plate. *J. Appl. Mech.* 17, 126-131 (1950).
- [5] Beckwith, I.E.: Similarity solutions for small cross flows in laminar compressible boundary layers. NASA TR R 107, 1-87 (1961).
- [6] Bogdonoff, S.M., and Kepler, C.E.: Separation of a supersonic turbulent boundary layer. *JAS* 22, 414-424 (1955).
- [7] Bouniol, F., and Eschelbrenner, E.A.: Calcul de la couche limite laminaire compressible. Méthode rapide applicable au cas de la plaque plane. *La Recherche Aeron.* 28 (1952).
- [8] Bradfield, W.S., Decourain, D.G., and Blamer, O.B.: The effect of leading-edge bluntness on a laminar supersonic boundary layer. *JAS* 21, 373-382 and 398 (1954).
- [9] Burggraf, O.R.: Asymptotic theory of separation and reattachment of a laminar boundary layer on a compression ramp. AGARD Conf. Proc. Flow Separation, No. 108, 10/1-10/9 (1975).
- [10] Busemann, A.: Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. *ZAMM* 15, 23-25 (1935).
- [10a] Busemann, A.: Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. *Luftfahrtforschung* 19, 137-144 (1942).
- [11] Busemann, A.: Das Abreißen der Grenzschicht bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit. *Jb. Luftfahrtforschung* 1, 539-541 (1940).
- [12] Byran, L.F.: Experiments on aerodynamic cooling. Report of the Inst. of Aerodynamics ETH Zürich, No. 18, 1951.
- [13] Chapman, D.R., and Rubesin, M.W.: Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. *JAS* 16, 547-565 (1949).
- [14] Charwat, A.F., and Redekopp, L.G.: Supersonic interference flow along the corner of intersecting wedges. *AIAA J.* 5, 480-488 (1967).
- [14a] MacCormack, R.W.: Numerical solution of the interaction of shock wave with a laminar boundary layer. Proceedings 2nd Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics 8, Springer Verlag, 1971.
- [14b] Carter, J.E.: Solutions for laminar boundary layers with separation and reattachment. *AIAA Paper* 74-583 (1974).
- [15] Chu, S.T., and Tifford, A.N.: The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution. *JAS* 21, 345-346 (1954).
- [16] Cohen, C.B.: Similar solutions of compressible laminar boundary layer equations. *JAS* 21, 281-282 (1954).
- [16a] Cohen, C.B., and Reshotko, E.: The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. *NACA Rep.* 1294 (1956).
- [17] Coles, D.: Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. *JAS* 21, 433-448 (1954).
- [18] Cope, W.F., and Hartree, D.R.: The laminar boundary layer in a compressible flow. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 241, 1-69 (1948).
- [19] Crabtree, L.F.: The compressible laminar boundary layer on a yawed infinite wing. *Aero. Quart.* 5, 85-100 (1954).
- [20] Crocco, L.: Sulla trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità. *L'Aerotecnica* 12, 181-197 (1932).
- [21] Crocco, L.: Sullo strato limite laminare nei gas lungo una lamina piana. *Rend. Mat. Univ. Roma* V 2, 138-152 (1941).
- [22] Crocco, L.: Lo strato laminare nei gas. *Mon. Sci. Aer. Roma* (1946).
- [23] Crocco, L., and Cohen, C.B.: Compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. Fifty years of boundary layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 260-293; see also *NACA Rep.* 1294 (1956).

- [24] Curle, N.: The effects of heat transfer on laminar boundary layer separation in supersonic flow. *Aero. Quart.* 12, 309-336 (1961).
- [25] Curle, N.: Heat transfer through a compressible laminar boundary layer. *Aero. Quart.* 13, 255-270 (1962).
- [26] Curle, N.: The laminar boundary layer equations. Clarendon Press, Oxford, 1962.
- [27] Des Cars, B., and Sternberg, J.: On boundary layer temperature recovery factors. *JAS* 19, 645-646 (1952).
- [27a] Delery, J., Chattot, J. J., and Le Balleur, J. C.: Interaction visqueuse avec décollement en écoulement transsonique. AGARD Conf. Proc. Flow Separation, No. 168, 27-1 to 27-13 (1975).
- [28] O'Donnell, R. M.: Experimental investigation at Mach number of 2.41 of average skin friction coefficients and velocity profiles for laminar and turbulent boundary layers assessment of probe effects. NACA TN 3122 (1954).
- [29] Dorrance, W. H.: Viscous hypersonic flow. Theory of reacting hypersonic boundary layers. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [30] Van Driest, E. R.: Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco-Method. NACA TN 2597 (1952).
- [31] Van Driest, E. R.: The problem of aerodynamic heating. *Aero. Eng. Review* 15, 26-41 (1956).
- [32] Eber, G. R.: Recent investigations of temperature recovery and heat transmission on cones and cylinders in axial flow in the NOL Aeroballistics Wind Tunnel. *JAS* 19, 1-6 (1952).
- [33] Eichelbrenner, E. A.: Méthodes de calcul de la couche limite laminaire bidimensionnelle en régime compressible. Office National d'Etudes et de Recherche Aéronautiques (ONERA), Paris, Publication No. 83 (1956).
- [34] Emmons, H. W., and Brainerd, J. G.: Temperature effects in a laminar compressible fluid boundary layer along a flat plate. *J. Appl. Mech.* 8, A 105 (1941) and *J. Appl. Mech.* 9, 1 (1942).
- [35] Fage, A., and Sargent, R.: Shock wave and boundary layer phenomena near a flat plate surface. *Proc. Roy. Soc. A* 190, 1-20 (1947).
- [36] Flügge-Lotz, I., and Johnson, A. F.: Laminar compressible boundary layer along a curved insulated surface. *JAS* 22, 445-454 (1955).
- [37] Gadd, G. E.: Some aspects of laminar boundary layer separation in compressible flow with no heat transfer to the wall. *Aero. Quart.* 4, 123-150 (1953).
- [38] Gadd, G. E., Holder, D. W., and Regan, J. D.: An experimental investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. *Proc. Roy. Soc. A* 226, 227-253 (1954).
- [39] Gadd, G. E.: An experimental investigation of heat transfer effects on boundary layer separation in supersonic flow. *JFM* 2, 105-122 (1957).
- [40] Gadd, G. E., and Attridge, J. L.: A note on the effects of heat transfer on the separation of laminar boundary layer. *ARC CP* 569 (1961).
- [41] Günzel, I.: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten. *ZAMM* 29, 6-8 (1949); Günzel, I.: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand. *ZAMM* 29, 321-337 (1949).
- [42] Green, J. E.: Interactions between shock waves and turbulent boundary layers. *Progress in Aerospace Sciences* (D. Küchemann, ed.), 17, 235-340 (1970).
- [43] Gruschwitz, E.: Calcul approché de la couche limite laminaire en écoulement compressible sur une paroi non-conductrice de la chaleur. Office National d'Etudes et de Recherche Aéronautiques (ONERA), Paris, Publication No. 47 (1950).
- [44] Hantzsche, W., and Wendt, H.: Zum Kompressibilitäts Einfluss bei der laminaren Grenzschicht der ebenen Platte. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 517-521 (1940).
- [45] Hantzsche, W., and Wendt, H.: Die laminare Grenzschicht an einem mit Überschallgeschwindigkeit angeströmten nicht angestellten Kreiskegel. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 76-77 (1941).
- [46] Hantzsche, W., and Wendt, H.: Die laminare Grenzschicht an der ebenen Platte mit und ohne Wärmeübergang unter Berücksichtigung der Kompressibilität. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 40-50 (1942).
- [47] Honda, M.: A theoretical investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. *JAS* 23, 667-678 (1958).
- [48] Howarth, L.: Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation. *Proc. Roy. Soc. London A* 194, 16-42 (1948).
- [49] Illingworth, C. R.: The laminar boundary layer associated with retarded flow of a compressible fluid. *ARC RM* 2590 (1946).
- [50] Illingworth, C. R.: Steady flow in the laminar boundary layer of a gas. *Proc. Roy. Soc. A* 199, 533-558 (1949).
- [51] Inman, R. M.: A note on the skin-friction coefficient of a compressible Couette flow. *JASS* 26, 182 (1959).

- [52] Johannessen, N.H.: Experiments on two-dimensional supersonic flow in corners and over concave surfaces. *Phil. Mag.* 43, 340, 568--580 (1952).
- [53] Kacprzynski, J.J.: Viscous effects in transonic flow past airfoils. ICAS Paper No. 74-19, Ninth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences Haifa, Israel, August 1974.
- [54] von Kármán, Th., and Tsien, H.S.: Boundary layer in compressible fluids. *JAS* 5, 227-232 (1938); see also: von Kármán, Th.: Report on Volta Congress, Rome 1935; see also *Coll. Works III*, 313-325.
- [56] Kaye, J.: Survey of friction coefficients, recovery factors and heat transfer coefficients for supersonic flow. *JAS* 21, 117-129 (1954).
- [56] Kipke, K., and Hummel, D.: Untersuchungen an längsangeströmten Eckenkonfigurationen im Hyperschallbereich. *ZFW* 23, 417-429 (1975).
- [56a] Klineber, J.M., and Steger, J.L.: Numerical calculation of laminar boundary-layer separation. NASA TN 7722 (1974).
- [67] Klerti, G.: The laminar boundary layer in compressible flow. *Advances in Appl. Mech.* 11, 21-92 (1951).
- [68] Lees, L.: On the boundary layer equations in hypersonic flow and their approximate solution. *JAS* 20, 143-145 (1953).
- [69] Lees, L.: Influence of the leading-edge shock wave on the laminar boundary layer at hypersonic speeds. *JAS* 23, 594-600 and 612 (1956).
- [60] Li, T.Y., and Nagamatsu, H.T.: Similar solutions of compressible boundary layer equations. *JAS* 20, 653-655 (1953).
- [61] Li, T.Y., and Nagamatsu, H.T.: Similar solutions of compressible boundary-layer equations. *JAS* 22, 607-616 (1955).
- [62] Libby, P.A., and Morrifuchow, M.: Method for calculation of compressible boundary layer with axial pressure gradient and heat transfer. NACA TN 3157 (1964).
- [63] Liepmann, H.W.: The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow. *JAS* 13, 623-637 (1946).
- [64] Liepmann, H.W., Roshko, A., and Dhawan, S.: On reflection of shock waves from boundary layers. NACA Rep. 1100 (1952).
- [65] Lilley, G.M.: A simplified theory of skin friction and heat transfer for a compressible laminar boundary layer. *Coll. Aero. Cranfield*, Note No. 93 (1959).
- [66] Loving, G.L.: Wind-tunnel-flight correlation of shock induced separated flow. NASA TND 3580 (1966).
- [67] Lukasiwicz, J., and Royle, J.K.: Boundary layer and wake investigation in supersonic flow. ARC RM 2613 (1952).
- [68] Laxton, R.E., and Young, A.D.: Generalised methods for the calculation of the laminar compressible boundary layer characteristics with heat transfer and non-uniform pressure distribution. ARC RM 3233 (1962).
- [69] Muir, W.A.: Experiments on separation of boundary layers on probes in a supersonic airstream. *Phil. Mag.* 45, 342, 695-716 (1952).
- [70] Mangler, W.: Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *ZAMM* 28, 97-103 (1948).
- [71] Mangler, W.: Ein Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht mit beliebiger Druckverteilung und Wärmeübergang für alle Mach-Zahlen. *ZFW* 4, 63-66 (1956).
- [72] Maydew, R.C., and Pappas, C.C.: Experimental investigation of the local and average skin friction in the laminar boundary layer on a flat plate at a Mach-number of 2.4. NACA TN 2740 (1952).
- [73] Meksyn, D.: Integration of the boundary layer equations for a plane in a compressible fluid. *Proc. Roy. Soc. London A* 195, 180-188 (1948).
- [74] Meksyn, D.: The boundary layer equations of compressible flow separation. *ZAMM* 38, 372-379 (1958).
- [75] Monaghan, R.J.: An approximate solution of the compressible laminar boundary layer on a flat plate. ARC RM 2760 (1949).
- [76] Monaghan, R.J.: Effects of heat transfer on laminar boundary layer development under pressure gradients in compressible flow. ARC RM 3218 (1961).
- [77] Moore, L.L.: A solution of the laminar boundary layer equations for a compressible fluid with variable properties, including dissociation. *JAS* 19, 505-518 (1952).
- [78] Moore, F.K.: Three-dimensional laminar boundary layer flow. *JAS* 20, 525-534 (1953).
- [79] Morduchow, M.: Analysis and calculation by integral methods of laminar compressible boundary layer with heat transfer and with and without pressure gradient. NACA Rep. 1245 (1955).
- [80] Morris, D.N., and Smith, J.W.: The compressible laminar boundary layer with arbitrary pressure and surface temperature gradients. *JAS* 20, 805-818 (1953). See also: Morris, D.N., and Smith, J.W.: Ein Näherungsverfahren für die Integration der laminaren kompressiblen Grenzschichtgleichungen. *ZAMM* 34, 193-194 (1954).

- [81] Müller, E. A.: Theoretische Untersuchungen über die Wechselwirkung zwischen einem einfallenden schwachen Verdichtungsstoß und der laminaren Grenzschicht in einer Überschallströmung. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 343-363.
- [81a] Murphy, J. D.: A critical evaluation of analytical methods for predicting laminar boundary layer, shock-wave interaction. NASA TN D-7044 (1971).
- [81b] Murphy, J. D., Presley, L. L., and Rose, W. C.: On the calculation of supersonic separating and reattaching flows. AGARD Conf. Proc. Flow Separation, No. 168, 22-1 to 22-12 (1975).
- [82] Neumann, R. D.: Special topics in hypersonic flow. AGARD Lecture Series No. 42, 1, 7-1 to 7-64 (1972).
- [83] Pai, S. I., and Shen, S. F.: Hypersonic viscous flow over an inclined wedge with heat transfer. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), Braunschweig, 1955, 112-121.
- [84] Pearcey, H. H., Ollano, J., and James, A. B.: The interaction between local effects at the shock and rear separation - a source of significant scale effects in windtunnel tests on airfoils and wings. AGARD Conf. Proc. No. 35, 11-1 to 11-23 (1968).
- [85] Poots, G.: A solution of the compressible laminar boundary layer equations with heat transfer and adverse pressure gradient. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, 57-84 (1960).
- [86] Fesholko, E., and Beckwith, I. E.: Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number. NACA Rep. 1379, 1-49 (1958).
- [87] Rott, N., and Crabtree, L. F.: Simplified laminar boundary layer calculations for bodies of revolution and for yawed wings. JAS 19, 553-555 (1952).
- [87a] Rotta, J. C.: Wärmeübergangsprobleme bei hypersonischen Grenzschichten. Jb. WGLR 1962, 190-196 (1963).
- [88] Rubesin, M. W., and Johnson, H. A.: A critical review of skin friction and heat transfer solutions of the laminar boundary layer of a flat plate. Trans. ASME 71, 383-388 (1949).
- [88a] Ryzhov, O. S.: Viscous transonic flows. Ann. Rev. Fluid Mech. (M. van Dyke, ed.) 10, 65-92 (1978).
- [89] Scherrer, R.: Comparison of theoretical and experimental heat transfer characteristics of bodies of revolution of supersonic speeds. NACA Rep. 1055 (1951).
- [90] Schlichting, H.: Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht bei Überschallgeschwindigkeit. Abh. der Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft 3, 239-264 (1961).
- [91] Stanewsky, E., and Little, B. H.: Separation and reattachment in transonic airfoil flow. J. Aircraft 8, 952-958 (1971).
- [92] Stainback, P. C.: An experimental investigation at a Mach number 4.95 of flow in the vicinity of a 90° interior corner aligned with the free stream velocity. NASA TN 184 (1960).
- [93] Sedney, R.: Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow. JAS 24, 430-436, 455 (1957).
- [93a] Settles, G. S., Bogdonoff, S. M., and Vas, I. E.: Incipient separation of a supersonic boundary layer at high Reynolds numbers. AIAA J. 14, 50-56 (1976).
- [94] Stewartson, K.: Correlated compressible and incompressible boundary layers. Proc. Roy. Soc. A 200, 84-100 (1949).
- [95] Stewartson, K.: On the interaction between shock waves and boundary layers. Proc. Cambr. Phil. Soc. 47, 545-553 (1951).
- [96] Stewartson, K.: The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford, 1964.
- [97] Tani, I.: On the approximate solution of the laminar boundary layer equations. JAS 21, 487-493 (1954).
- [98] Tifford, A. N.: Simplified compressible laminar boundary layer theory. JAS 18, 358-359 (1951).
- [99] Toll, T. A., and Fischel, G.: The X-15 project-results and new research. Astronautics and Aeronautics, 2, 25-32 (1964).
- [100] Watson, R. D., and Weinstein, L. M.: A study of hypersonic corner flow interactions. AIAA J. 9, 1280-1286 (1971).
- [101] Werle, M. J., Polak, A., Vatsa, V. N., and Bortke, S. D.: Finite difference solutions for supersonic separated flows. AGARD Conf. Proc. Flow Separation, No. 168, 3-1 to 3-12 (1975).
- [102] West, J. E., and Korgegl, R. H.: Supersonic interaction in the corner of intersecting wedges at high Reynolds numbers. AIAA J. 10, 651-656 (1972).
- [103] Yamaga, J.: An approximate solution of the laminar boundary layer on a rotating body of revolution in uniform compressible flow. Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. Univ. Kyoto, Japan, 295-298 (1956).

- [104] Yang, K.T.: An improved integral procedure for compressible laminar boundary layer analysis. *J. Appl. Mech.* 28, 9-20 (1961).
- [105] Young, A.D.: Section on "Boundary Layers" in: *Modern developments in fluid mechanics. High speed flow* (L. Howarth, ed.), I, 375-476, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [106] Young, A.D.: Skin friction in the laminar boundary layer of a compressible flow. *Aero. Quart.* I, 137-164 (1949).
- [107] Young, A.D.: Boundary layers and skin friction in high speed flow. *J. Roy. Aero. Soc.* 55, 285-302 (1951).
- [108] Young, G.B.W., and Janssen, E.: The compressible boundary layer. *JAS* 19, 229-236, 288 (1952).
- [109] Young, A.D., and Harris, H.D.: A set of similar solutions of the compressible laminar boundary layer equations for the flow over a flat plate with unsteady wall temperature. *ZFW* 15, 295-301 (1967).
- [110] Zaat, J.A.: A one-parameter method for the calculation of laminar compressible boundary layer flow with a pressure gradient. *Nat. Luchtvr. Lab. Amsterdam, Rep. F 141* (1959).

第十四章

- [1] Ackeret, J.: *Das Rotorschiff und seine physikalischen Grundlagen*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1925.
- [2] Ackeret, J.: Grenzschichtabsaugung. *Z. VDI* 70, 1153-1158 (1926).
- [3] Ackeret, J., Ras, M., and Pfenninger, W.: Verhinderung des Turbulentwerdens einer Reibungsschicht durch Absaugung. *Naturwissenschaften*, 622 (1941); see also *Helv. phys. Acta* 24, 323 (1941).
- [4] MacAdams, C.: Recent advances in ablation. *ARS J.* 29, 625-632 (1959).
- [5] Attinello, S.: Auftriebserhöhung durch Grenzschichtsteuerung. *Intervista* 10, 925-927 (1955).
- [6] Bard, J.R., and Scott, P.E.: Some mass transfer results with external flow pressure gradients. *JASS* 27, 625-628 (1960).
- [7] Betz, A.: Die Wirkungsweise von unterteilten Flügelprofilen. *Berichte und Abh. Wiss. Gesellschaft f. Luftfahrt*, No. 6 (1922); *NACA TM* 100 (1922).
- [8] Betz, A.: Beeinflussung der Reibungsschicht und ihre praktische Verwertung. *Schriften dt. Akad. f. Luftfahrtforschung* No. 49 (1939).
- [9] Betz, A.: History of boundary layer control research in Germany. In: *Boundary layer and flow control* (G.V. Lachmann, ed.), I, 1-20, London 1961.
- [10] Braslow, A.L., Burrows, D.L., Tetervin, N., and Visconti, F.: Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer. *NACA Rep.* 1025 (1951).
- [11] Brown, E.: Exact solutions of the laminar boundary layer equations for a porous plate with variable fluid properties and a pressure gradient in the main stream. *Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech.*, 843-852 (1951).
- [12] Brown, W.B., and Donoughe, P.L.: Table of exact laminar boundary layer solutions when the wall is porous and fluid properties are variable. *NACA TN* 2479 (1951).
- [12a] Chang, P.K.: *Control of flow separation*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC (1976).
- [13] Carrière, P., and Eichelbrenner, E.A.: Theory of flow reattachment by a tangential jet discharging against a strong adverse pressure gradient. In: *Boundary layer and flow control* (G.V. Lachmann, ed.), I, 209-231, London, 1961.
- [14] Clarke, J.H., Monke, H.R., and Libby, P.A.: A provisional analysis of turbulent boundary layers with injection. *JAS* 22, 255-260 (1955).
- [15] Carle, N.: The estimation of laminar skin friction including effects of distributed suction. *Aero. Quart.* II, 1-21 (1960).
- [16] Culick, F.E.C.: Integral method for calculating heat and mass transfer in laminar boundary layers. *AIAA J.* 1, 783-793 (1963).
- [17] Dannenberg, R.E., and Weisberg, J.A.: Effect of type of porous surface and suction velocity distribution on the characteristics of a 10.5 per cent thick airfoil with area suction. *NACA TN* 3093 (1953).
- [18] von Doenhoff, A.E., and Loftin, L.K.: Present status of research on boundary layer control. *JAS* 16, 729-740 (1949).
- [19] Donoughe, P.L., and Livingood, J.N.B.: Exact solutions of laminar boundary layer equations with constant property values for porous wall with variable temperature. *NACA Rep.* 1229 (1955).
- [20] Dorrance, W.H., and Dore, F.J.: The effect of mass transfer on the compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer. *JAS* 21, 404-410 (1954).
- [20a] Eckert, E.R.G.: Thermodynamische Kopplung von Stoff und Wärmeübergang. *Forsch. Ing.-Wes.* 29, 147-151 (1963).
- [21] Eisfeld, F.: Die Berechnung der Grenzschichten für gekoppelten Wärmeübergang und Stoffaustausch bei Verdunstung eines Flüssigkeitsfilms über einer parallel angeströmten Platte unter Berücksichtigung veränderlicher Stoffbeiwerte. *Int. J. Heat Mass Transfer* 14, 1537-1550 (1971).

- [22] Emmons, H.W., and Leigh, D.G.: Tabulation of Blasius function with blowing and suction. ARC CP 157 (1954).
- [23] Eppler, R.: Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absaug-Grenzschichten. Ing.-Arch. 32, 221-246 (1963).
- [24] Eppler, R.: Gemeinsame Grenzschichtabsaugung für Hochauftrieb und Schnellflug. Jb. WGL 140-149 (1962).
- [25] Faulders, O.R.: A note on laminar layer skin friction under the influence of foreign gas injection. JASS 28, 166-167 (1961).
- [26] Favre, A.: Contribution à l'étude expérimentale des mouvements hydrodynamiques à deux dimensions. Thesis University of Paris 1938, 1-192.
- [27] Flatt, J.: The history of boundary layer control research in the United States of America. In: Boundary layer and flow control (G.V. Lachmann, ed.), I, 122-143, London, 1961.
- [28] Flügel, G.: Ergebnisse aus dem Strömungsinstitut der Technischen Hochschule Danzig. Jb. Schiffbautechn. Gesellschaft 37, 87-113 (1930).
- [29] Fox, H., and Libby, P.A.: Helium injection into the boundary layer at an axisymmetric stagnation point. JASS 29, 921 (1962).
- [29a] Gersten, K., and Gross, J.F.: Flow and heat transfer along a plane wall with periodic suction. ZAMP 25, 399-408 (1974).
- [30] Gerber, A.: Untersuchungen über Grenzschichtabsaugung. Rep. Inst. of Aerodynamics,
- [31] Goldstein, S.: Low-drag and suction airfoils. JAS 15, 189-220 (1948).
- [32] Gregory, N., and Walker, W.S.: Wind-tunnel tests on the NACA 63 A 009 airfoil with distributed suction over the nose. ARC RM 2900 (1955).
- [33] Gregory, N.: Research on suction surface for laminar flow. In: Boundary layer and flow control (G.V. Lachmann, ed.), II, 924-960, London, 1961.
- [34] Gross, J.F., Hartnett, J.P., Masson, D.J., and Gasley, C., Jr.: A review of binary boundary layer characteristics. J. Heat Mass Transfer 3, 198-221 (1961).
- [35] Head, M.R.: The boundary layer with distributed suction. ARC RM 2783 (1955).
- [36] Head, M.R.: History of research on boundary layer control for low drag in the U. K. In: Boundary layer and flow control (G.V. Lachmann, ed.), I, 104-121, 1961.
- [37] Holstein, H.: Messungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht an einem Flügel. Lilienthal-Bericht S 10, 17-27 (1940).
- [38] Holzhauser, C.A., and Bray, R.S.: Wind-tunnel and flight investigations of the use of leading edge area suction for the purpose of increasing the maximum lift coefficient of a 35° swept-wing airplane. NACA Rep. 1276 (1956).
- [39] Hurley, D.G., and Thwaites, B.: An experimental investigation of the boundary layer on a porous circular cylinder. ARC RM 2829 (1955).
- [40] Iglisch, R.: Exakte Berechnung der laminaren Reibungsschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung. Schriften dt. Akad. d. Luftfahrtforschung, 8 B, No. 1 (1944); NACA RM 1205 (1949).
- [41] Jones, M., and Head, M.R.: The reduction of drag by distributed suction. Proc. Third Anglo-American Aeronautical Conference, Brighton, 199-230 (1951).
- [41a] Kay, J.M.: Boundary layer along a flat plate with uniform suction. ARC RM 2628 (1948).
- [42] Kordulla, W., and Will, B.: Tangentiales Ausblasen von Helium in laminaren Hyperschallgrenzschichten. ZFW 22, 295-307 (1974).
- [43] Lachmann, G.V.: Boundary layer control. J. Roy. Aero. Soc. 59, 163-198 (1955); see also Aero. Eng. Rev. 13, 37-51 (1954) and Jb. WGL 132-144 (1954).
- [44] Lachmann, G.V. (ed.): Boundary layer and flow control, I and II. Pergamon Press, London, 1961.
- [45] Lew, H.G.: On the compressible boundary layer over a flat plate with uniform suction. Reissner Annivers. Vol. Contr. Appl. Mech. Ann Arbor/Mich. 43-60 (1949).
- [46] Lew, H.G., and Mathieu, R.D.: Boundary layer control by porous suction. Dep. Aero. Eng. Pennsylvania State Univ. Rep. No. 2 (1954).
- [47] Lew, H.G., and Vanucci, J.B.: On the laminar compressible boundary layer over a flat plate with suction or injection. JAS 22, 589-597 (1955).
- [48] Libby, P.A., Kaufmann, L., and Harrington, R.P.: An experimental investigation of the isothermal laminar boundary layer on a porous flat plate. JAS 19, 127 (1952).
- [49] Libby, P.A., and Pallone, A.: A method for analyzing the heat insulating properties of the laminar compressible boundary layer. JAS 21, 825-834 (1954).
- [50] Libby, P.A., and Cresci, R.J.: Experimental investigation of the down-stream influence of stagnation point mass transfer. JASS 28, 51 (1961).
- [50a] Libby, P.A.: Heat and mass transfer at a general three-dimensional stagnation point. AIAA J. 5, 507-517 (1967).
- [50b] Libby, P.A.: Laminar flow at a three-dimensional stagnation point with large rates of injection. AIAA J. 11, 1273-1279 (1973).
- [51] Low, G.M.: The compressible laminar boundary layer with fluid injection. NACA TN 3404 (1955).

- [52] Meredith, F. W., and Griffith, A. A.: in: *Modern developments in fluid dynamics*. Oxford University Press, 2, 534, Oxford, 1938.
- [53] Mickley, H. S., Rose, R. C., Squires, A. L., and Stewart, W. E.: Heat mass, and momentum transfer for flow over a flat plate with blowing or suction. NACA TN 3208 (1954).
- [54] Miles, E. G.: Sucking away boundary layers. *Flight* 35, 180 (1939).
- [55] Morduchow, M.: On heat transfer over a sweat-cooled surface in laminar compressible flow with pressure gradient. *JAS* 19, 705-712 (1952).
- [56] Ness, N.: Foreign gas injection into a compressible turbulent boundary layer on a flat plate. *JASS* 28, 645-654 (1961).
- [57] Nickel, K.: Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten. *Ing.-Arch.* 31, 85-100 (1962).
- [58] Parkhurst, R. C., Kaymer, W. G., and Devereux, A. N.: Wind-tunnel tests of the stalling properties of an 8 per cent thick symmetrical section with nose suction through a porous surface. *ARC RM 2868* (1953).
- [59] Parkhurst, R. C.: Recent British work on methods of boundary layer control. *Proc. Symp. at Nat. Phys. Lab.* (1955).
- [60] Pappas, C. C.: Effect of injection of foreign gases in the skin friction and heat transfer on the turbulent boundary layer. *JAS Paper*, 59-78 (Jan. 1959).
- [60a] Pechau, W.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der kompressiblen laminaren Grenzschicht mit kontinuierlich verteilter Absaugung. *Ing.-Arch.* 32, 167-186 (1963).
- [61] Pfenninger, W.: Untersuchung über Reibungsverminderung an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung. *Rep. Inst. Aerodynamics, ETH Zürich, No. 18* (1946); see also *JAS* 16, 227-236 (1949); *NACA TM 1181* (1947).
- [62] Pfenninger, W., and Becon, J. W.: About the development of swept laminar suction. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.) II, 1007-1032, London, 1961.
- [63] Pfenninger, W., and Groth, E.: Low drag boundary layer suction experiments in flight on a wing glove of an F-94 A airplane with suction through a large number of fine slots. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.) II, 987-999, London, 1961.
- [63a] Pientka, K.: Theoretische Untersuchung der laminaren Zweistoffgrenzschichtströmung langs einer benetzten Platte bei nicht-adiabater Verdunstung. *Diss. Braunschweig* 1977.
- [64] Poisson-Quinton, Ph.: Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avions. *ONERA Publication, Note Technique No. 37* (1956); see also *Jb. WGL* 1956, 29-51 (1957).
- [65] Poisson-Quinton, Ph., and Lepage, L.: Survey of French research on the control of boundary layer and circulation. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.) I, 21-73, London, 1961.
- [66] Poppleton, E. D.: Boundary layer control for high lift by suction of the leading-edge of a 40 degree swept-back wing. *ARC RM 2897* (1965).
- [67] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In: *Aerodynamic theory* (W. F. Durand, ed.) III, 34-208 (1935).
- [68] Preston, J. H.: The boundary layer flow over a permeable surface through which suction is applied. *ARC RM 2244* (1946).
- [69] Pretsch, J.: Grenzen der Grenzschichtbeeinflussung. *ZAMM* 24, 264-287 (1944).
- [70] Raspel, A.: Boundary layer studies on a sailplane. *Aero. Eng. Rev.* 11, 6, 52 (1952).
- [71] Regenscheit, B.: Eine neue Anwendung der Absaugung zur Steigerung des Auftriebes eines Tragflügels. *F. B.* 1474 (1941).
- [72] Regenscheit, B.: Absaugung in der Flugtechnik. *Jb. WGL* 1952, 55-63 (1953).
- [73] Richards, E. J., Walker, W., and Greening, J.: Tests of a Griffith aerofoil in the 13.9 ft tunnel. *ARC RM 2148* (1954).
- [74] Ringleb, F.: Computation of the laminar boundary layer with suction. *JAS* 19, 48-54 (1952).
- [75] Rheinboldt, W.: Zur Berechnung stationärer Grenzschichten bei kontinuierlicher Absaugung mit un stetig veränderlicher Absaugengeschwindigkeit. *J. Rat. Mech. Analysis* 5, 539-596 (1956).
- [76] Rabasin, M. W.: An analytical estimation of the effect of transpiration cooling on the heat-transfer and skin-friction characteristics of a compressible, turbulent boundary layer. *NACA TN 3341* (1954).
- [77] Schlichting, H.: Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung* 19, 293-301 (1943).
- [78] Schlichting, H.: Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung* 19, 179-181 (1942).
- [79] Schlichting, H., and Bussmann, K.: Exakte Lösungen für die laminare Reibungsschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Schriften dt. Akad. d. Luftfahrtforschung* 7 B, No. 2 (1943).
- [80] Schlichting, H.: Die Beeinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Ausblasen. *Jb. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung* 90, 108 (1943/44).
- [81] Schlichting, H.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. *Ing.-Arch.* 16, 201-220 (1948); *NACA TM 1216* (1949).

- [82] Schlichting, H.: Absaugung in der Aerodynamik. *Jb. WGL* 1056, 19—29 (1957); see also: *L'aspiration de la couche limite en technique aéronautique. Technique et Science Aéronautique Part 4*, 149—161 (1956).
- [83] Schlichting, H.: Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. *Advances in Aeronautical Sciences. II, Proc. First Internat. Congr. in the Aeronautical Sciences in Madrid 1958, London*, 563—586 (1959).
- [84] Schrenk, O.: Versuche mit Absaugflügeln. *Luftfahrtforschung* 12, 10—27 (1935).
- [85] Schrenk, O.: Tragflügel mit Grenzschichtabsaugung. *Luftfahrtforschung* 2, 49 (1928); see also *ZFM* 22, 259 (1931); *Luftfahrtforschung* 12, 10 (1935); *Luftwissen* 7, 400 (1940); also *NACA TM* 974 (1941).
- [86] Sinhar, K. D. P.: The laminar boundary layer with distributed suction on an infinite yawed cylinder. *ARC CP* 214 (1956).
- [87] Smith, A. M., and Roberts, H. E.: The jet airplane utilizing boundary layer air for propulsion. *JAS* 14, 97—109 (1947).
- [88] Smith, M. H.: Bibliography on boundary layer control. *Literature Search No. 3, Library Bulletin. The James Forrestal Research Center, Princeton Univ.* (1955).
- [88a] Stuart, J. T.: On the effect of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 7, 446—457 (1954).
- [89] Smith, A. M. O., and Jaffe, N. A.: General method for solving the laminar nonequilibrium boundary layer equations of a dissociating gas. *AIAA J.* 4, 611—620 (1966).
- [90] Spletstösser, W.: Untersuchung der laminaren Zweistoffgrenzschichtströmung längs eines verdunstenden Flüssigkeitsfilms. *Diss. Braunschweig 1974. Wärme- und Stoffübertragung* 8, 71—86 (1975).
- [91] Steinheuer, J.: Berechnung der laminaren Zweistoff-Grenzschicht in der hypersonischen Staupunktströmung mit temperaturabhängigen Stoffbeiwerten. *Diss. Braunschweig 1970; ZAMM* 51, 209—223 (1971).
- [92] Stuart, J. T.: On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 7, 446—457 (1954).
- [93] Stüper, J.: Flight experiments and tests on two airplanes with suction slots. *NACA TM* 1232 (1950). *Engl. transl. of ZWB Forschungsbericht No. 1821* (1943).
- [94] Thwaites, B.: The production of lift independently of incidence. *J. Roy. Aero. Soc.* 52, 117—124 (1948).
- [95] Thwaites, B.: Investigations into the effects of continuous suction on laminar boundary layer flow under adverse pressure gradients. *ARC RM* 2514 (1952).
- [96] Thwaites, B.: On the momentum equation in laminar boundary layer flow. A new method of uniparametric calculation. *ARC RM* 2587 (1952).
- [97] Taitel, Y., and Tamir, A.: Multicomponent boundary layer characteristics. *Use of the reference state. Int. J. Heat Mass Transfer* 18, 123—129 (1975).
- [98] Torda, T. P.: Boundary layer control by distributed surface suction or injection. *Biparametric general solution. J. Math. Phys.* 32, 312—314 (1954).
- [99] Trilling, L.: The incompressible boundary layer with pressure gradient and suction. *JAS* 17, 335—341 (1950).
- [100] Truckenbrodt, E.: Die laminare Reibungsschicht an einer teilweise mitbewegten längsangeströmten ebenen Platte. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 4, 181—195 (1952).
- [101] Truckenbrodt, E.: Ein einfaches Näherungsverfahren zum Berechnen der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. *Forsch. Ing.-Wes.* 22, 147—157 (1956).
- [102] Watson, E. J.: The asymptotic theory of boundary layer flow with suction. *ARC RM* 2619 (1952).
- [103] Wieghardt, K.: Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung. *Ing.-Arch.* 22, 368—377 (1954).
- [104] Williams, J.: A brief review of British research on boundary layer control for high lift. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.), I, 74—103, London, 1961.
- [105] Wortmann, F. X.: Progress in the design of low drag aerofoils. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.), II, 748—770, London, 1961.
- [106] Wuest, W.: Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle. *Ing.-Arch.* 17, 199—206 (1949).
- [107] Wuest, W.: Asymptotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern. *Ing.-Arch.* 23, 198—208 (1955).
- [108] Wuest, W.: Survey of calculation methods of laminar boundary layers with suction in incompressible flow. In: *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.), II, 771—800, London, Pergamon Press, 1961.
- [109] Wuest, W.: Laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums (Zweistoffgrenzschichten). *Ing.-Arch.* 31, 125—143 (1962).
- [110] Wuest, W.: Kompressible laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums. *ZFW* 11, 398—409 (1963).

- [111] Yuan, S. W.: Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection. *JAS* 16, 741-743 (1949).
- [112] Young, A. D.: Note on the velocity and temperature distributions attained with suction on a flat plate of infinite extent in compressible flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1, 70-75 (1948).
- [113] Young, A. D., and Zamir, M.: Similar and asymptotic solutions of the incompressible boundary layer equations with suction. *Aero. Quart.* 18, 103-120 (1967).

第十五章

- [1] Andrade, E. N.: On the circulation caused by the vibration of air in a tube. *Proc. Roy. Soc. A* 134, 447-470 (1931).
- [2] Arduini, C.: Strato limite incompressibile laminare nell'intorno del punto di ristagno di un cilindro indefinito oscillante. *L'Aerotecnica* 41, 341-346 (1961).
- [3] Becker, E.: Das Anwachsen der Grenzschicht in und hinter einer Expansionswelle. *Ing.-Arch.* 25, 155-163 (1957).
- [4] Becker, E.: Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungstößen und Expansionswellen. *ZFW* 7, 61-73 (1959).
- [5] Becker, E.: Die laminare inkompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand. *ZFW* 8, 308-316 (1960).
- [6] Becker, E.: Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungstößen und Expansionswellen. *Progress in Aero. Sci.* 7 (A. Ferry, D. Küchemann, and L. H. Sterne, ed.), 104-173, London, 1961.
- [7] Becker, E.: Anwendung des numerischen Fortsetzungsverfahrens auf die pseudostationäre, kompressible laminare Grenzschicht in einem Stosswellenrohr. *ZFW* 10, 138-147 (1962).
- [7a] Berger, E., and Wills, R.: Periodic flow phenomena. *Annual Review of Fluid Mech.* 4, 313-340 (1972).
- [8] Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.* 59, 1-37 (1908).
- [9] Böttze, E.: Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Diss. Göttingen* 1908.
- [9a] Dumitrescu, D., and Cazacu, M. D.: Theoretische und experimentelle Betrachtungen über die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen. *ZAMM* 50, 257-280 (1970).
- [9b] Coutanceau, M., and Bouard, R.: Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1: Steady flow. *JFM* 79, 231-256 (1977).
- [9c] Coutanceau, M., and Bouard, R.: Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 2: Unsteady flow. *JFM* 79, 257-272 (1977).
- [10] Geis, Th.: Bemerkung zu den "ähnlichen" instationären laminaren Grenzschichtströmungen. *ZAMM* 36, 396-398 (1956).
- [11] Gibellato, S.: Strato limite attorno ad una lastra piana investita da un fluido incompressibile dotato di una velocità che è somma di una parte costante e di una parte alternata. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino* 82, 180-192 (1954-1955) and 90, 13-24 (1955-1956).
- [12] Gibellato, S.: Strato limite termico attorno a una lastra piana investita da una corrente lievemente pulsante di fluido incompressibile. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino* 91, 152-170 (1956-1957).
- [13] Glauert, M. B.: The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. *JFM* 1, 97-110 (1956).
- [14] Goldstein, S., and Rosenhead, L.: Boundary layer growth. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 32, 392-401 (1936).
- [15] Görtler, H.: Verdrängungswirkung der laminaren Grenzschicht und Druckwiderstand. *Ing.-Arch.* 14, 286-305 (1944).
- [16] Görtler, H.: Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. *Arch. d. Math.* 1, 138-147 (1948).
- [17] Gosh, A.: Contribution à l'étude de la couche limite laminaire instationnaire. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* No. 381 (1961).
- [18] Gribben, R. J.: The laminar boundary layer on a hot cylinder fixed in a fluctuating stream. *J. Appl. Mech.* 28, 339-346 (1961).
- [19] Hassan, H. A.: On unsteady laminar boundary layers. *JFM* 9, 300-304 (1960); see also *JASS* 27, 474-476 (1960).
- [20] Hayasi, N.: On similar solutions of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. *J. Phys. Soc. Japan* 16, 2316-2329 (1961).
- [21] Hayasi, N.: On semi-similar solutions of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. *J. Phys. Soc. Japan* 17, 194-203 (1962).

- [22] Hayasi, N.: On the approximate solution of the unsteady quasi-two-dimensional incompressible laminar boundary-layer equations. *J. Phys. Soc. Japan* **17**, 203-212 (1962).
- [23] Hill, P. G., and Stening, A. H.: Laminar boundary layers in oscillatory flow. *J. Basic Engg.* **52**, 593-608 (1960).
- [24] Hori, E.: Unsteady boundary layers (4 reports). *Bulletin of JSME* **4**, 664-671 (1961); **5**, 57-64 (1962); **5**, 64-72 (1962); **5**, 461-470 (1962).
- [25] Illingworth, C. R.: Boundary layer growth on a spinning body. *Phil. Mag.* **45** (7), 1-8 (1954).
- [25a] Katagiri, M.: Unsteady boundary-layer flows past an impulsively started circular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan* **40**, 1171-1177 (1976).
- [26] Kestin, J., Maeder, P. F., and Wang, W. E.: On boundary layers associated with oscillating streams. *Appl. Sci. Res. A* **10**, 1-22 (1961).
- [26a] Kinney, R. B., and Cielak, Z. M.: Analysis of unsteady viscous flow past an airfoil. Part I: Theoretical developments. *AIAA J.* **15**, 1712-1717 (1977); Part II: Numerical formulation and results. *AIAA J.* **16**, 105-110 (1978); see also: AGARD C. P. 227, 26/1 to 26/14 (1978).
- [27] Lighthill, M. J.: The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Roy. Soc. A* **224**, 1-23 (1954).
- [28] Lin, C. C.: Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow. *Proc. 9th Intern. Congress Appl. Mech. Brussels 1957*, **4**, 155-167.
- [28a] Lugt, H. J., and Haussling, H. J.: Laminar flow past an abruptly accelerated cylinder at 45° incidence. *JFM* **65**, 711-734 (1974).
- [28b] Mehta, V. E., and Lavan, Z.: Starting vortex, separation bubbles and stall: A numerical study of laminar unsteady flow around an airfoil. *JFM* **67**, 227-256 (1975).
- [29] Mirels, H.: Boundary layer behind shock or thin expansion wave moving into stationary fluid. *NACA TN 3712* (1956).
- [30] Mirels, H., and Hamman, J.: Laminar boundary layer behind strong shock moving with non-uniform velocity. *Physics of Fluids* **5**, 91-95 (1962).
- [31] Moore, F. K.: Unsteady, laminar boundary layer flow. *NACA TN 2471* (1951).
- [32] Moore, F. K., and Ostrach, S.: Average properties of compressible laminar boundary layer on a flat plate with unsteady flight velocity. *NACA TN 3886* (1956).
- [33] Moore, F. K.: On the separation of the unsteady laminar boundary layer. *IUTAM-Symposium, Boundary layers, Freiburg 1957* (H. Görtler, ed.), 296-311, Berlin, 1958.
- [34] Nigam, S. D.: Zeitliches Anwachsen der Grenzschicht an einer rotierenden Scheibe bei plötzlichem Beginn der Rotation. *Quart. Amer. Math.* **9**, 89-91 (1951).
- [35] Ostrach, S.: Compressible laminar boundary layer and heat transfer for unsteady motions of a flat plate. *NACA TN 3509* (1955).
- [35a] Proudman, I., and Johnson, K.: Boundary layer growth near a rear stagnation point. *JFM* **12**, 161-168 (1962).
- [36] Lord Rayleigh: On the circulation of air observed in Kundt's tubes and on some allied acoustical problems. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **175**, 1-21 (1884).
- [37] Richardson, E. G., and Tyler, E.: The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established. *Proc. Phys. Soc. London* **42**, 1-16 (1929).
- [37a] Riley, N.: Unsteady laminar boundary layers. *SIAM Review* **17**, 274-297 (1975).
- [38] Rott, N.: Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. *Quart. Appl. Math.* **13**, 444-451 (1956).
- [39] Rott, N., and Roscnzweig, M. L.: On the response of the laminar boundary layer to small fluctuations of the free-stream velocity. *JASS* **27**, 741-747, 787 (1960).
- [39a] Rott, N.: Theory of time-dependent laminar flows. Princeton University Series, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. Princeton University Press, Vol. IV, 395-438 (1964).
- [40] Roy, D.: Non-steady periodic boundary layer. *J. Appl. Math. Phys.* **12**, 363-366 (1961).
- [41] Roy, D.: On the non-steady boundary layer. *ZAMM* **42**, 252-256 (1962).
- [42] Rozin, L. A.: An approximation method for the integration of the equations of a non-stationary laminar boundary layer in an incompressible fluid. *NASA Techn. Transl.* **22** (1960).
- [43] Rubach, H.: Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares bei zylindrischen Körpern. *Diss. Göttingen 1914*; *VDI-Forschungsheft* **185** (1916).
- [44] Schlichting, H.: Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Z.* **33**, 327-335 (1932).
- [44a] Schmall, R. A., and Kinney, R. B.: Numerical study of unsteady viscous flow past a lifting plate. *AIAA J.* **12**, 1566-1573 (1974).
- [45] Schuh, H.: Calculation of unsteady boundary layers in two-dimensional laminar flow. *ZFW* **1**, 122-131 (1953).
- [46] Schuh, H.: Über die "ähnlichen" Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichungen in inkompressibler Strömung. Fifty years of boundary-layer research (H. Görtler and W. Tollmien, ed.), Braunschweig, 147-182.

- [47] Schwabe, M.: Über Druckermittlung in der nichtstationären ebenen Strömung. Diss. Göttingen, 1935; Ing.-Arch. 6, 34-50 (1935); NACA TM 1039 (1943).
- [47a] Sears, W.R., and Telioris, D.P.: Boundary layer separation in unsteady flow. SIAM J. Appl. Math. 28, 215-235 (1975).
- [47b] Telioris, D.P., and Tshahis, D.Th.: Unsteady turbulent boundary layers and separation. AIAA J. 14, 468-474 (1976).
- [47c] Tshahis, D.Th.: Laminar boundary-layer separation from an upstream moving wall. AIAA J. 15, 561-566 (1975).
- [48] SEXT, Th.: Über den von E.G. Richardson entdeckten "Annulareffekt". Z. Phys. 67, 349 (1930); see also: Tollmien, W.: Handbuch der Exper. Physik IV, Part I, 281-282 (1931).
- [49] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Nonsteady surface temperature effects on forced convection heat transfer. JAS 24, 776-777 (1957).
- [50] Sparrow, E.M.: Combined effects of unsteady flight velocity and surface temperature on heat transfer. Jet Propulsion 28, 403-405 (1958).
- [51] Sparrow, E.M., and Gregg, J.L.: Flow about an unsteady rotating disc. JASS 27, 252-257 (1960).
- [52] Squire, L.C.: Boundary layer growth in three dimensions. Phil. Mag. 15 (7), 1272-1283 (1954).
- [53] Squire, L.C.: The three-dimensional boundary layer equations and some power series solutions. ARC RM 3006 (1955).
- [54] Stewartson, K.: The theory of unsteady laminar boundary layers. Adv. Appl. Mech. 6, 1-37 (1960).
- [55] Stuart, J.T.: A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. A 231, 116-136 (1955).
- [55a] Stuart, J.T.: Unsteady boundary layers. J. Rosenhead (ed.): Laminar boundary layers. Clarendon Press, Oxford 1963, pp. 349-408.
- [56] Tani, I.: An example of unsteady laminar boundary layer flow. Inst. Univ. of Tokyo, Rep. No. 331 (1958); see also: IUTAM-Symposium, Boundary-layer research, Freiburg 1957 (H. Görtler, ed.), 347, Berlin, 1958.
- [56a] Taneda, S.: Visual study of unsteady separated flows around bodies. Progress in Aerospace Sciences (D. Küchemann, ed.), Pergamon Press, London, Vol. XVII, 287-348 (1977).
- [57] Thiriot, K.H.: Untersuchungen über die Grenzschicht einer Flüssigkeit über einer rotierenden Scheibe bei kleiner Winkelgeschwindigkeitsänderung. ZAMM 22, 23-28 (1942).
- [58] Thiriot, K.H.: Grenzschichtströmung kurz nach dem plötzlichen Anlauf bzw. Abstoppen eines rotierenden Bodens. ZAMM 30, 390-393 (1950); see also Diss. Göttingen, 1940; ZAMM 20, 1-13 (1940).
- [59] Tollmien, W.: Grenzschichten. Handbuch der Exper. Physik IV, Part I, 274 (1931).
- [60] Tollmien, W.: Die zeitliche Entwicklung der laminaren Grenzschicht am rotierenden Zylinder. Diss. Göttingen 1924; see also: Handbuch der Exper. Physik IV, Part I, 277 (1931).
- [61] Trimpf, R.L., and Cohen, N.B.: An integral solution to the flat plate laminar boundary layer flow existing inside and after expansion waves moving into quiescent fluid with particular application to the complete shock tube flow. NACA TN 3944 (1957).
- [62] Tsuji, H.: Note on the solution of the unsteady laminar boundary layer equations. JAS 20, 295-296 (1953).
- [63] Uchida, S.: The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. ZAMP 7, 403-422 (1950).
- [64] Wadhwa, Y.D.: Boundary layer growth on a spinning body; accelerated motion. Phil. Mag. 3 (8), 152-158 (1958).
- [65] Watson, E.J.: Boundary layer growth. Proc. Roy. Soc. A 231, 104-116 (1955).
- [66] Watson, J.: A solution of the Navier-Stokes equations, illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity. Quart. J. Mech. Appl. Math. 11, 302-325 (1958).
- [67] Watson, J.: The two-dimensional laminar flow near the stagnation point of a cylinder which has an arbitrary transverse motion. Quart. J. Mech. Appl. Math. 12, 175-190 (1959).
- [68] Westervelt, P.J.: The theory of steady rotational flow generated by a sound field. J. Acoust. Soc. Amer. 25, 60-67 (1953).
- [69] Wuest, W.: Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationärer Querbewegung. ZAMM 32, 172-178 (1952).
- [70] Wundt, H.: Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Ing.-Arch. 23, 212-230 (1955).
- [71] Yang, K.T.: Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow. J. Appl. Mech. 25, 421-427 (1958).
- [72] Yang, K.T.: Unsteady laminar boundary layers over an arbitrary cylinder with heat transfer in an incompressible flow. J. Appl. Mech. 26, 171-178 (1959).

- [73] Young, A. D., and Harris, H. D.: A set of similar solutions of the compressible laminar boundary layer equations for the flow over flat plate with unsteady wall temperature. *ZFW* 15, 295-301 (1967).
- [74] Fichelbrenner, E. A. (ed.): Recent research on unsteady boundary layers. IUTAM Symposium 1971, I and II, Presse de l'Université Laval, Quebec, 1972.
- [75] Kinney, R. B. (ed.): Unsteady aerodynamics. Proc. Symp. Univ. of Arizona, March 18-20, 1975, I and II (1975).
- [76] AGARD-CP-227: Unsteady Aerodynamics. Papers presented at the Fluid Dynamics Panel Symposium, at Ottawa, Canada, September 1977 (1978).



第三部分 转 换

第十六章 湍流的起源 I

有关的实验结果。稳定性理论基础及对平板边界层的实验验证

引言。 本章及下一章专门论述有关从层流向湍流转换的各种问题。O. Reynolds 在上一世纪 80 年代所进行的染色液实验是转换现象的第一个**实验**结果，在第二章 c 中已经提到过并且画在图 2.22 中，O. Reynolds 和 Lord Rayleigh 提出了分析转换问题的基本理论思想，概括来说，就是转换构成了层流稳定性中的一个问题(Reynolds 假设)。经过几十年艰苦的努力，终于在观察到转换现象的半个世纪以后，转换问题的**理论**研究取得了决定性的突破。这一成就表现为 Goettingen Prandtl 学派于 1930 年左右建立了流动稳定性理论。1940 年 H. L. Dryden 和他的合作者以非常精细的实验成功地证实了上述理论。在 1930 年至 1970 年这段时间内，关于转换的全部知识，无论是在实验方面还是理论方面，都成功地被扩展了。

近二十年来在该领域中出现了大量的总结性著作。按照时间的先后，它们是：1959, H. L. Dryden^[20a]; 1959, H. Schlichting^[79]; 1961, W. Tollmien 和 D. Grohne^[102]; 1963, J. T. Stuart^[91]; 1964, S. F. Shen(沈申甫)^[83a]; 1969, I. Tani^[96]; 1969, M. V. Morkovin^[61a]; 1976, E. Reshotko^[70a]。前不久，AGARD 流体动力学小组召开的“层流向湍流转换”会议反映了这个领域研究的近况。这次会议于 1977 年 5 月在 Copenhagen 举行，会议录见 AGARD 会议录 No. 224^[1a]。

a. 层流向湍流转捩的一些实验结果

1. 管道流动中的转捩 真实流体的流动常常不同于以上各章所研究的层流。它们呈现出称为湍流的特征。当 Reynolds 数增加时，内部流动和在固体表面形成的边界层流动都明显地经历从层流向湍流流态的转捩。湍流的起源以及伴随着的从层流向湍流的转捩对些个流体力学学科都是极其重要的。湍流的出现首先是在直管道和直槽内的流动中观察到的。在很低的 Reynolds 数下通过等截面、光滑壁面直管道的流动中，每一个流体质点都沿直线匀速地运动。粘性力使靠近壁面的流体质点运动得慢一些。流动是很有规则的，各流体质点分别沿着毗邻的各层前进(层流)，见图 2.22(a)。然而，观察表明，这一有序的流动图象在较高 Reynolds 数时不复存在(图 2.22(b))，并且出现了所有流体质点的强烈混合。正如 O. Reynolds^[71] 首先指出的那样，在管道流动中引入一股细的染色液体可以将混合过程显示出来。只要流动是层流，这条染色液的细线沿整个流动保持着清晰确定的边界。一旦流动成为湍流，染色液体就扩散到流场中，在下游很短的距离内使流体均匀地染色。此时，在沿管轴方向的主运动上叠加着与轴线垂直的附加运动，引起流体混合。在一个固定点上，流线的图象持续地发生脉动，附加的运动导致横向的动量交换，这是因为在发生混合时，每一个流体质点基本上保持它向前的动量，结果，沿横截面的速度分布在湍流中要比在层流中均匀得多。两种流态测量的速度分布画在图 16.1 中，这里两种流动的质量流量是一样的。

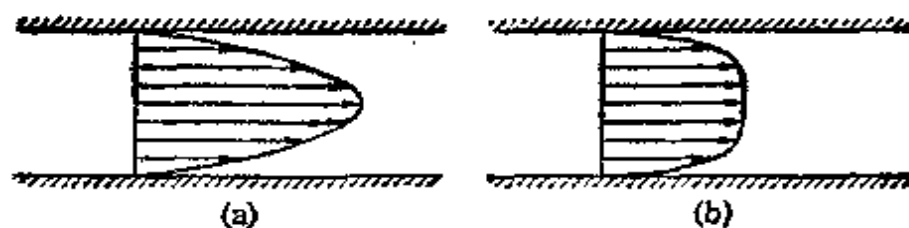


图 16.1 管道流动中的速度分布。(a)层流;(b)湍流

根据第一章中给出的 Hagen-Poiseuille 解，层流中沿横截面的速度分布是抛物线(见图 1.2)，但是在湍流中，由于沿横向的动

量交换，速度分布变得相当均匀。更仔细的研究表明湍流的最基本特征在于这样一个事实：在某一给定点上，速度和压力不再是常数，而是随时间显示出极不规则的高频脉动(图 16.17)。给定点上的速度只有在较长的时间间隔内取其平均值，才能认为是不变的(准定常流动)。

O. Reynolds^[21] 首先对这两种本质上不同的流态进行了系统的研究。他也是第一个深入研究从层流向湍流转捩过程的人。上面提到的染色液实验就是他用来进行这方面研究的，他发现了现在以他的名字命名的相似律，即从层流向湍流转捩总是发生在几乎相同的 Reynolds 数 $\bar{w}d/\nu$ 时，其中 $\bar{w} = Q/A$ 是平均流速($Q =$ 体积流量, $A =$ 横截面积)。发生转捩的 Reynolds 数的值(临界 Reynolds 数)近似地确定为

$$R_{\text{crit}} = (\bar{w}d/\nu)_{\text{crit}} = 2300. \quad (16.1)$$

因此, Reynolds 数 $R < R_{\text{crit}}$ 的流动认为是层流, $R > R_{\text{crit}}$ 的流动认为是湍流。临界 Reynolds 数的数值非常强烈地依赖于某些条件, 主要是管道进口段的长度以及来流的条件。Reynolds 甚至设想过, 当减小管道入口前流动的扰动时, 临界 Reynolds 数会增加。H. T. Barnes 和 E. G. Coker^[2b], 以及稍后的 L. Schiller^[80] 用实验证实了这一事实, L. Schiller 得到的 Reynolds 数的临界值高达 20000。V. W. Ekman^[24] 利用一个几乎不引起扰动的进口段, 成功地保持流动为层流, 直到临界 Reynolds 数高达 40000。若极其小心地排除进口的扰动, 临界 Reynolds 数的上限是多少, 至今尚不知道。然而, 如许多实验证实的那样, R_{crit} 的下限是存在的, 约为 2000。低于该值, 即使存在非常强烈的扰动, 流动仍保持为层流。

从层流向湍流的转捩过程伴随着阻力规律明显的变化。在层流中, 维持运动的轴向压力梯度与速度的一次方成正比(参阅第一章 d); 对比之下, 湍流中的压力梯度变得几乎和平均速度的平方成正比。流动阻力的增加起因于湍流的混合运动, 从图 20.1 可以看出管内摩擦律的变化规律,

转接过程的深入研究揭示出,在临界 Reynolds 数附近的某一范围内,流动变成“间歇性”的,即它在层流和湍流之间交替变化。在图 16.2 中,沿圆管径向不同距离处的测量结果表示出在这个 Reynolds 数范围内流速随时间的变化,测量是在 1956 年由 J. Rotta^[75] 做的。速度曲线表明层流和湍流随机地依次出现。在靠近中心线的位置上,层流的速度超过湍流速度的时间平均值;在靠近管壁的位置上,情形恰好相反。由于实验过程中在长时间范围内谨慎地保持流量不变,由此可以得出结论:在间歇性流动区域内,速度分布交替变化,一会儿是发展了的层流分布,一会儿是充分发展的湍流分布,分别如图 16.1(a)和 16.1(b)所示。这种流动的物理本质可以恰当地用间歇因子 γ 来描述,该因子定义为,在某一确定位置上流动保持为湍流的时间的比例。因此, $\gamma = 1$ 对应着连续的湍流, $\gamma = 0$ 对应着连续的层流。在图 16.3 中画出了对于不同的 Reynolds 数,间歇因子随轴向距离 x 变化的曲线。当 Reynolds 数不变时,间歇因子随着距离的增加而连续地增加。转

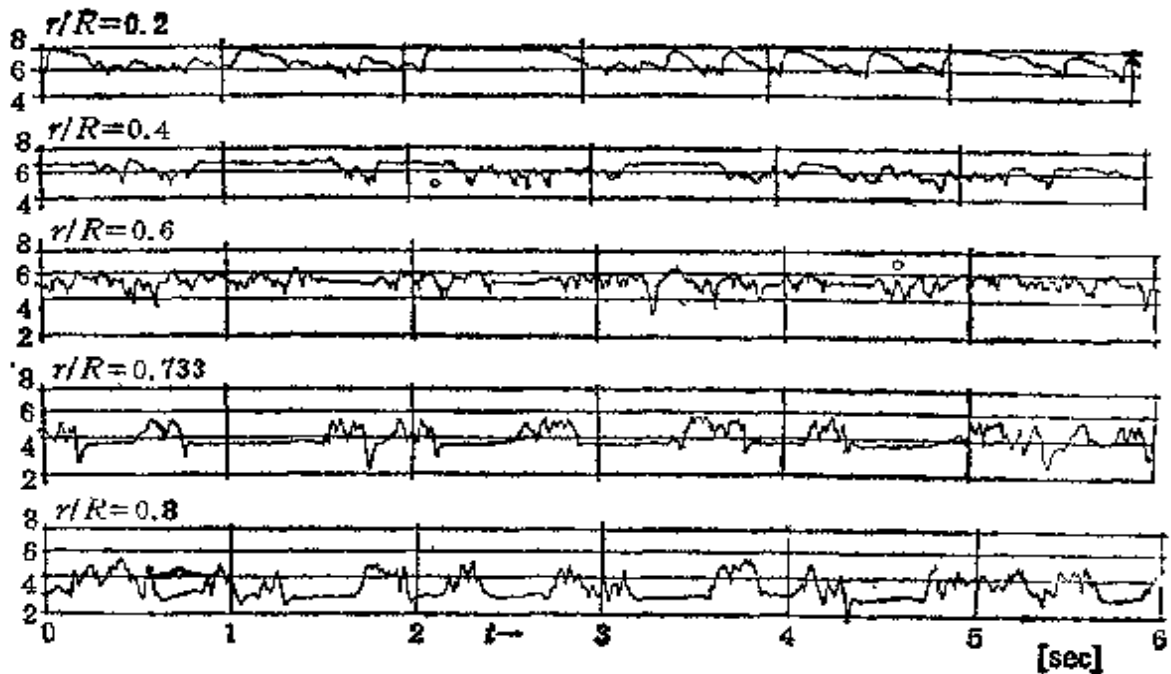


图 16.2 圆管转接区内,离管轴不同距离处流速随时间的变化,根据 J. Rotta^[75] 的测量。Reynolds 数 $R = \bar{w}d/\nu = 2550$; 轴向距离 $x/d = 322$; $\bar{w} = 4.27\text{m/s}$ ($\approx 14.0\text{ft/s}$); 速度的单位是 m/s 。使用热线风速计得到的速度曲线显示了在层流和湍流随时间依次交替阶段流动的间歇特性

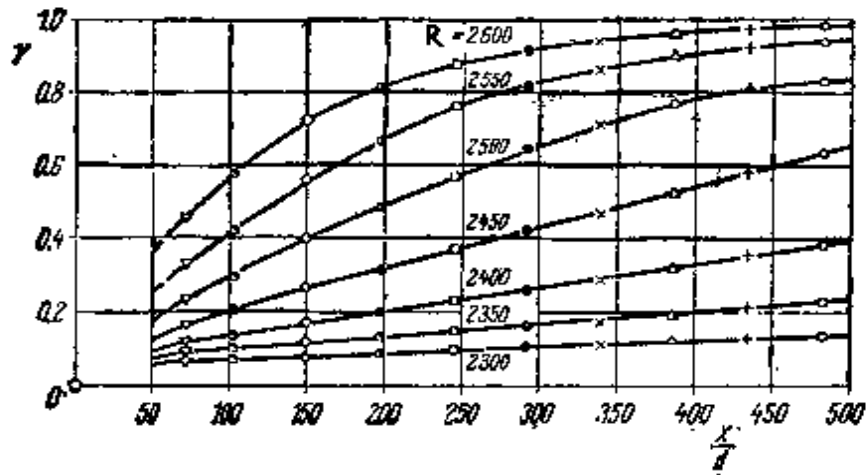


图 16.3 对不同的 Reynolds 数 R ，圆管流动转换区的间歇因子 γ 随轴向距离 x 的变化，根据 J. Rotta^[73] 的测量
这里 $\gamma = 1$ 表示连续的湍流， $\gamma = 0$ 表示连续的层流

换是在 Reynolds 数从 $R = 2300$ 至 2600 范围内完成的。当 Reynolds 数接近转换 Reynolds 数的下限时，流动延伸到很长的距离，才转换成充分发展的湍流，该距离可达直径的数千倍。最近，J. Meseth^[60] 进一步充实了这类测量结果。

2. 壁面边界层内的转换 正如已经指出的那样，边界层中的流动也会经历转换。不过，发现这个事实要比发现管内流动的转换迟得多。绕流物体周围的整个流场，特别是作用在物体上的力，强烈地依赖于边界层内流动是层流还是湍流。绕流物体壁面边界层的转换受到许多参数的影响，其中最重要的是外流中的压力分布、壁面特性(粗糙度)及来流中扰动的性质(湍流度)。

钝头体。 与边界层转换有关的，特别值得注意的现象发生在钝头体，例如球或圆柱。由图 1.4 和 1.5 可见，球或圆柱的阻力系数在 Reynolds 数 $R = VD/\nu$ 约为 3×10^5 时骤然减小。G. Eiffel^[23] 首先注意到球的阻力系数突然下降是边界层转换的结果。转换使分离点向下游移动，显著地减小了尾迹的宽度。L. Prandtl^[41] 将一细线圈安装在球的最大迎风面前面一点，证实了这种解释的正确性。在低 Reynolds 数时，这种作法使边界层人为地变成湍流，从而阻力下降，犹如 Reynolds 数增加时发生的情形一样。图 2.24 和 2.25 的烟流照片清晰地显示出圆球尾迹的范围：在亚临

界流态,尾迹宽,阻力大;在超临界流态,尾迹窄,阻力小,其中后一种流态是用 Prandtl 的“绊线”产生的。这些实验明确地证实了圆球阻力曲线的突变是由于边界层的作用,并且是由转捩引起的。

平板。零攻角平板上边界层的转捩在一定程度上比钝头体的要容易理解。J. M. Burgers^[6], B. G. van der Hegge Zijnen^[41] 首先研究了平板边界层的转捩过程,此后 M. Hansen 以及 M. L. Dryden^[16,17,18] 作了更深入的研究。根据第七章,平板边界层厚度的增长正比于 \sqrt{x} , 此处 x 表示离前缘的距离。前缘附近的边界层总是层流¹⁾, 在下游才变成湍流。对具有尖前缘的平板, 在通常的气流条件下(即湍流度 $T \approx 0.5\%$), 转捩发生在离前缘为 x 处, 由下式决定:

$$R_{x,crit} = \left(\frac{U_{\infty} x}{\nu} \right)_{crit} = 3.5 \times 10^5 \text{ 至 } 10^6.$$

和管内流动一样,对于平板,如果是无扰动的外流(非常低的湍流度),临界 Reynolds 数可以提高,参见第十二章 d2。

研究边界层内的速度分布最容易觉察出它的转捩。如从图 2.23 中看到的,边界层厚度突然增加明显地标志着它的转捩。在层流边界层中,无量纲边界层厚度 $\delta/\sqrt{\nu x/U_{\infty}}$ 保持不变,并且近似地等于 5。在图 2.23 中已经画出了无量纲边界层厚度随长度 Reynolds 数 $R_x = U_{\infty} x/\nu$ 变化的曲线,当 $R_x > 3.2 \times 10^5$ 时,边界层厚度的突然增加清晰可见,转捩还包含着速度分布曲线形状的显著变化。以 G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[83] 在湍流度非常低的流动中进行的测量为基础,在图 16.4 中画出了转捩区中速度剖面的变化。可以看到,在该情形下,转捩区从 Reynolds 数约为 $R_x = 3 \times 10^6$ 延伸至 4×10^6 。在这个范围内,边界层速度剖面从充分发展的层流剖面(如 Blasius 计算的那样)变成充分发展的湍流剖面(见第二十一章)。如图 16.5 所示,形状因子

1) 假定没有前缘分离,如果不采取预防措施来抑制的话,有限厚度的平板可能发生前缘分离,这些留到以后予以解释。

$H_{12} = \delta_1/\delta_2$ 在转换过程中减小很多,其中 δ_1 表示位移厚度, δ_2 是动量厚度. 在平板的情形下, 形状因子从层流流态的 $H_{12} \approx 2.6$ 减小到湍流流态的 $H_{12} \approx 1.4$.

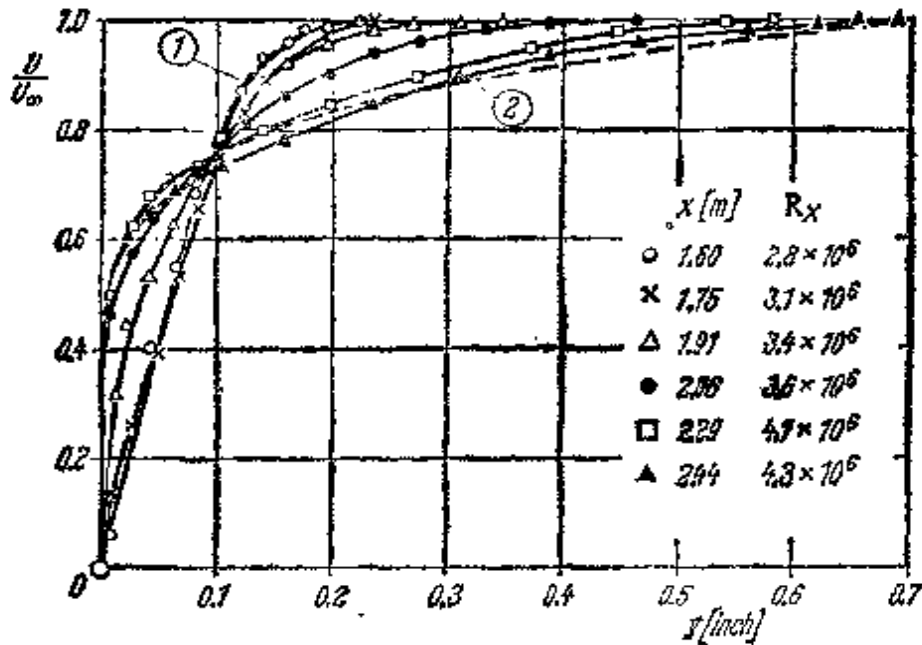


图 16.4 平板边界层转换区的速度剖面, 根据 Schubauer 和 Klebanoff^[64] 的测量结果. (1)层流, Blasius 剖面; (2)湍流, $1/7$ 次幂律, $\delta = 17\text{mm}(=1.36\text{in})$, 外流速度 $U_{\infty} = 27\text{m/s}(89\text{ft/s})$; 湍流度 $T = 0.03\%$

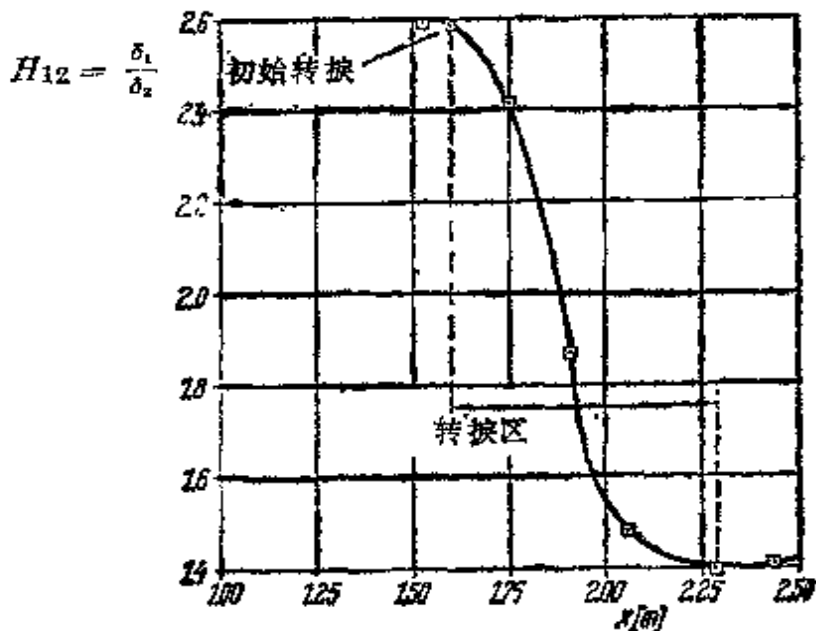


图 16.5 平板边界层转换区的形状因子 $H_{12} = \delta_1/\delta_2$, 根据 Schubauer 和 Klebanoff 的测量结果, 引自文献[65]

利用转换区速度分布的这种变化可以方便地确定转换点，更确切地说是确定转换区，其原理可用图 16.6 来解释。一个总压管或者 Pitot 管平行于壁面移动，它离壁面的距离对应于层流和湍流速度相差最大的地方。当管子向下游移动穿过转换区时，它表示出总压或动压非常突然地增加。

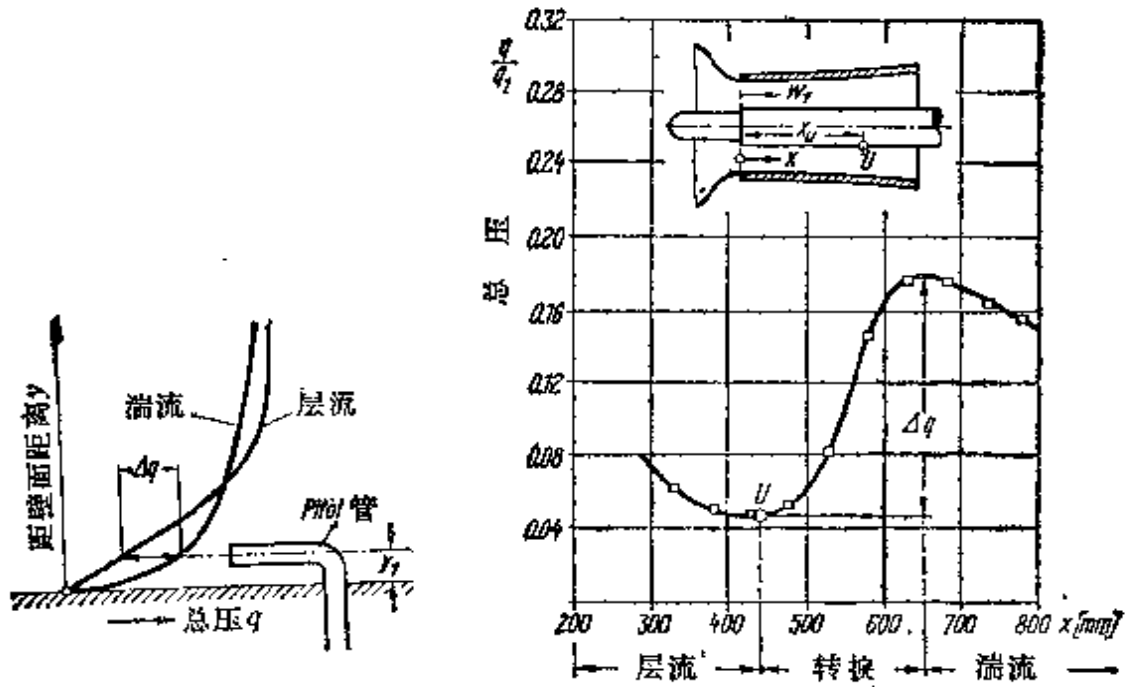


图 16.6 用总压管或 Pitot 管确定转换点位置方法的示意图

平板上的转换还涉及到流动阻力（即表面摩擦力）很大的变化。在层流中，表面摩擦力正比于速度的 1.5 次方（见式(7.33)），而在湍流中，则增加到 1.85 次方。W. Froude^[29] 在很久以前曾进行过高 Reynolds 数下平板的拖曳实验，证实了这一点。关于这方面，读者愿意的话，可以参考图 21.2。

H. W. Emmons^[25] 以及 G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[23] 最近完成的实验表明，在平板情形下，转换过程也是间歇性的，构成一个层流流态和湍流流态的无规则序列。如在图 16.7 中所说明的那样，在边界层内的一个固定点上，突然产生一个形状不规则的小湍流区域（“湍斑”），它沿如图所示的楔形区域向下游运动。这种湍斑以无规则的时间间隔出现在平板随机分布的不同

点上。在这楔形区域的内部主要是湍流，而在其邻近的区域中，层流和湍流连续地交替出现。关于这方面的内容还可以参阅文献[13]。M. E. McCormick 的一篇论文([57a])讨论了这种湍斑的起源问题，其结论是当 Reynolds 数值低于 $R_{\delta_1} = 500$ 时，人为形成的湍斑不会持久，这个数值和线性稳定性理论(式(16.22))计算的临界 Reynolds 数值是一致的。J. Wagnanski 等人^[109]进行了非常深入的关于湍斑的实验研究，特别是对湍斑中速度分布进行了研究。

细长体。已经证实，沿壁面的压力梯度对边界层内转捩点的位置有重要的影响。一般来说，在顺压区(加速流动)，边界层保持层流；反之，即使是压力增加很少也几乎总是导致边界层转捩。利用这个事实，通过将转捩点尽量向下游移动，总可以减小细长体(翼型，流线型物体)的表面摩擦力。实现这一点是依靠适当地选

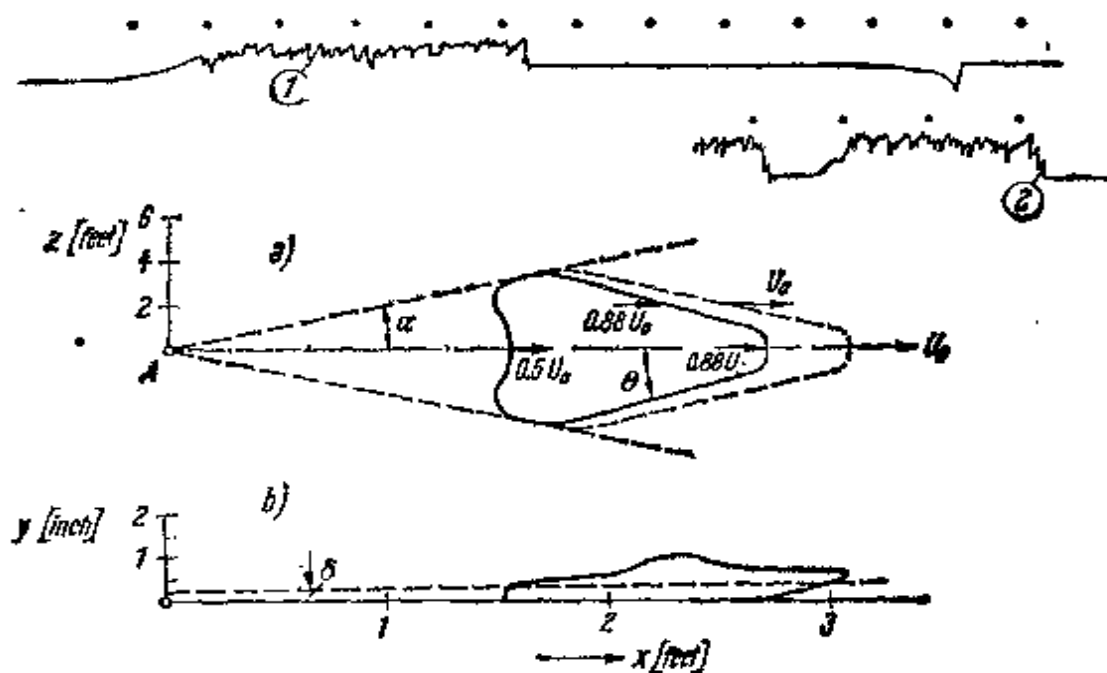


图 16.7 零攻角平板层流边界层中人工湍斑的生长，根据 G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[10]的测量结果，引自文献[20]

(a)平面图;(b)在 A 点人工产生的湍斑的侧视图，此时它离 A 点约为 2.4ft. A 点离前缘 2.3ft. $\alpha = 11.3^\circ$, $\theta = 15.3^\circ$, $\delta =$ 边界层厚度, $U_\infty \approx 10\text{m/s}$ (速度). (1)和 (2)表示当人工的或自发的湍斑穿过时,用热线风速计得到的波形图,示踪扫描的时间间隔是 $1/60\text{sec}$

择物体的形状或剖面形状及相应的压力分布。这种物体（层流剖面）具有延伸得很长的层流边界层，它们的表面摩擦力可以减小到一般形状物体表面摩擦力的一半甚至更小。

转捩点位置和与此相关的表面摩擦力的大小可能还受到其他因素的强烈影响，例如边界层的抽吸。

b. 层流稳定性理论的原理

1. 引言 几十年前人们就致力于从理论上弄清楚和解释刚刚描述过的引人关注的边界层转捩过程，但只是在近三十年才取得成功。这些理论研究的基础是假定层流受到某种小扰动的影响。在管道流动的情形下，这些扰动可能发生在例如进口段，而在绕流物体壁面边界层的情形下，它们可能是由于壁面的粗糙及外流无规则的影响引起的。这种理论试图探索这样一些叠加在主流上的扰动随时间的变化特性，尽管这些扰动的精确形式有待在各种特定的情形下加以确定。这里要回答的关键问题是这些扰动是否随时间增长或者衰减。如果扰动随时间衰减，则认为主流是稳定的；反之，如果扰动随时间增长，则认为流动是不稳定的，存在着转变成湍流流态的可能性。这样就建立了稳定性理论，其目的是确定给定主流的临界 Reynolds 数。稳定性理论的基础可以追溯到 O. Reynolds^[72]，他提出这样的假设，即层流流态作为流体动力学微分方程的解总是代表流动的一种可能的形式，但是在超过一定限度（确切地说，超过临界 Reynolds 数）以后，就成为不稳定的，进而变成湍流流态。

几十年来，许多人对 Reynolds 假设的数学基础作了很多工作，首先是 O. Reynolds 本人，稍后有著名的 Lord Rayleigh^[73]。他们做了艰难的尝试，进行了十分复杂的计算，但在很长时间内仍然毫无成果。1930 年左右，L. Prandtl 和他的合作者成功地以令人满意的方式实现了确定临界 Reynolds 数的初步目的。十多年后，当 H. L. Dryden 和他的同事能够得到理论与实验完全一致的结果时，稳定性理论才得到实验验证。H. Schlichting^[73,79]，R.

Betchov 和 W. O. Criminale^[4], 以及 C. C. Lin^[55] 对稳定性理论作了详细的论述。

2. 小扰动方法的基础 层流稳定性理论将运动分解成平均流动(其稳定性构成研究的对象)和叠加的扰动。假设平均流动是正常的, 用笛卡尔速度分量 U, V, W 和它的压力 P 来描述。非定常扰动中相应的量分别用 u', v', w' 和 p' 来表示。因此, 合成运动的速度分量为

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w', \quad (16.2)$$

压力为

$$p = P + p'. \quad (16.3)$$

在大多数情形下, 假定与扰动有关的量远小于主流中相应的量。

可以用两种方法来研究这种被扰动的流动的稳定性。第一种方法(**能量法**) 仅计算扰动能量随时间的变化, 所得的结论取决于在时间过程中能量是增加还是减小。该理论允许任何形式的叠加运动, 仅要求它们应该和连续方程相容。**能量法**主要是由 H. A. Lorentz^[57] 建立的, 但是这种方法未能取得成功, 因此, 我们将不详细地讨论它。

第二种方法仅考虑与运动方程组相容的流动, 参照适当的微分方程, 分析扰动在流动中的发展。这就是**小扰动方法**。这种方法获得了圆满的成功, 为此将较为详细地加以论述。

现在我们来考虑二维不可压缩平均流动, 并假设扰动也是二维的。式(16.2)和(16.3)描述的合成运动满足由方程(4.4a, b, c)给定的二维形式的 Navier-Stokes 方程, 我们把问题进一步化简, 规定平均速度 U 只依赖于 y , 即 $U = U(y)$, 并假设其余两个速度分量处处为零, 或 $V \equiv W \equiv 0$ ¹⁾。我们早就遇到过这种流动, 并且称之为**平行流**。在壁面平行的槽和管道的情形下, 在离进口截

1) 正如 G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[13] 所指出的那样, 有理由假定, 在真实流动中, 特别是在绕过平板的流动中, 这些速度分量总是存在的。对大多数情形, 它们的大小是可以忽略的, 但是在转换过程中, 它们似乎起着一定的、至今尚未充分认识的作用, 另见 542 页的脚注。

面充分远的下游十分准确地出现这种流动。边界层内的流动也可以认为是非常近似于平行流，因为它的平均速度 U 随 x 的变化远远小于随 y 的变化。如果考虑到平均流动中的压力，显然必须假设压力依赖于 x 和 y ，即 $P(x, y)$ ，这是因为压力梯度 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 维持着流

动。这样，我们假设平均流动为

$$U(y); V \equiv W \equiv 0; P(x, y). \quad (16.4)$$

设在平均流动上叠加着一个二维扰动，它是时间和空间的函数，其速度分量和压力分别为

$$u'(x, y, t), v'(x, y, t), p'(x, y, t). \quad (16.5)$$

这样按照式(16.2)和(16.3)，合成运动是

$$u = U + u'; v = v'; w = 0; p = P + p'. \quad (16.6)$$

假设平均流动(式(16.4))是 Navier-Stokes 方程的解，并要求合成运动(式(16.6))也必须满足 Navier-Stokes 方程。式(16.5)中叠加的脉动速度认为是“小量”，即脉动分量的平方项相对于线性项可以忽略不计。下一节将包含对扰动形式的更细致的描述。现在，稳定性理论的任务在于对给定的平均运动确定扰动是增长或者衰减。在前一种情形下，流动是不稳定的，后一种情形下流动是稳定的。

将式(16.6)代入二维、不可压缩、非定常流动的 Navier-Stokes 方程(4.4a, b, c)，忽略扰动速度分量的平方项，我们得到

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \nabla^2 u' \right),$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v',$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

其中 ∇^2 表示 Laplace 算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。

如果考虑到平均流动本身满足 Navier-Stokes 方程，上面的

方程可以简化为

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u', \quad (16.7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v', \quad (16.8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (16.9)$$

我们得到 u' , v' 和 p' 的三个方程。边界条件规定脉动速度分量 u' 和 v' 在壁面上为零(无滑移条件)。从(16.7)和(16.8)两个方程很容易消去压力 p' , 这样和连续方程合在一起有关于 u' 和 v' 的两个方程。有人可能批评平均流动假设的形式, 其理由是式(16.4)忽略了速度分量 U 随 x 的变化以及法向分量 V 。然而, 关于这一点, J. Pretsch^[44] 证明了方程中因此出现的附加项对边界层的稳定性是不重要的(可参阅 S. J. Cheng^[71])。

3. Orr-Sommerfeld 方程 假定沿 x 方向速度为 $U(y)$ 的层流平均流动受到某一扰动的影响, 这个扰动由一些离散的单个脉动组成, 而每个脉动都是一个沿 x 方向传播的波。正如已经假设的那样, 扰动是二维的, 所以可以引进流函数 $\phi(x, y, t)$, 从而积分了连续方程 (16.9)。设表示扰动的单个振荡的流函数形式为

$$\phi(x, y, t) = \phi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (16.10)^{1)}$$

假设任意的二维扰动都可以展开成 Fourier 级数, 它的每一项表示一个单个振荡。在式 (16.10) 中, α 是实数, $\lambda = 2\pi/\alpha$ 是扰动的波长。 β 是复数,

$$\beta = \beta_r + i\beta_i,$$

其中 β_r 是单个振荡的圆频率, 而 β_i (扰动增长率) 确定了扰动增长或衰减的程度。如果 $\beta_i < 0$, 扰动衰减, 层流平均流动是稳定的; 反之, 若 $\beta_i > 0$, 平均流动是不稳定的。不采用 α 和 β , 而引入它们的比值是方便的,

1) 这里使用了通常的复数记法。只有流函数的实部具有物理意义, 即

$$R_e(\phi) = e^{\beta_i t} [\varphi_r \cos(\alpha x - \beta_r t) - \varphi_i \sin(\alpha x - \beta_r t)],$$

其中 $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ 是复振幅。

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i. \quad (16.11)$$

这里 c_r 表示波沿 x 方向传播的速度(相速度), 而 c_i 仍然决定着扰动衰减或增长的程度, 这取决于它的正负号。由于平均流动只依赖于 y , 可以假定脉动的振幅函数 ϕ 也只依赖于 y 。由式(16.10)可以得到扰动速度分量

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi'(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (16.12)$$

$$v' = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -i\alpha\phi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (16.13)$$

将这些值代入方程(16.7)和(16.8), 消去压力以后, 我们得到关于振幅 $\phi(y)$ 的下列四阶常微分方程:

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - U''\phi = -\frac{i}{\alpha R}(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi).$$

(16.14)

这是扰动的基本微分方程(稳定性方程), 它形成了层流稳定性理论的出发点, 通常称之为 **Orr-Sommerfeld 方程**。方程(16.14)已经变成无量纲形式, 所有长度都用适当的参考长度 b (槽的宽度) 或 δ (边界层厚度) 来除, 速度用平均流动的最大速度 U_m 来除。方程中的一撇“'”代表相对于无量纲坐标 y/δ 或者 y/b 的微分, 同时

$$R = \frac{U_m b}{\nu} \quad \text{或} \quad R = \frac{U_m \delta}{\nu}$$

是表征平均流动特性的 Reynolds 数。方程(16.14)的左端是由运动方程中惯性项导出的, 而右端的各项是由粘性项导出的。以边界层流动为例, 方程(16.14)的边界条件要求扰动速度分量在壁面($y = 0$)以及离壁面很远处(来流)必须为零。因此,

$$\left. \begin{aligned} y = 0: u' = v' = 0; \phi = 0, \phi' = 0; \\ y = \infty: u' = v' = 0; \phi = 0, \phi' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

此时可能会有人提出异议, 认为如果要实现稳定性问题的完整分

析,则叠加在二维流动上的扰动不非得是二维的。H. B. Squire^[87]假定扰动沿 z 方向也是周期性的,证明了与二维扰动相比,当扰动是三维时,二维流动在更高的临界 Reynolds 数下才变成不稳定的,从而排除了上述的不同看法。从这个意义上来说,对于二维流动,二维扰动比三维扰动更“危险”,因而临界 Reynolds 数数值,或者更确切地说,稳定性界限的最小值是由考虑二维扰动得到的。

4. 特征值问题 稳定性问题现在归结为求方程 (16.14) 的特征值问题,其边界条件为式(16.15)。当平均流动 $U(y)$ 给定时,方程 (16.14) 含有 4 个参数,即 α , \mathbf{R} , c_r 和 c_i , 其中平均流动的 Reynolds 数也是给定的。此外,扰动的波长 $\lambda = 2\pi/\alpha$ 认为是给定的。在这种情形下,对每一组 α, \mathbf{R} 值,由微分方程(16.14)和边界条件(16.15) 可以解出一个特征函数 $\phi(y)$ 和一个复数特征值 $c = c_r + ic_i$ 。此处 c_r 表示所讨论的扰动的相速度,而 c_i 的正负号确定扰动波是增长($c_i > 0$)或者衰减($c_i < 0$)¹⁾。对给定的 α 值,当 $c_i < 0$ 时,相应的流动(U, \mathbf{R})是稳定的,而 $c_i > 0$ 时,该流动是不稳定的。极限情形 $c_i = 0$ 对应于中性稳定(随遇稳定)。

对给定层流 $U(y)$ 的上述分析结果可以在 α, \mathbf{R} 图上表示出来,因为该平面上的每一点对应一对 c_r 和 c_i 的值。特别是, $c_i = 0$ 的轨迹线将稳定扰动区域和不稳定扰动区域区分开来。这个轨迹线称作**中性稳定性曲线**(图16.8)。中性稳定性曲线上 Reynolds 数数值最小的一点(过该点作曲线的切线平行于 α 轴)是最值得注意的,因为它指出低于这个 Reynolds 数值的所有单个振荡都是衰减的,而高于此值时,至少有一些振荡是增长的。这个最小的 Reynolds 数就是目前所考虑的这种层流的**临界 Reynolds 数**,或称为**稳定性界限**。

上述有关从层流向湍流转换的实验事实使得我们期望,在流

1) 另一方面,也可以认为 \mathbf{R} 和圆频率 β , 是给定的,此时特征值问题确定 α (波长)的相应的值和增长率 β_i 。如在第十六章 d 中所述, H. L. Dryden 和他的同事利用适当激发的簧片使确定频率的人为扰动叠加到层流上来进行稳定性实验,就满足这种条件。

动保持层流的小 Reynolds 数时,所有波长的波都只产生稳定的扰动,而在观察到湍流的大 Reynolds 数时,某些波长的波将对应着不稳定扰动。然而,对这一点需要加以说明,即不能期望稳定性理论计算出的临界 Reynolds 数等于在转换点得到的 Reynolds 数。

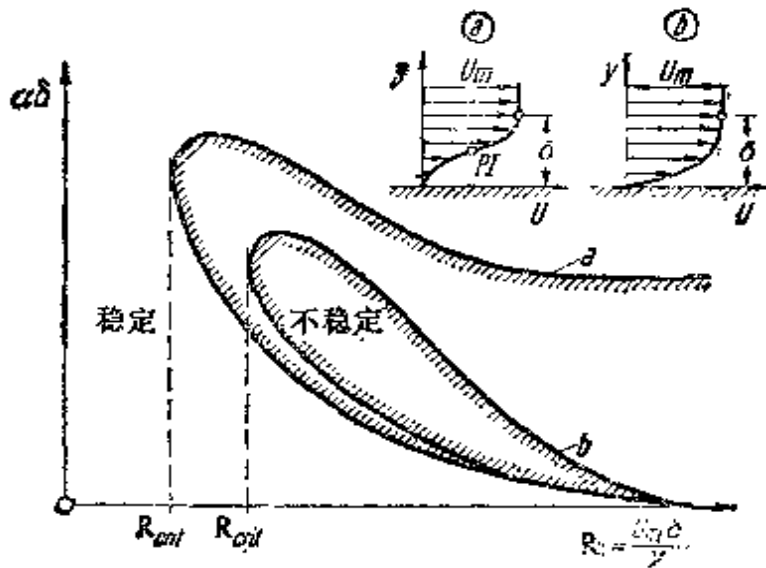


图 16.8 相对于二维扰动的二维边界层中性稳定性曲线

(a)“无粘”不稳定性.在速度剖面是有拐点 PI 的 a 型情形下,中性稳定性曲线是 a 型。
 (b)“粘性”不稳定性.在速度剖面是无拐点的 b 型情形下,中性稳定性曲线是 b 型。

当 $R \rightarrow \infty$ 时,中性稳定性曲线 a 的渐近线是从“无粘”稳定性方程(16.16)得到的

如果注意力集中在沿壁面的边界层流动,那么临界 Reynolds 数的理论值指示的是壁面上这样的一点,在该点上某些单个扰动开始增长并向下游不断增强。这种不断增长的扰动转变成湍流需要一定的时间,与此同时,不稳定扰动有机会向下游方向前进一定的距离。因此,必须估计到,观察到的转换点位置将在理论计算的失稳点下游,换句话说,临界 Reynolds 数的实验值大于它的理论值。显然,这一说明既适用于基于流动方向长度的 Reynolds 数,也适用于基于边界层厚度的 Reynolds 数。为了区分起见,通常称临界 Reynolds 数的理论值(稳定性界限)为失稳点,称临界 Reynolds 数的实验值为转换点¹⁾。

1) 在第十六章 a 中已经解释过,最近的实验结果(H. W. Emmons^[22] 以及 Schaubauer 和 Klebanoff^[23]) 表明不存在非常确定的转换点,从层流转变到充分发展的湍流的过程延伸到一定的距离。

以上简述的稳定性分析引出极其困难的数学问题。因此，这一领域的研究者为了计算临界 Reynolds 数，虽然作了最大的努力，仍然耗费了几十年的时间才获得了成功。所以下面我们不可能提供关于稳定性理论完整的论述，而不得不只限于给出一些最重要的结果的说明。

5. Orr-Sommerfeld 方程的一般特性 因为根据实验验证，预计稳定性界限 $c_i = 0$ 发生在大 Reynolds 数时，这时 Orr-Sommerfeld 方程中粘性项的系数 $1/|R|$ 比起惯性项来说是小量，所以去掉方程右端的粘性项使方程简化是十分自然的事情。简化后的微分方程称为**无摩擦稳定性方程**，或 **Rayleigh 方程**：

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = 0. \quad (16.16)$$

在这里注意到以下事实是重要的：由于无摩擦稳定性方程是二阶的，它只能满足未化简方程的四个边界条件(16.15)中的两个。这时保留下来必须满足的边界条件是在槽的壁面上速度的法向分量为零，或在边界层流动的情形时，壁面和无穷远处速度的法向分量为零。这样，在无摩擦情形下，我们有

$$y = 0: \phi = 0; \quad y = \infty: \phi = 0. \quad (16.17)$$

去掉方程中的粘性项使方程的阶数从 4 减小到 2，大大地简化了方程，但是这可能使简化后方程的解失去原方程通解的重要特性。关于粘性流体的 Navier-Stokes 方程转变成无摩擦流体的方程，我们曾经在第四章中作过说明，在这里我们愿意重复这些有关的说明。

稳定性理论早期的大多数论文使用无摩擦方程(16.16)作为出发点。显然，这样处理不可能得到临界 Reynolds 数，但是它可以回答所给定的层流是否稳定的问题¹⁾。经过多次失败以后，人们终于成功地计算出临界 Reynolds 数，此后很久，才对未化简的方程(16.14)进行了分析。

从上述无摩擦稳定性方程(16.16)出发，Lord Rayleigh^[70]成功地得出了几个重要的关于层流速度剖面稳定性的一般定理。后

1) 此处有一点保留，即未考虑粘性对扰动本身的影响。

来还证实了这些定理也适用于计及粘性影响的情形。

定理 I: 这一类重要的一般定理中的第一个是所谓**拐点准则**，它指出具有拐点的速度剖面是不稳定的。

Lord Rayleigh 仅仅证明了拐点的存在是流动失稳的**必要条件**。很久以后，W. Tollmien^[100]成功地指出了它同时也是扰动增长、流动变得不稳定的**充分条件**。拐点准则对于稳定性理论是十分重要的，它对各种层流作了初步粗略的分类(除了由于忽略粘性影响而作的修正以外)。从实用的观点来看，这个准则的重要性是因为拐点的存在和压力梯度之间有直接的联系。在收缩槽内的流动情形下，压力梯度是顺压梯度，速度剖面非常丰满而且没有拐点，如图 5.15 所示。在扩张槽的流动中，压力梯度是逆压梯度，速度剖面是尖的，存在着拐点。在绕流物体壁面上的层流边界层内，速度剖面的几何形状也会产生同样的差别。按照边界层理论，在压力减小的区域中，速度剖面没有拐点；而在压力增加的区域中，速度剖面总是有拐点的，见第七章 C。因此，拐点准则和关于外流中压力梯度对边界层稳定性影响的论断是等价的。将拐点准则应用于边界层流动，它说明顺压梯度使流动稳定，而逆压梯度促使其失稳。因此，绕流物体上最小压力点位置对转捩点位置是决定性的。粗略地说，我们可以认为最小压力点位置决定着转捩点，并且转捩点紧靠着最小压力点的后面。

至此我们一直忽略了粘性，它对稳定性方程的影响仅仅使上述结论略有改变。上面所说的带有拐点的速度剖面的不稳定性通常称作“**无摩擦不稳定性**”，因为已经证实，即使不考虑粘性对脉动运动的影响，这种层流平均流动也是不稳定的。在图 16.8 中，无摩擦不稳定性的情形对应于 a 型曲线，即使在 $R = \infty$ 时，仍然存在着一一定的不稳定波长范围，沿着 Reynolds 数减小的方向，由中性稳定性曲线将这个区域和稳定的波长范围区分开。

与上述情形相反，**粘性不稳定性**与图 16.8 中 b 型的中性稳定性曲线有关，同时也与不具有拐点的边界层速度剖面有关。当 Reynolds 数趋于无穷大时，不稳定波长范围收缩成一点，不稳定

脉动区域只在有限的 Reynolds 数下才存在。一般说来，在无摩擦不稳定性情形下，扰动增长的程度要远大于粘性不稳定性的情形。

只有和完整的 Orr-Sommerfeld 方程联系起来进行讨论，才能发现粘性不稳定性的存在，所以粘性不稳定性使分析工作更加困难。最简单的流动情形，即沿无压力梯度平板的流动，就属于仅产生粘性不稳定性情形，直到最近人们才成功地解决了它的稳定性分析。

定理 II: 第二个重要的一般性定理指出，边界层内中性扰动 ($c_i = 0$) 传播的速度小于平均流动的最大速度，即 $c_r < U_{\infty}$ 。

该定理也是首先由 Lord Rayleigh^[70] 证明的，尽管他加了某些限制性的假定。W. Tollmien^[100] 再次在更一般的条件下证明了这个定理。定理 II 断言，在流场的内部存在着一个流体层，对中性扰动来说，在该层有 $U - c = 0$ 。这个事实对稳定性理论也是非常重要的。 $U - c = 0$ 的这一层对应于无摩擦稳定性方程 (16.16) 中的奇点。在该点，若 U'' 不同时为零，则 ϕ'' 变成无穷大。在 $y = y_k$ 处满足条件 $U = c$ 的这一层称为平均流动的**临界层**。如果 $U_k'' \neq 0$ ，那么在临界层附近，可以近似地令 $U - c = U_k'(y - y_k)$ ，则 ϕ'' 随

$$\frac{U_k''}{U_k'} \frac{1}{y - y_k}$$

趋向无穷大，因此 x 方向的速度分量可以写成

$$u' = \phi' \sim \frac{U_k''}{U_k'} \ln(y - y_k). \quad (16.18)$$

这样，按照无摩擦稳定性方程，如果在临界层速度剖面的曲率不同时为零，则平行于壁面的速度分量 u' 变成无穷大。无摩擦稳定性方程中的数学奇异性指出在临界层附近，一定不能忽略粘性对运动方程的影响。将粘性影响考虑进去就排除了无摩擦稳定性方程中不合理的奇异性。分析这一所谓的粘性修正对稳定性方程解的影响，在稳定性讨论中起着基本的作用。

Lord Rayleigh 提出的两个定理表明,速度剖面的曲率作为一种基本的因素影响着的稳定性。同时,这个事实也表明为了有可能分析流动的稳定性,层流边界层速度剖面的计算必须要有很高的精确度,仅以足够的精确度计算 $U(y)$ 是不够的,还必须准确地知道它的二阶导数 $\frac{d^2U}{dy^2}$ 。

P. G. Drazin 和 L. N. Howard^[58] 从数学家的观点总结了 Rayleigh 方程的解。

c. 稳定性理论应用在零攻角平板边界层上的结果

1. 早期稳定性研究 作为 Lord Rayleigh 工作的继续,早期的研究工作最初只限于考虑 Couette 流动,即在两个平行壁面之间具有线性速度分布的流动情形,见图 1.1。A. Sommerfeld^[60], R. von Mises^[61] 和 L. Hopf^[62] 对这种流动的稳定性作了十分详尽的讨论,并充分考虑了粘性的影响。他们得出了这样的结论:对所有 Reynolds 数和扰动波波长,这种类型的流动都是稳定的。这个结论否定了不稳定性的存在,在此后的一段时间内,人们曾认为小扰动方法不适用于转换问题的理论解。后来弄清楚了,这个观点是不正确的,因为 Couette 流动是一个十分特殊和有局限性的例子。此外,正如已经指出的那样,速度剖面的曲率在流动中起着非常重要的作用,不加以考虑是不能允许的。

1921 年 L. Prandtl^[67] 试图重新用理论方法考察稳定性问题。和 Lord Rayleigh 以前的研究方法一样,为了考虑平板层流边界层的稳定性,又避免过分的数学复杂性,Prandtl 使用了直线的速度剖面,见图 16.9(a),(b),(c),(d)。O. Tietjens^[98] 以无摩擦稳定性方程为基础进行的计算表明:在边界层速度剖面的情形下,剖面的凸角(图 16.9(a),(b))保证了边界层是稳定的,而凹角(图 16.9(c),(d))总是导致边界层失去稳定性。这一研究成果可以使假定带有拐点的速度剖面(图 16.9(g))是不稳定的。正如已经在第十六章 b 定理 I 中所叙述的那样,W. Tollmien^[100] 后来证

实了这个假定是正确的。

为了获得在不稳定速度剖面情形下(图 16.9(c),(d))用 Reynolds 数表示的稳定性界限, 我们可以在方程中将那些出现在完整的稳定性方程(16.14)中的最大的粘性项包括进去, 期望它们起

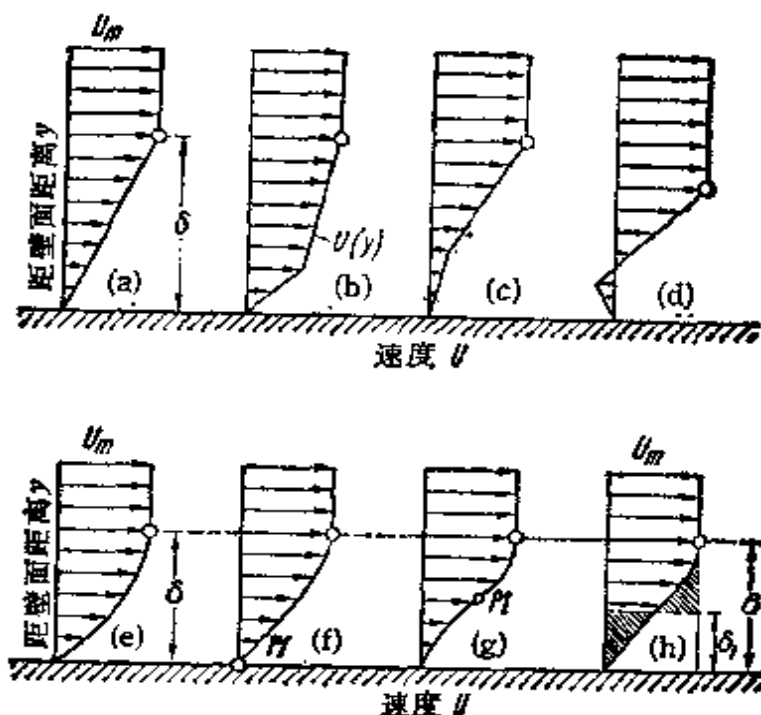


图 16.9 研究层流边界层稳定性采用的速度剖面

$U(y)$ = 速度分布; U_m = 来流速度; δ = 边界层厚度; δ_1 = 位移厚度; PI = 速度剖面的拐点. 当 $R \rightarrow \infty$ 时, (a), (b), (e), (f) 型速度剖面是稳定的; (c), (d), (g) 型剖面是不稳定的. 在顺压梯度时存在着 (e) 型剖面; (f) 型剖面相应于压力不变的情形; (g) 型剖面存在于逆压梯度时

阻尼作用. 由于要满足无滑移边界条件, 粘性对扰动的影晌只限于整个速度剖面中一个非常小的、极其靠近壁面的范围. O. Tietjens 的计算得出一个非常令人意外的结果, 对所有 Reynolds 数和所有波长的扰动, 在方程中引入少量的粘性影晌不是起阻尼作用, 反而使扰动增强. 此外, 不仅对不稳定速度剖面 (图 16.9 c, d) 得到这个结论, 而且对图 16.9 中 a 型和 b 型速度剖面也得到这个结论, 而我们已经证明了当不考虑粘性时, 这两种速度剖面是稳定的.

L. Prandtl^[67a] 于 1931 年在 Bad Elster 举行的 GAMM (德国应用数学和力学学会) 年会上作了一个报告, 评述了 1920 年至 1930 年间稳定性研究取得的阶段性进展.

2. 中性稳定性曲线计算 W. Tollmien^[9] 于 1929 年对上述疑题作出了满意的解释。他指出不仅如 O. Tietjens 所假设的那样,在壁面附近要考虑粘性对扰动的影响,而且在临界层附近也必须考虑粘性的影响。在临界层处扰动波传播速度和主流速度相等,而且如第十六章 b 5 所指出的,按照简化的无摩擦理论,如果速度剖面的曲率在临界层不等于零, u' 将变成无穷大。然而很明显, u' 实际上在那里是有限的,所以粘性引起临界层很大的变化。但是,只有考虑到速度剖面的曲率时,粘性的影响才变得明显。上述分析表明,必须研究弯曲的速度剖面($d^2U/dy^2 \neq 0$)情形下小扰动的特性,而且无论在壁面附近还是在临界层内都必须考虑粘性。在上面已经引用过的一篇论文中,W. Tollmien 进行了计算,结果找到了零攻角平板边界层流动的稳定性界限(临界 Reynolds 数),并与实验吻合得很好。

为了积分四阶的 Orr-Sommerfeld 方程(16.14),必须建立它的一组基本解。对于 $y \rightarrow \infty$ 以及 $U(y) = U_\infty = \text{常数}$ 的情形,这组基本解是

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= e^{-\alpha y}; & \phi_2 &= e^{+\alpha y}, \\ \phi_3 &= e^{-\gamma y}; & \phi_4 &= e^{+\gamma y}, \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

其中 $\gamma^2 = \alpha^2 + iR(\alpha - \beta)$. (16.20)

一般来说,对中性振荡,我们发现

$$|\gamma| \gg |\alpha|, \quad (16.20a)$$

因此, ϕ_1 和 ϕ_2 表示缓慢变化的解,而 ϕ_3 和 ϕ_4 是快速变化的解。当 $y \rightarrow \infty$ 时, ϕ_1 和 ϕ_2 这对解同时满足无摩擦扰动方程(Rayleigh方程)和粘性的 Orr-Sommerfeld 方程(方程(16.16)和(16.14))。相反, ϕ_3 和 ϕ_4 这对解仅满足粘性扰动方程。因此, ϕ_1 和 ϕ_2 称为无摩擦解,而 ϕ_3 和 ϕ_4 称为粘性解。

当进而计算通解

$$\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3 + C_4\phi_4$$

中的常数时,我们注意到必须去掉 ϕ_2 和 ϕ_4 。这是因为边界条件(16.15)要求当 $y \rightarrow \infty$ 时 ϕ 和 ϕ' 为零。因此

$$\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2, \quad (16.21)$$

其边界条件为在 $y = 0$ 处 $\phi = \phi' = 0$. 无粘解 ϕ_1 在壁面上 ($y = 0$) 有 $\phi_1 \neq 0$, 所以不满足无滑移条件. 此外, 在由 $U - c = 0$ 确定的临界层上, 我们发现, 正如前面所解释的, $\phi_1 \rightarrow \infty$. 所以在这两个位置上, 粘性的贡献变得特别大, 所求的特解 $\phi_2(y)$ 以及通解 $\phi(y)$ 随 y 的变化也特别快. 因此, 对给定的一对 α 和 R 值, 不论用解析方法或者数值方法, 计算特征函数 $\phi(y)$ 和特征值 $c = c_r + ic_i$ 都是十分复杂的. 在使用数值方法时, 特殊的困难来源于 Orr-Sommerfeld 方程的最高阶导数 ϕ'''' 有一个非常小的因子 $1/R$. 从数学上来说, 由于去掉粘性项后微分方程的阶数从四阶降为二阶, 所以用无摩擦 (Rayleigh) 方程和用含有粘性的 (Orr-Sommerfeld) 方程描写在壁面和临界层上的函数 $\phi(y)$, 其区别很大.

对多组给定的 α (波数的倒数) 和 Reynolds 数 R , 试图用数值方法计算 Orr-Sommerfeld 方程 (16.14) 的特征函数 $\phi(y)$ 向计算机的容量提出了巨大的要求, 这就说明了为什么 (O. Tietjens^[98] 和 W. Heisenberg^[42] 在 20 年代解决这个问题都没有获得成功. 20 年代末, Tollmien 又重新研究了这个问题, 并且发现唯一可行的方法是回到十分繁琐的解析方法. 这种解析方法虽然很费时间, 但是是很成功的¹⁾. 可以在 W. Tollmien^[99,100,101] 和 D. Grohne^[38] 的原始论文中找到关于计算细节的说明. 由于这种计算方法已经不可避免地被以大型高速电子计算机为基础的现代数值方法所代替, 这里没有必要再去总结这一工作. 在 W. Tollmien^[99] 最初的结果发表 30 年之后, E.F. Kurtz 和 S.H. Crandall^[52] 才于 1962 年获得了 Orr-Sommerfeld 方程第一个成功的数值解. R. Jordinson^[47,48] 1970 年的两篇论文改进了这个工作. M. R. Osborne^[62] 以及 L. H. Lee 和 W. C. Reynolds^[53] 也进行了重要的开创性工作. 不久, 在 J.M. Gersting 和 D. F. Jankowski^[30], A. Davie^[22] 的

1) 除此之外, Tollmien^[99] 的解析方法还产生了重要的物理上的结果, 即扰动速度 u' 分量经过临界层时发生角度为 π 的相移, 这一相移是由于粘性的作用; 见文献 [39a] 的计算.

工作中再次简要地讨论了 Orr-Sommerfeld 方程特征函数和特征值数值计算的特殊困难。另外, R. Betchov 和 W. O. Criminale 以 R. E. Kaplan^[48a] 的 MIT (美国麻省理工学院) 硕士学位论文为基础, 在他们的书^[49]中对与 Orr-Sommerfeld 方程数值解有关的困难作了总结性论述。关于这方面, 读者可以参考 F. M. White 的书^[107]第五章。

许多人研究了主流中流动方向轻微变化对稳定性的影响, 除了文献^[47]以外, 可以参阅文献^[2, 4a, 31, 46a, 84a, 106]。正如 J. Pretsch^[69] 指出的, 其影响很小。

在我们的论述中, 指出下面的一点可能是有益的: 一般而言, 边界层流动的稳定性分析要比槽内流动的稳定性分析更困难。这是由于槽内流动的两个边界都位于有限的距离上, 而边界层流动的一个边界条件在无穷远处。和槽内流动 (即 Hagen-Poiseuille 流动) 相反, 边界层主流的速度剖面 $U(y)$ 不是 Navier-Stokes 方程的精确解, 就使得这种情形更加恶化。最后, 我们希望读者能够回忆起 Orr-Sommerfeld 方程本身是在假定主流 $U(y)$ 沿流向不变的基础上导出的¹⁾。槽内流动满足这一假定, 而边界层流动则不是这样。所有这些因素加在一起, 就使边界层的稳定性分析比槽内流动的稳定性分析困难得多。

3. 平板的结果 W. Tollmien^[99] 首先应用他的方法研究了零攻角平板边界层的稳定性。这种边界层的速度剖面 (Blasius 剖面) 见图 7.7。沿平板不同位置的剖面是彼此相似的, 这意味着用 $y/\delta(x)$ 为坐标画速度剖面, 可以使它们重合在一起。这里 $\delta(x)$ 是边界层

1) 在 W.S. Saric 和 A.H. Nayfeh^[64b] 的论文中可以找到 Orr-Sommerfeld 方程 (16.14) 的推广形式, 它包括因主流不平行而引起的附加项。附加项一共有六项。扰动振幅沿 x 方向的变化引进了两项, 还有两项来自主流的横向速度分量, 再有一项来自扰动波长沿 x 方向的变化。最后, 第六项对应于边界层理论的高阶项 (见第九章)。边界层有抽吸和引射时, 将引起更多的附加项。对形式为 Falkner-Skan 级数的各种速度剖面, 修正的 Orr-Sommerfeld 方程的数值解^[2, 31, 106] 未能将普遍情形下的所有附加项都包括进去。由于这一原因, 很难在这些解以及这些解和“简化的”Orr-Sommerfeld 方程的解之间进行比较。但是, 在大多数情形下, 由于不平行性引起稳定性界限的变化是很小的。F. C. T. Shen 等人^[106] 曾给出数值例子。

厚度,由 $\delta = 5.0\sqrt{\nu x/U_\infty}$ 给出, 见式 (7.35)。速度剖面在壁面上有拐点, 对应于图 16.9 中 *f* 型的情形。这样, 根据在第十六章 b 5 中叙述的拐点准则, 可以看出该剖面位于无拐点剖面型(根据无摩擦理论是稳定的)和有拐点剖面型(根据无摩擦理论是不稳定的)之间的分界线上。

根据上一节叙述的方法得到的稳定性计算结果见图 16.10 和 16.11 以及表 16.1, 标有斜线的曲线代表中性曲线, 曲线所围的区域对应于不稳定扰动, 曲线外是稳定区域。在非常大的 Reynolds 数时, 中性稳定性曲线的两个分支趋向于零。在中性稳定性曲线对应着最小 Reynolds 数的那点上, 仍然存在着一个既不增长也不衰减的扰动, 这个 Reynolds 数称作临界 Reynolds 数, 由下式给出,

$$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_{\text{crit}} = R_{\text{crit}} = 520(\text{失稳点})^0. \quad (16.22)$$

这是平板边界层的失稳点。引人注意的是, 对层流边界层只有一个相当狭窄的波长和频率范围是危险的。对边界层的不稳定性来

表 16.1 零攻角平板边界层(Blasius 剖面)中性扰动的波长 $\alpha\delta_1$ 及频率 $\beta\delta_1/U_\infty$ 随 Reynolds 数 R 的变化。(理论值根据 W. Tollmien^[76]; 数值结果引自 R. Jordinson^[47] 和 D. R. Houston, 两者均为平行流, 见图 16.10 和 16.11)

$R = \frac{U_\infty \delta_1}{\nu}$	下分支		上分支	
	$\alpha\delta_1$	$\frac{\beta\delta_1}{U_\infty}$	$\alpha\delta_1$	$\frac{\beta\delta_1}{U_\infty}$
1×10^4	0.017	0.0010	0.102	0.0153
5×10^3	0.021	0.0015	0.111	0.0178
600				
558				
530	0.281	0.110	0.324	0.130
$R_{\text{crit}} = 520$	0.302	0.120	—	—

1) 在 W. Tollmien 1929 年的第一篇论文中, 他指出该值为 420, 其后 H. Schlichting^[76] 在 1933 年完成的计算给出的值为 575, 这里采用 520 这个值是根据 Jordinson^[47] 在 1970 年完成的最新研究成果。

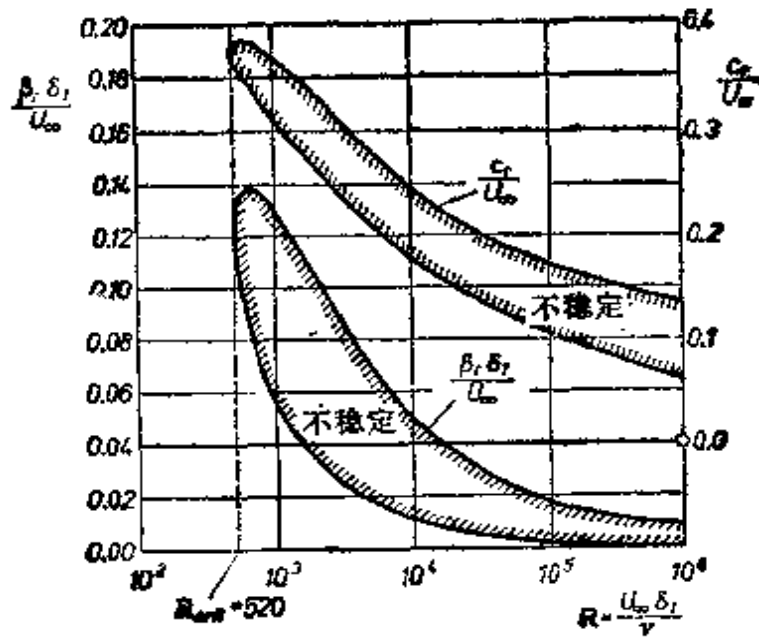


图 16.10 零攻角平板边界层(Blasius 剖面)中,中性稳定扰动的频率 β , 和波速 c , 随 Reynolds 数变化的曲线。理论值根据 W. Tollmien^[29]; 数值结果根据 R. Jordinson^[41]。另见表 16.1

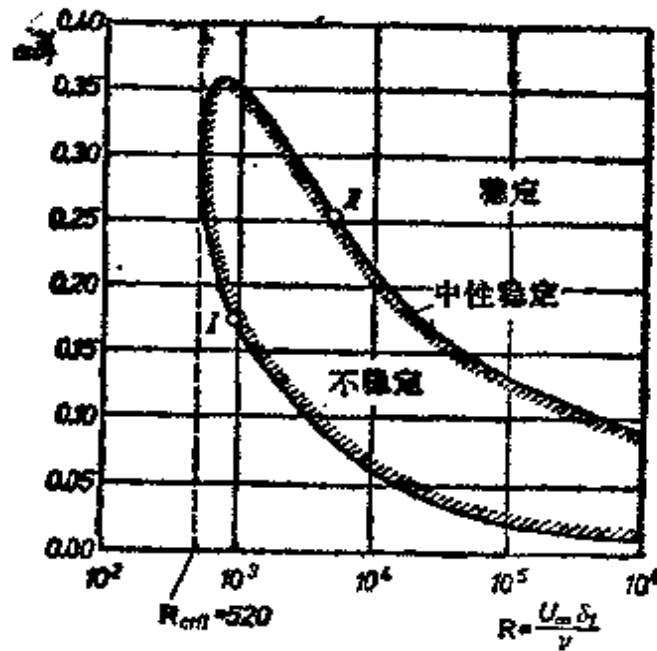


图 16.11 零攻角平板边界层(Blasius 剖面)中,中性稳定扰动的波长 $\alpha\delta$, 随 Reynolds 数变化的曲线。理论值根据 W. Tollmien^[29]; 数值结果根据 R. Jordinson^[41]。另见表 16.1。在图 16.20 中给出扰动 I 和 II 的振幅分布

说,一方面,有一个 Reynolds 数的下限,另一方面,存在着扰动特征量的上限。一旦这些特征量超过了它们的极限值,就不会引

起不稳定。这些极限值为

$$\frac{c_r}{U_\infty} = 0.39; \quad \alpha\delta_1 = 0.36; \quad \frac{\beta_r\delta_1}{U_\infty} = 0.15.$$

值得注意的是,与边界层厚度相比,波长是很大的。最小的不稳定波长是

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{0.36}\delta_1 = 17.58\delta_1 \approx 6\delta.$$

下一节将仔细地将上述理论结果与实验进行比较。在这里我们只想说明,由于不稳定扰动的增长,实际湍流发生于沿着失稳点到转换点之间的路径上,所以理论上确定的边界层最初变得不稳定的位置(失稳点)必定总是位于实验观察到的转换点上游。在现在所考虑的情形下,这个条件是满足的。第十六章 a 中我们已经说过,按照原有的测量结果,转换点发生于 $(U_\infty x/\nu)_{\text{crit}} = 3.5 \times 10^5$ 至 10^6 。利用式(7.37) $\delta_1 = 1.72\sqrt{\nu x/U_\infty}$,我们可以得到相应的临界 Reynolds 数

$$\left(\frac{U_\infty\delta_1}{\nu}\right)_{\text{crit}} = 950 \text{ (转换点)},$$

它比我们刚才得到的失稳点值 520 要大得多。

失稳点和转换点之间的距离取决于扰动的增长率和外流中扰动的类型(湍流度),但是研究中性稳定性曲线内部($\beta_i > 0$)参数的量级可以获得对扰动增长的实际机理的认识。H. Schlichting^[74]首先对平板进行了这种计算; S. F. Shen^[85]重复了这些计算。

为了获得对振荡运动机理的更清晰的认识, H. Schlichting^[77]计算了几个中性扰动的特征函数 $\phi(\eta)$, 这样他就能画出扰动做中性振荡运动的流线图。在图 16.14 中可以找到这种流线图的例子。

图 16.12 中的曲线表示平板边界层内不稳定扰动的增长。以 H. G. Ombrewski 等人^[6]最近进行的计算为基础,该图的曲线延伸到一个很宽的 Reynolds 数范围。由图可见,扰动增长率的最大值不是出现在高 Reynolds 数的地方($R \rightarrow \infty$),而是位于 $R =$

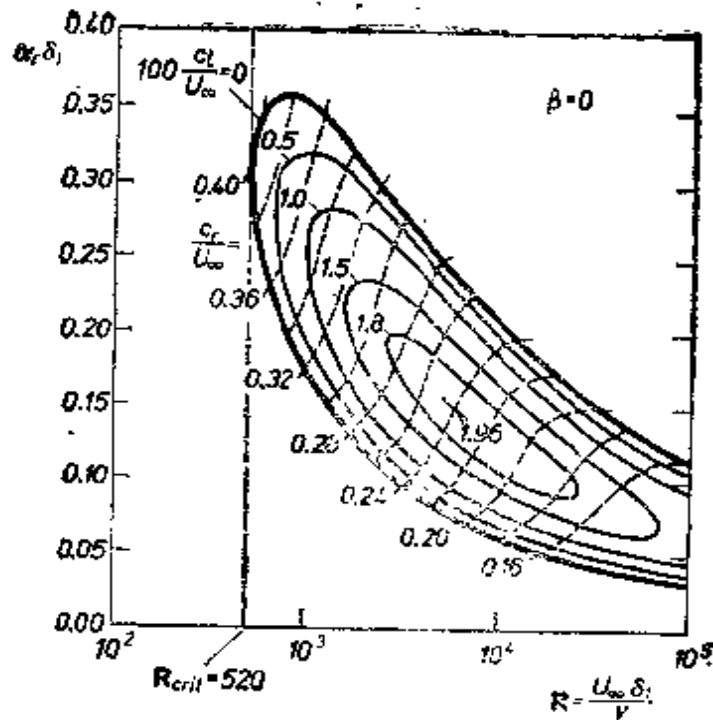


图 16.12 零攻角平板边界层,在一个相当宽的 Reynolds 数范围内,扰动时间增长率等值曲线,根据 H. G. Ombrewski 等人的结果^[43]

10^3 至 10^4 的中等大小的范围内。这是由于平板的中性稳定性曲线属于“粘性不稳定”型的(图 16.8 中曲线 b),在非常大的 Reynolds 数时不显示出扰动增长。图 16.13 画出在较低 Reynolds 数范围内扰动增长率的等值曲线。图 16.12 中 $c_i = \text{常数}$ 的曲线代表不稳定扰动随时间的增长率,因为 $\beta_i = c_i \alpha_i$ 。相反,在本图中, $\alpha_i = \text{常数}$ 的曲线代表向下游传播的扰动的空间增长率¹⁾。

后来, J. T. Stuart^[90] 和 D. Grohne^[34] 试图在确定不稳定扰

- 1) 当 $\alpha = \alpha_r$ 是实数和 $\beta = \beta_r + i\beta_i$ 是复数时,式(16.10)引入的扰动流函数描写扰动随时间的增长,因为

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp(\beta t) \exp[i(\alpha_r x - \beta_i t)].$$

另一方面,如果考虑式(16.10)中 $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ 是复数,而令 $\beta = \beta_r$ 是实数,则扰动的空间增长率可以写成

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp(-\alpha_i x) \exp[i(\alpha_r x - \beta_r t)].$$

所以, $\beta_i > 0$ 描述了不稳定扰动的增长率,而 $\alpha_i < 0$ 描述了它的空间增长率。中性稳定性对应着 $\beta_i = 0$ 和 $\alpha_i = 0$,这表明它对时间和空间的增长率相同。关于扰动的增长率和空间增长率(或衰减)之间关系的更深入的研究见 M. Gaster 的两篇论文^[32, 33], A. R. Wazzan^[104] 的论文将扰动的空间增长率与现在讨论的平板扰动的增长率进行了比较; J. R. A. Pearson^[68] 讨论了非牛顿流体情形。

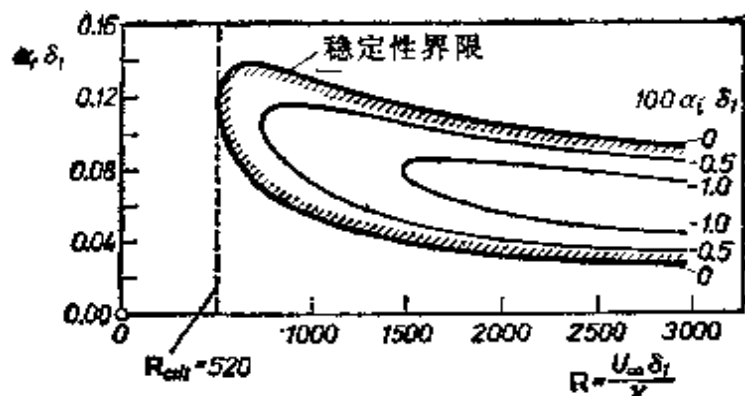


图 16.13 零攻角平板边界层, 在低 Reynolds 数范围内扰动空间增长率的等值曲线, 根据 R. Jordinson^[47] 的计算结果

动增长的过程中, 考虑到方程中非线性项的影响。这时, 重要的是要了解, 不稳定扰动的增长会使平均流动收缩得很厉害, 由于能量的传递正比于 dU/dy , 平均流动收缩反过来引起从主流向脉动运动传递能量的变化。这个变化的主要影响是, 在扰动发展的后期, 不稳定扰动不再按 $\exp(\beta_i t)$ 的比例增长, 而是趋向于与初始值无关的一个有限数值。

失稳点和转捩点之间的距离, 除了与扰动的增长率有关外, 还在很大程度上依赖于湍流度(参阅第十六章 d)。

经过十多年的时间以后, 上述稳定性理论才得到实验的验证。G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad^[62] 出色地完成了这个工作, 我们将在下一节中加以说明。当人们已经了解了这些实验结果以后, 为了满足稳定性理论发展的需要, C. C. Lin^[54] 重新进行了计算, 他的计算在所有的基本点上都与 W. Tollmien 和 H. Schlichting 的结果一致。

Navier-Stokes 方程: 在此之后很久, H. Fasel^[28b] 计算了人工诱发的周期性扰动的空间增长率, 他使用完全的 Navier-Stokes 方程和数值方法, 和以前发表的、以 Orr-Sommerfeld 方程为基础的线性稳定性的结果进行比较, 在所有基本点上都是吻合的, 参阅文献[33a]和[57d]

d. 稳定性理论和实验的比较

1. 早期的转捩测试结果 上面叙述的是小扰动理论早期的结果,由此得到的临界 Reynolds 数,其量级和实验测量的一致。按照该理论,只要 Reynolds 数超过某个临界值,在一定的频率和波长的范围内,小扰动将增长;波长较短或较长的扰动将被衰减掉。小扰动理论的结果表明,波长大于和等于边界层厚度的倍数的扰动是特别“危险”的,该理论还进一步假设,扰动的增长最终将导致从层流向湍流的转捩。可以这样说,扰动增长的过程将稳定性理论和存在着转捩这一实验事实联系起来。

在稳定性理论获得最初的成功之前的一段时间里, L. Schiller^[81] 对转捩现象,特别是当它发生在圆管中时,进行了广泛的实验研究。L. Schiller 的工作促进了转捩的半经验理论的发展,该理论的最重要的基础是假设转捩起源于管子进口段的有限扰动,或者,在边界层情形下,起源于外部来流中的有限扰动。这些想法在理论上得到进一步的发展,特别是 G. I. Taylor^[97] 的工作¹⁾。

究竟应该采用稳定性理论还是半经验理论,只有依靠实验来决定。早在稳定性理论确立之前, J. M. Burgers^[61], B. G. van der Hegge Zijnen^[40] 和 M. Hansen 已经对平板的转捩进行了详细的实验研究。测量的结果是临界 Reynolds 数在

$$\left(\frac{U_{\infty}x}{\nu}\right)_{crit} = 3.5 \times 10^5 \text{ 至 } 5 \times 10^5$$

的范围内。此后不久, H. L. Dryden^[16,17] 和他的合作者对这种流动进行了非常深入和仔细的研究。在研究过程中,使用了热线风速计,以空间坐标和时间为自变量将速度分布的大量数据画下

1) “在三十年代末期,盛行的观点可能如 G. I. Taylor^[97] 在 1938 年所表述的那样,稳定性理论与边界层转捩没有关系或关系很小。只有德国人对稳定性理论充满信心,他们研究该理论并报导了它和 Prandtl(1933) 在 Goettingen 水洞中的流场显示实验是定性地符合的。德国人是正确的:早期的实验未能检测出 Tollmien-Schlichting 波是由于它们被当时风洞中非常强的背景湍流度所淹没。”(摘自 F. M. White 的书^[107], 1974)

来。然而，实验未能发现理论确定的扰动增长的选择性。

大约与此同时，在 Goettingen 水洞中进行的平板实验提供了稳定性理论的定性的验证。图 16.15 的照片描写了一个长波长扰动形成的湍流区域。这些照片和示于图 16.14 的中性扰动的理论流线图象之间的相似是无可辩驳的。

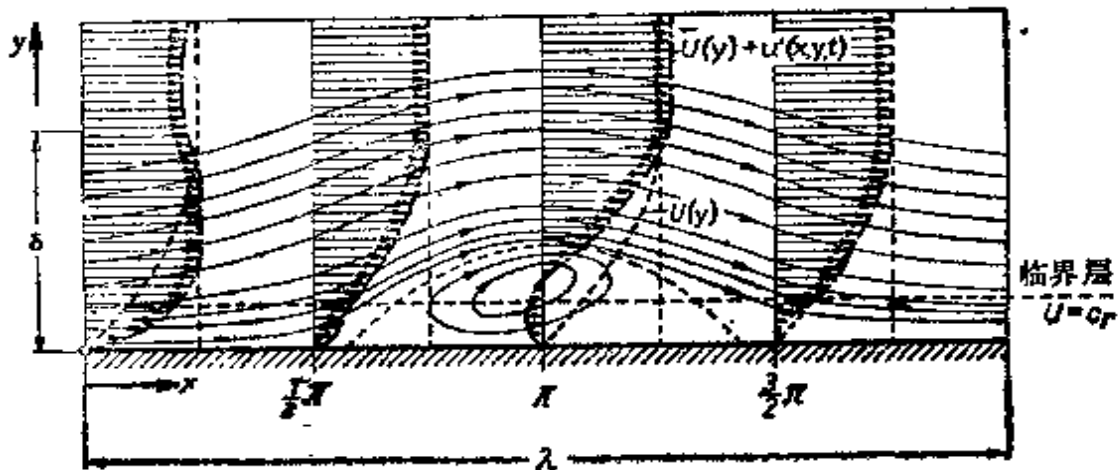


图 16.14 零攻角平板边界层中，中性扰动的流线和速度分布图
(图 16.11 中的 I 型扰动)

$U(y)$ = 平均流动; $U(y) + u'(x, y, t)$ = 扰动速度分布; $U_\infty \delta_1 / \nu = 893$ = Reynolds 数; $\lambda = 40\delta_1$ = 扰动的波长; $c_s = 0.35U_\infty$ = 扰动波的传播速度; $\int_0^\delta \sqrt{u'^2} dy = 0.172U_\infty \delta$ = 扰动强度

在讨论边界层转换现象时，必须引入一个度量外流“湍流度”的十分重要的参数。它的重要性首先是在不同的风洞中测量球的阻力时认识到的。当时曾发现球的临界 Reynolds 数，即对应于阻力系数突然下降的 Reynolds 数值（见图 1.5）非常明显地随来流中扰动强度的变化而变化。可以通过对脉动湍流速度（例如整流网后所产生的）的时间平均值来定量地测量这个参数（参阅第十八章 f）。记三个速度分量平方的时间平均值为 $\overline{u'^2}$ ， $\overline{v'^2}$ ， $\overline{w'^2}$ ，我们定义流动中的湍流度为

$$T = \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} / U_\infty,$$

式中 U_∞ 代表流动的平均速度。通常，离整流网或蜂窝器一定距



图 16.15 沿平板的流动。湍流起源于长波长的扰动,引自 L. Prandtl^[60]
 这些照片是利用低速电影摄影机拍摄的,将摄影机装在沿流动方向运动的小车上,因此,摄影机一直对准同一群旋涡。将铝粉撒在水面上来显示流动

离以后,风洞中的湍流变成**各向同性的**,即三个分量上的脉动速度平方的平均值相等,

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}.$$

在这种情形下,完全可以只限于考虑沿流动方向的脉动速度 w' ,并且设

$$\mathbf{T} = \sqrt{\overline{w'^2}}/U_{\infty}.$$

湍流度的这个更简单的定义在实际中得到了广泛的应用,即使在湍流不是各向同性的情形下也是如此。在不同风洞中的测量表明球的临界 Reynolds 数非常强烈地依赖于湍流度 \mathbf{T} ,当 \mathbf{T} 减小时,

R_{crit} 的值增加得很快。1940年以前所建造的旧式风洞的湍流度其量级为 0.01。

2. 稳定性理论的实验验证 1940年, H. L. Dryden 在 Washington 美国国家标准局 G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad 的协助下, 开始着手一项新的广泛的计划, 对从层流向湍流转换的现象进行实验研究^[32]。与此同时, 湍流度对转换过程起决定性作用的这个事实已经为人们所接受。因此, 为了进行这些实验研究, 建造了一个专门的风洞, 使用大量合适的整流网和很大的收缩比, 湍流度减小到前所未有的非常低的数值,

$$T = \sqrt{x^2}/U_{\infty} = 0.0002,$$

然后利用这个流动来进行零攻角平板的层流边界的深入研究。实验结果发现在非常低的湍流度下, 即 T 的量级 < 0.001 时, 以前确定的临界 Reynolds 数 $R_{crit} = 3.5 \times 10^5$ 至 5×10^5 , 现在已经增加到

$$\left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{crit} \approx 2.8 \times 10^6,$$

见图 16.16。此外还发现, 如图 16.16 所揭示的那样, 湍流度减小引起临界 Reynolds 数增加, 起初是很快的, 在 T 达到 0.001 以后, 临界 Reynolds 数接近 $R_{crit} = 2.8 \times 10^6$; 在更低的湍流度时临界 Reynolds 数保持不变。这证明了平板临界 Reynolds 数存在着上限。A. A. Hall 和 G. S. Hislop^[39] 较早得到的测量结果与图 16.16 中的曲线十分吻合。

我们将要讨论的所有实验测量都是在湍流度 $T = 0.0003$ 时进行的。用热线风速计和阴极射线示波器测量速度。测量的内容包括确定沿平板几个位置上的速度随时间的变化。首先在正常条件下(即存在着自然扰动)进行, 然后在人工产生扰动的条件下进行。将薄的金属片放在离壁面 0.15mm 处, 用电磁方法激振, 产生有固定频率的人工扰动。即使是在自然扰动的情形(即无激振时)下, 实验也清楚地显示出存在着不断增长的正弦形扰动, 见图 16.17。由于湍流度极低, 在边界层中几乎没有任何不规则的脉

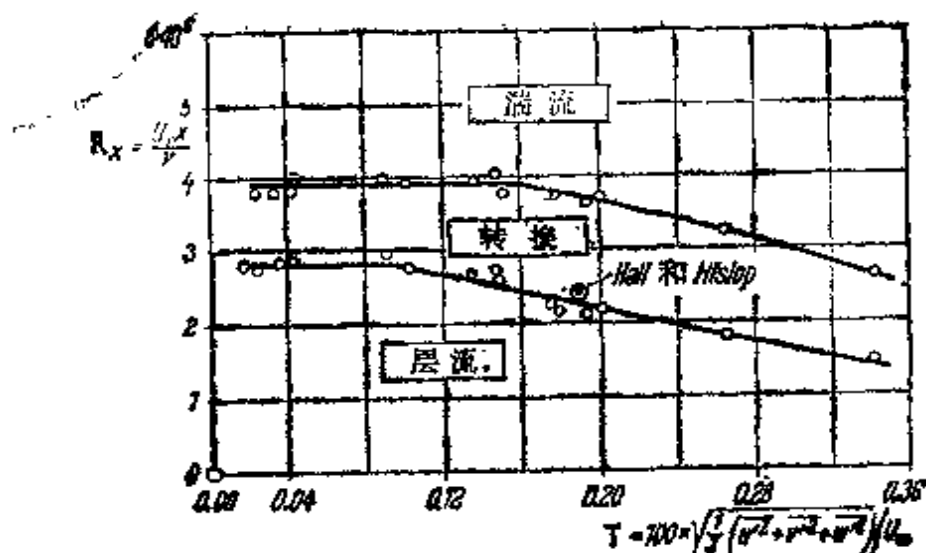


图 16.16 湍流度对零攻角平板临界 Reynolds 数的影响，根据 Schubauer 和 Skramstad^[12]的测量结果

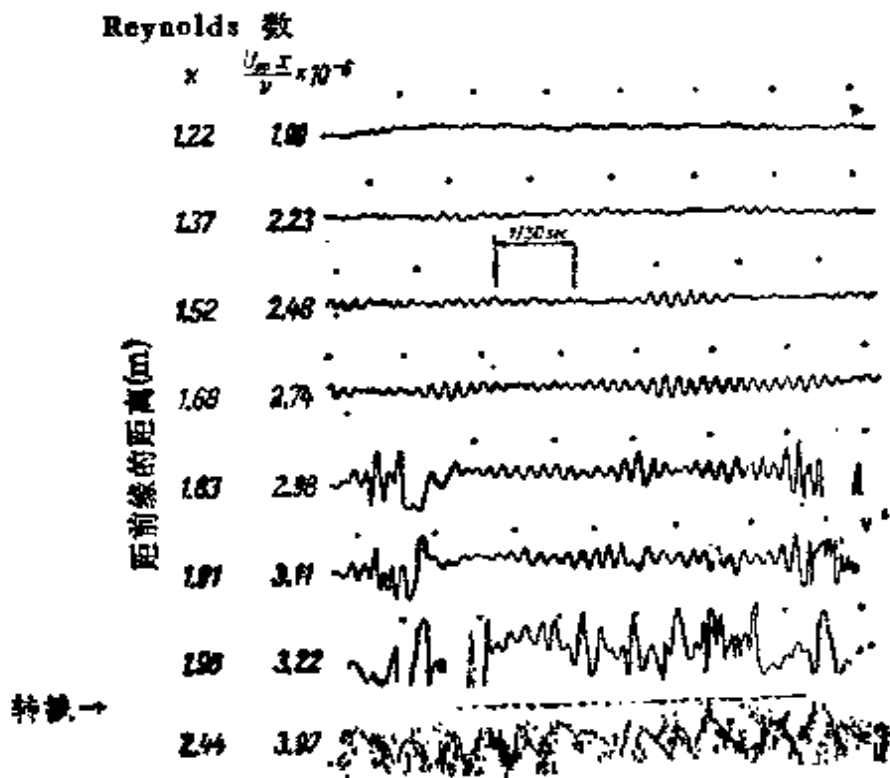


图 16.17 在气流中，平板层流边界层由于随机(“自然”)扰动引起的脉动速度分量 u' 的波形图。从层流向湍流转换的测量是 Schubauer 和 Skramstad^[12]进行的

离壁面的距离: 0.57 mm; 来流速度 $U_\infty = 24 \text{ m/s}$;
扫描时间间隔: 1/30 s

动，但是，当接近转换点时，却出现了几乎纯正弦形的脉动，它们的振幅起初很小，然后沿下游方向迅速增长。在转换点前不久，出

现振幅很大的脉动。在转捩点处,这些正常的脉动不存在了,突然变成高频无规则的图形,这正是湍流运动的特征。

我们所讨论的这些测量结果也解释了这个问题:为什么在早期的实验中未能检测出这些不断增长的正弦脉动。这就是说,如果湍流度从上述的 $T = 0.0003$ 增加到 0.01 , 即增加到早期实验测量通常遇到的数值,转捩是直接由随机扰动引起的,正弦脉动增长的选择性并不占据优势。

在人工扰动的实验过程中,将一个宽约为 30cm , 厚 0.05mm , 长 2.5mm 的金属片放在距壁面 0.15mm 处,由交流电诱导的磁场来激励。用这样的方法可以产生规定频率的二维扰动,这正是理论所要求的。这时会同时出现增长、衰减和中性的三种脉动,仍旧用热线风速计进行测量。测量的结果画在图 16.18 中,图中用虚线连接的实验点表示测量的中性脉动。引自图 16.12 的中性稳定性理论曲线也已画出来供比较,可见它与实验结果符合得很好。

为了获得对转捩机理更深刻的认识,测量了距壁面不同距离上几个中性扰动的速度分量 u' 的振幅。图 16.19 表示了速度分量 u' 正弦脉动的波形图。每一个波形图含有两个同步曲线,一条是在距壁面一个固定距离上测量的,另一条是在不同的距离上测量的。 u' 脉动的振幅沿边界层厚度的变化见图 16.20。该图画出了 Schubauer 和 Skramstad 的结果,两条曲线对应于在图 16.11 中标着 I 型和 II 型的中性扰动。实验结果与 H. Schlichting^[71] 的理论吻合得很好。

J. A. Ross 等人^[74]最近在一座湍流度很低($T = 0.0003$)的风洞中非常仔细地完成了上述实验。他们同样报导了理论与实验符合得相当好。

我们前面已经说过,只有当能够产生湍流度很低的来流时,才第一次有可能对稳定性理论从实验上加以验证。早期在湍流度 $T = 0.01$ 时进行的实验验证了这样一个设想:观测到的转捩点位于理论估算的失稳点下游。然而,失稳点和转捩点之间的距离明显地依赖于湍流度。可以预料,该距离应随湍流度的增加而减

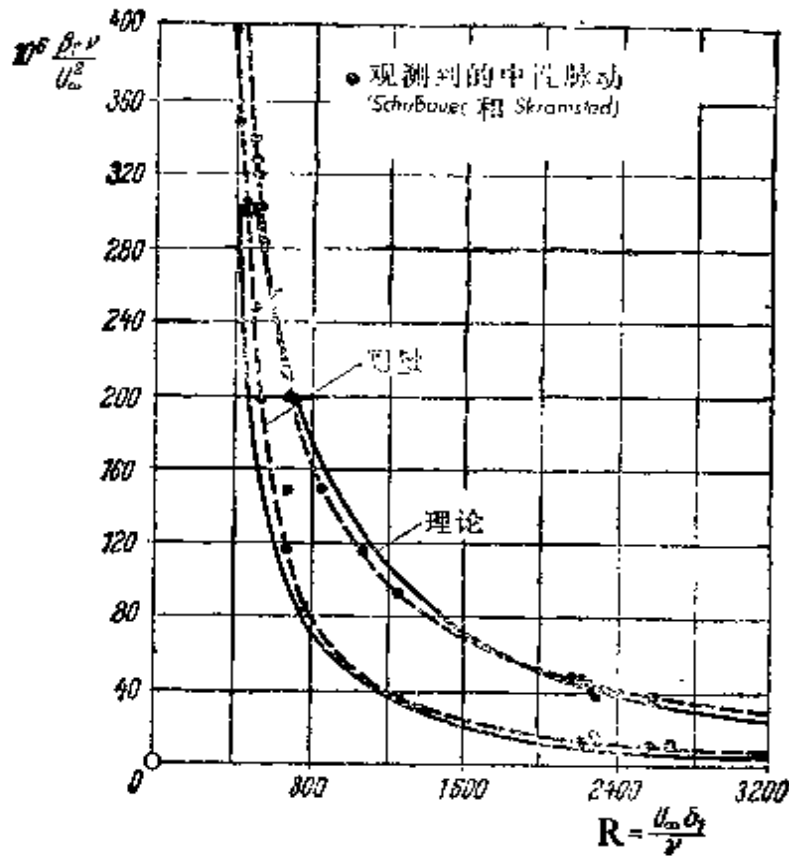


图 16.18 零攻角平板边界层, 中性频率扰动的稳定性曲线, 根据 Schubauer 和 Skramstad^[362] 的测量结果. 理论引自 Tollmien^[363]

小, 这是因为在高湍流度时, 较小的扰动增长就足以使不稳定扰动演变成湍流。根据 P. S. Granville^[361] 的实验结果, 在图 16.21 中画出的平板边界层的曲线说明了这个结论。用动量厚度定义的 Reynolds 数在转捩点和失稳点之间的差值, 即

$$\left(\frac{U_\infty \delta_2}{\nu}\right)_{tr} - \left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_i$$

被用来度量转捩点和失稳点之间的距离, 并且在图中画出其随湍流度的变化。对平板的失稳点, 采用了下面的数值:

$$\left(\frac{U_\infty \delta_2}{\nu}\right)_i = \frac{1}{2.6} \left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_i = \frac{520}{2.6} = 200.$$

图 16.21 将 G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad^[362] 在非常低湍流度下进行的测量与早期 Hall 及 Hislop 在高湍流度进行的测量联系在一起。所有的实验点描绘出一条曲线。只有湍流度

达到很高的数值，即 $T = 0.02$ 至 0.03 时，转折点才和失稳点重合。参考文献[1]。

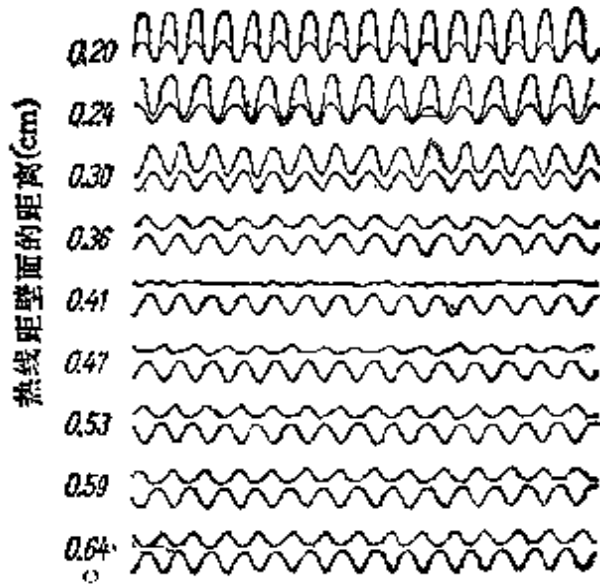


图 16.19 Schubauer 和 Skramstad^[8,22] 测量的层流边界层中的脉动
 两台热线风速计放在激振片后 30cm 处同时记录速度。两条曲线中下面的一条对应于将热线放置在距壁面 1.4mm 处；上面的一条对应于将热线放置在距壁面不同位置上，如图所示。激振片位于平板前缘后 90cm 处。频率 70s^{-1} ，速度 $U_\infty = 13\text{m/s}$

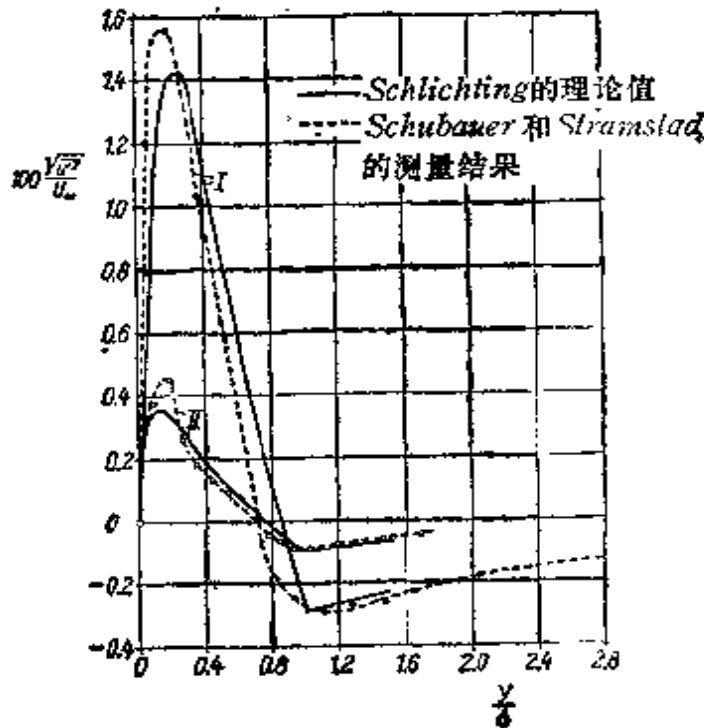


图 16.20 零攻角平板边界层中，两个中性扰动的脉动速度 v' 的振幅变化，根据 Schubauer 和 Skramstad^[8,22] 的实验结果，理论引自 Schlichting^[17]，标着 I 和 II 的曲线对应于图 16.11 中两种中性扰动 I 型和 II 型

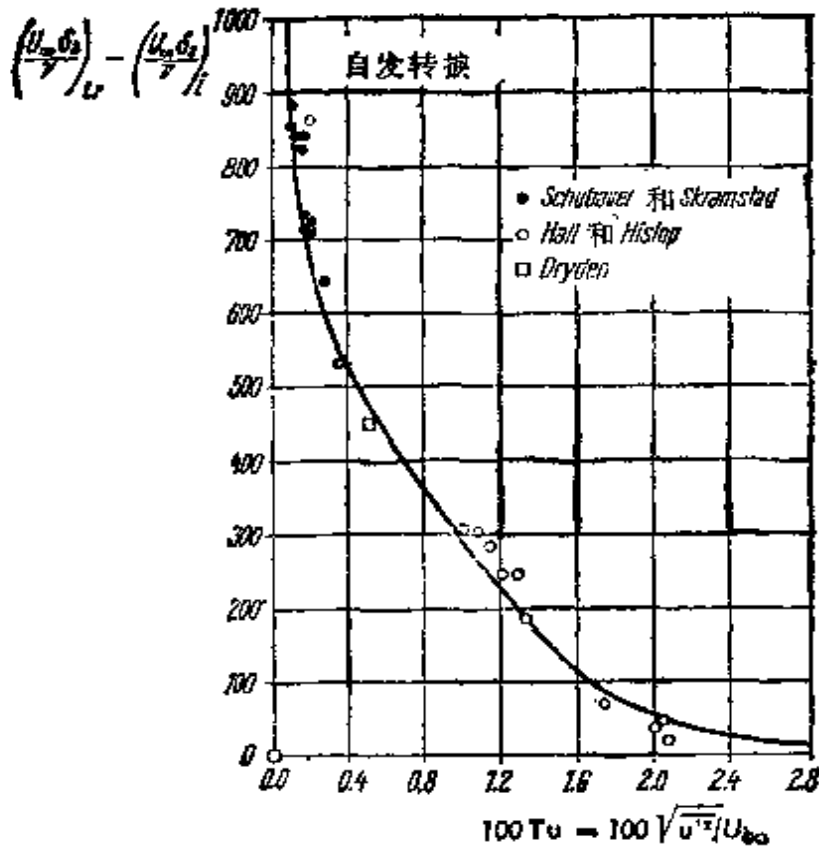


图 16.21 平板边界层转换的测量结果，根据 P. G. Granville^[36]，转换点和失稳点的 Reynolds 数差值随湍流度的变化。随着湍流度增加，转换点向失稳点靠近

其他速度剖面：我们现在简略地叙述对其他速度剖面稳定性的研究，在第十七章中将作更详细的说明。

G. Rosenbrook^[73] 从实验上证实了 Lord Rayleigh 和 W. Tollmien 提出的具有拐点的速度剖面的不稳定性定理，他还指出理论估算和实验之间是完全符合的。

S. Hollingdale^[43] 的论文研究了物体尾迹的速度剖面的稳定性。N. Curle^[40] 研究了层流射流的稳定性。最后还可以提到 A. Michalke 和 H. Schade^[50]，T. Tatsumi^[56]，L. N. Howard^[46]，以及 C. W. Clenshaw 和 D. Elliot^[11] 的工作，其中最后一篇参考文献确立了平面射流稳定性界限 $R_{crit} = 6.5$ ，该 Reynolds 数是按在一半高度时射流的宽度定义的。

C. C. Lin^[54] 首先发表了二维槽内流动的线性稳定性分析，他得到基于最大速度 U_m 和半槽宽度 b 的临界 Reynolds 数为

$$R_{crit} = \left(\frac{U_{\infty} b}{\nu} \right)_{crit} = 5314.$$

后来 L. H. Thomas^[183] 作的更仔细的计算确认了这个结果。K. Stewartson^[88] 和 J. T. Stuart^[90] 应用非线性稳定性理论研究了这种流动。还可参阅 R. G. DiPrima 等人^[24] 和 J. T. Stuart^[91] 的工作。A. Michalke 对该课题研究领域内的工作作了总结。M. Ikeda^[46b] 的文章也是令人感兴趣的。

H. Bergh^[9] 拍摄了翼型上边界层转捩区的照片，复制在图 16.22 中。拍摄时用扬声器产生人工扰动，它们在边界层中诱发出的一系列规则的波形，其振幅沿下游不断增长。研究这张照片可以形成关于扰动增长机制的若干细节的清晰的思想。参阅文献[1]。

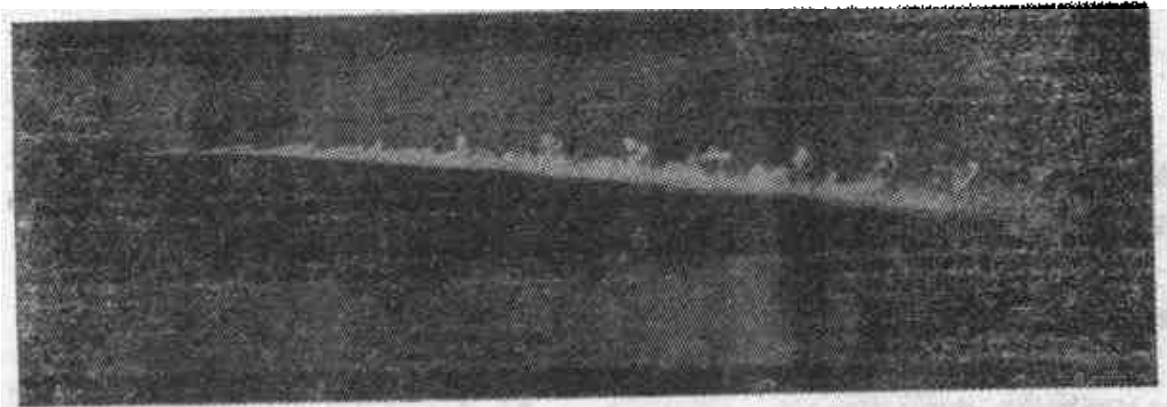


图 16.22 有周期性扰动时，翼型上边界层流动的烟流照片，引自 H. Bergh^[9]
 来流速度 $U_{\infty} = 4 \text{ m/s}$;
 扰动频率 $\beta_1 = 145 \text{ 1/s}$

三维流：至此所引证的实验事实都表明转捩起源于二维扰动的增长。G. B. Schubauer 和 H.K. Skramstad^[182]，G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[85] 以及 I. Tani^[92,95] 非常深入地研究了这些扰动的增长过程，其结果是，不稳定平面波的增长总是产生明显的三维流动结构。当波的振幅增长到一定大小以后，出现强烈的周期性非线性扰动增长。该过程伴随着能量沿横向的传递并且破坏了主流原有的二维特性。这样，三维不稳定扰动发展的结果是层流转捩成湍流。与此同时，出现了涡轴沿流动方向的旋涡，在边界层内某种程度上亦是如此。

为了进一步了解这个问题,可以研究 G. B. Schubauer, P. S. Klebanoff 和 K. D. Tidstrom^[49,49,50], H. Goertler 和 H. Wittig^[55],以及 C. C. Lin, D. J. Benny 和 H. P. Greenspan^[56,3,37]的工作。

本章中所报导的实验结果显示它与层流稳定性理论吻合得非常一致,使得这些理论现在可以被认为是流体力学中已经得到证实的内容。实验完全证实了 O. Reynolds 的假设:从层流向湍流转换的过程是层流不稳定性的结果;它确实表示了一种可能的或可观察到的转换机制。至于稳定性理论是否描述了这个过程完整的图象和它是否是自然界中所遇到的唯一的机制,这个问题现在依然有待回答,并引起许多研究者的注意。

e. 来流中的脉动对转换的影响

上节叙述的实验发现了外流的湍流度(即在来流中存在着无规则的、与时间相关的脉动)对转换有强烈的影响,在此之后,研究来流中规则的脉动对转换的影响是很自然的事情。在第十五章 e3 和 e3 中,讨论了在外流 $U(x,t)$ 上叠加形式为

$$U(x,t) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) \cos \pi t$$

的小振幅($\varepsilon \ll 1$)脉动对层流边界层结构的影响。

因为随着湍流度增加转换 Reynolds 数明显地减小,我们可以十分自然地假设随着外流周期性变化的振幅 $\Delta U = \varepsilon U_1$ 的增加,应该产生类似的作用。J. H. Obremski 和 A. A. Fejer^[63a],以及 J. A. Miller 和 A. A. Fejer^[60a] 已经从实验上证实了叠加在外流上的脉动对层流边界层转换的影响。他们首先把注意力集中在平板边界层(Blasius速度剖面)。在这种情形下,外流的速度分布是

$$U(x,t) = U_\infty + \Delta U \cos \pi t,$$

其中 U_∞ 是来流速度的时间平均值,与 x 无关。 ΔU 是外流中随时间脉动的振幅, π 表示脉动的圆频率。文献[63a]报道的实验是在不可压缩流动中进行的,

$$U_\infty = 20 \text{ 至 } 40 \text{ m/s}, \quad \Delta U/U_\infty = 0.014 \text{ 至 } 0.29, \quad \text{频率 } \pi = 4 \text{ 至 } 62 \text{ 1/s}.$$

这些实验研究进行得非常仔细,它们提供了下列基本结果:

- (a) 转换开始发生的临界 Reynolds 数, $R_{x_{cr}} = U_\infty x_{cr} / \nu$, 仅与外部脉动的振幅 $\Delta U/U_\infty$ 有关。
- (b) 无量纲转换长度,即转换开始发生到它完成之间的距离 $R_{x_{cr}} - R_{x_{cl}}$, 仅依赖于外部脉动的频率¹⁾。

1) 转换开始于 $R_{x_{cr}} = U_\infty x_{cr} / \nu$, 即图 16.16 中下方的曲线。转换完成于 $R_{x_{cl}} = U_\infty x_{cl} / \nu$, 图 16.16 中上方的曲线。在从 x_{cr} 至 x_{cl} 这段距离上,观测到间歇因子从 $\gamma = 0$ 增加到 $\gamma = 1$,我们解释这个现象为在这个区域存在着“转换中的湍流”。

(c) 显示速度随时间变化的记录表明转换的特征在于它是有规律的和间歇性的。测量结果说明,转换可以用下列“非定常” Reynolds 数来描述:

$$R_{Ns} = \Delta U \times L / 2\pi\nu,$$

因为外部脉动流动的特征长度是 $L = U_\infty / \pi$, 所以可以将“非定常” Reynolds 数表示为

$$R_{Ns} = \frac{U_\infty^2 (\Delta U / U_\infty)}{2\pi\nu\pi}$$

其中 $\Delta U / U_\infty$ 是脉动的无量纲振幅, $\pi\nu / U_\infty^2$ 是无量纲频率。实验说明, 当“非定常” Reynolds 数大时, 即当 $R_{Ns} > 27000$ 时, 转换点的 Reynolds 数 $R_{x,cr} = U_\infty x_{cr} / \nu$ 比起定常流来总要减小很多。在这些实验中, 定常流动中平板起始转换 Reynolds 数 $R_{x,cr} = 1.8 \times 10^6$ 。按照图 16.16, $R_{x,cr}$ 这个数值近似地对应于来流湍流度 $T = 0.28\%$ 。

人们至今还没有提出当外部流动脉动时, 边界层稳定性令人满意的理论^[116]。在脉动流动中观察到间歇性的湍流, 它的频率 β , 和由稳定性理论得到的 Tollmien-Schlichting 类型自然中性扰动的频率是同一量级的, 参阅图 16.18。实验研究中脉动频率 π 比自然中性扰动的频率小 100 倍左右。

R. J. Lochrke, M. V. Morkovin 和 A. A. Fejer^[116] 最近发表了关于来流脉动时的转换过程的述评。

f. 结 论

在本章的结尾, 我们希望用总结的方式叙述在低湍流度的来

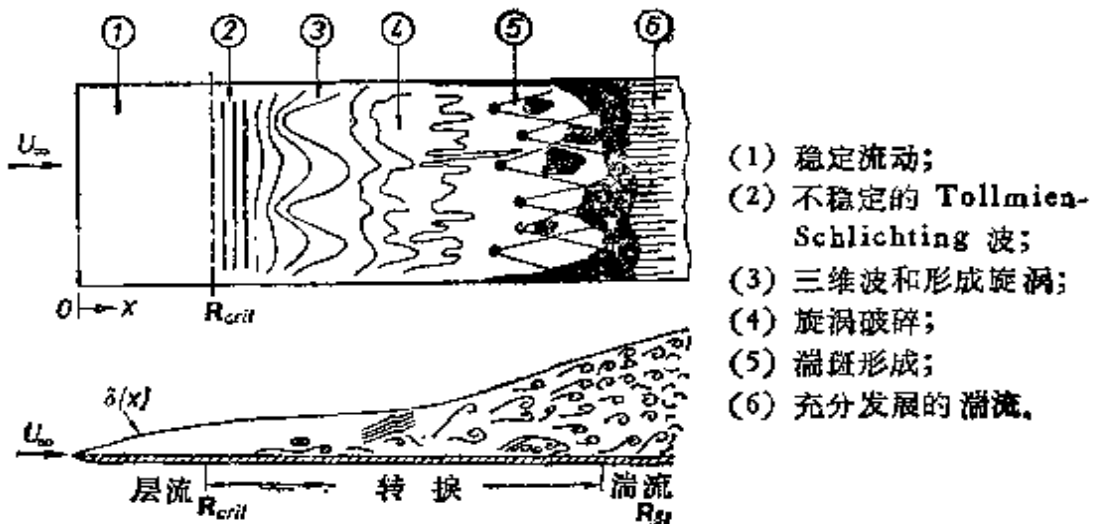


图 16.23 零攻角平板边界层转换区的理想化图示, 引自 F. M. White^[107]

流条件下, 平板边界层转换过程, 正如从图 16.23 所见, 从前缘开始, 流动经历下列几个阶段:

(1) 前缘之后的稳定层流;

- (2) 具有二维 Tollmien-Schlichting 波的不稳定层流；
- (3) 不稳定层流的三维扰动波开始发展并形成旋涡；
- (4) 在局部涡量很高的地方湍流猝发；
- (5) 在湍流脉动速度大的地方形成湍斑；
- (6) 湍斑聚结成充分发展的湍流边界层。

在讨论图 10.13 时我们已经提到过，在大多数情形下，从湍斑向充分发展的湍流转捩与分离泡的形成相关。现在，我们只能对阶段(1)、(2)和(3)进行理论分析，还需要进行很多理论研究工作，才有可能对其余各阶段进行分析。

第十七章 湍流的起源 II¹⁾

压力梯度、抽吸、可压缩性、传热以及粗糙度对转捩的影响

引 言

在第十六章中叙述的结果已经原则上显示了小扰动方法可以用来研究层流转捩成湍流的现象。因此，我们可以期望，除了至今所讨论的 Reynolds 数外，小扰动理论还能给我们提供关于其它对转捩有重要影响的参数的信息。在第十六章 b 中，我们已经简略地叙述了外流中压力梯度对边界层的稳定性，以及由此对转捩都有很大的影响。顺压梯度使流动稳定，逆压梯度减小它的稳定性。体积力（例如流线弯曲的流动中的离心力和非均质流体中的浮力）对转捩来说是十分重要的。用抽吸或者引射的方法控制边界层及其对转捩的影响的问题近来变得越来越重要了（参阅第十四章）。抽吸产生稳定效果，但引射促使边界层失稳。在高速流动的情形下，必须认为流体是可压缩的。从壁面向外传热或者向壁面内传热（冷却或加热流体）对转捩有重要的影响。从流体向壁面传热有很高的稳定效果，但是如果是从壁面向流体传热，效果相反。最后，关于粗糙度对转捩影响的问题有着非常实际的重要意义。

本章将包括对所有这些问题的评述。由于压力梯度在实际应用中极其重要，我们首先来研究它的影响。关于这方面读者可以参考两篇总结性的述评，一篇是 1969 年 I. Tani^[338] 写的，另一篇是

1) 本章 e 节已经完全重新改写过，为此我十分感谢 California 理工学院 (Pasadena) 喷气推进实验室 L. M. Mack 博士

E. Reshotko^[194a]于1976年发表的,前一篇集中在不可压缩流动,而后一篇着重在可压缩流动和传热.我们希望再一次提醒读者注意,J. T. Stuart^[227a]关于这个课题所做的综述虽然有些过时,但极为精彩.

a. 压力梯度对沿光滑壁面的边界层转换的影响

在第十六章中研究了零攻角平板边界层的稳定性.这种边界层有一个特殊的性质:从前缘向后,不同位置上的速度剖面是彼此相似的(见第七章).这种相似性是外流中无压力梯度的结果.另一方面,在任意柱体形状的情形下,压力梯度沿壁面逐点变化,一般说来,其速度剖面不再是彼此相似的.在压力沿下游减少的区域中,速度剖面没有拐点,是如图16.9e所示的那种类型,但是在压力沿下游增加的区域中,速度剖面确实有拐点,如图16.9g所示的那种类型.在平板情形下,所有速度剖面具有相同的稳定性界限,即 $R_{crit} = (U_{\infty} \delta_i / \nu)_{crit} = 520$;与此相反,在物体为任意形状的情形下,各个速度剖面具有明显不同的稳定性界限.顺压梯度时,其值高于平板稳定性界限,逆压梯度时,其值低于平板的值.因此,为了确定特定形状物体失稳点的位置,必须进行如下的计算:1. 确定无摩擦流动沿物体周线的压力分布;2. 确定在该压力分布下的层流边界层;3. 确定这些不同的速度剖面的稳定性界限.确定压力分布的问题属于位势理论.位势理论能够提供合适的计算压力分布的方法,例如 T. Theodorsen 和 J. E. Garrick^[242]以及 F. Riegels^[193]所介绍的方法.在第十章中已经给出计算层流边界层的适当的方法.我们现在详细地讨论第三步,即稳定性计算.

由第七章层流边界层理论,我们知道,一般来说,壁面的曲率对柱体边界层发展的影响很小,只要壁面曲率半径比边界层厚度大得多,这个结论就是成立的.这就是说,在分析这种物体的边界层的形成时,可以忽略离心力的影响.因此,这种边界层被视作如同在平板上的边界层一样,但是受到绕该物体位势流所确定的压力梯度的影响.这一点同样适用于确定压力梯度不为零时边界层

的稳定性界限。

在平板情形下,外流是均匀的, $U_{\infty} = \text{常数}$ 。与此相反,我们现在必须对付这样的外流,其速度 $U_m(x)$ 是长度坐标的函数。速度 $U_m(x)$ 与压力梯度 $\frac{dp}{dx}$ 通过 Bernoulli 方程相联系

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_m \frac{dU_m}{dx}. \quad (17.1)$$

尽管外流速度依赖于长度坐标,但是如 J. Pretsch⁽¹⁷⁷⁾ 所证明的那样,用无压力梯度的稳定性分析方法来分析有压力梯度的层流的稳定性是可能的(第十六章),还可以用速度只依赖于横坐标 y 的平均流动 $U(y)$ 来研究。压力梯度对稳定性的影响是通过由 $U(y)$ 给出的速度剖面的形式体现出来的。在第十六章 b 中,我们已经说过,一个速度剖面的稳定性界限强烈地依赖于它的形状。有拐点的速度剖面的稳定性界限比无拐点的剖面低得多(拐点准则)。现在,因为按照式(7.15)

$$\mu \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_{wall} = \frac{dp}{dx}, \quad (17.2)$$

压力梯度控制着速度剖面的曲率,所以稳定性界限对速度剖面形状的强烈依赖性就相当于压力梯度对稳定性的强烈影响。因此,说加速流动 $\left(\frac{dp}{dx} < 0, \frac{dU_m}{dx} > 0, \text{顺压梯度} \right)$ 比减速流动 $\left(\frac{dp}{dx} > 0, \frac{dU_m}{dx} < 0, \text{逆压梯度} \right)$ 要稳定得多是正确的。

G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad (第十六章 d) 用实验证实了上述理论分析预示的压力梯度对稳定性和小扰动增长的强烈影响。图 17.1 中的曲线表示有压力梯度平板上速度脉动的波形。该图的上半部分表明大小为动压百分之十的压力降使得振荡完全阻尼掉,随后压力增加,只增加了动压的百分之五,这就不仅引起扰动强烈地增长,而且立即产生转捩(这里应注意最后两个波形图的尺度减小了)。

在稳定性计算中,方便的做法是用速度剖面的形状因子表示

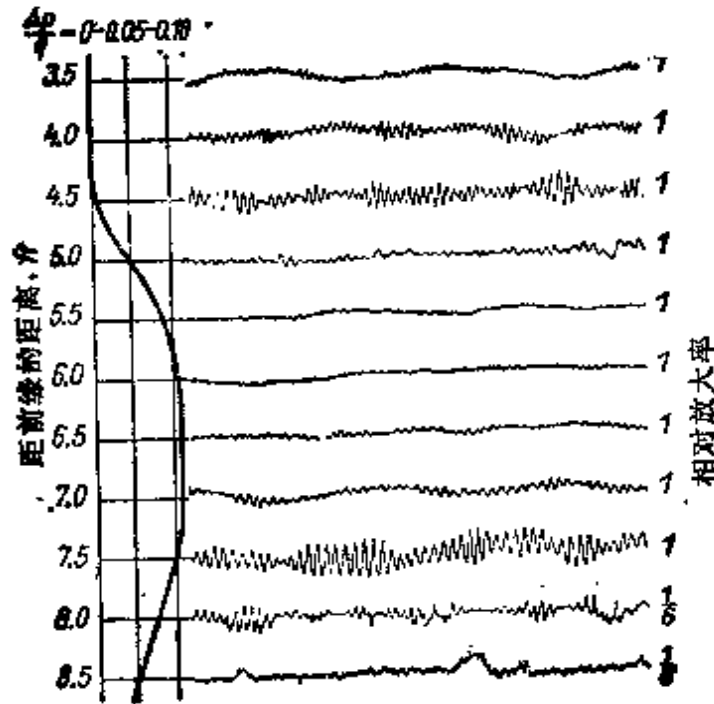


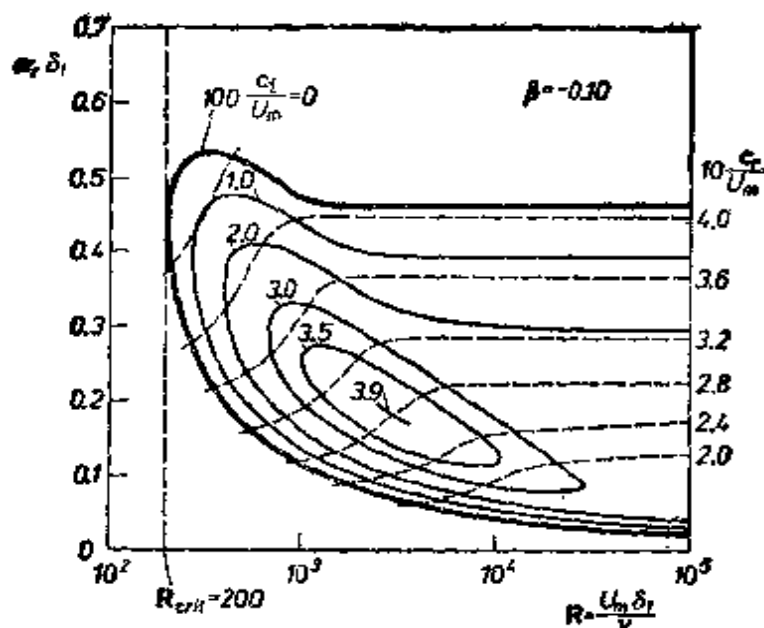
图 17.1 有压力梯度的层流边界层中速度脉动的波形图, 根据 G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad 的测量. 减小压力产生对脉动的阻尼作用, 增加压力引起脉动强烈地增长并造成转换.

测量位置距壁面 0.5mm; 速度 $U_{\infty} = 29\text{m/s}$

压力梯度的影响, 并且为了简单起见, 限定单参数族的层流速度剖面. Hartree 绕楔流动表示了这种单参数族速度剖面的一个例子, 而且它本身还是边界层方程的精确解. 这种流动的外流速度为

$$U_{\infty}(x) = u_1 x^m, \quad (17.2a)$$

在图 9.1 中还画出了有关的速度剖面, 其中 m 表示速度剖面的形状因子, 楔角为 $\beta = 2m/(m+1)$. 当 $m < 0$ (压力增加) 时, 速度剖面有拐点; 当 $m > 0$ (压力减小) 时, 速度剖面没有拐点. 早在 1941 年 J. Pretsch^[178, 179] 就完成了一系列单参数族速度剖面的稳定性计算. 后来在 1969 年 H. G. Ombrewski 又大大扩充了这些计算(见第十六章文献[63]), 他不仅计算了临界 Reynolds 数, 而且计算了不稳定扰动的增长率. 计算结果揭示出形状因子 m 对临界 Reynolds 数的影响要比早期的工作所表明的更强烈. 图 17.2 描述了其中一个计算结果, 即在由式 (17.2a) 给出的外流条件下



· 图 17.2 减速流动边界层扰动的时间增长率等值曲线。来流速度为 $U_m = Cx^m$ ，数值计算的 Reynolds 范围很大，根据第十六章文献 [63]。 $m = \beta / (2 - \beta) = -0.048$ ， $\beta = -0.1$

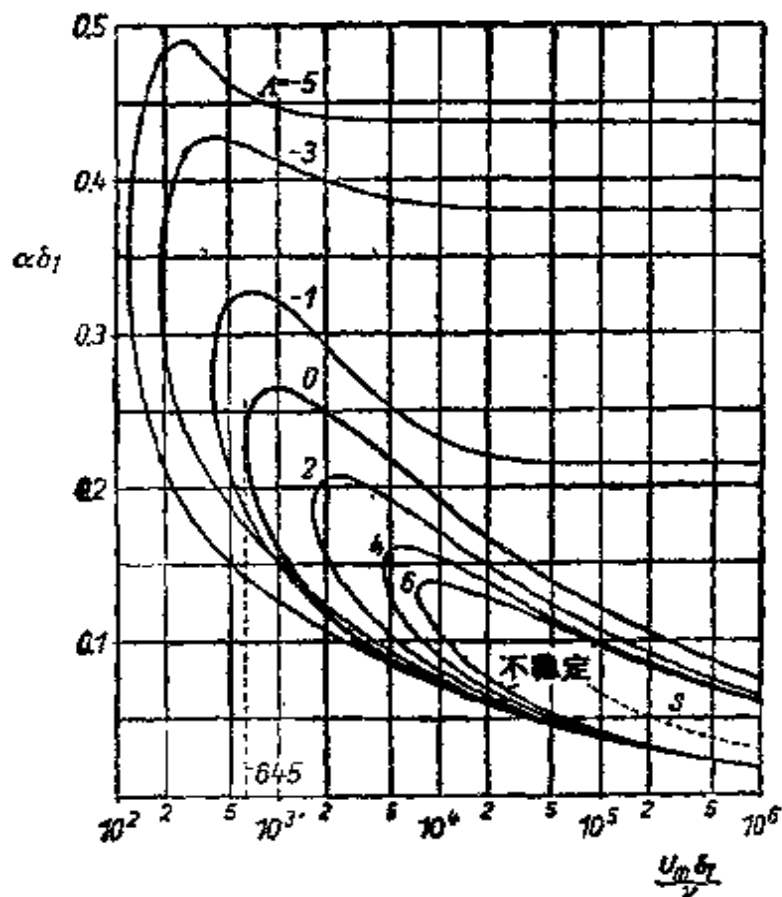


图 17.3 压力减小 ($\Delta > 0$) 和压力增加 ($\Delta < 0$) 时层流边界层的中性稳定性曲线。定义速度剖面的形状因子为 $\Delta = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx}$ ，另见图 10.5

(其中 $m = -0.048$, 对应于 $\beta = -0.1$), 相应速度剖面的扰动增长率的等值曲线, 参见第十六章 A. R. Wazzan 的文章^[104].

在第十章中介绍的 K. Pohlhausen 近似方法是计算层流速度剖面最方便的一种方法, 因此它对研究有关的速度剖面的稳定性很有用处, 速度剖面的形状由形状因子

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} \quad (17.3)$$

决定. 在图 10.4 中画出了这族速度剖面. 设形状因子 Λ 的值在 $\Lambda = +12$ 和 -12 之间, 其中后一个值对应着分离. 在前驻点 $\Lambda = +7.05$, 在最小压力点 $\Lambda = 0$. 当 $\Lambda > 0$ 时, 压力减小; $\Lambda < 0$ 时压力增加. 凡 $\Lambda < 0$ 的速度剖面都具有拐点.

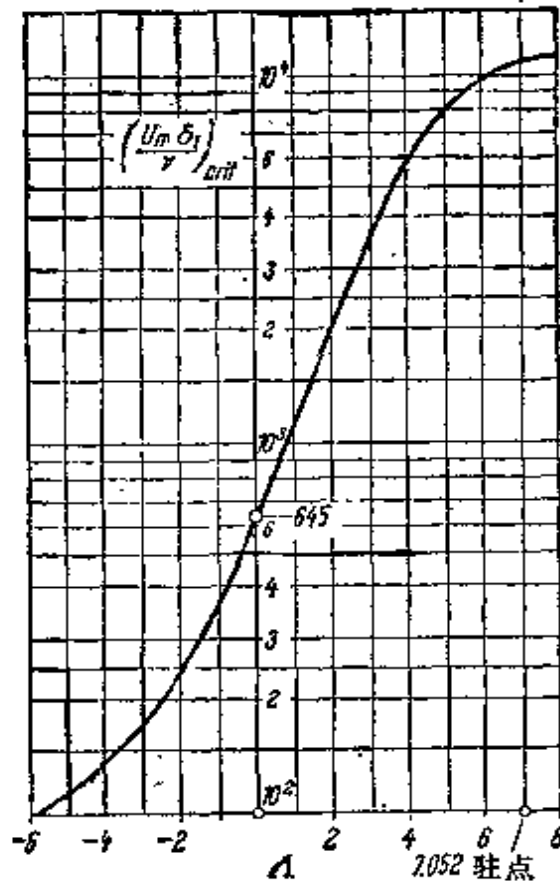


图 17.4 对于有压力梯度的边界层, 速度剖面的临界 Reynolds 数随形状因子 Λ 的变化

H. Schlichting 和 A. Ulrich^[200] 对这一族速度剖面进行了稳定性计算, 图 17.3 画出了中性稳定性曲线. 压力减小 ($\Lambda > 0$) 时,

当 $R \rightarrow \infty$ 时,所有速度剖面的中性稳定性曲线的两个分支都趋向于零,正如 $\Delta = 0$ 的平板情形一样.另一方面,对于逆压梯度($\Delta < 0$)情形下的速度剖面,中性稳定性曲线上部分支趋向于一个不为零的渐近值,所以,即使 $R \rightarrow \infty$,依然存在一个有限的波长范围,在该波长范围内扰动总是增长的.顺压梯度区域($\Delta > 0$)以及等压区域($\Delta = 0$)的速度剖面的不稳定性属于“粘性”不稳定类型(图 16.8 中曲线 b),而逆压梯度范围($\Delta < 0$)内速度剖面的不稳定性属于“无粘”不稳定性类型(图 16.8 中曲线 a).由图 17.3 可见,对于有逆压梯度的边界层,中性稳定性曲线所包括的不稳定波长范围要比加速流动时大得多.由图 17.3 可以得到临界 Reynolds 数,在图 17.4 中画出它随形状因子 Δ 变化的曲线¹⁾.所以,临界 Reynolds 数随着形状因子 Δ 的值,因而也随着压力梯度强烈地变化.此外,对于压力缓慢增加情形下的速度剖面($\beta = -0.1$),图 17.2 给出了 $c_i/U_\infty = \text{常数}$ 的曲线,即扰动增长率的等值曲线.与图 16.12 作比较使我们相信,压力缓慢增加明显地增强了扰动增长率.

F. X. Wortmann^[255,256] 使用碲法^[256] 在水洞中拍摄了流场照片(图 17.7),清晰地显示出层流边界层不稳定振荡的图象.类似于在第十六章介绍过的 Schubauer 和 Skramstad 使用的方法,用放置在壁面附近的振荡片产生人工扰动.压力沿壁面增加很小,式 (17.3) 中 Pohlhausen 参数的值 $\Delta = -8$. 在产生扰动的位置上,当地 Reynolds 数 $R_{\delta_1} = 750$,无量纲的扰动波波长为 $\alpha_1 \delta_1 = 2\pi \delta_1 / \lambda = 0.48$. 这个波长位于图 17.3 的不稳定区域的边缘.图 17.7 中瞬时曝光得到的条纹线显示出在振荡片下游 20 倍波长处,扰动的二维发展最后阶段的图象.扰动增长的这种图象表明理论与实验是完全吻合的.在照片左端扰动是二维的,在中部由于纵向旋涡的出现,扰动发生变形,在照片的右端,已经可以辨别出“湍流核”.这

1) 对 $\Delta = 0$,这里给出的值 $R_{crit} = 645$ 与前面图 16.11 中给出的值 520 略有不同.这是由于前者使用了精确的 Blasius 速度剖面,而在图 17.2 的情形下使用了近似的速度剖面.

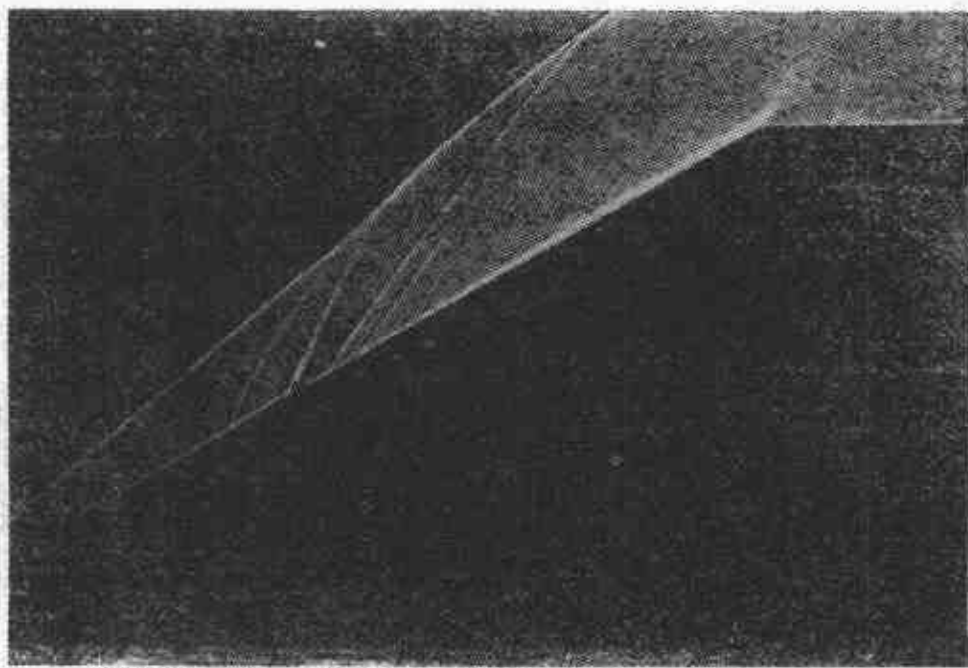


图 17.5 $M = 3$ 时超声速绕拐角流动的边界层中,从湍流向层流逆转换的阴影照片,根据 J. Sternberg^[215]



图 17.6 超声速绕拐角流动边界层中的流动示意图,根据 J. Sternberg,参见图 17.5

些将证实我们在这一章末尾给出的关于三维扰动的说明。

我们已经多次强调了这一事实,即沿边界层压力增加强烈地促使边界层向湍流转捩。反之,压力急骤降低,正如超声速流动在尖锐边缘后面将会产生的那样,会引起湍流边界层变成层流。J. Sternberg^[215]用带有锥形前体的圆柱进行了这种有趣的观察。图 17.5 给出 Mach 数 $M = 3$ 时沿锥形前体流动的阴影照片。在特意安装的绊线上边界层变成湍流,再往下游,在前后体连接处形成的拐角后面,湍流边界层再次变成层流(图 17.6)。可以这样来解释这个现象:类似于风洞试验段之前截面急骤收缩所产生的效果,柱体肩部很大的顺压梯度强有力地加速流动,使湍流脉动衰减。在 W. P. Jones 和 E. E. Launder^[193]的文章中可以找到对

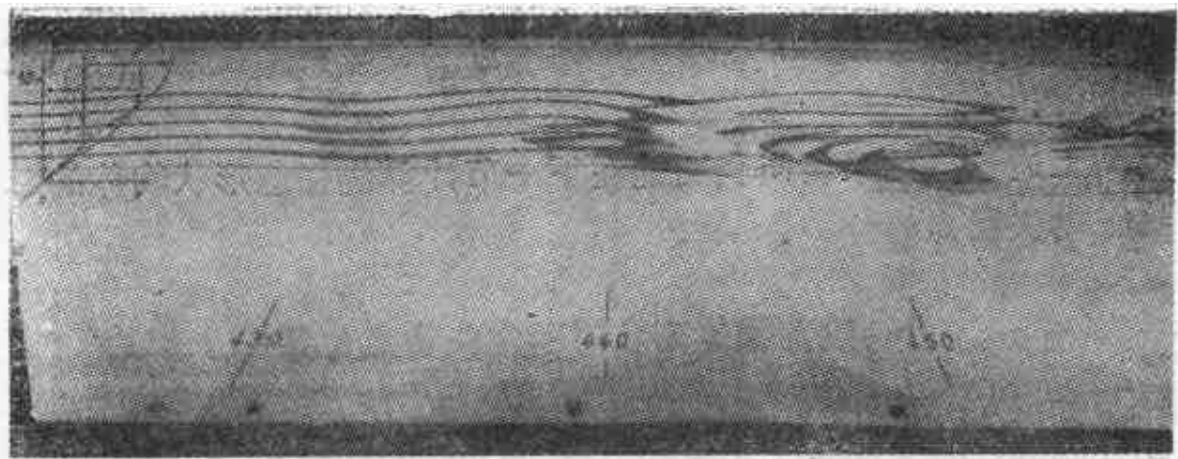


图 17.7 沿平直壁面，在有逆压梯度存在时层流边界层中二维 Tollmien-Schlichting 波不稳定性的说明。使用 F. X. Wortmann^[227, 228] 提出的确法获得在水洞中波形条纹线的照片，用一个振荡片(3×800×0.03mm)人为地产生扰动。该振荡片放置在 $R_1 = 750$ 处，在 $R_1 = 950$ 处发出条纹线(图的左边)。条纹线在下游卷起是扰动波不稳定的结果。图中的数字表示距离(cm)

该图中心处层流边界层的数据：

边界层外缘的速度， $U_m = 9.1 \text{ cm/s}$ ；

边界层位移厚度， $\delta_1 = 1.4 \text{ cm}$ ；

扰动波波长， $\lambda = 18 \text{ cm}$ ；

Reynolds 数， $R_1 = U_m \delta_1 / \nu = 1250$ ；

形状因子， $\delta_1 / \delta_2 = H_{11} = 2.9$ ；

由式(10.21)得到的 Pohlhausen 参数， $A = -8$

这种过程的定性的说明。按照这两位作者的意见，在不可压缩流动中，当无量纲加速参数满足不等式

$$K = \frac{\nu}{U_m^2} \frac{dU_m}{dx} > 3 \times 10^{-4} \quad (\text{再层流化})$$

时，发生再层流化(湍流停息)。根据式(10.21)引入 Pohlhausen 形状因子 A ，并利用式(17.3)，我们可以将上述条件表示为

$$A > 3 \times 10^{-6} R_1^2,$$

其中 $R_1 = U_m \delta / \nu$ 表示按湍流边界层厚度定义的 Reynolds 数。必须强调指出，这纯粹是一个经验判据。R. Narasimha 和 K. R. Sreenivasan^[168]进行了更深入的研究，另见 V. C. Patel 和 M. R. Head 早期的论文^[189]。

早在 1962 年 M. Sibulkin 对圆截面管中从湍流向层流的转接进行了细致的实验研究。特别是，他的研究工作扩展到研究纵

湍流脉动的衰减，并且发现壁面附近的衰减要比管道中心处更为强烈。

上述这些结果将使我们能在下一节计算绕任意形状物体的二维流动失稳点的位置。

b. 给定物体形状时确定失稳点位置

如果利用图 17.3 和 17.4 中的结果，确定(在二维流动中)给定物体的转捩点位置就变得十分容易了。下面所叙述的方法的主要优点是它不需要大量的计算，在计算图 17.3 的曲线时，那些繁琐的计算工作已经一劳永逸地完成了。

我们首先利用第十章介绍的 Pohlhausen 近似方法来计算层流边界层，其中位势流速度分布 $U_m(x)/U_\infty$ 认为是已知的。计算结果提供了用弧长 x (从前驻点算起) 表示的形状因子 Λ 和位移厚度 δ_1 的值。假设物体 Reynolds 数 $U_\infty l/\nu$ (l ——物体的长度) 不变，沿着层流边界层从前驻点开始向下游方向进行计算。可以注意到，在一开始由于压力突然降低，稳定性界限 $(U_m \delta_1/\nu)_{crit}$ 非常高。另一方面，边界层很薄，所以当地 Reynolds 数 $U_m \delta_1/\nu$ 势必小于临界 Reynolds 数 $(U_m \delta_1/\nu)_{crit}$ 的值，因而边界层是稳定的。再往下游，压力降低得很缓慢，接着在最小压力点之后压力增加，所以当地稳定性界限 $(U_m \delta_1/\nu)_{crit}$ 不断减小，然而边界层厚度以及由其给出的当地 Reynolds 数 $U_m \delta_1/\nu$ 不断增加。在某一点上，当地稳定性界限和 Reynolds 数相等：

$$U_m \delta_1/\nu = (U_m \delta_1/\nu)_{crit} \quad (\text{失稳点}), \quad (17.4)$$

从该点往后，边界层是不稳定的。式 (17.4) 所定义的这点称为失稳点，其位置显然取决于物体 Reynolds 数 $(U_\infty l/\nu)$ ，因为它影响着当地边界层厚度。

借助于图 17.8 中的曲线，我们可以方便地进行上面所叙述的计算，得到用 Reynolds 数表示的失稳点位置。让我们通过一个椭圆柱的例子详细地说明这一点。该椭圆柱的长轴 a 和短轴 b 之比为 $a/b = 4$ 。假设流动平行于长轴。该柱体位势流速度分布

函数已经在图 10.9 中给出，边界层计算的结果见图 10.10(a) 和 10.10(b)。根据形状因子 Λ 随 x 的变化(图 10.10(b))，并借助于图 17.4，可以画出当地临界 Reynolds 数 $R_{crit} = (U_\infty \delta_1 / \nu)_{crit}$ 的变化，即图 17.8 中标志着稳定性界限的曲线。通过层流边界层计算，我们还可以得到无量纲位移厚度 $(\delta_1 / l) (\sqrt{U_\infty l / \nu})$ ，如图 10.10(a)。对给定的物体 Reynolds 数 $U_\infty l / \nu$ ，现在可以估算出基于位移厚度的当地 Reynolds 数 $U_m \delta_1 / \nu$ ，因为

$$\frac{U_m \delta_1}{\nu} = \left(\frac{\delta_1}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \right) \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu} \frac{U_m}{U_\infty}}, \quad (17.5)$$

其中位势流速度 $U_m(x) / U_\infty$ 是已知的。对不同的 Reynolds 数值，图 17.8 中画出了 $U_m \delta_1 / \nu$ 随弧长 x / l' 变化的曲线。这些曲线与

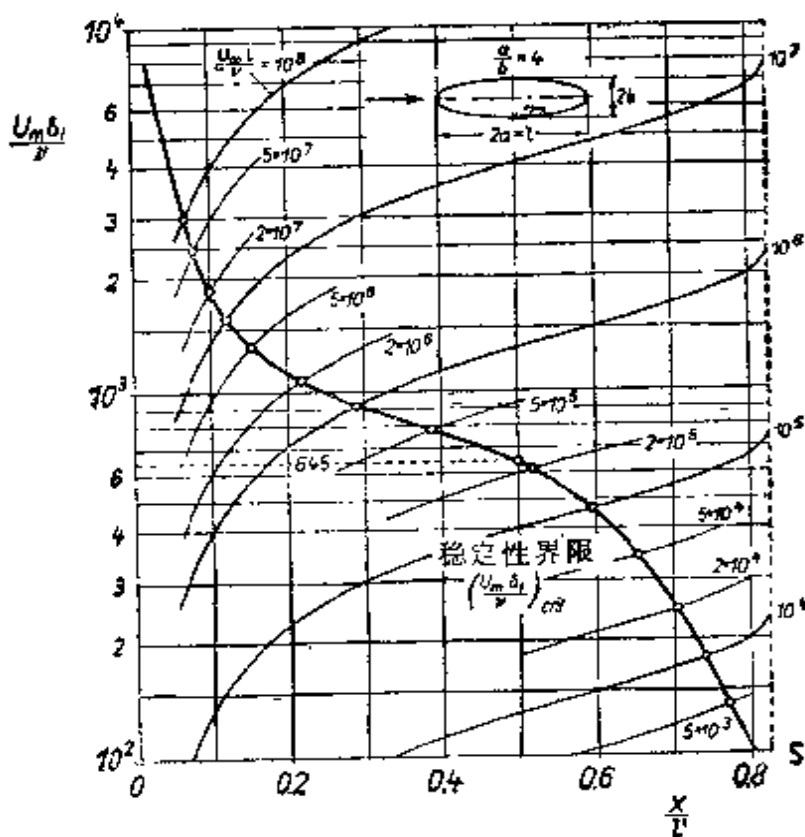


图 17.8 对于长细比 $a/b = 4$ 的椭圆柱，用 Reynolds 数 $U_m l / \nu$ 表示的失稳点位置的计算结果
 $a/b = 4$;
 $2l' =$ 椭圆周长

稳定性界限的交点给出了各自 Reynolds 数下失稳点的位置¹⁾。图 17.9 画出了一族细长比 $a/b = 1, 2, 4, 8$ 的椭圆柱的失稳点。值得注意的是，对于圆注，随着 Reynolds 数的增加失稳点移动很小。随着长细比的增加，失稳点的移动越来越明显。

可以很容易地用类似的方法计算翼型失稳点的位置。这时特别重要的是，除确定 Reynolds 数的变化规律外，还要确定失稳点随攻角的变化规律。图 17.10 画出了一个对称 Zhukovskii 翼型在不同攻角和不同升力系数时这些计算的结果。可以看到，随着攻角增加，吸力面的压力最小值越来越小，并且最小压力点向前移；而在压力面最小压力值越来越大，压力分布越来越平坦，并且最小压力点向后移。因此，随着攻角增加，引起吸力面上失稳点向上游移动，而在压力面上失稳点向下游移动。由于吸力面上在最小压力点附近压力分布曲线变陡，对于所有的 Reynolds 数，失稳点都向最小压力点靠近；在压力面则发生相反的过程，最小压力点附近压力曲线平坦，使得对于不同 Reynolds 数的失稳点的分布是发散的。无论是哪种情形，图 17.10 的曲线都十分清楚地显示了压力分布对失稳点位置，即对转捩点位置的决定性的影响。在最

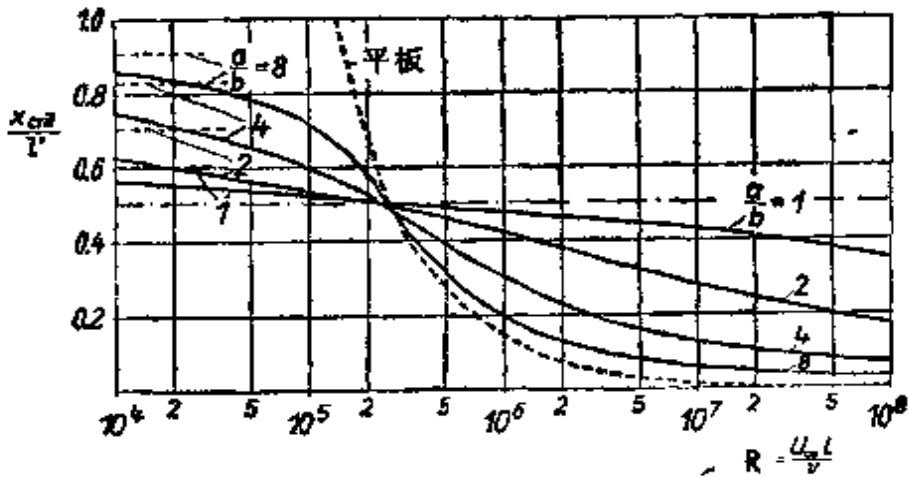


图 17.9 对于长细比 $a/b = 1, 2, 4, 8, \infty$ (平板) 的椭圆柱，相对于物体 Reynolds 数画出的失稳点位置
 $2l$ ——周长； S ——层流分离点； M ——最小压力点

1) 如果采用对数坐标，沿平行于坐标轴的方向移动，就可以得到不同 $U_{\infty} l / \nu$ 数值时的 $U_{\infty} \delta_1 / \nu$ 曲线。当使用图解法时，这是非常方便的。

小压力点之前,即使在高 Reynolds 情形下,失稳点(从而转换点)很难再往前移动;反过来,在最小压力点之后,即使在低 Reynolds 数情形下,也几乎立即就发生失稳和转换。

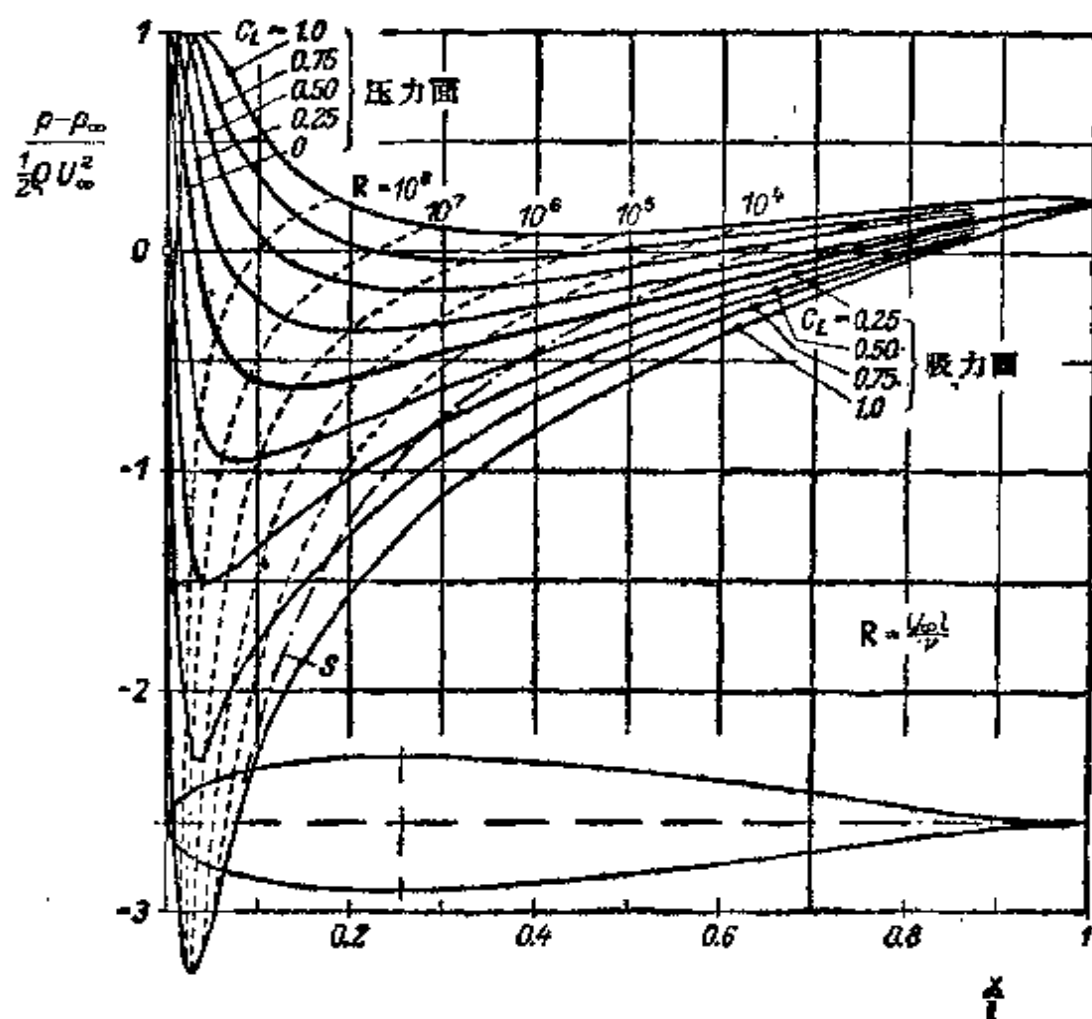


图 17.10 在不同升力系数下,对称 Zhukovskii 翼型的
——压力分布;-----失稳点位置; S = 层流分离点位置

图 17.11 还给出一个 NACA 翼型失稳点位置的实验结果,该翼型和上述所讨论的 Zhukovskii 翼型有几乎相同的压力分布.可以看出,正如理论分析所预计的那样,对所有 Reynolds 数和升力系数,转换点都位于失稳点之后,但却在层流分离点之前.其次,随着 Reynolds 数和升力系数的变化,转换点随着失稳点的移动而移动.对不同厚度和弯度的翼型,可以在 K. Bussmann 和 A. Ulrich^[10] 的报告中找到转换点位置系统的计算结果。

作为近似计算粗略的指导原则,可以得出这样的规律: 在

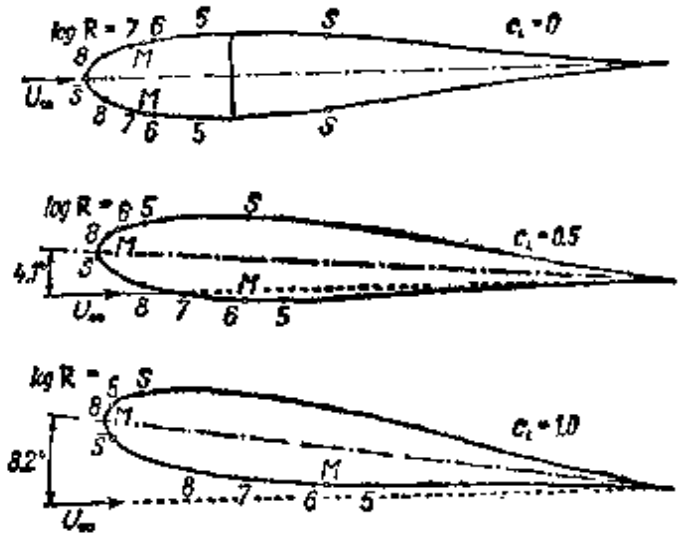
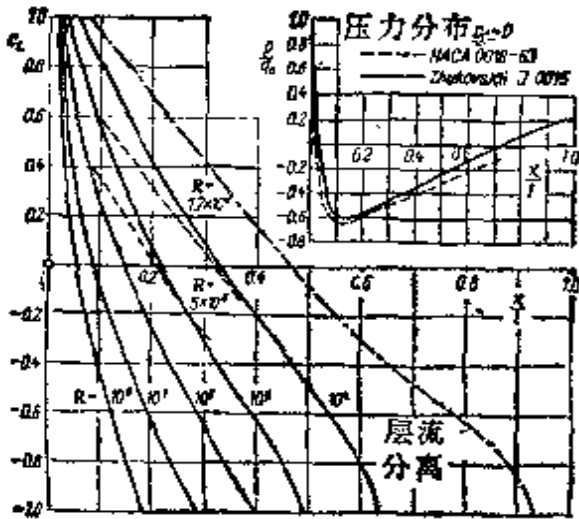


图 17.11 失稳点和转捩点位置随升力系数和 Reynolds 数的变化。——理论失稳点: Zhukovskii 翼型 J0015; ---- 测量的转捩点: NACA0018 翼型

\bar{S} = 驻点; M = 最小压力点; S = 层流分离点

Reynolds 数从 10^6 至 10^7 的范围内, 转捩点几乎与位势流的最小压力点重合。在 Reynolds 数很大时, 转捩点可能在最小压力点之前一点点, 而在 Reynolds 数小时, 特别当压力梯度(不论正负)很小时, 转捩点可能移动到最小压力点之后相当远的位置。另一方面, 应该注意到, 无论 Reynolds 数值是多少, 失稳点总是位于层流分离点之前。因此我们可以确立这样一个原则: 除了在极大 Reynolds 数的情形外, 失稳点都位于最小压力点之后, 层流分离点之前。

转捩点和失稳点之间确切的距离取决于不稳定扰动的增长率和来流的湍流度。扰动增长率又受到压力梯度的强烈影响。R. Mickel^[150] 发现了一个相当简单、纯经验的公式, 它可以确定扰动增长率与理论失稳点和实验转捩点之间距离的关系。最近, A. M. O. Smith^[171] 在稳定性理论的基础上成功地验证了这个关系式。当扰动进入不稳定区域(图 17.3), 每一个不稳定扰动向下游传播时不断增长, 正比于 $\exp(\beta_i t)$, 或者, 如果 β_i 与时间有关则正比于

$$\exp(\int \beta_i dt). \quad (17.6)$$

此处积分应该包括当扰动进入不稳定区域后出现的各种不稳定扰动。J. Pretsch^[172] 已经计算了不同压力梯度情形下扰动增长率

$\beta_i = \text{常数}$ 的曲线 (如图 16.13 所示的那种), 1957 年, A. M. O. Smith 利用这些曲线, 对一些已经有转捩点实验数据的翼型和旋成体进行了大量的计算。他根据式(17.6)进行计算, 将积分从理论稳定性界限积到实验转捩点, 得到了扰动增长率。图 17.12 画出了他的计算结果。这些计算结果涉及到在非常低来流湍流度和极其光滑的表面进行的许多不同的测量, 从而得出如下结论: 沿着从失稳点到转捩点的路径进行积分, 得到不稳定扰动的增长率, 其值为

$$\exp(\int \beta_i dt) = \exp 9 = 8103. \quad (17.7)$$

几乎在同时, J. L. van Ingen^[94] 验证了这个发现。还可以参阅 R. Michel^[166] 的论文。

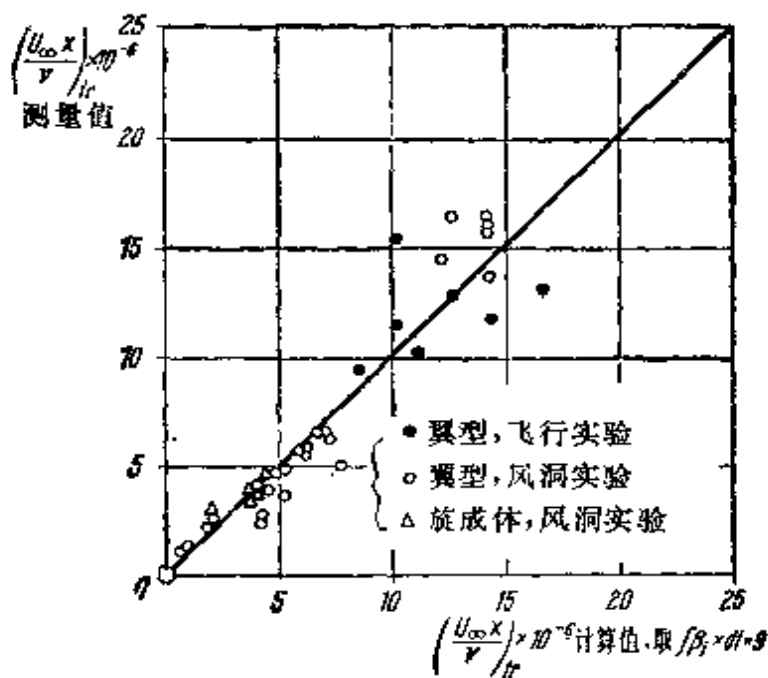


图 17.12 确定不稳定扰动的增长率 $\exp(\int \beta_i dt)$, 积分路径从理论失稳点到实验转捩点, 根据 A. M. O. Smith^[211]

现在, 许多测量^[104] 证实了这一结论, 并指出扰动增长率约为 $\exp 10 = 22026$ 。

正如在图 16.21 中已经做出的那样, 失稳点和转捩点之间的距离可以用由这两点的动量厚度定义的 Reynolds 数之差来表示, 即用 $(U\delta_2/\nu)_c - (U\delta_2/\nu)_i$ 来表示。以 P. S. Granville^[75] 得到的

数值为基础,图 17.13 画出了这个差值随平均 Pohlhausen 参数 \bar{K} 的变化曲线.这里我们有

$$\bar{K} = \frac{1}{x_{tr} - x_i} \int_{x_i}^{x_{tr}} \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} dx = \frac{1}{x_{tr} - x_i} \int_{x_i}^{x_{tr}} K(x) dx, \quad (17.8)$$

其中 K 是由式(10.27)定义的.

在上述计算中所涉及的测量都是在极低的湍流度下进行的(自由飞行的测量和低湍流度风洞中的测量). 图 17.13 中的曲线表明许多不同实验的结果令人满意地落在一条曲线上. 对顺压梯

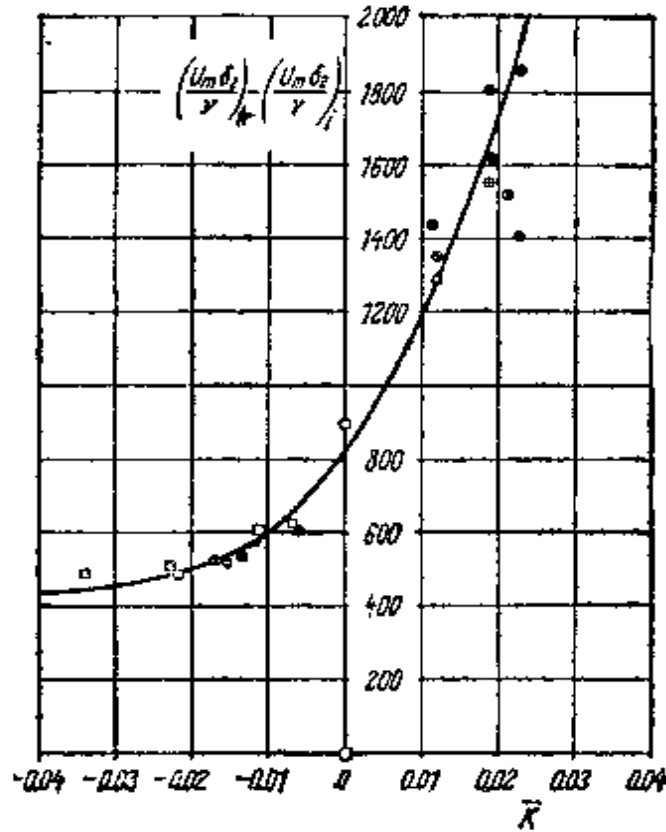


图 17.13 有压力梯度的边界层转接点的测量结果,引自 Granville^[75]. 转接点 Reynolds 数 $R_{\sigma_2, tr} = (U_m \delta_2 / \nu)_{tr}$ 与失稳点 Reynolds 数 $R_{\sigma_2, i} = (U_m \delta_2 / \nu)_i$ 的差值随平均压力梯度 \bar{K} (式(17.8))的变化. $\bar{K} > 0$ 对应于加速流动, $\bar{K} < 0$ 对应于减速流动

- 平板, Schubauer 和 Skramstad^[203]
- ⊗ NACA 0012 翼型, von Doenhoff^[80]
- 吸力面 } NACA 65(215)-114 翼型
- ⊕ 压力面 } Braslow 和 Visconti^[73]
- 8% 厚度比的翼型, B. M. Jones^[98]

其中文献[7, 30, 203]是在低湍流度风洞中的测量结果;文献[75]是飞行测量结果

度($\bar{K} > 0$), $(U\delta_2/\nu)_{i,1} - (U\delta_2/\nu)_{i,2}$ 的值比逆压区($\bar{K} < 0$)的差值要大很多. 在等压区($\bar{K} = 0$), 这个差值保持在 800 左右, 与图 16.21 给出的极低湍流度下平板的测量结果吻合得很好. 关于这个问题, 请参阅 E. R. van Driest 和 C. B. Blumer 文献 [50] 的注释.

层流翼型: 图 17.9 和 17.10 中归纳的稳定性计算结果令人信服地显示出压力梯度对稳定性和转换有决定性的影响, 这一点与实验完全吻合. 出于同样的考虑设计了**层流翼型**. 在这种翼型的设计中, 将最大厚度点, 即最小压力点向后缘移动相当的距离, 拉长层流边界层, 使表面摩擦力减小. 不过, 只能在翼型改角的一个很小范围内实现所希望的最小压力点位置的移动.

在第二次世界大战期间, 美国进行了非常广泛的层流翼型的测量^[2]. H. Doetsch^[31] 早在 1939 年就首先发表了层流翼型的实验结果, 但是 B. M. Jones^[32] 在此之前已经在飞行实验中观察到这种伸展得相当长的层流边界层. 层流翼型在滑翔机的制造中得到广泛的应用. F. X. Wortmann 对滑翔机机翼的翼型进行的研究是非常重要的. 他设计的这些翼型称之为 F. X. 翼型, 其特征见文献 [2]. 图 17.14 表示出层流翼型可能使阻力减小的数量. 在 Reynolds 数 $R = 2 \times 10^6$ 至 3×10^7 的范围内, 由于“层流效应”使阻力减小, 这个数量可以达到普通翼型阻力的 30—50%. 在 Reynolds 数很大时, 例如 $R > 5 \times 10^7$, 正如稳定性理论所确定的那样, 翼型上转换点位置突然前移, 层流效应消失了. 几个翼型的压力分布曲线见图 17.15, 对翼型 R2525 还给出了转换点位置的测量结果. 可以看出, 转换发生于紧靠最小压力点之后的地方, 完全符合图 17.10 的理论结果. 对三种相同厚度但弯度不同的翼型, 图 17.16 还画出了用升力系数表示的阻力曲线. 应该注意到, 弯度的增加可以使低阻力区域向大升力值的方向移动, 但是即使如此, 低阻力区域的范围也是有限的. 很显然, 在层流翼型的情形下, 外流和边界层的相互作用是非常重要的, R. Eppler^[60] 曾提出了计算这种效应的方法. 在这里我们必须说明, 在层流翼型

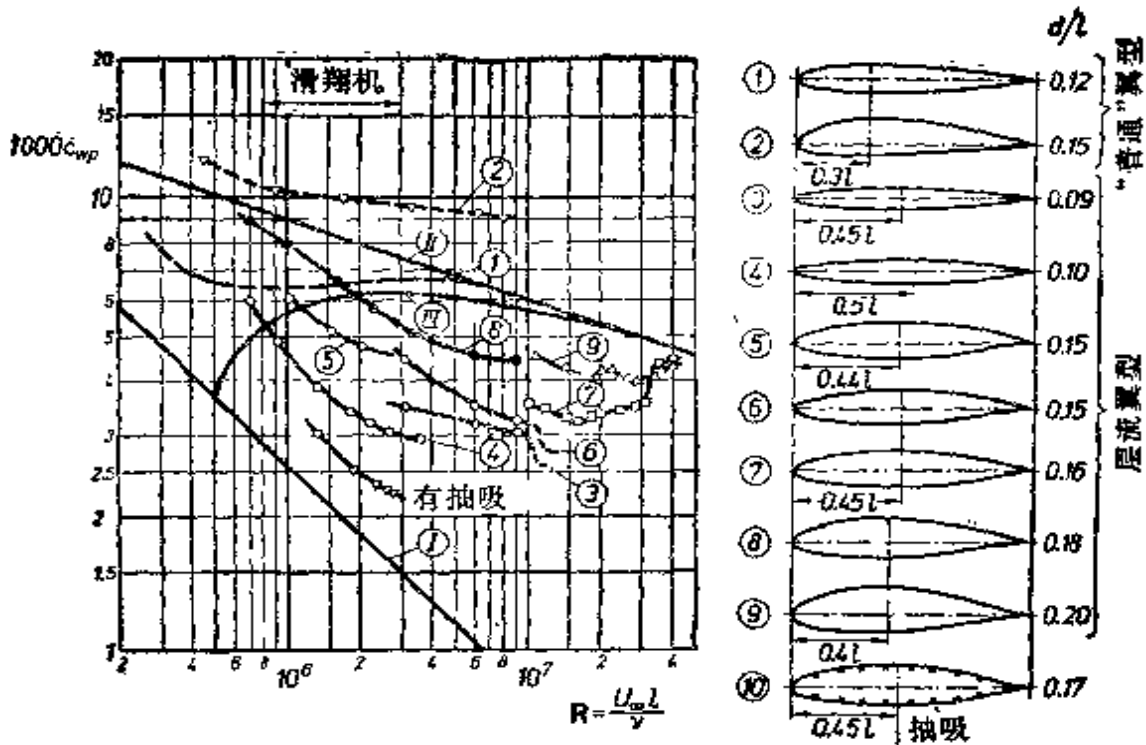


图 17.14 层流翼型和“普通”翼型的表面摩擦系数, 根据文献 [1] 和 [96]. LB24-日本 I. Tani^[243] 的层流翼型、FX35-153-F. X. Wortmann^[257] 的层流翼型. 具有抽吸的翼型, 根据 W. Pfenninger, 见第十四章文献 [61]. 曲线 (I), (II), (III) 表示零攻角平板在层流、充分发展的湍流和转换流动的表面摩擦力. (1) NACA 0012; (2) NACA 4415; (3) NACA 66-009; (4) LB24; (5) FX35-153; (6) NACA 66₂-215; (7) NACA 66(2×15)-216; (8) NACA 65₃-418; (9) NACA 65(421)-420; (10) 有抽吸翼型

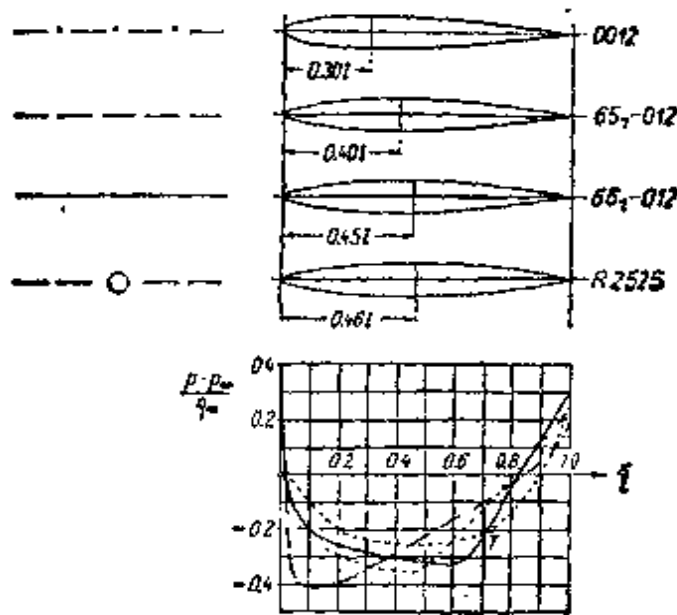


图 17.15 零攻角层流翼型 ($c_L = 0$) 的压力分布. 翼型 0012, 65₂-012, 66₂-012, 引自文献 [1]; 翼型 R2525, 引自 Doetsch^[211]
T = 转换点位置 ($R = 3.5 \times 10^6$)

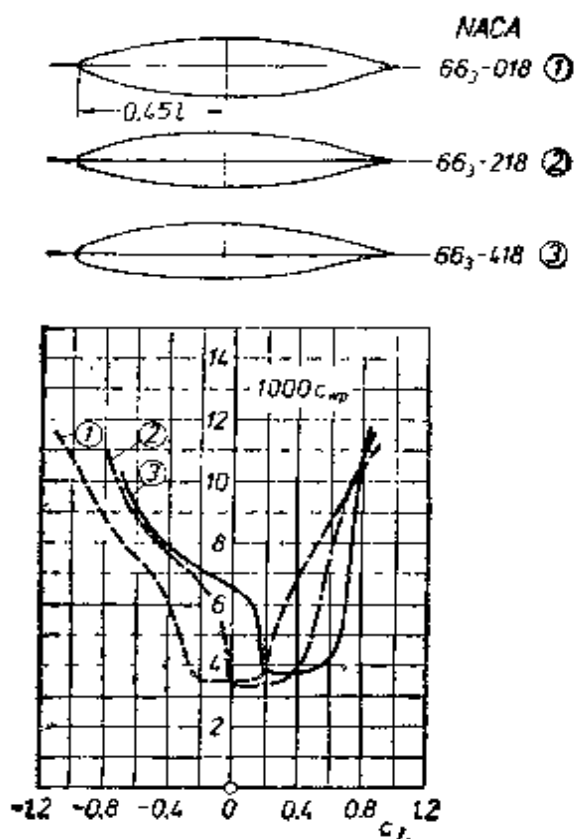


图 17.16 对于弯度不同的三种层流翼型,阻力系数 c_w , 随升力系数 c_L 的变化, $R = 9 \times 10^6$, 引自文献 [1]。随着弯度的增加,低阻力区域向高升力系数 c_L 的方向移动

的实际应用中,在某些情形下会出现很大的困难。原则上来说,为了不因表面粗糙度使转换提前,对表面光洁度提出了很高的要求,从而造成了这些困难。关于这个问题,我们希望读者注意 L. Speidel^[212] 关于放置在简谐振荡来流中的层流翼型的论文。

可以把本节讨论的内容总结如下:

1. 稳定性理论指出,压力梯度对层流边界层稳定性起着决定性的影响,压力沿下游方向减少有稳定作用,而压力增加导致边界层失稳。

2. 因此,位势流速度分布中最大速度点(= 最小压力点)的位置决定性地影响着失稳点和转换点的位置。作为一个粗略的指导规律,可以假定,在中等 Reynolds 数时($R = 10^6$ 至 10^7),失稳点和最小压力点重合,转换点紧接其后。

3. 当 Reynolds 数不变时,随着翼型攻角的增加,吸力面上失

稳点和转捩点向前移,压力面上失稳点和转捩点向后移。

4. 当攻角不变时,随着 Reynolds 数增加,失稳点和转捩点向前移。

5. 在 Reynolds 数很大以及压力分布的峰值比较平坦时,在一定的情形下,失稳点可能稍许在最小压力点之前。

6. 即使在低 Reynolds 数($R = 10^5$ 至 10^6)时,失稳点和转捩点也在层流分离点之前。在一定的情形下,层流边界层可能分离并且再附为湍流边界层。

柔壁: 另一种使层流边界层稳定的有效方法是将浸润在流体中的壁面做成柔性的。人们观察到海豚令人咋舌的游泳技能^[293],从而受到启发,这些动物具有很小的表面摩擦系数是由于它们表皮的柔软性,使得边界层即使在 Reynolds 数非常大时也维持层流。为了验证这个假定,M. O. Kramer^[119] 测量了轴线平行于来流的弹性圆柱体的阻力。确实,与刚性圆柱比较,在 Reynolds 数 $R = 3 \times 10^6$ 至 2×10^7 的范围内,观察到阻力减小 50%左右。

此外,T. B. Benjamin^[41]和 M. T. Landahl^[120]利用第十六章C中说明的方法,对柔壁的边界层稳定性进行了深入的理论分析。这些分析揭示出,由于壁面的柔性 Tollmien-Schlichting 波以一种变化了形式出现,除此之外,壁面本身还出现了变形的弹性波。由于壁面外存在着流动,产生了这种弹性波。同时,还出现了 Kelvin-Helmholtz 类型的波,非常类似于自由剪切层中观察到的那些波。第一个效应——由壁面柔性引起 Tollmien-Schlichting 波变形,可以解释为什么中性稳定点急剧地向上游方向移动。然而,上述依赖于壁面内摩擦的三种效应在一定程度上互相抵消。因此,我们可以预期壁面柔性总的效果是小的。这样,稳定性理论只是定性地,而不是定量地证实了 M. O. Kramer 的实验结果。或许可以用柔壁对充分发展的湍流边界层的影响来解释 M. O. Kramer 的实验结果。这种设想引起 G. Zimmermann^[121]对这个问题进行了理论研究,他得出结论:柔壁可以使壁面切应力减少百分之十左右,至少在高密度的流体(例如水)情形下是如此。由于缺少完整的湍流理论,我们只能把这些结果看作是一种估计。论文[259]包含一些补充的参考文献,涉及到柔壁对边界层流动的稳定性和湍流结构的影响。

c. 抽吸对边界层转捩的影响

在第十四章中已经指出,将抽吸应用于层流边界层是减阻的有效手段。抽吸的作用类似于上节讨论的压力梯度的作用,使边界层趋于稳定,抑制边界层由层流向湍流转捩,减小了阻力。更仔细的分析表明抽吸的影响来自两个效应。第一,抽吸减少了边界层厚度,而较薄的边界层不易变成湍流。第二,抽吸建立了一种层流

速度剖面,比起无抽吸的速度剖面,它具有更高的稳定性界限(临界 Reynolds 数)。

至今,只有对连续抽吸的边界层才能进行数学处理,在第十四章中已经给出了这种情形的几个解。至于如何保持边界层为层流的问题,重要的是要估计排出的流量。只要吸除足够的流体,就可以获得所期望的边界层厚度,从而使 Reynolds 数低于稳定性界限。然而,抽吸量过大是不经济的,这是由于减阻而节省下来的动力有很大一部分用于驱动抽吸泵。因此,重要的是确定一个保持边界层为层流所要求的**最小抽吸体积流量**。当按照最小抽吸体积流量进行抽吸时,阻力减少得最多。因为任何再大的抽吸流量将使边界层变得更薄,因而使壁面切应力增加。

正如在第十四章中指出的,在均匀抽吸的零攻角平板的情形下,边界层方程的解特别简单(用 $-v_0$ 表示抽吸速度)。可以回忆起,此时距前缘一定距离以后,速度剖面及边界层厚度就与当地坐标无关了。正如图(14.7)所示,这种**渐近抽吸速度剖面**的位移厚度由下式给出

$$\delta_1 = \frac{\nu}{-v_0}. \quad (17.9)$$

K. Bussmann 和 H. Muenz^[9] 按照在第十六章中阐述的方法进行了这种速度剖面(图14.6)的稳定性计算。从式(14.6)可见,速度剖面由式

$$u(y) = U_\infty [1 - \exp(v_0 y / \nu)]$$

所描述,这种速度剖面的临界 Reynolds 数很高,

$$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_{\text{crit}} = 70000. \quad (17.10)$$

可见,对于渐近抽吸速度剖面,其临界 Reynolds 数要比无压力梯度、无抽吸的零攻角平板的值大 130 倍,显示了抽吸的高度稳定效果。上述讨论还表明,不仅由于边界层厚度减少,而且特别是由于

1) 这里 $v_0 < 0$ 表示抽吸, $v_0 > 0$ 表示引射。

这种速度剖面的稳定性界限大大增加,才使边界层保持为层流。近抽吸速度剖面的中性稳定性曲线见图 17.17($\xi = \infty$)。由该图可以注意到,与无抽吸的情形相比,稳定性界限提高了,而且由中性稳定性曲线限定的不稳定扰动波长范围也大大减小了。

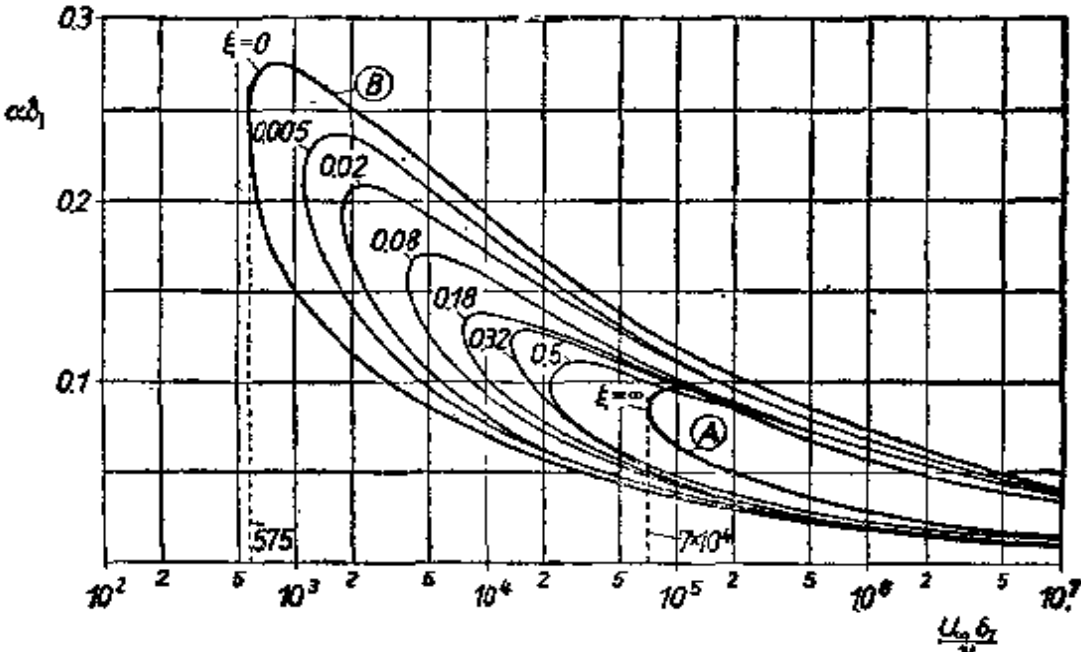


图 17.17 均匀抽吸的零攻角平板速度剖面的中性稳定性曲线。

线, $\xi = \left(\frac{-v_0}{U_\infty}\right)^2 \frac{U_\infty x}{\nu} = c_0^2 R_x$. 表示无量纲初始长度

- 曲线(A): 渐近抽吸速度剖面;
- 曲线(B): 无抽吸的速度剖面

上述结果使我们可以得到下面这个问题的答案,即为了保持边界层为层流,应该吸除多少流体?为了简单起见,假设从前缘开始均匀抽吸,在平板前缘已经存在渐近速度分布,我们可以得出结论:如果用位移厚度定义的 Reynolds 数小于式(17.10)给出的稳定性界限,则沿整个平板存在着稳定的层流边界层。因此,边界层稳定的条件是

$$\frac{U_\infty \delta_1}{\nu} < \left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_{crit} = 70000.$$

利用式(17.9)给出的渐近速度剖面 δ_1 值,我们有

稳定条件: $\left(\frac{-v_0}{U_\infty}\right) = c_0 > \frac{1}{70000}$ (17.11)

按此结果，只要抽吸体积流量系数有极低的值 $1/70000 = 1.4 \times 10^{-5}$ ，边界层就是稳定的。

这里可能会注意到，更准确的计算或许能给出更高一些的体积流量系数的值。这是由于上述计算是以渐近速度剖面为基础的，而这种速度剖面只是在前缘之后一定的距离才建立起来。从前缘到该点这段距离上的速度剖面具有不同的形状，从紧靠前缘之后的无抽吸 Blasius 剖面逐渐地变成上述渐近抽吸速度剖面。在图 14.8 中已经详细地画出了具有抽吸的层流边界层在这个初始长度内速度剖面的形状。所有这些速度剖面的稳定性界限比渐近形式

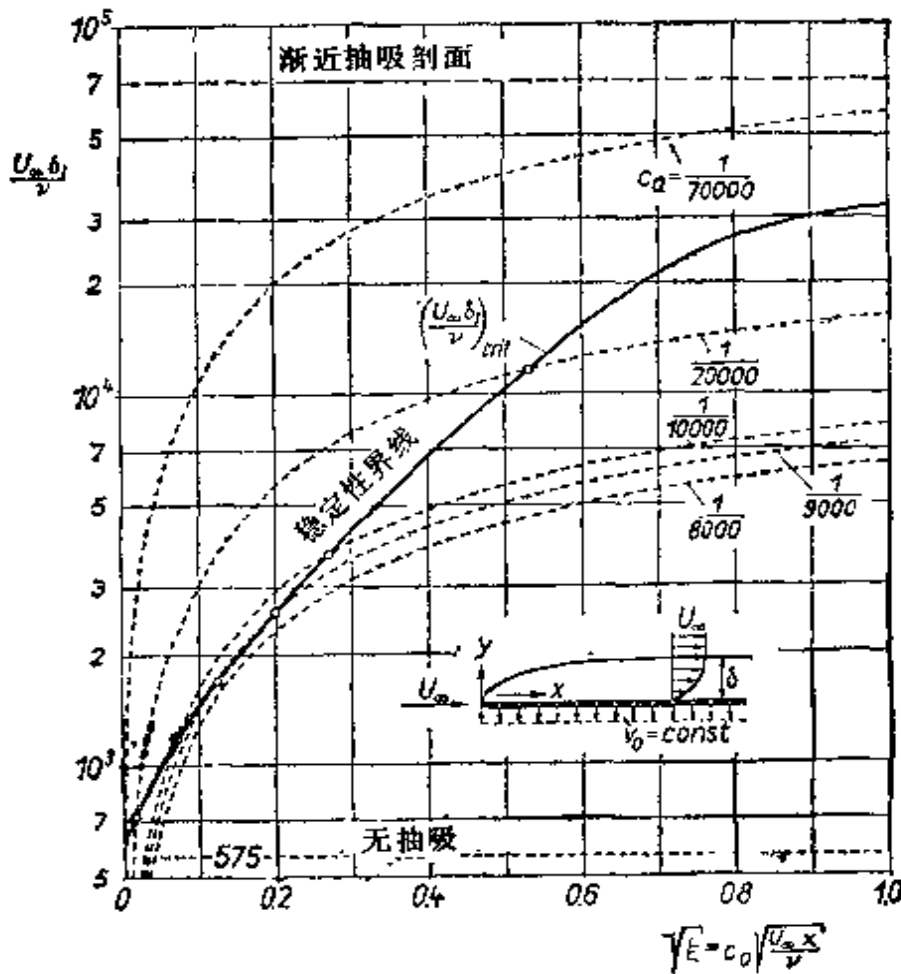


图 17.18 依靠抽吸保持平板边界层为层流，为此所必须的抽吸体流量的临界值

速度剖面的值低，因此，若要保持边界层为层流，在初始长度内要吸除的流体体积流量必须大于式(17.11)给出的值。

为了更详细地分析这个问题，必须对初始长度内一系列速度剖面进行稳定性计

算。这些剖面构成了单参数的曲线族,见图 14.8。该参数为

$$\xi = c_Q^2 \times \frac{U_\infty x}{\nu}$$

而且在前缘处 $\xi = 0$, 达到渐近速度剖面时 $\xi = \infty$, 但是实际上可以假定初始长度截止于 $\xi = 4$ 。A. Ulrich^[243] 已经计算了这一族速度剖面的临界 Reynolds 数, 列于表 17.1 中, 相应的中性稳定性曲线见图 17.17。J. Pretsch^[189] 计算了渐近速度剖面的

**表 17.1 有抽吸的速度剖面临界 Reynolds 数随无量纲抽吸
体积流量系数 ξ 的变化, 根据 Ulrich^[243]**

$\xi = c_Q^2 \frac{U_\infty x}{\nu}$	0	0.005	0.02	0.08	0.18	0.32	0.5	8
$\left(\frac{U_\infty \delta_1}{\nu}\right)_{crit}$	575	1120	1820	3940	7590	13500	21900	70000

不稳定扰动的增长率, 在他的计算中得到的最大增长率比图 16.13 平板 (Blasius 流动) 的值要小 10 倍左右。利用计算的结果, 现在不难确定出所需要的抽吸体积流量系数, 它使初始长度上的边界层是稳定的。可以从图 17.18 中得到这些值, 其中稳定性界限引自表 17.1, 而且对给定的 $c_Q = (-v_0)/U_\infty$, 图 17.18 画出了无量纲位移厚度

$$\frac{U_\infty \delta_1}{\nu} = \frac{-v_0 \delta_1}{\nu} \frac{1}{c_Q}$$

随无量纲长度的变化。这里, 用 ξ 表示的 $(-v_0)\delta_1/\nu$ 的值是由边界层计算给出的, 见表 14.1。由图 17.18 可见, 只要抽吸体积流量系数的值保持大于 $1/8500$, 沿整个平板长度上稳定性界限和无量纲位移厚度 $U_\infty \delta_1/\nu$ 就都没有交点, 因此, 抽吸体积流量系数的临界值是

$$c_{Qcrit} = 1.2 \times 10^{-4}. \quad (17.12)$$

我们现在能够回答在第十四章中遗留下来的问题了, 即关于零攻角平板通过抽吸保持为层流边界层时实际的阻力减少问题。图 14.9 画出一条用 Reynolds 数表示的表面摩擦系数的曲线, 其中体积流量系数 c_Q 作为一个参数出现。如果现在将相应于式 (17.12) 的 c_{Qcrit} 的曲线画在该图中, 可以得出在最佳抽吸条件下平板表面摩擦系数的变化, 见图 17.19, 图中标着“最佳抽吸”和“湍流”的曲线之间的距离对应于应用抽吸所减少的阻力。

以湍流阻力为基准, 阻力的相对减小量随着 Reynolds 数增加而略有增加, 见图 17.20。在 Reynolds 数 $R = 10^6$ 至 10^8 的范围内, 阻力相对减小量从百分之六十五增加到百分之八十五。在第十四章中已经讨论过边界层控制的实验结果。飞行实验和风洞实验^[89, 99, 105] 已经极好地证实了抽吸使阻力减小的理论结果, 另见图 14.19。

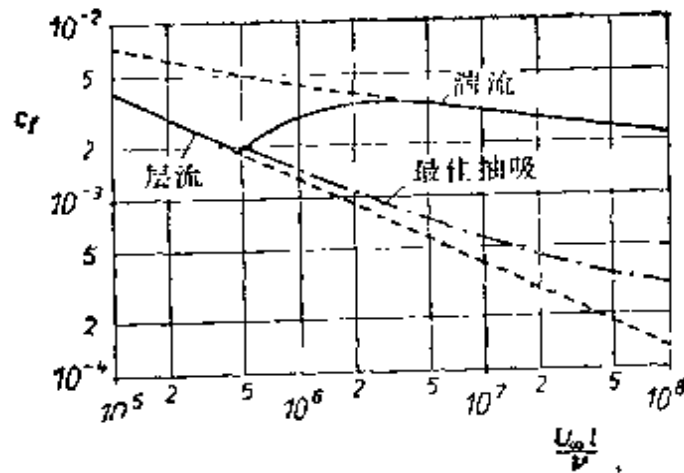


图 17.19 零攻角平板表面摩擦系数。最佳抽吸表示刚好足以保持层流的最小体积流量系数 $c_{f, \text{crit}} = 1.2 \times 10^{-4}$ 。

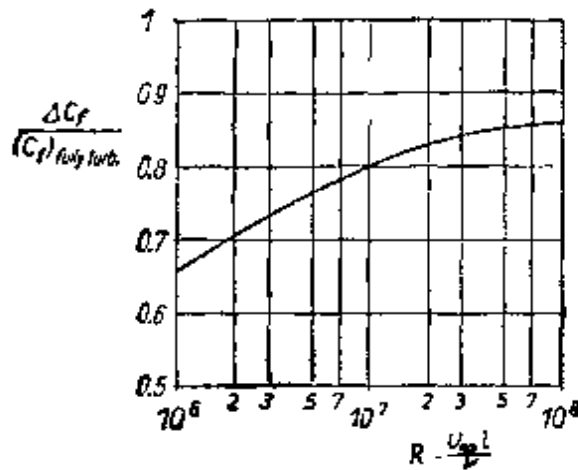


图 17.20 有最佳抽吸(见图 17.19)条件下,零攻角平板通过抽吸保持为层流边界层,其阻力的相对减小量 $\Delta c_f = c_{f, \text{湍流}} - c_{f, \text{有抽吸层流}}$

把临界 Reynolds 数随边界层速度剖面形状因子 $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ 的变化画出来,就可以用图表示抽吸及压力梯度对稳定性界限的影响,如图 17.21。均匀抽吸的零压力梯度平板(Iglisch 速度剖面,图 14.8)、以 $v_0 \sim 1/\sqrt{x}$ 进行抽吸的平板(Bussmann 剖面,图 14.12)以及无抽吸但有压力梯度的平板(Hartree 剖面)的临界 Reynolds 数很好地落在一条曲线上。对于渐近抽吸剖面, $H_{12} = 2$;对于无抽吸平板, $H_{12} = 2.59$ 。

H. Krueger^[211] 的一篇论文给出临界 Reynolds 数计算结果的几个例子,其中包括翼型。W. Wuest^[247, 248] 从数学上严格地证明

了依次排列的几个分开的縫隙的稳定作用明显地小于均匀抽吸的效果。

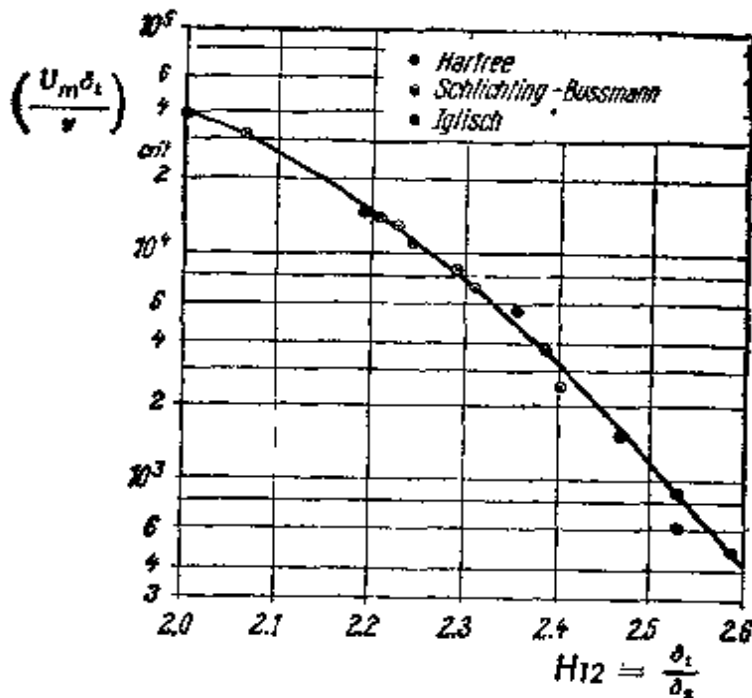


图 17.21 对于有抽吸及压力梯度的层流速度剖面, 临界 Reynolds 数随形状因子 $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$ 的变化

d. 体积力对转换的影响

1. 凸壁上的边界层(离心力的影响) 在从层流向湍流转换的几种情形下, 作用在边界层上的外力起着主要的作用。在两个旋转的同心圆柱面之间的流动就是这些情形中的一个例子。当内圆柱静止而外圆柱匀速旋转时, 圆柱面间流体的速度实际上从内壁面的零线性地增加到外壁面的圆周速度。圆环中外层流体质点受到的离心力大于靠近轴线的质点的离心力, 趋于向外甩出, 有反抗向内运动的趋势。同样, 由于作用在内层质点的离心力小于远离轴线的质点的离心力, 内层流体质点很难向外运动。这样, 流体质点受到一个或许能称之为“向心升力”的力的作用。因此我们可以这样理解, 作为湍流运动特征的横向脉动将受到离心力的抑制, 在这种情形下, 离心力具有稳定作用。

迄今所介绍的各种稳定性计算方法都只适用于平板的情形, 考虑到壁面弯曲的情形有很重要的实际意义, H. Goertler^[83] 将

Tollmien 关于有拐点的速度剖面的稳定性准则推广到包括壁面曲率影响的情形。**Tollmien** 关于平直壁面的稳定性定理：在大 Reynolds 数的极限情形下， d^2U/dy^2 改变符号的速度剖面是不稳定的(见第十六章 b)，在弯曲壁面的情形下必须作如下修正：表达式

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dy}$$

的符号改变将引起无摩擦不稳定性。这里 R 表示壁面的曲率半径， $R > 0$ 为凸壁； $R < 0$ 为凹壁。按照这个准则，在凸壁最小压力点前面一点的位置，二维扰动就变得不稳定，而在凹壁的情形下，扰动失稳发生在最小压力点后面一点的地方。但是整个说来，如果边界层厚度 δ 和壁面曲率半径 R 之比满足条件 $\delta/|R| \ll 1$ ，那么壁面曲率的影响很小。对于凹壁，更为重要的是另外一种类型的不稳定性，即相对于某些三维扰动的不稳定性，在本章 f 节中我们将讨论这个问题。

Couette 流动：在很大程度上，二个同心旋转圆柱面之间层流(Couette 流动)的稳定性是由离心力制约的。图 5.4 给出了这种流动的速度分布，它是以 Navier-Stokes 方程精确解为基础的，包括了半径比 $\lambda = r_1/r_2$ 的各种数值，并且集中于两种基本情形：(I)，内圆柱旋转，外圆柱静止；(II)，外圆柱旋转，内圆柱静止。在情形 I 中(内圆柱旋转)，内圆柱壁面上的流体层所承受的离心力比靠近外壁面的流体层所承受的离心力更大，因此，这种情形是非常不稳定的。G. I. Taylor 很早就研究了这个问题。他假定存在着三维扰动，结果发现存在着环状旋涡形式的二次流动。G. I. Taylor 的理论工作和实验吻合得极好，见第十七章 f 和图 17.32—17.34。在情形 II 中(外圆柱旋转)，较大的离心力作用在靠近外壁面的各层流体上，对流动有高度的稳定作用。F. Schultz-Grunow^[204c] 从理论上深入地研究了这种流动相对于二维扰动的稳定性，并证明了这种流动布局固有的稳定性。该作者^[204b] 的实验研究证实了这个结论，也可参考 F. Schultz-Grunow^[204d] 更近的几篇论文。

2. 非均质流体的流动(分层效应) 流体密度沿垂直方向的变化影响着沿水平平直壁面流动的稳定性,在某种意义上,这种影响类似于均质流体沿曲壁流动时离心力的作用。当流体密度沿垂直方向越向上越小时,这种流动布局是稳定的;当密度变化相反时,流动会变得不稳定。在后一种情形下,即使流体是静止的,当从下面加热流体时也会出现不稳定。流体失稳后,水平流体层变成如蜂巢状的规则六角形涡流^[5,97,190]。在稳定的密度分层流动的情形下,由于在脉动运动过程中较重的流体质点必须向上运动,而较轻的流体要顶着流体静压力向下运动,抑制了沿垂直方向的湍流混合运动。如果流体密度梯度足够大,湍流甚至可能完全被抑制住。在一些气象过程中这是很重要的现象。例如,在夏季凉爽的夜晚,微风吹拂,可以观察到在牧场潮湿的田野上空笼罩着一层边缘清晰的薄雾。这个现象表明,风已经不再是湍流,空气层作层流运动,一层层地滑动而无湍流混合。产生这种现象的原因是由于夜晚地面冷却,在空气中形成了显著的温度梯度,它抑制了较热、较轻的大气上层空气与靠近地面较冷、较重的空气相混合。有时在傍晚可以观察到风“完全平息”,也是由于同样的原因:在离地面较高的高度上,风比较强烈,但是靠近地面时,由于空气冷却抑制了湍流脉动,这就大大地减小了风速。再有,在 Kattegat 海峡出现的淡水在盐水上面流动,以及当冷气团在热空气下面形成高压楔时 Bjerknæs 极锋明显的稳定性都属于这一类现象。

L. Prandtl^[23] 将密度分层流动和前面讨论过的、有离心力影响的沿曲壁的流动联系在一起,使用能量法进行了分析。他指出,分层流的稳定性,除了通常对 Reynolds 数的依赖关系外,还取决于被称为 Richardson 数的分层参数

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \left/ \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right., \quad (17.13)$$

其中 g 表示重力加速度, ρ 为密度,并且 y 的正方向是垂直向上的,下标 w 指示速度梯度在壁面取值。 $R_i = 0$ 对应于均质流体, $R_i > 0$ 表示稳定的分层流动, $R_i < 0$ 表示不稳定的分层流动,

L. F. Richardson^[192] 和 L. Prandtl 使用能量法证明了当 $R_i > 2$ 时湍流可能会被完全抑制掉。G. I. Taylor^[240] 改进了 Prandtl 的论证, 得到稳定性界限为 $R_i \geq 1$ 。H. Ertel^[56] 给出了这个准则的热力学证明。

G. I. Taylor^[240] 和 S. Goldstein^[69] 最早应用小扰动方法研究了这个问题。他们假设无界流体中存在着连续的密度分布和线性速度剖面, 忽略粘性和速度剖面中曲率的影响, 从而得到稳定性界限为 $R_i = \frac{1}{4}$ 。H. Schlichting^[199] 利用 Tollmien 理论研究了密

度分层流动的稳定性。他在计算中假定平板的速度剖面是 Blasius 剖面, 在边界层内有密度梯度, 边界层外密度不变。从计算结果可以发现, 临界 Reynolds 数随着 Richardson 数增加而急骤增加 (图 17.22), 从 $R_i = 0$ (均质流体) 时的临界值 $R_{crit} = 645$ 增加到 $R_i = 1/24 = 0.042$ 时的 $R_{crit} = \infty$ 。因此, 当

$$R_i > 0.042 \quad (\text{稳定流动}) \quad (17.14)$$

时平板流动处处都是稳定的。可以看到, 稳定性界限的这个数值比前面几种理论给出的值要小得多。

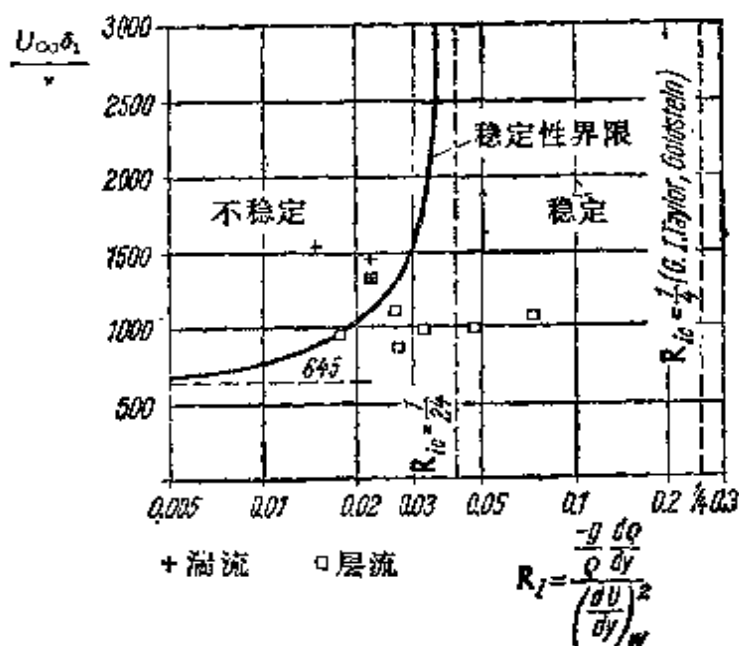


图 17.22 在有密度梯度的零攻角平板边界层流动中, 临界 Reynolds 数随 Richardson 数 R_i 的变化

理论计算和 H. Reichardt^[174] 实验结果的比较见图 17.22。实验是在 Goettingen 一个专用的矩形风洞中进行的。风洞上壁面用蒸汽加热，下壁面用水冷却，空气从中流过。可以看出，所有观察到的层流都落在稳定范围内，而湍流都落在不稳定范围内。因此，理论计算结果与实验结果吻合得十分好。

G. I. Taylor^[239] 在海流中观察到湍性流动，这种流动的 Richardson 数相当高，出现这个现象的原因看来是由于在流动中不存在壁面的影响。最近 J. T. Stuart^[27a] 从理论上研究了磁场对转换的影响。他发现在两个平行平板之间的层流情形下，当磁力线平行于壁面时，临界 Reynolds 数明显地增加。

e. 传热和可压缩性对转换的影响¹⁾

1. 引言 上述各节中叙述的关于转换的理论和实验研究结果仅适用于中等速度的流动(不可压缩流动)。在航空工程发展的推动下，近来人们广泛地研究了流体可压缩性对转换的影响。在可压缩流动情形下，除了 Mach 数外，还必须考虑另外一个重要的参数，该参数和流体与壁面之间的传热率有关。当流体不可压缩时，只有当壁面温度高于或低于流经它的流体的温度时，才会在壁面和流体之间发生热交换。正如在第十三章中已经指出的，对于可压缩流体，边界层内释放出的热量将产生重要的影响。在上述两种情形下，除了速度边界层外还形成热边界层，而且热边界层在确定小扰动的不稳定性时起着一定的作用。我们即将讨论的理论和实验研究指出，对气体的亚声速流动，气体向壁面的传热产生的影响使边界层稳定，而从壁面向气体传热产生相反的效果。对于液体的流动，在上述两种情形下传热的作用都恰恰相反。对于超声速流动，可能出现一种新型的不稳定扰动，以完全不同的方式表现出传热的影响。

2. 不可压缩流动中传热对转换的影响 即使流体是不可压缩

1) 本节是由 California 理工学院 (Pasadena, California) 喷气推进实验室 L. M. Mack 博士编写的。

的，也很容易认识到从壁面向流体传热影响着层流边界层转捩的某些主要特征。因此，我们首先说明这种简单的情形。W. Linke^[13]首先进行了关于传热对转捩影响的实验研究。他测量了放置在水平气流中被垂直加热的平板的阻力，其长度 Reynolds 数范围是 $R = 10^5$ 至 10^6 。实验观察到加热使平板阻力增加很多。W. Linke 根据这个事实十分正确地得出了对平板加热使转捩 Reynolds 数减小的结论。

利用第十六章讨论的拐点准则，不难确定出当 $T_w \approx T_\infty$ 时，传热是产生稳定作用还是不稳定作用。传热产生的影响是由于流体的粘性系数 μ 依赖于温度 T 。按照式(13.6)，若把粘性系数随温度的变化考虑进去，零攻角平板主流速度剖面 $U(y)$ 在壁面上的曲率由下式给出

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_w = -\frac{1}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dy}\right)_w \left(\frac{dU}{dy}\right)_w. \quad (17.15)$$

现在，若壁面比来流的流体更热，则 $T_w > T_\infty$ ，而且温度梯度在壁面的值是负的： $(dT/dy)_w < 0$ 。按照式(13.3)，气体的粘性系数随温度的增加而增加，我们必定有 $(d\mu/dy)_w < 0$ 。因为壁面上速度梯度是正的，所以从式(17.15)得到

$$T_w > T_\infty \text{ 意味着 } (d^2U/dy^2)_w > 0. \quad (17.16)$$

因此对于加热壁，速度剖面的曲率在壁面上的值是正的，而在 $y = \infty$ 处速度剖面的曲率小到几乎为零，而且是负的（参见图7.4），我们立即可知在边界层内存在着拐点（ $d^2U/dy^2 = 0$ ）。按照在第十六章中给出的准则，这个结论表明，从壁面向流过它的气体传热会使边界层不稳定，类似于压力沿下游方向增加产生的效果。反之，冷却壁面增加了壁面上速度剖面的曲率，使边界层更加稳定，其作用类似于顺压梯度产生的效果。

T. Cebeci 和 A. M. O. Smith^[22]对空气进行了计算，证实了加热使平板临界 Reynolds 数减小，同时，H. W. Liepmann 和 G. H. Fila^[129]在零攻角垂直平板的实验中观察到转捩 Reynolds 数减小的类似现象。

因为液体的粘性系数随温度增加而减小，按照式(17.15)，加热和冷却壁面产生的效果应该是相反的。A. R. Wazzan, T. Okamura 和 A. M. O. Smith^[249, 250, 251]研究了水的情形，证实了这个估计。图 17.23 表示了加热壁和冷却壁时边界层出现的失稳临界 Reynolds 数，最大无量纲扰动增长率 $(\beta_i \delta_i / U_\infty)_{\max}$ ，以及无量纲位移厚度 $\delta_{1i} \sqrt{U_\infty / \nu_\infty}$ 相对于未加热壁面的值 1.721 的比值。

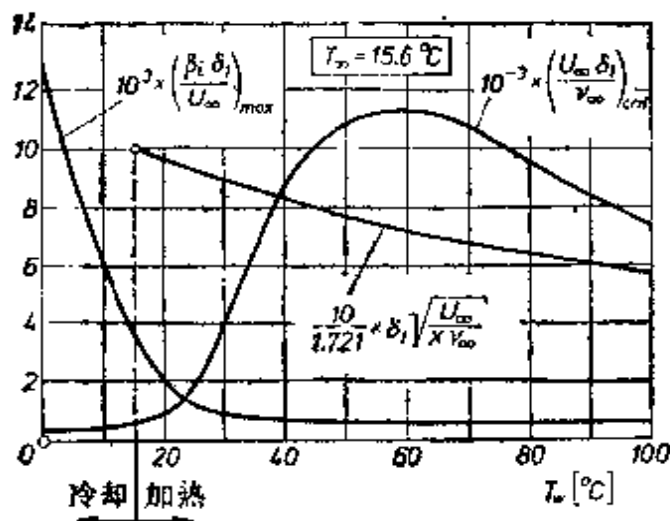


图 17.23 壁面温度对平板水边界层的稳定性及位移厚度的影响，根据 A. R. Wazzan, T. Okamura 和 A. M. O. Smith^[249]
 T_w = 壁面温度； T_∞ = 来流温度

当壁面温度从初始值 15.6°C (60°F) 开始增加时，加热对水边界层有很强的稳定作用，但是进一步加热产生失稳作用。虽然当 $T_w > 60^\circ\text{C}$ 以后，无量纲扰动增长率不变，但是与 δ_i 的减小成反比，无量纲的扰动增长率 $(\beta_i)_{\max}$ 是增加的。冷却壁的结果证实了冷却对液体的不稳定作用。在 A. R. Wazzan 的理论中，传热的唯一影响不是表现在对平均速度剖面的影响，而是通过粘性系数随温度的变化起作用。R. L. Lowell 和 E. Reshotko^[146] 的理论更完整，包括了温度和密度的脉动，但是得到几乎相同的数值结果。A. Strazisar, J. M. Prah 和 E. Reshotko^[227] 进行了稳定性实验，证实了在小量加热情形下理论计算确定的最小临界 Reynolds 数的变化。

自由对流：E. R. G. Eckert 和 E. Soehngen^[57, 59] 最早将垂

直加热平板的自由对流边界层转捩和小扰动增长联系起来。关于这方面的综合评述,读者可以参考 B. Gebhardt^[79,80,81] 的文章。在该领域内已经取得了许多进展,可以利用以小扰动理论为基础的精确数值计算来解释观察到的转捩现象。

虽然对于垂直加热的平板,边界层的不稳定性来源于 Tollmien-Schlichting 型的行波,但是在倾斜加热平板的情形下,观察到静止的不稳定旋涡,其轴线沿流动方向,它们是 Taylor-Goertler 型的旋涡,见文献[147,228,81]。

P. R. Nachtsheim^[167] 使用小扰动方法研究了垂直加热平板自由对流的稳定性,其速度分布和温度分布分别见图 12.24 和 12.23。如图 12.24 所示,速度剖面有十分明显的拐点,是这种速度剖面稳定性界限很低的固有特征。除速度脉动外,同时存在着温度随时间的脉动,这种机制会使能量从主流传递给扰动,将对主流产生一种很强的不稳定作用。理论计算导出两个耦合的微分方程,代替了 Orr-Sommerfeld 方程(16.14)。其中一个对应于速度,另一个对应于温度。除了 Reynolds 数外,这两个方程还包含 Prandtl 数和 Grashof 数。关于这方面读者可参阅 E. Eckert 等人^[59], A. Szewczyk^[229] 以及 T. Benjamin^[157] 的论文,其中还含有实验结果。

3. 可压缩性效应 在超声速和高超声速边界层中遇到的许多转捩现象中,我们将集中讨论 Mach 数和传热对零压力梯度边界层转捩的作用,在零攻角平板和圆锥上都会形成这种边界层。我们首先总结由小扰动方法获得的主要结果,然后指出如何用理论来说明某些实验观察的结果。L. M. Mack^[153] 对可压缩边界层的稳定性理论进行了深入的研究,因此下面要论述的许多理论结果,凡是未加说明的,均引自他的这篇文献[153]。

D. Kuechemann^[112] 在忽略扰动运动中粘性影响的基础上,第一个分析了可压缩层流边界层的稳定性。I. Lees 和 C. C. Lin^[122] 最早将温度梯度和速度剖面的曲率引进稳定性的无粘分析中。他们假设扰动具有如式(16.10)那样的周期形式,并将扰动分

成三类,即亚声速、声速和超声速,它们取决于相速度 c , 大于、等于还是小于 $U_\infty - a_\infty$, 其中 a 是声速。特别是, L. Lees 和 C. C. Lin 证明了只要 $U(y_s) > U_\infty - a_\infty$, 则不稳定亚声速扰动存在的充分条件是

$$\left[\frac{d}{dy} \left(\rho \frac{dU}{dy} \right) \right]_{y_s} = 0. \quad (17.17)$$

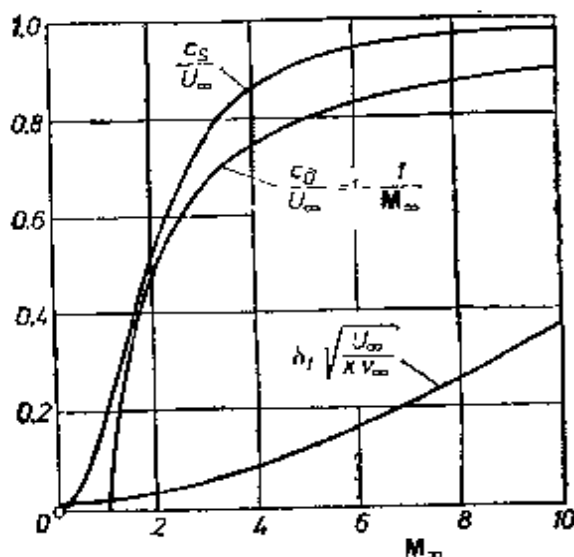


图 17.24 在绝热平板边界层中, Mach 数对二维中性扰动的相速度及位移厚度的影响

c_s = 中性亚声速扰动的相速度; c_0 = 中性声速扰动的相速度

这个定理是第十六章 b 的定理 I 向可压缩流动的推广, 其中 y_s 对应于不可压缩流动中的拐点, 通常被称为广义拐点。对广义拐点, 存在着 $c_s = c_s = U(y_s)$ 的中性亚声速扰动; 而当 $M_\infty > 1$ 时存在着相速度 $c_s = c_0 = U_\infty - a_\infty$ 的中性声速扰动, 波数 $\alpha = 0$ 。在某些流动中, 也可能存在着中性超声速扰动, 但是尚未给出它们存在的一般条件。对一族绝热平板边界层, 图 17.24 给出中性亚声速和声速扰动的无量纲相速度 c_s/U_∞ 和 c_0/U_∞ 随 M_∞ 变化的曲线。在计算 c_s 以及整个这一节的计算中, 都要用到平板边界层速度剖面, 这里选取的是空气可压缩层流边界层方程的精确数值解。粘性系数和 Prandtl 数都是温度的函数, 在 $M_\infty = 5.1$ 时来流驻点温度为 311K, 静温为 $T = 50K$ 。在更高的 Mach 数时, T_∞ 保持为 50K。这些温度值是超声速和高超声速风洞运行时

典型的温度条件。在图 17.24 中因为 $c_r > c_0 > 0$ ，这一族边界层速度剖面都满足上述推广拐点定理的条件，所以对无粘扰动是不稳定的。随着 M_∞ 增加，广义拐点向 y/δ 增加的方向移动，类似于不可压缩流动中，拐点随逆压梯度增加而移动。图 17.24 还对一族绝热边界层速度剖面给出无量纲位移厚度 $\delta_1 \sqrt{U_\infty / \nu_\infty}$ 随 M_∞ 的变化。L. Lees 和 C. C. Lin 证明了中性亚声速扰动的波数如同不可压缩流动中一样是唯一的，只要在整个边界层内相对于相速度平均流动处处是亚声速的，即 $\hat{M}^2 < 1$ ，其中 $\hat{M} = (U - c_r)/a$ 是当地相对 Mach 数。虽然他们在同样的限制条件下证明了式 (17.17) 是失稳的充分条件，但是从大量的数值计算看来，即使对 $\hat{M}^2 > 1$ ，式 (17.17) 也是扰动失稳真正的充分条件。反之，L. M. Mack^[152] 利用数值计算结果证明对边界层 $\hat{M}^2 > 1$ 的区域，有无数中性波数或模式，它们有同样的相速度 c_r 。多重模式是控制方程变化的结果，例如压力脉动的方程从 $\hat{M}^2 < 1$ 时的椭圆型方程变成 $\hat{M}^2 > 1$ 时的双曲型。第一模式仍和不可压缩流动的一样，在可压缩流动中，它是由 L. Lees 和 E. Reshotko^[142] 首先计算出来的。其他模式，或者说更高阶模式没有对应的不可压缩流动模式。当 $c_r = c_0$ 时，在 $M_\infty = 2.2$ 时 \hat{M}_0^2 首先达到 1；当 $M_\infty = 3, 5, 10$ 时，超声速相对流动区域的上界分别为 $y/\delta = 0.16, 0.43, 0.59$ 。

当 $\hat{M}_0^2 > 1$ 时，具有相速度 c_r 的多重中性扰动并非是唯一可能的中性扰动，也存在着 $U_\infty \leq c_r \leq U_\infty + a_\infty$ 的多重中性扰动。这些扰动不依赖于具有广义拐点的边界层。此外，总是存在着毗邻的不稳定扰动，它们的相速度 $c_r < U_\infty$ 。因此，只要可压缩边界层内有 $\hat{M}^2 > 1$ 的区域，不管速度和温度分布的其他特性如何，该边界层对无粘扰动总是不稳定的。

对第一模式的扰动增长率的限制是 c_r 必须落在 c_0 和 c_r 之间。任何使差值 $c_r - c_0$ 增加的作用也使增长率 β_i 增加。如图 17.24 所示，这个差值可能是非常小的。 c_0 与 c_r 不同，它与边界层剖面无关，只有考虑采用更一般的扰动形式才能排除由 c_0 所加的限制。不用式 (16.12)，而改用

$$u'(x, y, z, t) = f(y) \exp[i(\alpha x + \gamma z - \beta t)], \quad (17.18)$$

则扰动波的法线与 x 方向成夹角 $\tilde{\phi} = \tan^{-1}(\gamma/\alpha)$ 。C. C. Lin^[144] 已指出, 若将坐标系绕 y 轴旋转到使 x 轴与波阵面的法线重合, 那么三维无摩擦方程等同于二维方程(除去新的 z 方向的动量方程, 此方程与其他方程是不耦合的)。因此, 上述分析对三维扰动仍然适用, 但是对于制约着运动的 Mach 数要用 $\tilde{M}_\infty = M_\infty \cos \tilde{\phi}$ 来代替 M_∞ 。所以, 三维中性声速扰动的相速度是 $c_0/U_\infty = 1 - 1/\tilde{M}_\infty$, 同时 c_0 随 $\tilde{\phi}$ 增加而减小。

由于 $c_r - c_0$ 随着 $\tilde{\phi}$ 的增加而增加, 三维扰动第一模式的最大增长率大于二维扰动的增长率, 如图 17.25 所示。在该图中画出了这族绝热边界层无量纲扰动增长率最大值 $(\beta_1 \delta_1 / U_\infty)_{\max}$ 随 M_∞ 变化的曲线, 这里所谓的“最大”, 对于二维扰动是相对于 α 而言, 对于三维扰动则是相对于 α 和 $\tilde{\phi}$ 而言。在图 17.25 中还表示了二维扰动第二模式的计算结果, 与第一模式相反, 最不稳定的第二模式扰动是二维的, 它仅取决于超声速相对流动区域沿 y 方向伸展的范围, 这个范围是由 c_r 和 Mach 数 \tilde{M}_∞ 决定的。对于二维扰动, 这个区域的范围最大。

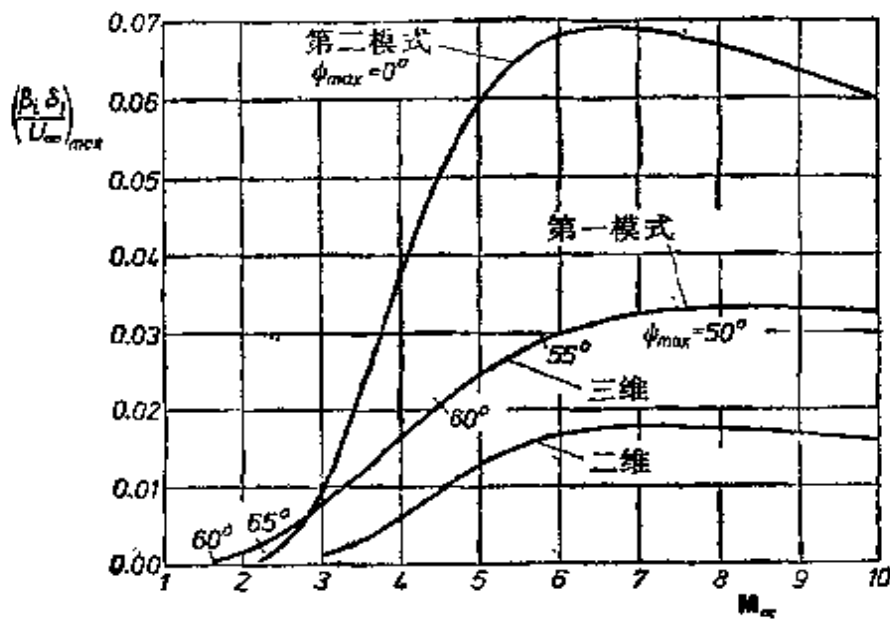


图 17.25 Mach 效对扰动第一、第二模式最大增长率的影响, 由绝热平板边界层无摩擦理论得到的结果, 根据 L. M. Mack^[145]

L. Lees 和 C. C. Lin^[122]沿着和第十六章叙述的不可压缩流渐近理论同样的思路,提出了粘性扰动理论.后来 L. Lees^[124], D. W. Dunn 和 C. C. Lin^[48]以及 E. Reshotko^[142]进一步推广了这个理论.但是,当首先由 W. B. Brown^[11],而后是 L. M. Mack^[151]成功地用数字计算机得到十分精确的可压缩稳定性方程的特征值以后,人们发现渐近理论仅适用于低超声速 Mach 数.因此,这里只涉及由完整的粘性稳定性方程的数值积分得到的结果.

对于绝热平板边界层,随着 Mach 数增加,可以区分出具有不同失稳特性的三个 Mach 数范围.在图 17.26 中画出了 $R = U_\infty x / \nu_\infty = 2.25 \times 10^6$ 时,二维扰动第一、第二模式增长率的比值 $(\beta_i)_{\max} / (\beta_i)_{\max, inc}$ 随 M_∞ 变化的曲线,其中 $(\beta_i)_{\max, inc} = 0.00432 U_\infty / \delta_1$ 是同一 Reynolds 数时不可压缩流动的扰动增长率.在第一个区域,其 Mach 数范围到 $M_\infty = 2.5$,只有扰动的第一模式是重要的.二维扰动的最大增长率随 Mach 数增加而急剧减小,但是当 $M_\infty > 1$ 以后,三维扰动是最不稳定的.从 $M_\infty = 2.5$ 至 5.0 是第二个区域,如图 17.25 所示,无摩擦不稳定性开始增强,并在较低 Reynolds 数起作用.

当 Mach 数接近 $M_\infty = 3.5$ 时,无论三维和二维扰动的最大增长率均出现在 $R = \infty$ 的情形.假定失稳基本上是无摩擦性质的,在第二个 Mach 数范围内,与第二模式相关的不稳定频率带首先出现在 $R = 2.25 \times 10^6$ 时.在第三个区域 ($M_\infty > 5$),扰动增长率随着 δ_1 增加而持续减小,如图 17.24 所示.

对于气体的低速流动,我们已经讨论了加热壁的不稳定作用和冷却壁的稳定作用. L. Lees^[124] 计算了空气可压缩边界层中类似的作用.除此之外,他还估算了通过冷却使超声速边界层完全稳定的可能性.虽然 M. Bloom^[11] 和 E. R. van Driest^[50] 对完全稳定边界层要求的冷却量所作的估算以及其他有关的计算是以二维扰动的渐近理论为基础的,而且没有涉及更高阶的模式,但是最近的计算机计算结果已经证实,在一个很宽的 Mach 数范围内,充分冷却的确可以完全地或几乎完全地使二维和三维扰动的第一

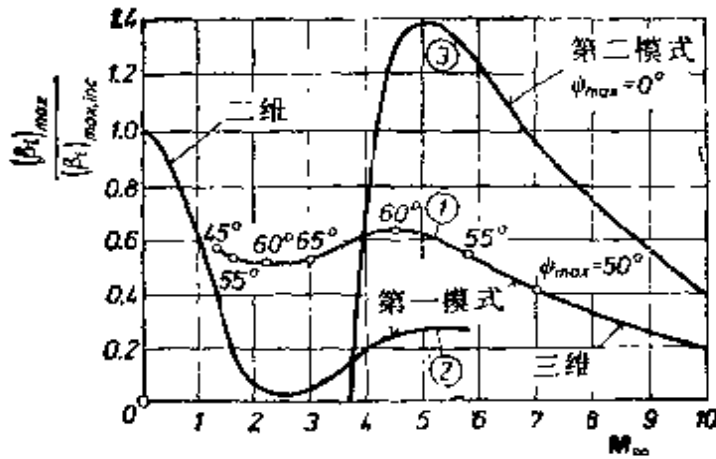


图 17.26 Mach 数对扰动第一、第二模式最大增长率的影响，由绝热平板边界层的粘性理论给出的结果，根据 L. M. Mack^[133]
 $R = U_{\infty} x / \nu_{\infty} = 2.25 \times 10^6$; ψ_{max} = 最不稳定的扰动波的角度，每隔 5° 标值

模式稳定。图 17.27 给出了由无摩擦理论得到的 $(\beta_i)_{max}$ 与绝热壁 $(\beta_i)_{max,ad}$ 的比值随 T_w/T_{ad} 的变化，其中 T_w/T_{ad} 是壁温和绝热壁温的比值。由图可见，冷却对三维扰动第一模式的稳定作用是非常明显的。随着 Mach 数增加，对同样的壁温与绝热壁温的比值，稳定作用减弱。与此相反，冷却作用不能够稳定扰动的第二模式，却使它变得不稳定。呈现这种不同特性的原因仍然在于：受冷却强烈影响的广义拐点对不稳定的高阶模式是不重要的。冷却几乎不能影响超声速相对流动区域的范围这个重要的物理量。

从粘性理论也可以得到类似于图 17.27 所示的结果，只不过当 $M_{\infty} > 3$ 时，对于任意有限的 Reynolds 数，稳定性所要求的冷却量小于无摩擦理论给出的值。关于这方面可参阅 E. Reshotko^[134b] 的论文。

实验结果： J. Laufer 和 T. Vrebalovich^[139] 进行的实验第一个表明了超声速流动中存在着层流不稳定波。J. M. Kendall^[140] 后来的实验进一步提供了 $M_{\infty} = 4.5$ 时验证超声速流动稳定性理论的定量结果。J. M. Kendall 实验成功的原因之一是由于他的风洞运行时四壁都是层流边界层，消除了来源于超声速湍流边界层很大的声波扰动，有可能提高测量人工扰动增长率精度（人工扰动是由镶嵌在平板表面上的电极间的辉光放电产生的，

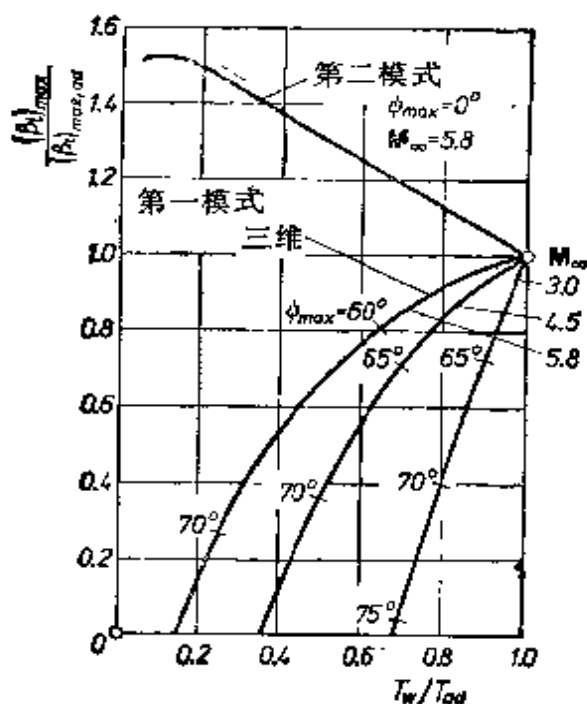


图 17.27 壁面冷却对扰动第一、第二模式最大增长率的影响,由平板边界层无摩擦理论给出的结果

T_w = 壁温

T_{ad} = 绝热壁温

$\tilde{\psi}_{max}$ = 最不稳定的扰动波的角度,每隔 5° 标值

电极与 x 方向偏斜成 $\tilde{\psi}$ 角). 理论和实验的扰动增长率之间的比较见图 17.28,其中纵坐标是无量纲扰动空间增长率 $-\alpha_i \delta_1$. 通过下式

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = -\alpha_i, \quad (17.18a)$$

将任意脉动的流动变量的均方根振幅 A 与扰动的空间增长率联系在一起. 如果用一个热线风速计向下游跟踪扰动的均方根振幅的峰值,那么 $-\alpha_i$ 可以理解为信号振幅的对数导数. 正如 H. Schlichting 最早做的那样(见第十六章文献[76],还可见 M. Gaster 的文献[78]), α_i 的理论值可以由 $\alpha_i = \beta_i / (\partial \beta_r / \partial \alpha)$ 从 β_i 得到,其中 $(\partial \beta_r / \partial \alpha)$ 是群速度. 更方便的计算 α_i 的方法是直接设式(17.18)中的波数 α 和 γ 为复数,而频率 β 为实数.

图 17.28 说明 $\tilde{\psi} = 55^\circ$ 时扰动的第一模式和二维扰动第二

模式的测量值与理论值符合得很好，只是第二模式最大增长率有一些偏差，但对应最大增长率的扰动波频率的理论值与实验吻合得很好。

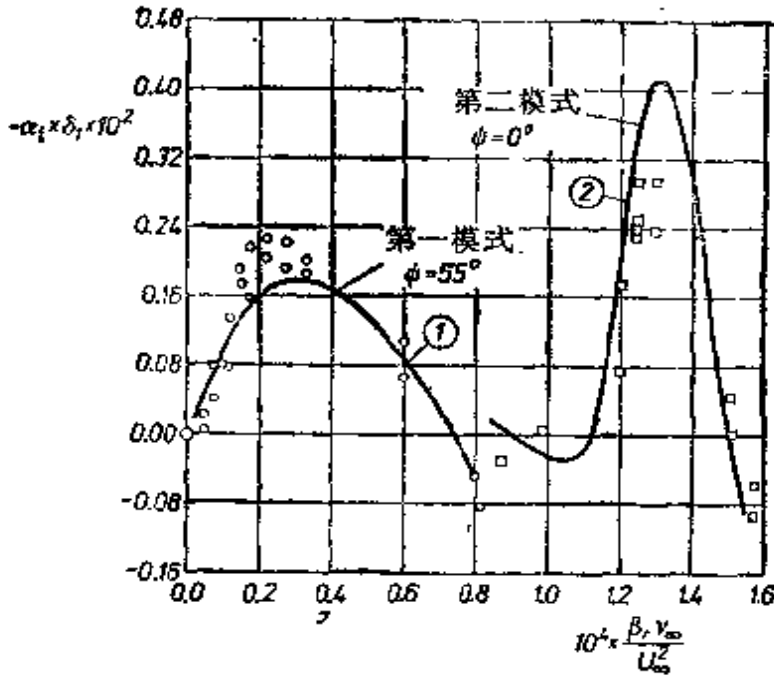


图 17.28 绝热平板边界层扰动空间增长率的实验值与理论值的比较， $M_\infty = 4.5$ ， $U_\infty x / \nu_\infty = 2.4 \times 10^6$ 。实验数据是用热线风速计得到的，用辉光放电装置人为地产生扰动，该装置与理论的扰动波传播方向成 ψ 角

○, □ 实验: J. M. Kendall^[114]; — 理论: L. M. Mack^[133]

以刚刚叙述的理论结果为基础，我们现在可以进而讨论 Mach 数和冷却对零压力梯度边界层转捩 Reynolds 数的影响。应该牢记的很重要的一点是，尽管边界层本身具有确定的不稳定特性，它的转捩 Reynolds 数不仅取决于这些性质，还依赖于流动中出现的扰动的类型和强度。对于研究绝热边界层来说，唯一方便的设备是超声速风洞，它具有自己特殊的扰动环境。当 Mach 数小于 $M_\infty = 3$ 时，不同风洞测量的转捩 Reynolds 数差别很大。当 $M_\infty > 3$ 时，J. Laufer^[135] 以及 E. R. van Driest 和 J. C. Boison^[64] 都指出，来自稳压段的湍流度不影响在实验段发生的转捩现象。影响转捩的主要扰动源来自风洞壁面湍流边界层的声辐射。除了扰动环境的差异对转捩测量的影响以外，还有一个用一致的方法定

义和测量转捩 Reynolds 数的问题, J. L. Potter 和 J. D. Whitfield^[137] 曾对五种不同的转捩测量方法作了有益的比较。小扰动方法只适用于计算起始转捩 Reynolds 数。

S. R. Pate 和 C. J. Schueler^[133] 积累了大量的 $M_\infty > 3$ 时平板的风洞转捩数据, S. R. Pate^[134] 积累了圆锥的实验数据, 在这些数据的基础上构成了仅基于声辐射参效的相关关系。上述数据, 加上 $M_\infty < 3$ 时 J. Laufer 和 J. E. Marte^[136] 对圆锥的测量结果, D. Coles^[24] 对平板的测量结果, J. M. Kendall 在 $M_\infty = 1.6$, $R = 4.3 \times 10^5$ 时对平板层流边界层的测量(和 D. Coles 使用的是同一座风洞), 以及 N. S. Dongherly 和 F. W. Seiple^[49] 在跨声速风洞中对圆锥的测量结果, 所有这些数据对一座性能良好的风洞中转捩 Reynolds 数随 Mach 数变化的规律提出了如下的看法: 当 $M_\infty > 1$ 时, 转捩 Reynolds 数起初随 Mach 数的增加而增加, 在 $M_\infty = 1.5$ 至 2.0 之间, 转捩 Reynolds 数曲线有一个可能相当宽的峰值, 接着转捩 Reynolds 数随 Mach 数的增加而减小, 然后从 $M_\infty = 3$ 到 5 之间的某一 Mach 数开始, 转捩 Reynolds 数曲线单调上升, 至少延续到 $M_\infty = 16$ (根据在氦风洞中的测量结果^[137])。特别有趣的是, 这三个 Mach 数范围大体上对应于在图 17.26 中所讨论的三个区域。L. M. Mack^[154] 以单一频率、增长率最大的扰动的临界振幅 A 为基础(见式(17.18a)), 进行了平板起始转捩 Reynolds 数的简化计算, 建立了转捩和稳定性理论之间更直接的联系。在图 17.29 中, 和平板的一些实验数据^[24, 25]一起, 画出了 L. M. Mack 的计算结果。 A_0 是 A 在中性稳定点上的数值, 上半支曲线是假设 A_0 与 Mach 数无关而得到的结果, 下半支曲线是假设当 $M_\infty > 1.3$ 时 $A_0 \propto M_\infty^2$ 得到的结果。正是下半支曲线对应着风洞中的转捩, J. Laufer^[136] 已经确定, 从 $M_\infty = 1.6$ 至 5.0, 来流均方根扰动振幅基本上随 M_∞^2 而变化。这条曲线与测量结果比较, 总的来说是相似的, 充分地支持了这样一个观点: 根据小扰动方法确定的一些特定的扰动增长导致超声速边界层转捩。

当我们进行实验来研究例如 Mach 数等流动参数对转换的作用时,如图 17.30 给出的测量结果那样,必须保持单位 Reynolds 数

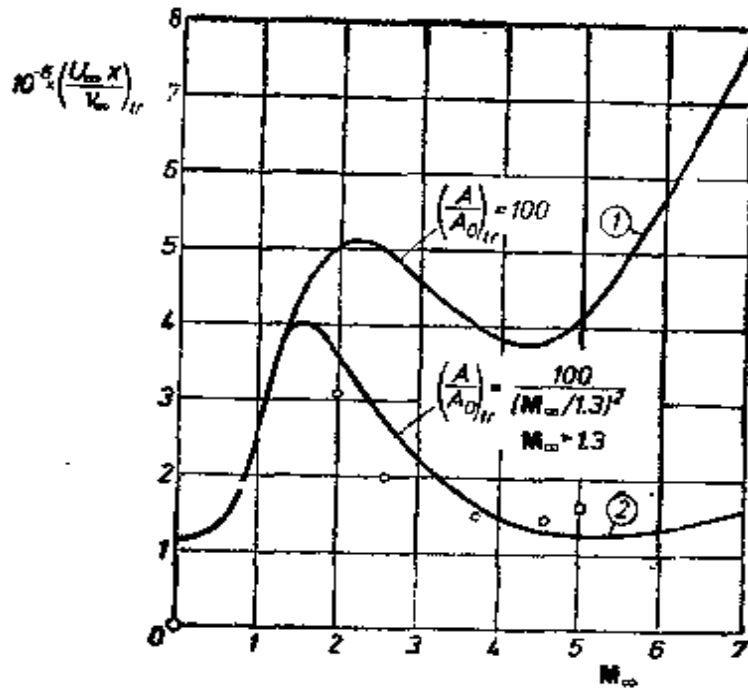


图 17.29 Mach 数对平板绝热边界层起始转换 Reynolds 数的实验值的影响,以及实验值与基于两种不同振幅判据的计算结果之间的比较 (D. Coles^[24], R. E. Deem 和 J. S. Murphy^[45], L. M. Mack^[130])

A_0 = 中性稳定点处的初始扰动振幅

$(A/A_0)_{tr}$ = 转换时的振幅与 A_0 的比值,根据式 (17.18a)

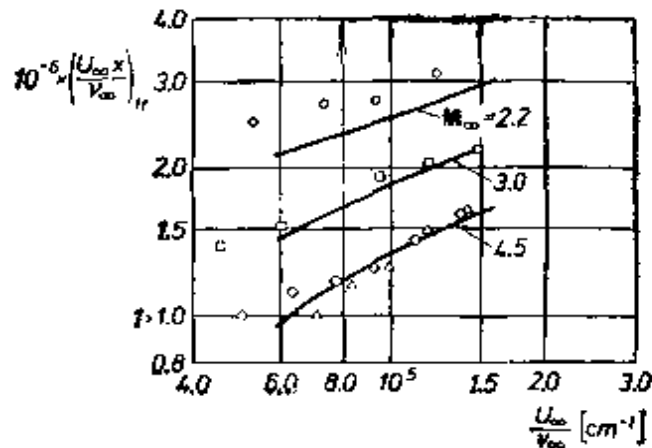


图 17.30 绝热平板边界层单位 Reynolds 数对起始转换 Reynolds 数的影响,实验值与理论计算结果的比较. 理论计算以稳定性理论及测量的来流扰动的性质为基础. 测量: D. Coles^[24]; 计算: L. M. Mack^[130]

——计算值; 测量值 M_∞ : \circ 1.97; \square 2.57; \triangle 3.70; \diamond 4.54

U_{∞}/ν_{∞} 不变。几位研究者在不同类型的风洞^[12,185,195,116] 以及弹道靶中^[194] 已经注意到转换 Reynolds 数与单位 Reynolds 数之间的关系。稳定性理论对这种关系进行了解释，但是尚未注意到某些重要的参数，例如粗糙度或前缘钝度对转换的影响。正如 E. Reshotko^[194] 解释的，当单位 Reynolds 数改变时，边界层的频率响应和流动中扰动的能谱发生相对移动。由于这一移动，边界层中扰动的每个频率的初始振幅必然变化，所以转换 Reynolds 数也必然变化。L. M. Mack^[155] 在三个 Mach 数下计算了单位 Reynolds 数对起始转换 Reynolds 数的影响，其结果与 D. Coles^[24] 的测量值在图 17.30 中作了比较，表明上述解释对光滑平板是正确的。后来的计算结果要比图 17.30 的更可靠些，因为它们考虑了如 J. Laufer^[137] 测量的来流扰动的能谱，此外还考虑了单位 Reynolds 数对束流扰动强度的影响。假设边界层中初始扰动是与来流扰动成正比的。

R. W. Higgins 和 C. C. Pappas^[91] 在 $M_{\infty} = 2.4$ 时对平板的实验，以及 K. R. Czarnecki 和 A. R. Sinclair^[25] 在 $M_{\infty} = 1.6$ 时对旋成体的实验都证实了加热对转换的不稳定性作用。后一个实验还证实了所预期的进行冷却的稳定作用，正如 J. R. Jack 和 N. S. Diaconis^[100] 在 $M_{\infty} = 3.12$ 时对两个旋成体进行的实验所表明的那样。关于边界层冷却的大量飞行实验（此时在很高的长度 Reynolds 数下还可以观察到层流），我们可以引用 J. Sternberg^[215] 在 $M_e = 2.7$ 时对圆锥所做的实验，其中 M_e 是边界层外缘的 Mach 数。表面温度变化的过程明确地显示出在 $R = 40 \times 10^6$ 及 $T_w/T_{ed} = 0.51$ 时存在着层流，与 $R = 12 \times 10^6$ 时的风洞测量结果^[51] 进行比较，在同样的 Mach 数下，当 $T_w/T_{ed} = 0.65$ 时边界层已经转换成湍流。

E. R. van Driest 和 J. C. Boison^[34] 对圆锥在 $M_e = 1.9$ ，2.7 和 3.7 时的研究结果见图 17.31。转换 Reynolds 数随着壁面冷却而增加是十分明显的，还可以看出，随 Mach 数增加，冷却的稳定作用降低，这种趋势一直持续到更高的 Mach 数时。A. M.

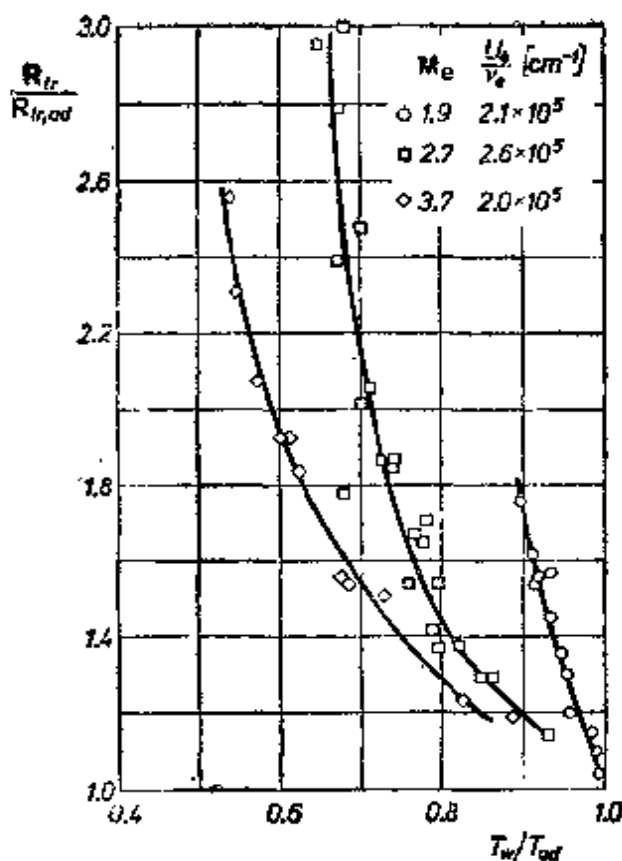


图 17.31 超声速风洞中，在三个 Mach 数下，零攻角 10° 圆锥的边界层转捩实验数据。这些数据显示出壁面冷却的稳定作用，根据 E. R. van Driest 和 J. C. Boisson^[14]

- Coles
 □ Deem 和 Murphy
 — 计算值, Mack
- } $U_{\infty}/\nu_{\infty} = 1.2 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$

Cary^[21] 和 D. V. Maddalon^[156] 分别进行了 $M_{\infty} = 6.0$ 和 6.5 的平板实验，他们发现冷却的稳定作用很小，从而证实了这一点。壁面冷却的这些作用完全与图 17.27 所示的扰动第一模式的稳定性特性一致。但是，N. S. Diaconis, J. R. Jack 和 R. J. Wisniewski^[47,101] 所进行的 $M_{\infty} = 3.12$ 的两个实验中，在图 17.31 的稳定区域之外，冷却的作用不是增加而是降低了转捩 Reynolds 数，该现象和预期的趋势相反，所以称为“转捩逆转”。B. E. Richards 和 J. L. Stollery^[195,196] 在激波风洞进行的 $M_{\infty} = 8.2$ 平板实验中、K. F. Stetson 和 G. H. Rushton^[226] 进行的 $M_{\infty} = 5.5$ 圆锥实验中、N. W. Sheets^[223] 在弹道靶进行的 $M_{\infty} = 3$ 至 9 高冷却圆锥实验中，以及 G. G. Mateer^[159] 在常规风洞进行的 $M_{\infty} = 5.0$

和 6.6 圆锥实验中都观察到这个现象。迄今为止，尚未弄清这个现象的起因，不过在壁面上加些小的粗糙元多少可以产生一些类似的现象^[34]。这个现象的复杂性在于，在同样幅度的表面温度变化范围内，有许多实验并不出现转捩逆转现象^[35, 21, 256]。

在高超声速流动范围， $M_\infty = 10$ 时的三个风洞实验^[45, 58, 221] 显示出冷却几乎对转捩没有影响，其中第一个实验是对平板的，另外两个是对圆锥的。当 Reynolds 数不变时，将式 (17.18a) 对所有不稳定扰动第二模式的频率进行积分，得到的扰动最大振幅比 $(A/A_0)_{\max}$ 几乎与 T_w/T_{0d} 无关。这个结果启发了我们，高超声速风洞中的转捩可能是不稳定扰动第二模式作用的结果，实验事实支持了这种观点。J. L. Potter 和 J. D. Whitfield^[172] 最早观察到在高超声速边界层紧靠转捩点之前，有非常确定的绳索状的周期性扰动。此后，M. C. Fisher 和 L. M. Weinstein^[64, 66]，A. Demetriades^[66] 也观察到了类似的现象。这些非线性扰动的许多特征，特别是它们的波长约为 2δ ，明显地接近于不稳定扰动第二模式的理论特性。后来，J. M. Kendall^[215] 在 $M_\infty = 7.7$ 时冷却圆锥 ($T_w/T_{0d} = 0.6$) 的边界层内，测量了远在转捩发生前自然产生的扰动的频率谱。他发现，在等效的平板长度 Reynolds 数 ($= 1/3$ 圆锥 Reynolds 数) 下，存在着一个显著的最大扰动，它的频率与有最大增长率的扰动第二模式频率的理论值相差不足百分之七。

对于超声速和高超声速边界层转捩的其他方面，人们尚未应用小扰动方法进行研究，但是进行了大量的实验工作，M. V. Morkovin^[160] 提供了关于这方面的内容丰富的评述。关于影响转捩的一些特殊因素，读者可参阅下列几组参考文献：有关前缘或头部钝头的影响的文献 [13, 186, 226]；有关攻角对旋成体转捩影响的文献 [48, 159, 224, 226]；有关后掠角影响的文献 [23, 45, 102, 182]，以及有关烧蚀的影响的文献 [48, 65, 158, 253]。

f. 边界层对三维扰动的稳定性

1. 两个同心旋转圆柱之间的流动 在上述稳定性讨论的全

部例子中，所考虑的基本流动都是二维的，在研究它们的稳定性时，假设施加的扰动也是二维的，同时还假设扰动是平面波的形式，并沿主流方向传播。只要考虑的是沿平板的流动，这种作法会给出最低的稳定性界限，因为正如 H. B. Squire(第十六章 b3)所指出的那样，三维扰动总是导致更高的稳定性界限。

当研究沿曲壁的流动时，人们发现必须考虑另外一种类型的不稳定性。两个同心旋转圆柱面之间的流动，在内圆柱运动而外圆柱静止的情形下，提供了由离心力引起不稳定分层的一个例子。靠近内壁的流体质点承受着较高的离心力，呈现出被甩出去的趋势。Lord Rayleigh^[291] 首先研究了这一类流动的稳定性。他假定流体是无粘的，并且发现：当周向速度 u 随半径 r 的增加而减小得比 $1/r$ 更快时，即当

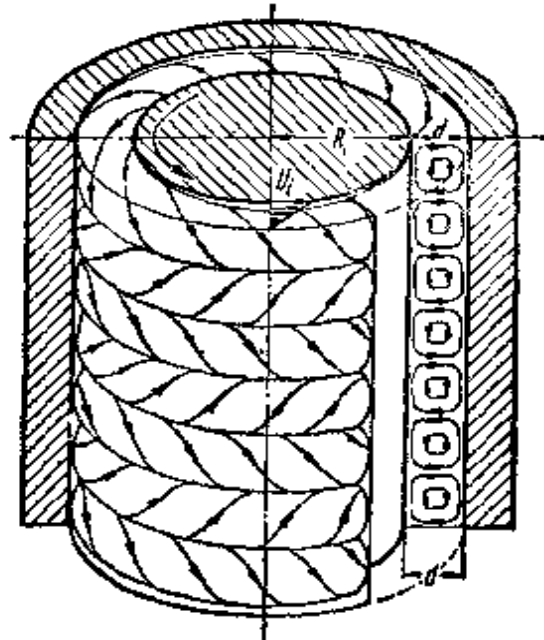
$$u(r) = \text{常数}/r^n, \quad n > 1 \quad (\text{不稳定}), \quad (17.19)$$

则流动是不稳定的。

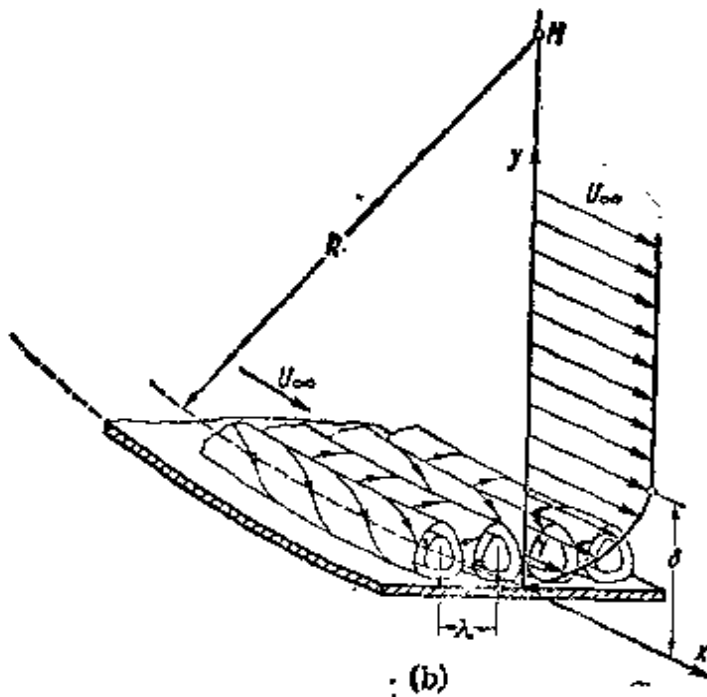
G. I. Taylor^[249] 第一个利用稳定性的线性理论体系深入地研究了粘性流体情形。当 Reynolds 数超过一定数值以后，在流动中出现了现在被称为 Taylor 涡的旋涡，其涡轴沿着圆柱的周线，旋转方向是交错变化的。图 17.32 画出了这种运动的示意图，其特征是在两个圆柱面之间的圆环内完全充满了这些环状旋涡。流动变成不稳定的条件可以用一个称为 Taylor 数的特征数 T 来表示，其形式为

$$T = \frac{U_i d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_i}} \geq 41.3 \quad (\text{粘性失稳}), \quad (17.20)$$

式中 d 表示柱面的间隙， R_i 为内圆柱半径， U_i 为内圆柱的周向速度。G. I. Taylor 稳定性准则与测量结果吻合得极好。由 F. Schultz-Grunow 和 H. Hein^[294] 拍摄的 Taylor 涡照片可以非常清楚地看出这一点，其中的几幅照片复制在图 17.33 中。在他们的实验装置中，圆柱面之间的间隙为 $d = 4\text{mm}$ ，内圆柱半径为 $R_i = 21\text{mm}$ ，旋涡出现时周向速度 U_i 相应于 Reynolds 数 $R = U_i d / \nu = 94.5$ ，见图 17.33(a)。值得注意的是，在相当高的 Reynolds



(a)



(b)

图 17.32 (a)两同心圆柱面间的 Taylor 涡。内圆柱旋转,外圆柱静止
 d ——圆环间隙的宽度 h ——圆柱的高度,式(17.21)

(b)凹壁边界层的 Goertler 涡

$U(y)$ ——基本流动 δ ——边界层厚度 λ ——扰动的波长

数 $R = 322(T_e = 141)$ 和 $R = 868(T_e = 387)$ 时,流动仍保持为层流,见图 17.33(b),(c)。直到 Reynolds 数达到 $R = 3960(T_e =$

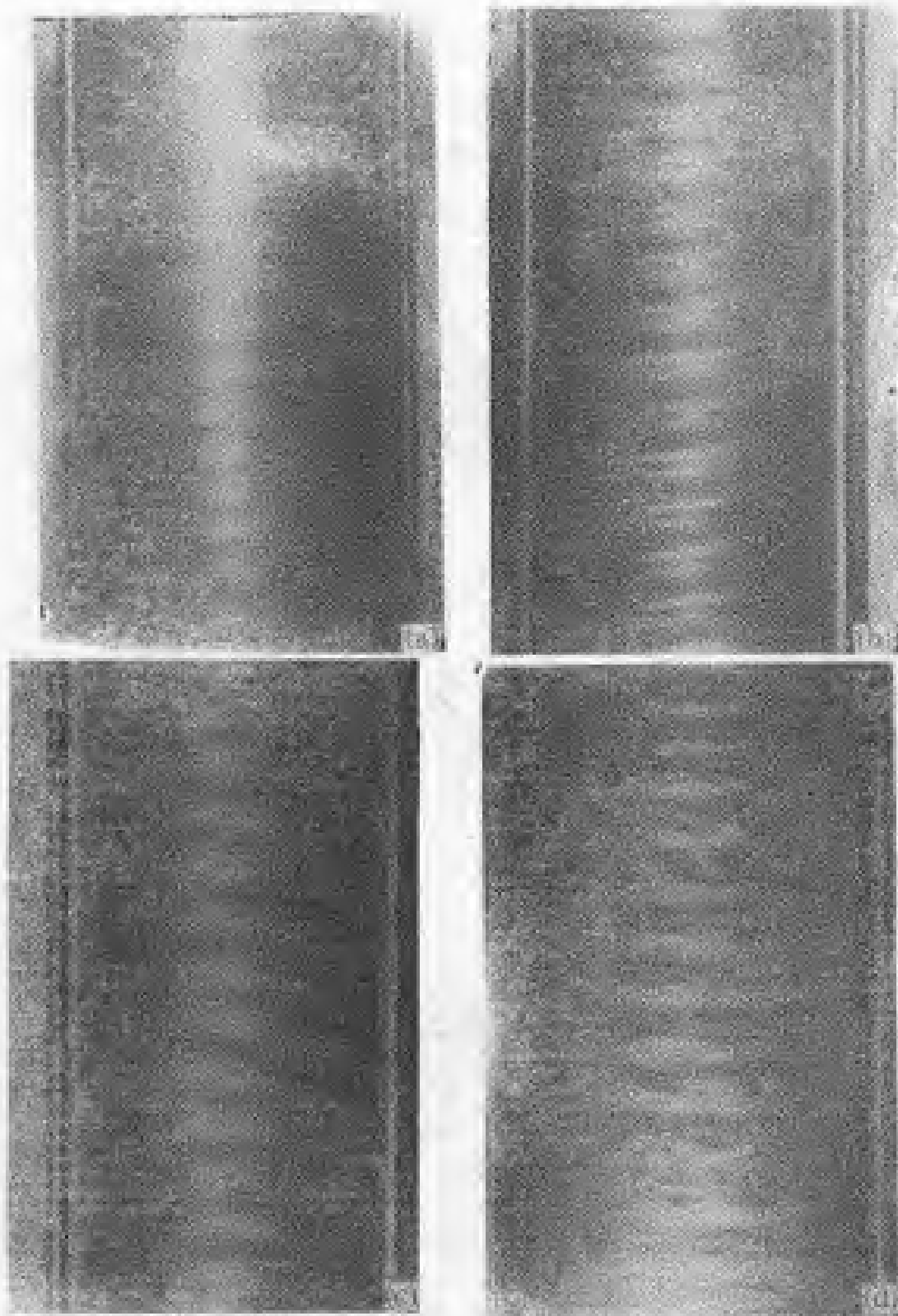


图 17.33 图 17.32(a)所示的同心圆柱面间流动的 Taylor 涡
照片,取自 P. Schultz-Grunow 和 H. Hein^[10]

(a) $R = 94.5, T_s = 41.3$; 层流, 旋涡开始形成; (b) $R = 121, T_s = 141$; 仍为层流;
(c) $R = 168, T_s = 587$; 仍为层流; (d) $R = 3960, T_s = 1715$; 湍流

1715)时,湍流才发展起来,见图 17.33(d)。应该着重强调指出,在式(17.20)确定的稳定性界限下首先出现的中性旋涡,以及这些不断增强的旋涡保持到更高的 Taylor 数,无论如何都不意味着流动已经变成湍流。相反,即使 Taylor 数已经超过了稳定性界限,流动仍是极为有序的层流,只有 Taylor 数,也就是 Reynolds 数大大超过了稳定性界限,湍流才发展起来。

J. T. Stuart^[218] 在运动方程中保留了非线性项,成功地计算了有 Taylor 涡存在时不稳定层流的流动图象。他发现从基本流动向二次流动传递的能量与二次流动中粘性能量耗散相平衡。从基本流动向二次流动传递能量使得维持内圆柱旋转所必须的力矩

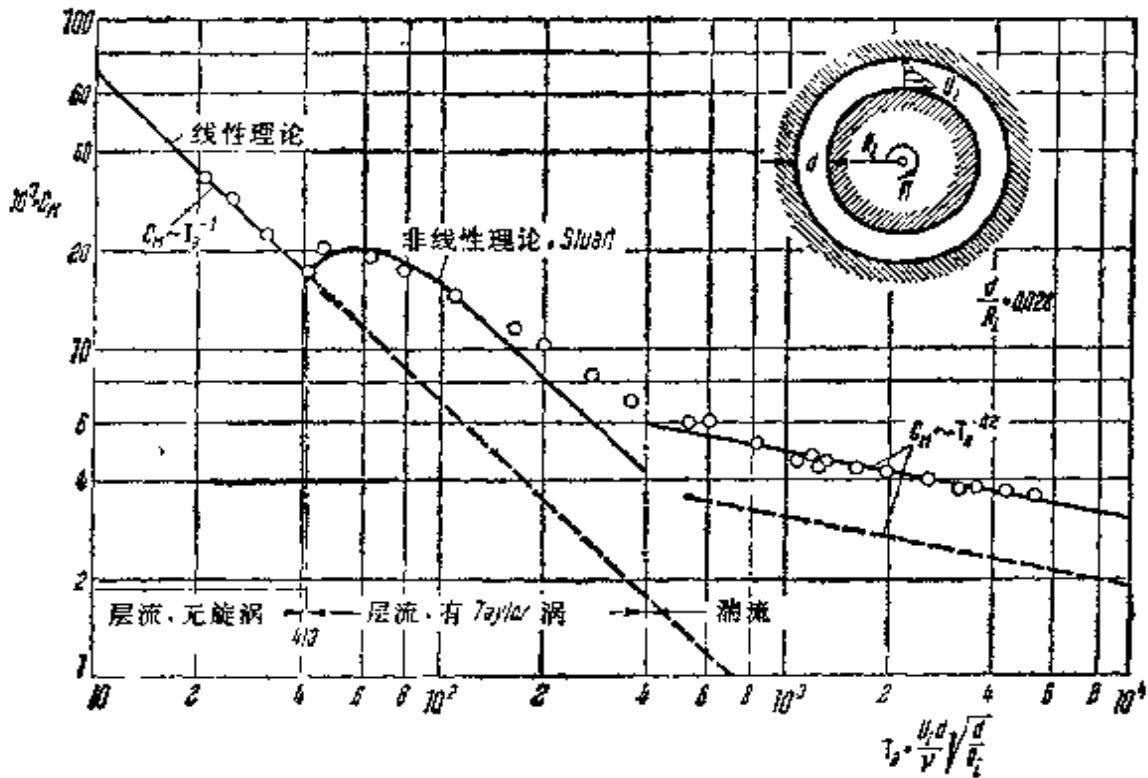


图 17.34 二同心圆柱面间的流动,用 Taylor 数 T_e 表示的内圆柱力矩系数
内圆柱旋转,外圆柱静止,圆柱之间间隙的相对尺寸 $d/R_i = 0.028$

G. I. Taylor^[241] 的测量结果

线性理论根据式(17.22),非线性理论由 J. T. Stuart^[218] 得出

大大增加。图 17.34 中的曲线给出了转动力矩系数 C_M 的理论值和实验测量值之间的比较。转动力矩系数定义为

$$C_M = \frac{\dot{M}_i}{\frac{1}{2} \pi \rho U_i^2 R_i^2 h}, \quad (17.21)$$

其中 h 为圆柱的高度。线性理论，加上相对间隙 d/R_i 很小的假设，给出

$$C_M = A \left(\frac{U_i d}{\nu} \right)^{-1} = A \sqrt{\frac{d}{R_i}} T_*^{-1} \text{ (线性理论)}. \quad (17.22)$$

图 17.34 中画出了对应于线性理论的曲线；当 $d/R_i = 0.028$ 时，它给出转动系数 $C_M = 0.67/T_*$ 。除此之外，该图还画出了 J. T. Stuart 提供的非线性理论的曲线以及由湍流理论给出的一条曲线，后者给出的公式为 $C_M \sim T_*^{-0.2}$ 。总的来说，我们可以区分出三种流态，由 Taylor 数划分如下：

$T_* < 41.3$ ：层流 Couette 流动；

$41.3 < T_* < 400$ ：带有 Taylor 涡的层流；

$T_* > 400$ ：湍流。

在前两个区域，理论和实验之间符合得极好¹⁾。K. Kirchgaessner^[106]的工作推广了 Taylor 理论。D. Coles^[29]在 1965 年深入地进行了 Couette 流动的实验研究，特别是在转换方面。

轴向速度对稳定性的影响：H. Ludwig^[132,133]将上述稳定性计算推广到两圆柱有相对轴向位移的情况中。设 $u(r)$ 表示周向速度， $w(r)$ 表示轴向速度，如果引入无量纲的速度梯度

$$\tilde{u} = \frac{r}{u} \frac{du}{dr} \quad \text{和} \quad \tilde{w} = \frac{r}{u} \frac{dw}{dr},$$

我们可以将无粘流体的稳定性准则写成下列形式：

$$(1 - \tilde{u})(1 - \tilde{u}^2) - (5/3 - \tilde{u})\tilde{w}^2 > 0 \quad \text{(稳定)}. \quad (17.23)$$

1) 图 17.34 画出的实验结果进一步表明，增加 Taylor 数，即当 d/R_i 不变时增加 Reynolds 数，使旋涡状流动变成湍流。当流动是湍流时 ($T_* > 400$)，我们有 $C_M \sim T_*^{-0.2}$ ，因此当 d/R_i 不变时 $C_M \sim (U_i d/\nu)^{-0.2} = R^{-0.2}$ 。H. Reichardt (第十九章文献[26]) 研究两个平行平面壁面之间的线性 Couette 流动时，也发现了同样的结果。值得注意的是，对于一个在静止流体中旋转的圆盘，存在着同样的转动系数随 Reynolds 数变化的规律，见式(21.36)。

式(17.19)的 Rayleigh 准则是上述不等式当假定 $w = 0$ 时的一个特例, 这时我们得到稳定性准则为 $1 + \tilde{\alpha} > 0$. 稳定性计算归结为求

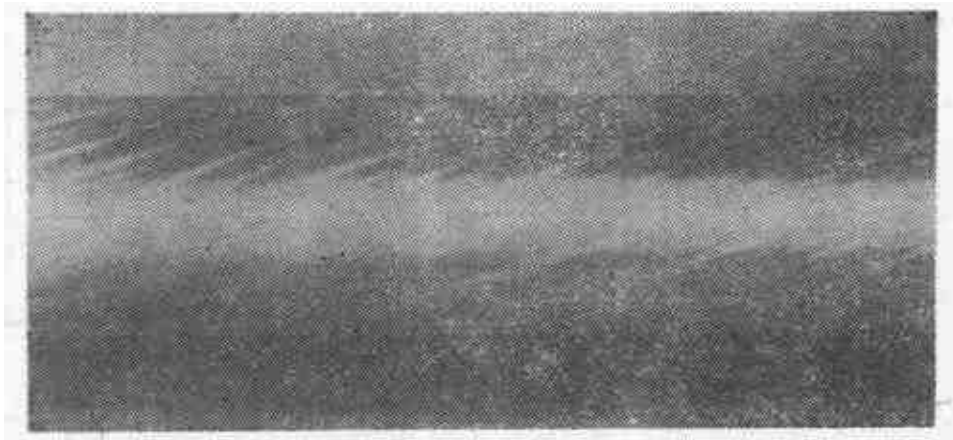


图 17.35 在有轴向运动的情形下, 二同心旋转圆柱面间带有旋涡的不稳定流动. 实验取自 H. Ludwig^[134]
 $\tilde{\alpha} = 37$; $\tilde{\omega} = 1.58$

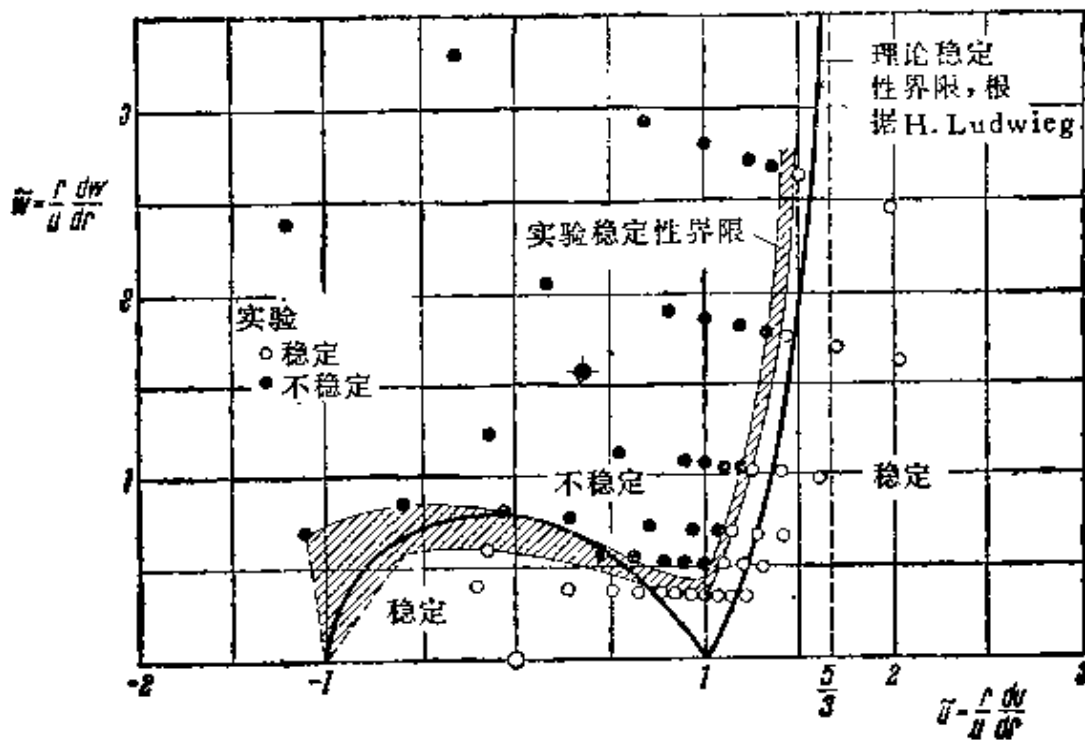


图 17.36 在有轴向运动的情形下, 二同心旋转圆柱面间流动稳定性理论的实验验证, 根据 H. Ludwig^[134]

$$R = (R_o - R_i)^2 \omega_i / \nu = 650$$

实线: 对应于式(17.23)的稳定性界限

阴影区: 实验确定的稳定性界限

○ 稳定流动的测量点; ● 不稳定流动的测量点; + 图 17.35 中的不稳定流动

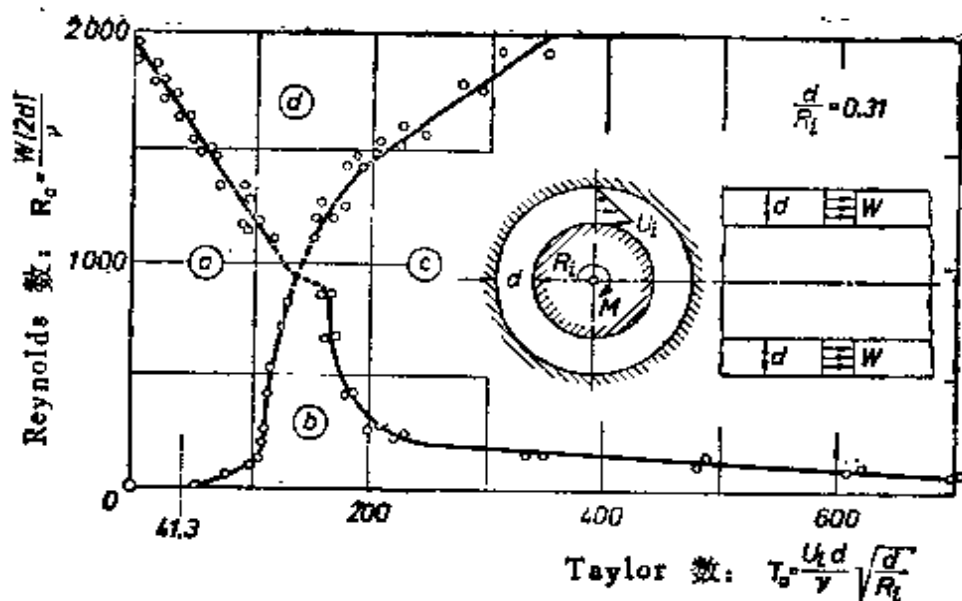


图 17.37 在内圆柱旋转,外圆柱静止,同时有轴向流动的情形下,二同心圆柱面间的环形腔中,层流和湍流相应的区域,相对于 Taylor 数 T_g 和 Reynolds 数 R_g 画出的曲线。测量结果取自 J. Kaye 和 E. C. Elgar^[119], $W =$ 轴向速度
(a)层流; (b)带有 Taylor 涡的层流; (c)带有旋涡的湍流; (d)湍流

解不等式(17.23), 其中考虑了扰动并非都是轴对称的, 而轴对称扰动是“最危险”的, 并由此确定了由不等式(17.23)表示的稳定性界限。图 17.35 给出一个含有螺旋型旋涡的不稳定流动的例子。H. Ludwig 理论与实验结果^[134]的比较见图 17.36。在实验研究中出现的每一个基本流动在 \tilde{u}, \tilde{w} 平面中由一个点来表示, 空心圆和实心圆点分别表示稳定和不稳定流动。应该注意到在不稳定流动中可以观察到旋涡。可以看出, 实验结果充分地证实了 H. Ludwig 的稳定性准则式(17.23)。

在有轴向速度的情形下, 两个同心圆柱面(内圆柱旋转, 外圆柱静止)间的流动有很重要的实际意义。在轴颈轴承的流体动力润滑过程以及发电机的空气冷却过程中都会出现这种流动图象。为了计算轴承的转动力矩和发电机冷却效率必须了解这一流动图象。在 J. Kaye 和 E. C. Elgar^[119]测量的基础上, 图 17.37 中画出的曲线可以使我们在给定轴向流动的圆环中确定是层流还是湍流占据优势。这是由两个特征常数决定的, 即式(17.20)定义的

Taylor 数 T_s 以及由轴向速度 W 和圆环宽度 d 定义的 Reynolds 数,也就是

$$R_s = \frac{W(2d)}{\nu} \quad (17.23a)$$

实验指出存在着四个区域:

- (a) 低 Reynolds 数及 $T_s < 41.3$ 时,流动是层流;
- (b) 在低至中等 Reynolds 数 R_s 范围内,Taylor 数在 $41.3 < T_s < 300$ 的范围,流动是有 Taylor 涡的层流;
- (c) 当 Taylor 数 $T_s > 150$ 时,流动是带有旋涡的“有序”湍流;
- (d) 对于中等 Taylor 数 $T_s < 150$,以及高 Reynolds 数 $R_s > 100$ 时,流动是充分发展的“无序”湍流。

这四个区域之间的分界主要取决于参数 d/R_i ,即圆环宽度和内圆柱半径之间的比值。

现在还不可能从理论上确定这些区域的分界线。

球: O. Sawatzki 和 J. Zierp^[230] 进行了类似图 17.34 所描述的研究,他们使用间隙比 $d/R_i < 0.2$ 的两个同心球,外球静止而内球旋转。在这样一个球环中间,流动的特征也是由式 (17.20) 的 Taylor 数以及 Reynolds 数决定的,其中 Reynolds 数是由球环宽度 d 和周向速度 U_i 定义的,即

$$R_i = \frac{U_i d}{\nu}$$

在线性理论适用的范围内,即在图 17.32 所示的那种 Taylor 涡出现之前,作用在内球上的转动力矩由如下的转动力矩系数给出:

$$C_m = \frac{16\pi/3}{R_i}$$

其中

$$C_m = M_i / \left(\frac{1}{2} \rho U_i^2 R_i^3 \right)$$

式中 M_i 表示转动力矩, R_i 为内球半径。

在上述同心旋转圆柱面的情形下,根据 Taylor 数和 Reynolds 数的值,整个流场要么是层流,要么是湍流,但是在同心球的情形下,流动要更复杂一些,不同的流态可以同时并列地出现。随着 Reynolds 数增加,在球的赤道附近的平面首先出现 Taylor 涡及转换状态,而靠近球的两极的流动仍为层流。还可以参阅文献 [161,162,163]。

2. 凹壁上的边界层 在沿凹壁的流动中,会出现相类似的这种相对于三维扰动的不稳定现象。在凸壁上形成的边界层中,离心力起着稳定作用,虽然如在第十七章 d 中已经指出的,其稳定作用是很弱的。与此相反,凹壁上离心力的不稳定作用使流动出现一种不稳定性,类似于图 17.32(a) 所示的 Taylor 涡的图象。H. Goertler^[70] 第一个证实了沿凹壁的离心力的不稳定作用。考虑沿 x 方向的基本流动 $U(y)$ (y 是离开壁面的距离, z 在壁面上与流动方向相垂直,见图 17.32b), 假定在其上叠加一个形式如下的三维扰动:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1(y) \{ \cos(\alpha z) \} e^{\beta t}, \\ v' &= v_1(y) \{ \cos(\alpha z) \} e^{\beta t}, \\ w' &= w_1(y) \{ \sin(\alpha z) \} e^{\beta t}, \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

其中 β 为实数,是扰动增长率, $\lambda = 2\pi/\alpha$ 是与主流方向垂直的扰动的波长。旋涡的形状如图 17.32(b) 所示,它们的轴线平行于基本流动方向。现在要讨论的是一种驻波(蜂窝状旋涡),称之为 Taylor-Goertler 涡,它和图 17.32(a) 的 Taylor 涡是同一类型的。

以小扰动方法为基础,计算三维旋涡随时间的增长率,最终归结为一个特征值问题,这一点是和二维扰动稳定性分析(第十六章)相类似的。在有关的研究工作中已经考虑到粘性的影响。这个特征值问题是十分困难的, H. Goertler^[72] 于 1940 年第一个发表了它的近似解。而后, 1973 年 F. Schultz-Grunow^[204a] 考虑了一阶小量的所有项,建立了更精确的理论。在图 17.38 中画出了他的数值结果。可以看出,当相对曲率 $\delta/R = 0.02$ 至 0.1 时,稳定

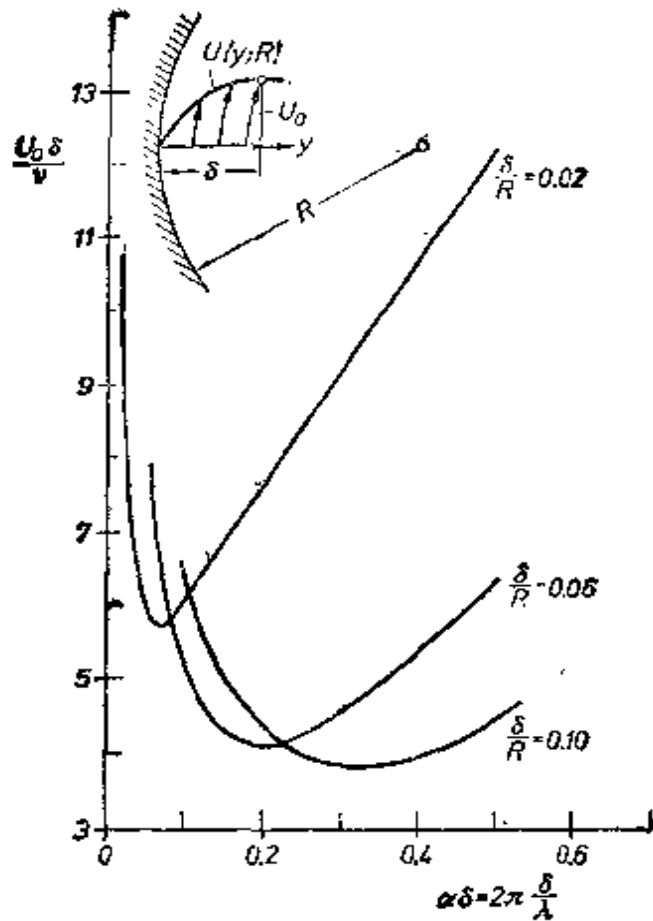


图 17.38 凹形壁面上边界层的稳定性界限 ($\beta = 0$) 随边界层厚度与壁面曲率比值 δ/R 的变化, 根据 F. Schultz-Grunow^[204a] 边界层厚度 $\delta = (2\nu x/U_0)^{1/2}$ 壁面曲率半径 R

性界限的最小值出现在 $R_\delta = U_0 \delta / \nu = 4$ 至 6 之间。

表面即有凸壁也有凹壁的物体浸没在来流中, F. Clauser^[17] 和 H. W. Liepmann^[127, 128] 对这种壁面上的边界层转换现象进行了实验研究。图 17.39 中画出了由 H. W. Liepmann 提供的若干实验结果。图 17.39(a) 的曲线证实了理论估算的结果, 在凸壁的情形下, 壁面曲率对临界 Reynolds 数的影响很小, 凹壁的关键 Reynolds 数要小于凸壁时的值。图 17.39(b) 画出了参数

$$\frac{U_\infty \delta_{2tr}}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_{2tr}}{R}}$$

随 δ_{2tr}/R 变化的曲线。这个参数描述了曲率对边界层转换的影响, 它相应于图 17.34 所描述的旋转圆柱面间流动的 Taylor 数(式

(17.20))。图 17.39(b)的曲线表明转换发生于

$$\frac{U_{\infty} \delta_{21r}}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_{21r}}{R}} > 7. \quad (17.25)$$

这个数值远远大于相应的稳定性界限(其值为 0.4, 见图 17.38)。此时应该注意到, 在稳定性界限的定义中不是采用边界层厚度而是采用动量边界层厚度 $\delta_2 = 0.047 \delta^{(1)}$ 。

按照 H. L. Dryden^[39] 的看法, 式(17.25)中右端的数值在 6 至 9 之间, 取决于来流的湍流度, 下限对应于来流湍流度 $T=0.003$, 上限对应于非常低湍流度的情形。

H. Bippes^[61] 使用水槽拖曳模型, 在最近完成了沿凹面曲壁边界层转换的非常全面的实验研究。这些实验有助于理解出现类似于图 17.32(b)的纵涡的原因。关于这方面可见 F.X. Wortmann^[256] 以及 H. Goertler 和 H. Hassler^[83] 的文章。

后来 H. Goertler 注意到这样一个实验现象, 即和上述凹壁属于同一类型的不稳定性可以发生在钝头体绕流的前驻点附近。在前驻点附近流线沿速度增加的方向向下凹, 满足边界层不稳定的必要条件。H. Goertler^[74] 和 G. Haemmerlin^[86] 对图 5.9 所示的二维驻点流的稳定性进行了计算, 结果表明存在着不稳定扰动, 但是到目前为止还不能给出以 Reynolds 数表示的稳定性界限。N. A. V. Piercy 和 E. G. Richardson^[170, 171] 进行的实验验证在圆柱前驻点附近的流动的确变成不稳定的。H. Goertler^[74] 对稳定性理论中的三维效应作了评述。还可参阅 J. Kestin 等人^[118] 和 W. Sadeh 等人^[232, 233] 更近一些的论文。

1) 这里必须考虑到, 转换区的位置必定位于稳定性界限下游相当远的地方。这是由于不稳定扰动, 无论是伴随着 Tollmien-Schlichting 驻波或者伴随着 Tollmien-Schlichting 行波(第十六章 b), 都必须经过一定的时间才能增长。换句话说, 必须经过一定的时间, 扰动增长率才能达到一定的大小。另一方面, 在内圆柱旋转、外圆柱静止的 Couette 流动的实验中(图 17.33), 我们可以期望, 在首次出现 Taylor 涡时, 由实验观察到的临界 Reynolds 数应该非常接近于理论值。这是由于当旋转速率不变时, 扰动增长的过程发生在 Reynolds 数不变的条件下, 因此, 只要实验持续的时间足够长, 扰动增长率总会达到适当的数值。此处可参阅图 17.33。

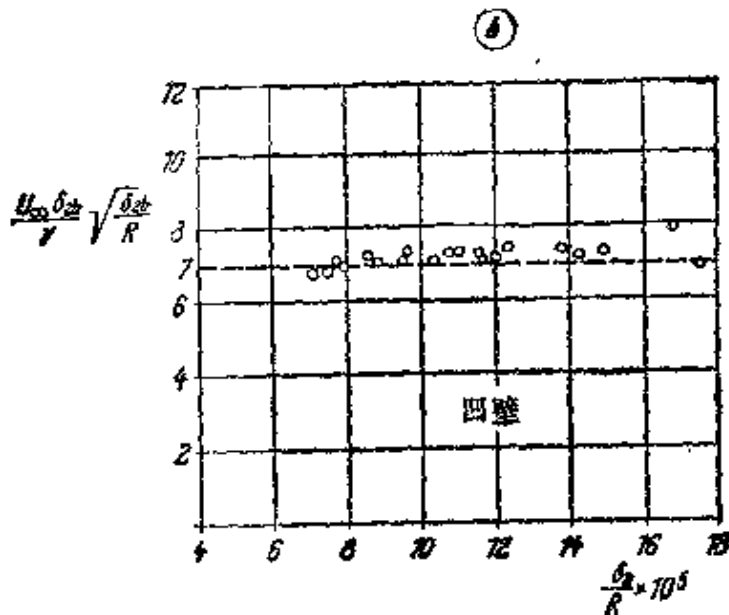
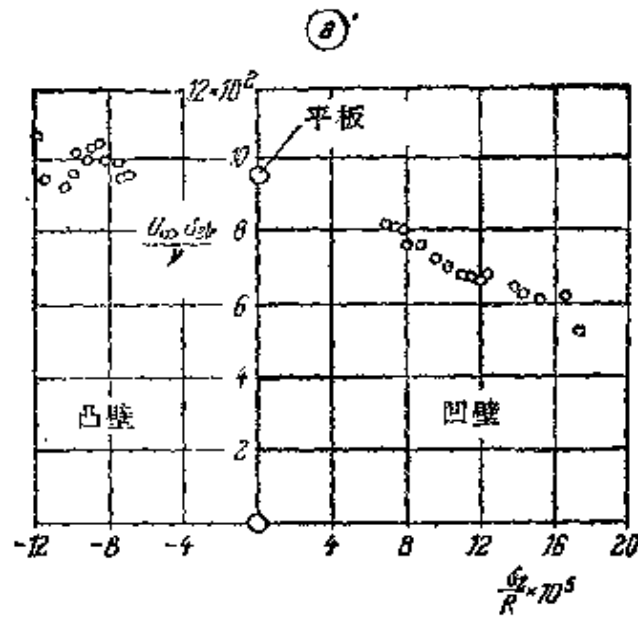


图 17.39 略有下凹的壁面的边界层转捩点的测量值，根据 H. W. Liepmann^[227, 228]。(a) 临界 Reynolds 数 $\frac{U_\infty \delta_{1cr}}{\nu}$ 随 δ_1/R 变化的曲线；(b) 特征量 $\frac{U_\infty \delta_{1cr}}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_{1cr}}{R}}$ 随 δ_1/R 变化的曲线 $\delta_1 =$ 动量厚度 $R =$ 壁面曲率半径

本节讨论的内容和第十六章及第十七章 a, b 两节综合在一起，使我们得出物体（例如翼型）边界层转换的如下描述：在平的和凸的壁面上，转换决定于二维 Tollmien-Schlichting 行波的不稳定性，而在凹壁上，则由 Taylor-Goertler 涡控制着转换过程。

3. 三维边界层的稳定性 三维边界层转换过程在细节上表现出和前面讨论的二维流动完全不同的特点。在静止流体中旋转的圆盘边界层转换的过程就是一个三维边界层转换的例子，从第五章 b 中已经知道这种流动的层流边界层的特征。N. Gregory, J. T. Stuart 和 W. S. Walker^[77] 拍摄了描述旋转圆盘转换过程的照片，复制在图 17.40 中。照片显示出在一个环形区域内出现了呈对数螺旋线形状的驻涡。在这个环形区域的内半径处流动出现不稳定，转换则发生在外半径处。内半径处对应着 Reynolds 数 $R_i = R_i^2 \omega / \nu = 1.9 \times 10^5$ ，在外半径处有 $R_o = R_o^2 \omega / \nu = 2.8 \times 10^5$ 。结合有关的实验工作，J. T. Stuart 对这种运动的稳定性进行了理论研究，他假定存在着三维周期性扰动，其形状包括 Tollmien-Schlichting 行波和定常三维 Taylor-Goertler 旋涡两种特殊情形。他的计算结果表明理论与图 17.40 的实验结果定性地吻合。

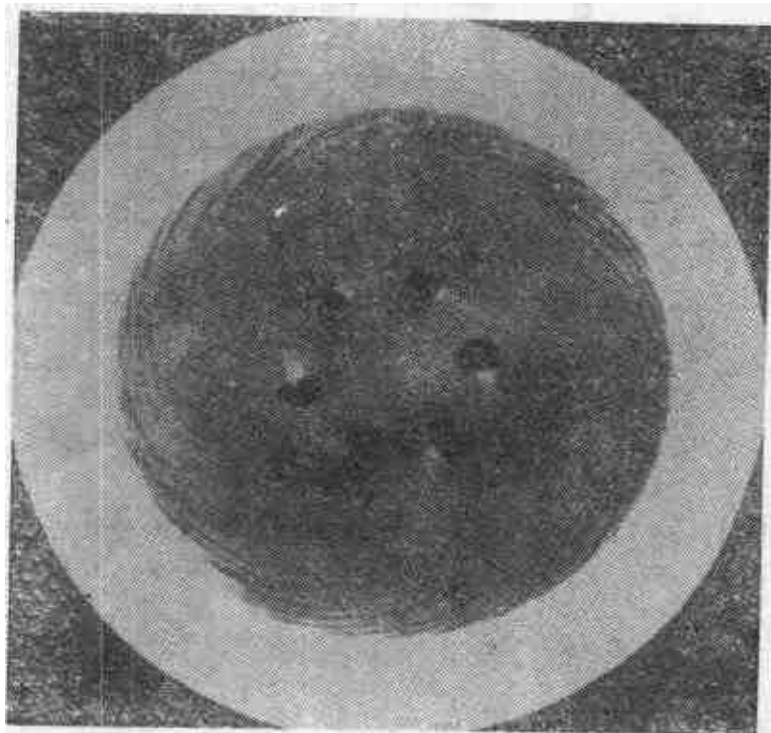


图 17.40 在静止流体中旋转的圆盘上边界层转换的照片，根据 N. Gregory, J. T. Stuart 和 W. S. Walker^[77]。旋转方向是反时针的，旋转角速度 $n = 3200 \text{ rpm}$ ，圆盘半径 = 15 cm。可以看到在内半径 $R_i = 8.7 \text{ cm}$ 和外半径 $R_o = 10.1 \text{ cm}$ 之间的环形区域内形成驻涡。内半径对应着稳定性界限 $R_i = R_i^2 \omega / \nu = 1.9 \times 10^5$ 。转换发生在外半径处， $R_o = R_o^2 \omega / \nu = 2.8 \times 10^5$ 。

超声速流动中的偏航平板,当其层流边界层变得不稳定时,它就成为上述这类不稳定性的另一个例子。正如 J. J. Ginoux^[84] 的实验所显示的,边界层发展成纵涡,导致边界层转换。

g. 粗糙度对转换的影响

1. 引言 在这一节我们将考察固体壁面粗糙度对转换过程的影响,这是一个具有很大实际意义的问题。特别是自从层流翼型在航空中得到应用以来,这个问题显得更重要了。但是,迄今还不能对这个问题从理论上加以分析。到目前为止,人们收集了非常广泛的实验资料,其中包括圆柱(二维粗糙元)和点状(三维单个粗糙元)粗糙度以及分布的粗糙度对转换的影响。许多研究还包括压力梯度、湍流度或者 Mach 数对转换影响的实验数据。

一般来说,粗糙度的存在有利于转换,当其他条件都相同时,在粗糙壁上发生转换的 Reynolds 数要比光滑壁的低一些。从稳定性理论来分析显然应该如此:粗糙元的存在形成了层流中的附加扰动,必须把它们加到由湍流度产生并且已经存在于边界层中的扰动上去。如果由粗糙度产生的扰动大于由湍流度形成的扰动,我们必然会预计到更低的扰动增长率就足以使边界层转换。另一方面,如果粗糙元非常小,它产生的扰动将低于某一“阈值”,这个值是来流中湍流度产生的扰动的特征。此时可以预计到粗糙度的存在对转换没有影响。上述分析与实验结果完全符合。当粗糙元非常大时,转换将发生在粗糙元所在的位置上,例如,图 2.25 所示的有绊线的圆球就是这种情形。关于这方面,读者可以参考 J. Stueper^[220] 的论文。

早期论述粗糙度对转换影响的文章,例如 L. Schiller^[202], I. Tani, R. Hama 和 S. Mituisi^[235], S. Goldstein^[67], A. Fage 和 J. H. Preston^[62] 等人发表的论文,假定当粗糙元很大时,转换点位于粗糙元所在的位置上,或者当粗糙元很小时,它们的存在根本不影响转换。然而, A. Fage 指出,随着粗糙元高度的增加,转换点不断地向上游移动,直到它达到粗糙元本身所在的位置。因此,在

讨论粗糙度对边界层转换的影响时,必须回答下列三个问题:

1. 不影响转换的粗糙元最大高度(层流中粗糙元的临界高度)是多少?

2. 转换发生在粗糙元本身所在位置时,粗糙元的极限高度是多少?

3. 对于介于这两种极端情形之间的一般情形,怎样才能确定转换点的位置?

2. 单个的圆柱状粗糙元 单个的圆柱状(或二维)粗糙元通常是一条金属丝,它紧贴在壁面上,与来流方向垂直,对这种形状的粗糙元,S. Goldstein 从已有的测量结果得出了它的临界高度 k_{crit} ,即不影响转换的最大高度为

$$\frac{u_*^* k_{crit}}{\nu} = 7, \quad (17.26)$$

其中 $u_*^* = \sqrt{\tau_{0k}/\rho}$ 表示摩擦速度, τ_{0k} 是在粗糙元位置上层流边界层的壁面切应力. 按照 I. Tani 和他的合作者^[239]的意见,转换发生在粗糙元本身所在位置时,粗糙元的最小高度可以由关系式 $u_*^* k_{crit}/\nu = 15$ 得到,而 A. Fage 和 J. H. Preston^[62] 则选取公式

$$\frac{u_*^* k_{crit}}{\nu} = 20. \quad (17.27)$$

上述特征值适用于圆截面的金属丝. 对方的和杯形截面或槽型截面的情形,这些特征值的值要大得多,然而对边缘尖锐的粗糙元,其值变小.

H. L. Dryden^[39] 提出一种量纲分析的方法,由此得到一个经验公式,用粗糙元高度 k 及其位置 x_k 来确定转换点位置 x_{tr} . Dryden 发现,在不可压缩流动中,当转换不发生在粗糙元本身所在的位置时,即 $x_{tr} > x_k$ 时,所有转换点的实验值都落在以 Reynolds 数 $R_{tr} = U\delta_{1tr}/\nu$ 为纵轴,以比值 k/δ_{1k} 为横轴的同一条曲线上,其中 δ_{1tr} 是转换点位置上的边界层位移厚度, δ_{1k} 表示粗糙元位置上的边界层位移厚度,见图 17.41. 在图 17.41 中还标出了 $R_{x, tr} =$

Ux_{tr}/ν 的尺度¹⁾。

随着高度 k 的增加, 转捩点位置 x_{tr} 向着粗糙元移动, 这意味着图 17.41 的曲线从左向右横移。只要转捩点一到达粗糙元本身所在的位置, 即当 $x_{tr} = x_k$ 时, 转捩点的实验值开始向上偏离这条曲线, 然后它们落在以 x_k/k 为参数的一族直线上, 这族直线的方程是

$$\frac{U\delta_{1tr}}{\nu} = 3.0 \frac{k}{\delta_{1k}} \frac{x_k}{k}, \quad (17.28)$$

图 17.41 中也画出了这族直线。根据日本人的测量结果^[237], 图 17.41 中曲线的双曲线状分支对各种湍流度和压力梯度较小的流动均适用。增加湍流度只引起曲线向左偏离的早一些, 即临界 Reynolds 数趋近于光滑平板的临界 Reynolds 数 $(R_{x,tr})_{k \rightarrow 0} = R_{x,tr0}$ ($R_{x,tr0}$ 的值与湍流度有关)。K. Kraemer^[109] 将其它的测量结果综合在一起进行分析得出结论, 如果

$$\frac{Uk}{\nu} \geq 900, \quad (17.29)$$

那么在任意位置上的金属丝都能充分有效地使流动在其所在的位置上发生转捩。在图 17.41 中也画出了这个公式的曲线, 它与实验结果符合得很好。但是应该注意到, 即使是在“充分有效”的绊线的情形, 转捩点位置 x_{tr} 和绊线自身的位置 x_k 之间仍然保持一定的最小距离。根据 K. Kraemer, 这个最小距离为

$$\frac{U(x_{tr} - x_k)}{\nu} = 2 \times 10^4, \quad (17.30)$$

相应的曲线画在图 17.42 中。

根据 H. L. Dryden 文献[39,40], 将粗糙壁临界 Reynolds 数与光滑壁临界 Reynolds 数的比值, 即 $(R_{x,tr})_{粗糙} / (R_{x,tr})_{光滑}$ 随 k/δ_{1k} 的变化画出来(见图 17.43), 就可以把湍流度的变化对转捩的影响

1) 这两个 Reynolds 数之间的关系式是

$$R_{x,tr} = \frac{U\delta_{1tr}}{\nu} = 1.72 \sqrt{\frac{Ux_{tr}}{\nu}} = 1.72 \sqrt{R_{x,tr}}.$$

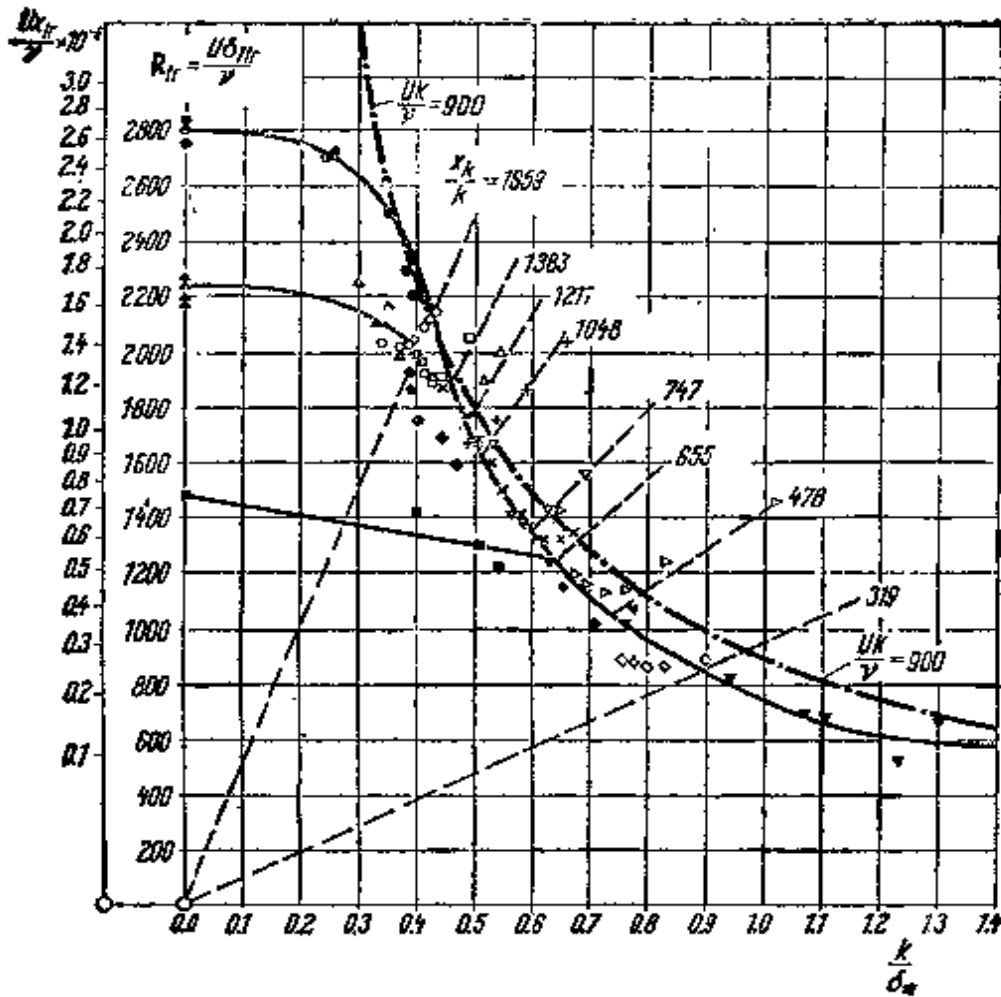


图 17.41 在不可压缩流动中,当存在着单个的二维粗糙元时,层流边界层的临界 Reynolds 数随粗糙元高度 k 与粗糙元位置上边界层位移厚度 δ_s 的比值变化的曲线

式(17.28)令人满意地拟合了实验测量结果. $R_{x,cr0} = \frac{U\delta_{cr0}}{\nu}$ 和 $R_{x,cr} = \frac{Ux_{cr}}{\nu}$ 表示光滑平板的临界 Reynolds 数

----根据式(17.28)的计算值;

○□◇△▽▷×+ $x_{cr} > x_k$; $R_{x,cr0} = 1.7 \times 10^6$; $p =$ 常数,根据文献[63];

▲ $R_{x,cr0} = 1.7 \times 10^6$; $p =$ 常数,根据 I. Tani 等人^[237];

● $R_{x,cr0} = 2.7 \times 10^6$; $p =$ 常数,根据 I. Tani 等人^[237];

◀ $R_{x,cr0} = 2.7 \times 10^6$; 顺压梯度 $\frac{P_1 - P_{cr}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.2$ 至 0.8 ,根据文献^[237];

▼ $p =$ 常数,根据 G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad^[203];

■ $R_{x,cr0} = 6 \times 10^6$; $p =$ 常数,根据 I. Tani 等人^[237]. 黑点表示 $x_{cr} > x_k$ 的实验结果

反映出来. 在用这种方法作图时,我们发现具有不同湍流度的测量结果落在一条曲线上,表明比值 $(R_{x,cr})_{粗糙} / (R_{x,cr})_{光滑}$ 是单参数

k/δ_{ik} 的函数。借助于图 17.41, 17.42, 17.43 中的三组曲线, 现在可以很容易地回答上节结尾时提出的三个问题。

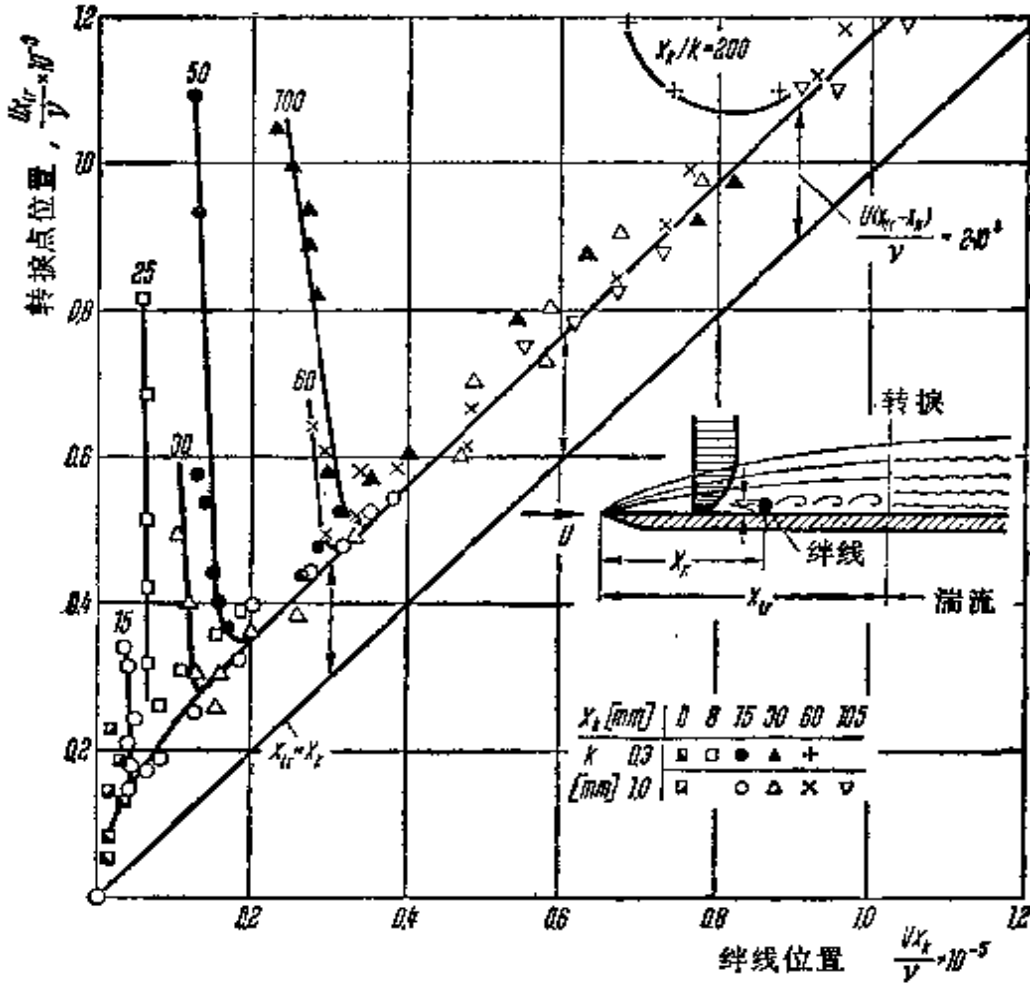


图 17.42 “充分有效”工作状态下的粗糙元位置 x_k 和转换点 x_{tr} 之间的距离, 曲线是根据式(17.30)画出的, 引自 K. Kraemer^[109]

P. S. Klebanoff 和 K. D. Tidstrom^[107a] 最近进行了关于二维、离散的粗糙元(金属丝)对转换影响的非常细致的实验。这些实验工作可以认为是早期工作^[107b]的延续, 特别是他们测量了紧靠粗糙元后面受扰动的边界层。由上述测量结果可以得出结论, 如果把粗糙度的作用想象为强烈的波状扰动, 这种扰动使边界层变得极不稳定, 因而和来流中湍流度增加有同样的效果, 那么我们就可以极好地理解被粗糙度扰动的边界层的特性。

可压缩流动中粗糙度的影响远小于在不可压缩流动中的影响。我们可以从图 17.44 中总结出这个事实, 该图以 P. F. Brinich^[12]

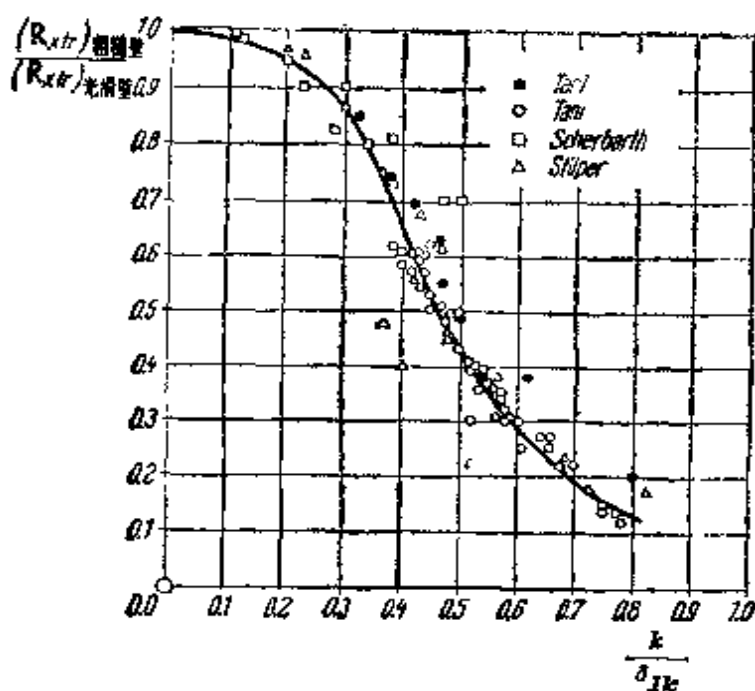


图 17.43 对于有单个粗糙元的零攻角平板，临界 Reynolds 数与光滑平板临界 Reynolds 数的比值，根据 Dryden^[37] $R_{xcr} = Ux_{cr}/\nu$ k ——粗糙元高度， δ_{1k} ——粗糙元所在处边界层位移厚度。Tani^[23]的测量结果

的工作为基础，画出了可压缩流动中零攻角平板的测量结果。实验是利用圆柱状粗糙元在 $M = 3.1$ 时进行的。当把测量结果画在图 17.44 的坐标系中时，它们位于图中阴影区的一族曲线上，但是仍然和粗糙元位置 x_k 有很大的关系。为了便于比较，在图 17.44 中也画出了不可压缩流动的曲线。实验结果表明在高 Mach 数时，边界层可以“容忍”比不可压缩流动中大得多的粗糙元。根据图 17.44，可压缩流动中粗糙元的临界高度比不可压缩流动中的要大 3 倍至 7 倍。R. H. Korkegi^[108] 在更高的 Mach 数 $M = 5.8$ 时进行的实验表明，在如此高的 Mach 数下，绊线根本不产生湍流。另一方面，为了促使边界层提前转换，将空气吹入边界层的方法，即使在可压缩流动中也是有效的。

近来，E. R. van Driest 和 C. B. Blumer^[37] 对轴线平行于来流的圆锥，在 $M_\infty = 2.7$ 下进行了一系列的测量，它是早期工作^[36]的继续。除了改变圆形绊线的直径之外，实验还改变它在圆锥上的位置以及传热率。

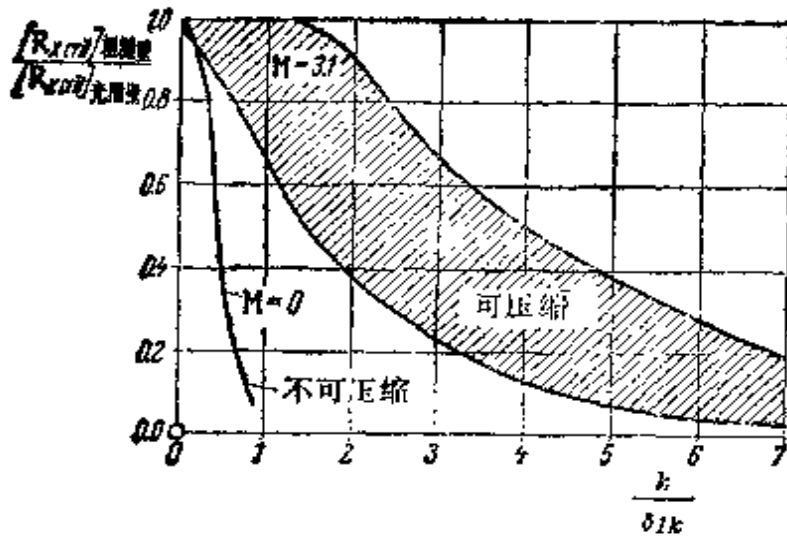


图 17.44 单个、二维粗糙元对可压缩流动中平板临界 Reynolds 数的影响,取自 P. F. Brinich^[27] 的测量结果
 k ——单个粗糙元的高度;
 δ_{11} ——粗糙元所在位置处边界层位移厚度

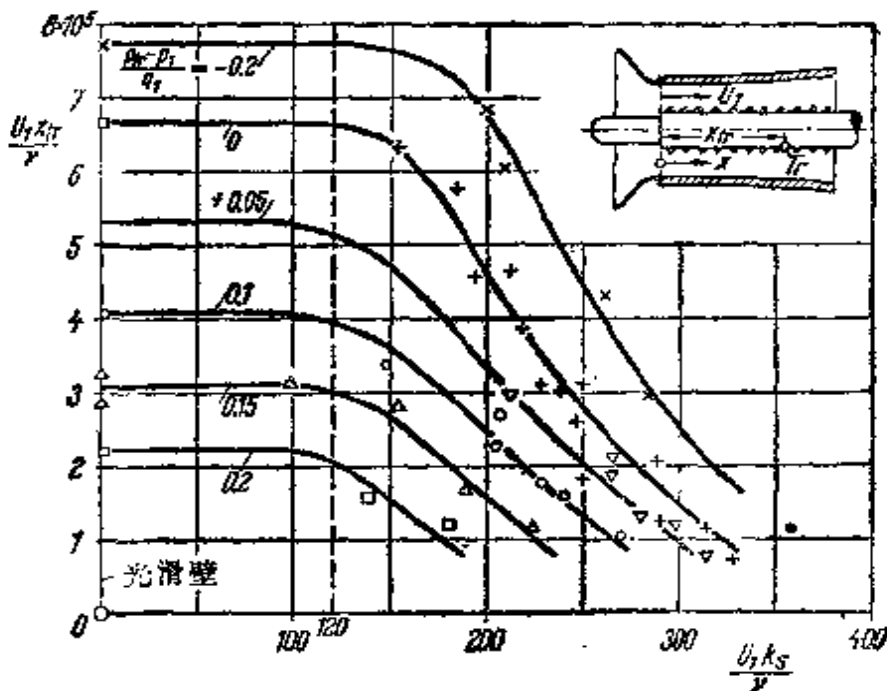


图 17.45 压力梯度和壁面敷有砂粒的粗糙度对不可压缩流动中转捩点位置的影响,根据 E. G. Feindt^[63] 的测量结果
 k_s ——砂粒的大小,当 $U_1 k_s / \nu < 120$ 时,砂粒粗糙度对转捩没有影响

3. 分布的粗糙度 对于这方面,只有一些零散的关于在分布的粗糙度下转捩的测量结果^[19]。E. G. Feindt 的一篇论文^[63]简略地说明了在砂粒粗糙度的情形下,压力梯度和砂粒大小 k_s 对转捩

的影响。实验是在一个先收缩后扩张的圆截面管道中进行的，将一个敷上砂粒的圆柱面沿轴线放在管道内。管道的内壁是光滑的，壁面的斜率决定了管道中流动的压力梯度。根据 E. G. Feindt 的测量结果，图 17.45 画出了在不同的压力梯度下，由转捩点位置定义的临界 Reynolds 数 $U_{1,x_{tr}}/\nu$ 随由砂粒尺寸 k_r 定义的 Reynolds 数 $U_1 k_r/\nu$ 变化的曲线。在不同的压力梯度下，光滑壁面临界 Reynolds 数 $U_{1,x_{tr}}/\nu$ 的值在 2×10^5 至 8×10^5 的范围内，上下限分别对应着顺压梯度的强稳定作用和逆压梯度的不稳定作用。可以看出，实验测量给出的结论是：当 $U_1 k_r/\nu$ 增加时，临界 Reynolds 数起初是不变的，只有在超过

$$\frac{U_1 k_r}{\nu} = 120 \quad (17.31)$$

这个数值以后，临界 Reynolds 数才急骤下降。因此，这个数值确定了粗糙度的临界高度，从而回答了早先提出的第一个问题。当粗糙元的高度超过这个临界值以后，粗糙度产生的影响可以与压力梯度的作用相比较。

h. 轴对称流动

轴对称流动最重要的情形是在直管道中的流动，这种流动的速度剖面是抛物线型的。很早以前，Th. Sexl^[205] 就研究了这种流动的稳定性，他未能发现任何不稳定现象，但是他也没有能够证明对所有的 Reynolds 数这种流动都是稳定的。经过一段时间以后，J. Pretsch^[177] 成功地证明了这种抛物线型速度剖面的稳定性可以归结为平面 Couette 流动(纯剪切流动)的稳定性。因为平面 Couette 流在所有的 Reynolds 数下都是稳定的，所以对圆管中速度剖面是抛物线型的流动，这个结论也是成立的。G. M. Corcos 和 J. R. Sellars^[18]，C. L. Pekeris^[169] 以及几位当前正在研究这个问题的人^[54, 66a, 148, 175] 都得到了同样的结论，最后 Th. Sexl 和 K. Spielberg^[206] 再次证实了这个结论。由于下列两个方面的原因，这个结论是十分令人吃惊的。第一、圆管中的流动的的确确发生转

换。事实上正如读者回忆起的，关于转换的第一个实验就是 O. Reynolds 在圆管中进行的。第二，同样是抛物线型速度剖面，小扰动可以使槽中的流动变得不稳定(第十六章 c)，但是却不能使圆管中的流动失稳，这一点是很难想象的。由于这些原因，人们试图从理论和实验两方面进一步研究这个问题。在这方面，可以注意到，直到 Reynolds 数高达 $R = 13000$ ，R. J. Leite^[125] 还没有在圆管中观察到任何轴对称小扰动在向下游传播时是增长的。Th. Searl 和 K. Spielberg^[206] 证实了在轴对称流动中，第十六章 b3 中提到过的 Squire 定理不再成立。因此，对于轴对称流动的稳定性来说，对称平面扰动波不再比三维扰动更危险。

按照流动稳定性的线性理论，充分发展的 Hagen-Poiseuille 流动对于轴对称和非轴对称扰动是完全稳定的，因此有必要研究圆管**进口段**流动(见第十一章)对于这些扰动的稳定性。T. Sarpkaya 作了这项工作，他进行了实验测量^[197b] 并且写了关于这个问题的综述文章，在文章中还包括其他作者的理论结果。理论计算的结果表明，稳定性界限的值比实验测量的临界 Reynolds 数高很多。

M. Lessen 和 P. J. Singh^[126a] 首先研究了圆管中具有抛物线速度剖面的 Hagen-Poiseuille 流动对于无限小**三维扰动**的稳定性。他们考虑周向波数为 1 的扰动，Reynolds 数范围直至 16000 时，还未发现扰动是不稳定的。H. Salwen 和 C. E. Grosch^[197c] 用另外一种方法解特征值问题，对周向波数等于或大于 1 的扰动，直至 Reynolds 数高达 50000，都未发现不稳定的情形，证实了 Lessen 等人的结论。

机翼后缘旋涡的**螺旋型尾迹**模型假设流动的轴向速度分布是尾迹型的，周向速度分布是旋涡，且强度沿径向不断衰减。M. Lessen, P. J. Singh 和 F. L. Paillet^[126b, 126c] 研究了这种流动对于周期性扰动的稳定性，扰动的周向波数等于或大于 1。计算结果发现，很小的周向速度就可以使最小临界 Reynolds 数减小百分之五十之多。当周向速度较大时，周向波数较大的模式比周向波数小的更不稳定；当周向速度变得更大时，流动又稳定了。

早期的实验(第二十章文献[53]和[54])以及将稳定性理论应用于具有周向分量的轴向流动的近期结果^[132,133]都证实了如下的事实:即使非常小的周向速度分量也明显地减小了 Hagen-Poiseuille 流动的稳定性。因此,为了模拟实际感兴趣的流动, P. A. Mackrodt^[164,165]研究了在层流圆管流动上叠加刚体旋转流动的稳定性。在这种情形下,扰动沿螺旋线向管的下游移动。计算结果见图 17.46。稳定性界限(中性扰动)表示在图中的 R_ϕ, R_x 平面上,其中 $R_\phi = \omega R^2/\nu$ 是由周向速度 ωR 定义的 Reynolds 数,而 $R_x = U_0 R/\nu$ 是以最大速度 U_0 为参考速度的 Reynolds 数。

图 17.46 中的测量点表示观察到的位于衰减和增长分界上的中性扰动涡。理论和实验之间吻合得十分好。理论分析证实了这样一个猜想:周向速度分量引起 Hagen-Poiseuille 流动变得不稳定。

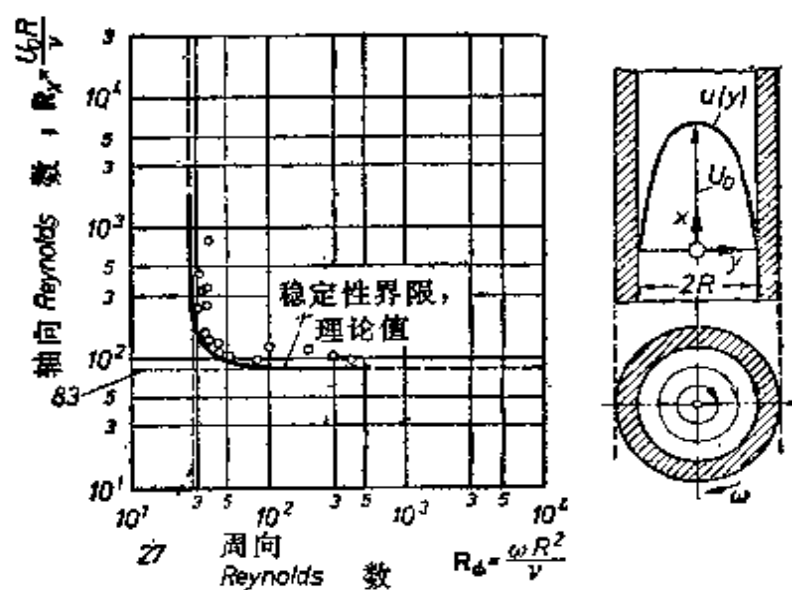


图 17.46 圆管 Hagen-Poiseuille 流动叠加刚体旋转后的稳定性界限,根据 P. A. Mackrodt^[164,165] $R_{xcrit} = 83$, 引自 T. J. Pedley^[118] 观察到的不稳定流动

在第十六章 a 中曾详细地讨论过 J. Rotta 的工作,他测量了圆管进口段的大扰动向下游传播时的间歇因子。E. R. Lindgren^[120]进行了类似的实验,并且利用偏振光和双折射的膨润土稀溶液显示了扰动流场。E. R. Lindgren 证明了当基于圆管直径的流动

Reynolds 数很小时，即使是很强的初始扰动在入口段也是衰减的。当 Reynolds 数大于 $R = 2600$ 以后，转换过程开始了，其特征是初始扰动增长并且在壁面附近的流体层中出现了自持的湍流猝发。

圆管中层流的上述特性促使我们重新考虑小扰动理论和转换之间的关系，特别是要提出这样一个问题：是否总是可以认为转换是小扰动增长的结果。由于还没有对三维小扰动进行深入的研究，现在还不能给出关于这个问题的结论性意见。在这方面我们应该记得，平面 Poiseuille 流动的临界 Reynolds 数 $R_{crit} = 5314$ （见第 557 页），大大超过了在槽内观察到的转换 Reynolds 数。这是与理论结果不一致的，理论分析给出的稳定性界限总是低于转换 Reynolds 数。但是，在认识的现阶段，考虑到人们现在对这个课题浓厚的兴趣，在没有得到进一步的研究结果之前，还不能轻易地下结论。

J. Pretsch^[176] 还研究了旋成体上层流边界层的稳定性。关于这方面，可以参考 P. S. Granville^[182] 的论文。在边界层厚度与表面曲率的比值远小于 1 的情形下，所得到的轴对称情形的稳定性方程和平面情形的相同。因此，平面情形得到的所有结果都可以无保留地推广应用于旋成体轴对称流动的情形。

第四部分 湍流边界层

第十八章 湍流基础

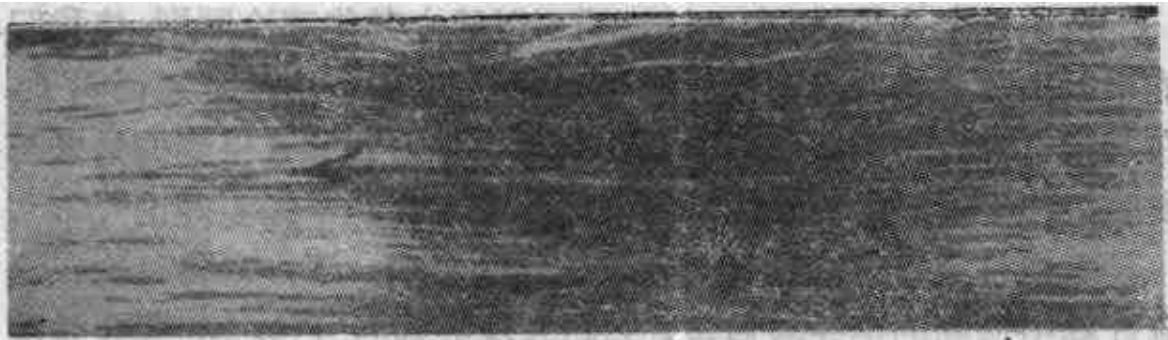
a. 引言

在实际应用中出现的大多数流动都是湍流。湍流这个术语是指在主流上叠加一个无规则脉动(混合或涡运动)的流动。为了说明这种流动的图像,图(a),(b),(c),(d)给出了几幅开口水槽中的湍流照片。应用把粉末撒在自由面上的方法,可以显示出流动的图象。在所有图片中,流动的速度都是相同的,而照相机则以不同的纵向速度沿着水槽的中心线运动。由每幅照片很容易推断出,流体质点的速度是否小于或超过相机的速度,同时,这些图形对于湍流的复杂性也能使人获得深刻的印象。

叠加在主流上的脉动在细节上十分复杂,以致似乎不能进行数学处理,但是必须认识到,由此引起的混合运动对于流动过程和力的平衡是非常重要的。混合运动带来的后果是,粘性系数好像增加了一百倍,一万倍,甚至更多。在大 Reynolds 数时,存在从主流到大涡的连续的能量输运过程。然而,能量主要是由小涡耗散的,如文献[25]详细说明的,这个过程发生在边界层中邻近壁面的薄层内。

管内湍流所受到的大的阻力,飞机和船舶所遇到的那种阻力,以及涡轮和涡轮压缩机中的损失都是由于混合造成的。另一方面,湍流又能使我们在扩压器内或沿机翼和压缩机叶片获得较大的压力增加。如果流动是层流而无湍流的话,这些装置就会出现分离,因此扩压器中的能量恢复就比较小,机翼和叶片就会在不利的条件下工作。

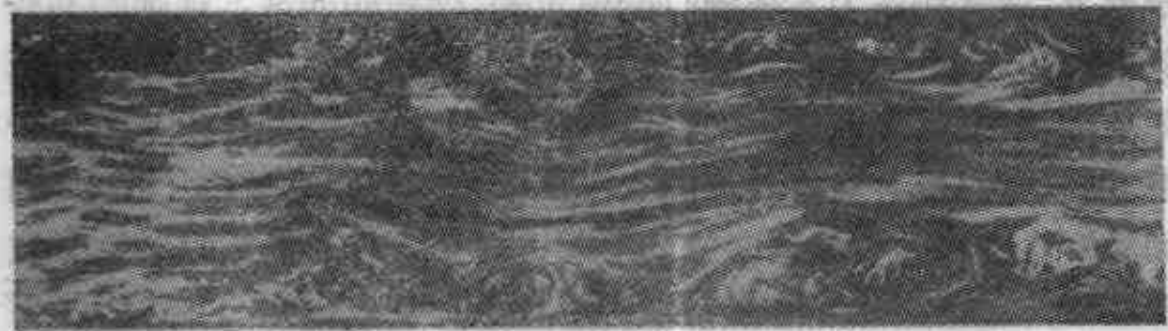
下一章我们将讨论充分发展的湍流问题。在这方面,因为现



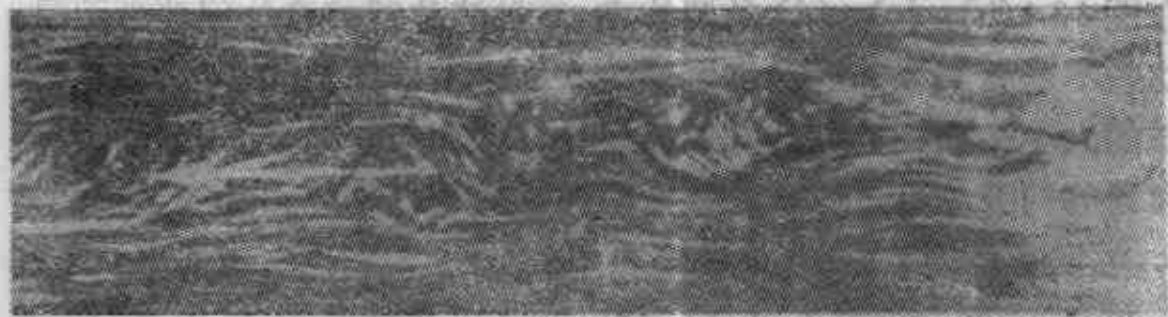
(a) 照相机速度 12.15cm/s



(b) 照相机速度 20cm/s



(c) 照相机速度 25cm/s



(d) 照相机速度 27.6cm/s

图 18.1(a), (b), (c), (d) 6 厘米宽的水槽内的湍流, 用不同照相机速度拍摄的, Nikuradse^[32] 摄制、Tollmien^[37] 发表的照片

在已经证明, 由于湍流脉动的复杂性, 完全的理论表述是不可能的, 我们不得不只限于讨论湍流运动的时间平均值。

按照这个途径,至少已经证明可以建立某些理论原则,使我们能根据实验资料来确定量级的尺度,而且在许多情形下还证明了,在某些合理的假设下可以估算出这些平均值,并且得到的结果与实验符合得很好。下面几章将叙述这种湍流的半经验理论¹⁾。

本章将集中研究脉动对平均流动的影响,下一章将讨论在湍流计算中用到的半经验假设,它们大多数都与 Prandtl 混合长度的概念有关。其余各章将在此基础上处理几组特殊的湍流运动,其中包括管道流动、沿平板流动、有压力梯度的湍流边界层流动以及自由湍流,即没有壁面限制的射流和尾迹中的流动。在会议录 [3, 17, 17a, 18] 中,可以找到处理这些具体问题的论文。

b. 平均运动和脉动

根据周密的研究看来,湍流运动的最显著的特征是,在空间固定点上,速度和压力不是随时间恒定的,而是作非常不规则的高频脉动(图 16.17)。沿流动方向和垂直于流动方向作这种脉动的流体微团,不象气体分子运动论所假设的那样,它们不是由单个分子组成的,它们是各种小尺度的宏观流体球。可以通过例子指出,例如尽管水槽流动中的速度脉动不超过百分之几,但是它对整个流动过程却起着决定性的影响。由于认识到某些较大的流体团具有加在主流上的自己的固有运动,因而能观察到所讨论的这些脉动。在图 18.1(b), (c), (d) 的照片中,这种流体球或流体团清晰可见。这些不断聚集和分解的流体球的大小决定着湍流的尺度,而流体球的大小又取决于流动的外部条件,例如气流通过的阻尼网或蜂窝器的网眼。第十八章 d 将给出几个关于这种脉动量的定量测量

1) 几位作者,特别是 J. M. Burgers, Th. von Kármán 和 G. I. Taylor 很早就提出了一种理论,这种理论超出了这些限制并建立在统计概念的基础上,但是,目前这种理论还不能解决前面提出的基本问题。在本书下面各章中,我们不打算讨论这种湍流的统计理论,请读者参阅 G. K. Batchelor^[2], A. A. Townsend^[42], J. O. Hinze^[20], S. Corrsin^[7], C. C. Lin^[35, 36], J. C. Rotte^[46, 47], P. Bradshaw^[43], D. C. Leslie^[34], M. Rosenblatt 和 C. Van Atta^[41], H. Tennekes 和 J. L. Lumley^[39] 的综合评述。

结果。

在自然风中,这些脉动很清楚地表现为狂风的形式,并且脉动值常常达到平均风速的百分之五十。大气中湍流元的尺度,例如,可以通过观察麦田的涡流来判断。

在第十六章已经指出,在用数学语言描述湍流时,将运动分解为平均运动和脉动(或涡旋运动)是方便的。用 \bar{u} 表示速度分量 u 的时间平均值,用 u' 表示其脉动速度,如式(16.2)指出的那样,我们可以写出如下速度分量和压力的关系式:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; & v &= \bar{v} + v'; \\ w &= \bar{w} + w'; & p &= \bar{p} + p'. \end{aligned} \quad (18.1a, b, c, d)$$

当湍流可压缩时(第二十三章),还须引进密度 ρ 和温度 T 的脉动,令 T 和 ρ 为

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad T = \bar{T} + T'. \quad (18.1e, f)$$

时间平均是在空间固定点上取平均,例如

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} u dt. \quad (18.2)$$

当然,这里的这些平均值是在足够长的时间间隔 t_1 内取得的,因而它们与时间完全无关。所以根据定义,所有脉动量的时间平均值都等于零:

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= 0; & \bar{v}' &= 0; & \bar{w}' &= 0; \\ \bar{p}' &= 0; & \bar{\rho}' &= 0; & \bar{T}' &= 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

对于湍流运动过程具有基本重要性的特征是,脉动 u', v', w' 以这样一种方式影响平均运动 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$,即后者对变形的阻力有明显的增加。换句话说,脉动存在本身表现为主流的粘性有明显增加。这种增大的平均运动的表现粘性是所有湍流理论研究的核心概念,所以,我们首先力图对这些关系得到比较深入的了解。

在这里列出几个时间平均的运算法则是有益的,因为将来会用到它们。如果 f 和 g 是要计算时间平均值的因变量, s 表示自变量 x, y, z, t 的任何一个量,则有下列法则:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\dot{f}} &= \dot{\bar{f}}; \quad \overline{\dot{f} + g} = \dot{\bar{f}} + \dot{\bar{g}}, \\ \overline{\dot{f} \cdot g} &= \dot{\bar{f}} \cdot \bar{g}, \\ \overline{\frac{\partial \dot{f}}{\partial s}} &= \frac{\partial \dot{\bar{f}}}{\partial s}; \quad \overline{\int \dot{f} ds} = \int \dot{\bar{f}} ds. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

c. 附加的“表观”湍流应力

在推导平均运动与由脉动引起的表观应力之间的关系之前，我们先给出关于表观应力的物理解释。这个论证基于动量定理。

现在让我们考察湍流中的一个面元 dA ，湍流的速度分量为 u, v, w 。设想这个面元的法线平行于 x 轴，而 y 和 z 轴的方向在 dA 平面内。在 dt 时间内通过这面积的流体质量用 $dA \cdot \rho u \cdot dt$ 给出，所以沿 x 方向的动量通量是 $dJ_x = dA \cdot \rho u^2 \cdot dt$ ，相应的沿 y 和 z 方向的动量通量分别是 $dJ_y = dA \cdot \rho uv \cdot dt$ 和 $dJ_z = dA \cdot \rho uw \cdot dt$ 。考虑到密度不变，就可以计算出如下单位时间内动量通量的平均值：

$$\overline{dJ_x} = dA \cdot \rho \overline{u^2}; \quad \overline{dJ_y} = dA \cdot \rho \overline{uv}; \quad \overline{dJ_z} = dA \cdot \rho \overline{uw}.$$

利用式(18.1)可以得到

$$u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2;$$

应用式(18.3)和(18.4)的法则，可以得到

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2};$$

类似地，还可以得到

$$\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \overline{u'v'}; \quad \overline{uw} = \bar{u} \cdot \bar{w} + \overline{u'w'}.$$

因此，单位时间内动量通量的表式为

$$\begin{aligned} \overline{dJ_x} &= dA \cdot \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}), & \overline{dJ_y} &= dA \cdot \rho (\bar{u} \cdot \bar{v} + \overline{u'v'}), \\ \overline{dJ_z} &= dA \cdot \rho (\bar{u} \cdot \bar{w} + \overline{u'w'}). \end{aligned}$$

这些表示动量变化速率的量，具有作用在面元 dA 上力的量纲，所以用 dA 相除就得到单位面积的力，即应力。由于单位时间内通过某一面积的动量通量总是等价于周围流体作用于该面积的一个大小相等方向相反的力，所以我们断定，在所讨论的这个垂直于 x 轴的面积上作用有这些应力：沿 x 方向有一 $\rho(\bar{u}^2 + \overline{u'^2})$ ，沿 y 方

向有 $-\rho(\overline{u'v'} + \overline{u'v'})$, 沿 z 方向有 $-\rho(\overline{u'w'} + \overline{u'w'})$. 其中第一个是法向应力, 后面两个是切应力. 由此可见, 这些脉动叠加在平均运动上, 引起了作用于面元上的三个附加应力:

$$\sigma'_x = -\rho\overline{u'^2}; \quad \tau'_{yx} = -\rho\overline{u'v'}; \quad \tau'_{zx} = -\rho\overline{u'w'}. \quad (18.5)$$

它们称为湍流“表观”应力或 **Reynolds 应力**, 而且必须加到由层流那样的定常流动引起的应力上. 相应的表达式也可以应用于面元垂直于 y 轴和 z 轴的情形. 它们在一起构成了完整的湍流应力张量. 式(18.5)首先是由 O. Reynolds^[43] 根据流体动力学的运动方程推导出来的(还可见下一节).

容易想象, 速度脉动量混合乘积的时间平均值(例如 $\overline{u'v'}$) 实际上不等于零. 应力分量 $\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = -\rho\overline{u'v'}$ 可以解释为通过垂直于 y 轴平面的 x 方向动量的输运. 例如, 考察由 $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$ 和 $d\bar{u}/dy > 0$ 给出的平均流动(图 18.2), 可以看出平均乘积 $\overline{u'v'}$ 不为零. 由于湍流脉动而向上移动的质点 ($v' > 0$) 从平均速度 \bar{u} 较小的区域到达 y 层, 由于它们大体上保持原来的速度 \bar{u} , 所以它们在 y 层引起负的分量 u' . 相反, 从上层下来的质点 ($v' < 0$), 在这层引起正的 u' . 因此, 平均来说, 正的 v' 基本上与负的 u' 相联系, 而负的 v' 基本上与正的 u' 相联系. 这样我们可以期望, 时间平均值 $\overline{u'v'}$ 不仅不为零, 而且是负的. 在这种情形下, 切应力 $\tau'_{xy} = -\rho\overline{u'v'}$ 是正的, 而且和相应的层流切应力 $\tau = -\mu du/dy$ 的符号相同. 这个事实还可以这样表述: 在给定点上存在着纵向和横向速度脉动之间的一种相关性.

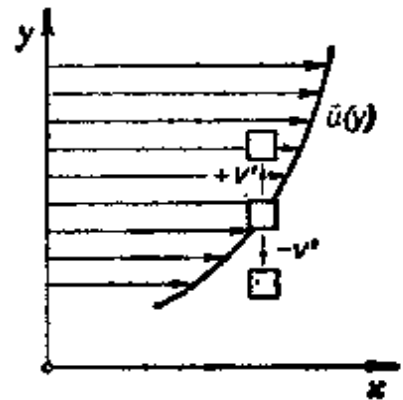


图 18.2 由于湍流速度脉动引起的动量输运

d. 由 Navier-Stokes 方程出发的表观湍流摩擦应力张量的推导

在从物理上解释了湍流脉动引起的附加力的起源之后, 我们

打算用更正规的方法直接从 Navier-Stokes 方程导出同样的表达式。下面讨论的目标是，导出速度分量和压力的时间平均值 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 和 \bar{p} 所必须满足的运动方程。不可压缩流动的 Navier-Stokes 方程(3.32)可以改写成如下形式:

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right\} \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \end{aligned} \quad (18.6a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right\} \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \end{aligned} \quad (18.6b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right\} \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (18.6c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (18.6d)$$

其中 ∇^2 表示 Laplace 算子。我们现在引用式(18.1)的假设，将速度分量和压力分解为时间平均量和脉动量，同时考虑到式(18.4)的法则，对所得到的方程逐项地取时间平均。由于 $\partial \bar{u} / \partial x = 0$ 等，连续方程变为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (18.7)$$

由式(18.7)和(18.6d)还可以得到

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

可见，时间平均的速度分量和脉动的分量都满足不可压缩的连续方程。

将式(18.1)的假设用到运动方程(18.6a, b, c)，可以得到类似于上节给出的表达式。在取平均和运用式(18.4)的法则时，应该

注意平均值的二次项保持不变,因为它们已经不随时间变化.脉动分量的线性项,例如 $\partial u'/\partial t$ 和 $\partial^2 u'/\partial x^2$, 根据式(18.3)应该等于零. 诸如 $\bar{u} \cdot u'$ 的混合项也是一样. 但是脉动分量的二次项应保留在方程中,在取平均时它们记作 $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$ 等. 因此, 如果对式(18.6)进行平均,并利用连续方程(18.7)进行简化, 就可以得到下述方程组:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right], \quad (18.8a)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \overline{\frac{\partial v'^2}{\partial y}} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right], \quad (18.8b)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \overline{\frac{\partial w'^2}{\partial z}} \right]. \quad (18.8c)$$

由于即将说明的理由, 脉动速度分量的二次项都已经移到了方程的右边. 方程(18.8)和连续方程(18.7)确定了目前所讨论的问题. 在形式上, 方程(18.8)的左边和定常的 Navier-Stokes 方程(3.32)是一样的, 只是将分量 u, v, w 换成了它们的平均值, 方程右边的压力项和摩擦项也是这样. 此外, 这组方程还含有依赖于流动中湍流脉动的项.

比较方程(18.8)和方程(3.11)可以看出, 方程(18.8)右边的各个附加项可以解释为应力张量分量. 由式(3.10a)可见, 由附加项引起的单位面积的表面合力为

$$\mathbf{P} = i \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$+ k \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right).$$

进一步与式(3.11)进行类比,可以将式(18.8)改写为

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ & \quad - - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right), \\ & \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ & \quad - - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right), \\ & \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \\ & \quad - - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} + \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} (18.9)$$

比较方程(18.9)和(18.8)可以看出,由流动的脉动速度分量引起的应力张量的诸分量是

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}. \quad (18.10)$$

这个应力张量和式(18.5)中借助于动量方程得到的应力张量一样。

根据以上的讨论可以得出结论:湍流平均速度分量满足和层流一样的方程,即式(18.9),只是层流应力必须增加应力张量(18.10)给出的附加应力。这些附加应力称为**湍流表观应力**或**湍流有效应力**,或称 **Reynolds 应力**。它们是由湍流脉动引起的,并由脉动分量二次项的时间平均值给出。由于这些应力被加到通常的层流粘性项上,而且对流动过程有类似的影响,所以人们常说它们是由**湍流粘性**引起的。总的应力是式(3.25a, b)的粘性应力和这些表观应力之和,例如

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

一般说来,这些表观应力远远超过粘性应力,因此,在许多实际情形下,可以略去后者并有很好程度上的近似。

边界层方程: 现在简要地概述一下湍流边界层方程的形式也许是有意义的。在二维流动 ($\bar{w} = 0$) 的情形下,用如第七章给出的边界层近似进行修正后,方程 (18.7) 和 (18.8a, b, c) 得出

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (18.12)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right\}. \quad (18.13)$$

(二维湍流边界层)

由于边界层简化,使法应力产生的项

$$+ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'^2} - \overline{u'^2})$$

可以略去。和层流边界层方程 (7.10) 和 (7.11) 相比,可以得出如下规律:

(a) 速度分量 u, v 和压力 p , 应该用它们的时间平均值 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$ 来代替。

(b) 惯性项和压力项保持不变, 而粘性项 $\nu \partial^2 u / \partial y^2$ 必须由下述项来代替:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'v'} \right).$$

这就等于说,单位体积的层流粘性力 $\partial \tau_l / \partial y$ 必须由

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_l + \tau_t)$$

来代替。其中 $\tau_l = \mu \partial u / \partial y$ 是根据 Newton 定律得到的层流切应力, 而 $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$ 是根据 Reynolds 假设得到的表观湍流应力。

边界条件: 方程 (18.9) 中的平均速度分量所满足的边界条

件,和通常的层流条件是一样的,即它们在固壁上都等于零(无滑移条件)。另外,所有脉动分量在固壁上也必须等于零,而且在直接靠近壁面的邻域内它们都非常小。由此得出,表观应力张量的所有分量在固壁上均等于零。邻近壁面唯一一起作用的应力是层流粘性应力,因为一般来说它们在那里不等于零。此外还可以看到,在紧靠壁面的地方,表观应力小于粘性应力,所以在每种湍流中总存在一个紧靠壁面的很薄的薄层,这层的性质大体上和层流是一样的。这一层称为**层流次层***。这层的速度很小,以致粘性力超过惯性力,因此在这层内不可能存在湍流。层流次层连接一个过渡层,这层的速度脉动足够大,它们所引起的湍流切应力和粘性应力大小相当。在离壁面更远的地方,湍流应力十分明显地超过粘性应力,这是真正的湍流边界层。在大多数情形下,层流次层的厚度非常薄,所以在实验条件下不可能或者很难观察到这层。但是,它对目前讨论的流动有着决定性的作用,因为决定壁面切应力和粘性阻力的各种现象都出现在这个地方。在本书后面还要回过来讲这一点。

方程(18.9)和(18.10)是从数学上处理湍流问题的出发点,或者更确切地说,是计算描述湍流的各个量的时间平均值的出发点。由脉动速度分量组成的一些时间平均值,可以解释为应力张量的分量,但是必须记住,这样一种解释本身并没有带来很多好处。只要还不知道这些平均流动与湍流应力分量之间的关系,就不可能用方程(18.9)和(18.10)对平均流动进行合理的计算。这种关系只能由经验得到,并且构成下章将要讨论的所有湍流假设的基本内容。

e. 关于湍流脉动速度的一些测量

在湍流实验工作中,通常只测量压力和速度的平均值,因为它们是唯一能方便地测量的量。湍流脉动分量 u' , v' ... 本身的测

* 这一层现在称为粘性次层。在本书译文中仍按原文译出。——中译者注

量,或者如 $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$... 这样一些平均量的测量都是相当困难的,而且需要精密的仪器. 借助热线风速计已获得了脉动速度的可靠测量值. 对于大多数实际应用来说,测量平均值就足够了,然而只有通过脉动分量的实际测量,才能对湍流的机制有较深入的理解. 为了对湍流现象给出更清晰的物理图象,并为前面的数学论证提供一些依据,我们现在打算就脉动速度分量测量的一些实验工作做一些简短说明.

H. Reichardt^[43] 在风洞中进行了这种测量,风洞实验段宽 1m 高 22.4cm. 图 18.3 画出了平均速度沿风洞高度的变化 $\bar{u}(y)$; 测量是在风洞中心截面做出的. 可以看出,它是典型的湍流速度剖面,在壁面附近速度急剧增加,在中心线附近速度十分均匀. 最大速度是 $U = 100\text{cm/s}$. 在同一张图上还分别画出纵向和横向分量的均方根 $\sqrt{\overline{u'^2}}$ 和 $\sqrt{\overline{v'^2}}$ 的曲线. 横向脉动沿风洞的高度变化不大,它的平均值约为 U 的百分之四,但是纵向湍流分量在很靠近壁面的地方呈现出大小为 $0.13U$ 的很陡的最大值. 由图清楚可见,如早已指出的,这两种湍流分量在壁面上都减小为零. 图 18.4 画出一条乘积平均值 $-\overline{u'v'}$ 的曲线,它再乘上一个因子 ρ 就等于湍流切应力. 由于对称性, $-\overline{u'v'}$ 值在实验段中心降低为零,而它的最大值出现在壁面附近,这说明湍流摩擦力在那里有最大值. 虚线 τ/ρ 表示切应力的变化,它是由测量的压力分布得出的,而与速度测量无关. 这两条曲线在实验段高度的主要部分上几乎重合. 这可以解释为是对测量的一种很好的检验,同时,这也说明几乎所有的切应力都是由湍流引起的. 由于在壁面附近湍流脉动消失,曲线 $-\overline{u'v'}$ 减小为零,所以在壁面附近这两条曲线就分开了. 这两条曲线的差值给出层流摩擦力. 最后,图 18.4 中还有纵向和横向脉动在同一点的相关系数 ϕ 值;它定义为

$$\phi = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{v'^2}}} \quad (18.12a)$$

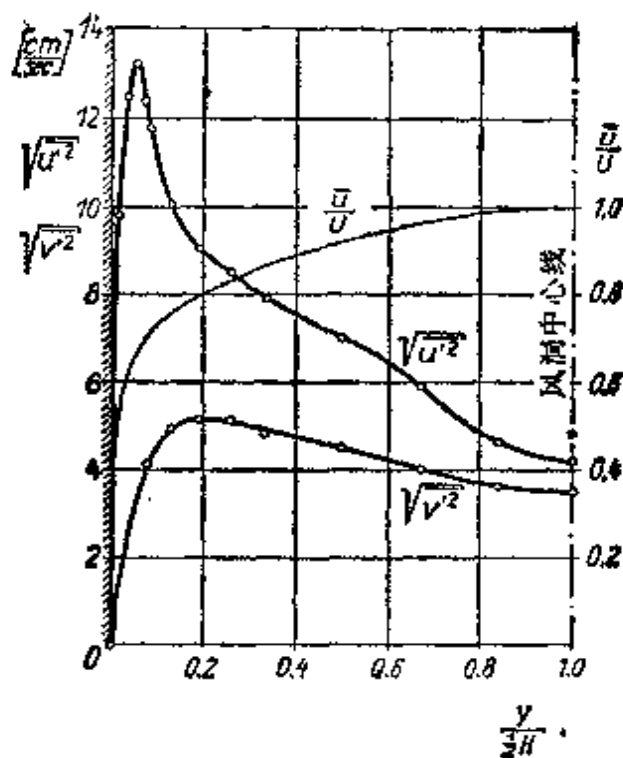


图 18.3 风洞中湍流脉动分量的测量,最大速度 $U = 100\text{cm/s}$, 根据 Reichardt^[41] 纵向脉动均方根 $\sqrt{u'^2}$, 横向脉动 $\sqrt{v'^2}$, 平均速度 U

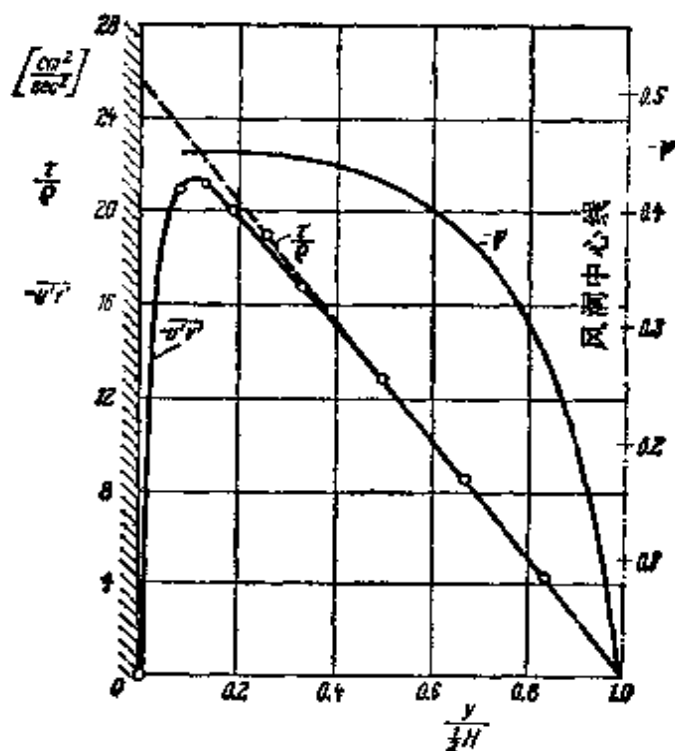


图 18.4 风洞中脉动分量的测量,根据 Reichardt^[41] 乘积 $\overline{u'v'}$, 切应力 τ/ρ 和相关系数 ψ

相关系数¹⁾的数值分布在极值达 $\psi = -0.45$ 的范围内。

在零攻角平板边界层中,也对湍流脉动进行了较广泛的测量。图 18.5 画出了 P. S. Klebanoff^[25] 在平板边界层内得到的一些结果,其中实验气流的湍流度很低,为 0.02% (参看第十六章 d 和第十八章 f),测量点的 Reynolds 数 $R_x = U_\infty x / \nu = 4.2 \times 10^6$ 。速度的时间平均值 \bar{u} 的剖面和风洞中的剖面十分相像(图 18.3)。纵向脉动 $\sqrt{u'^2}$ 的变化紧靠壁面有明显的最大值,而垂直于壁面的横向脉

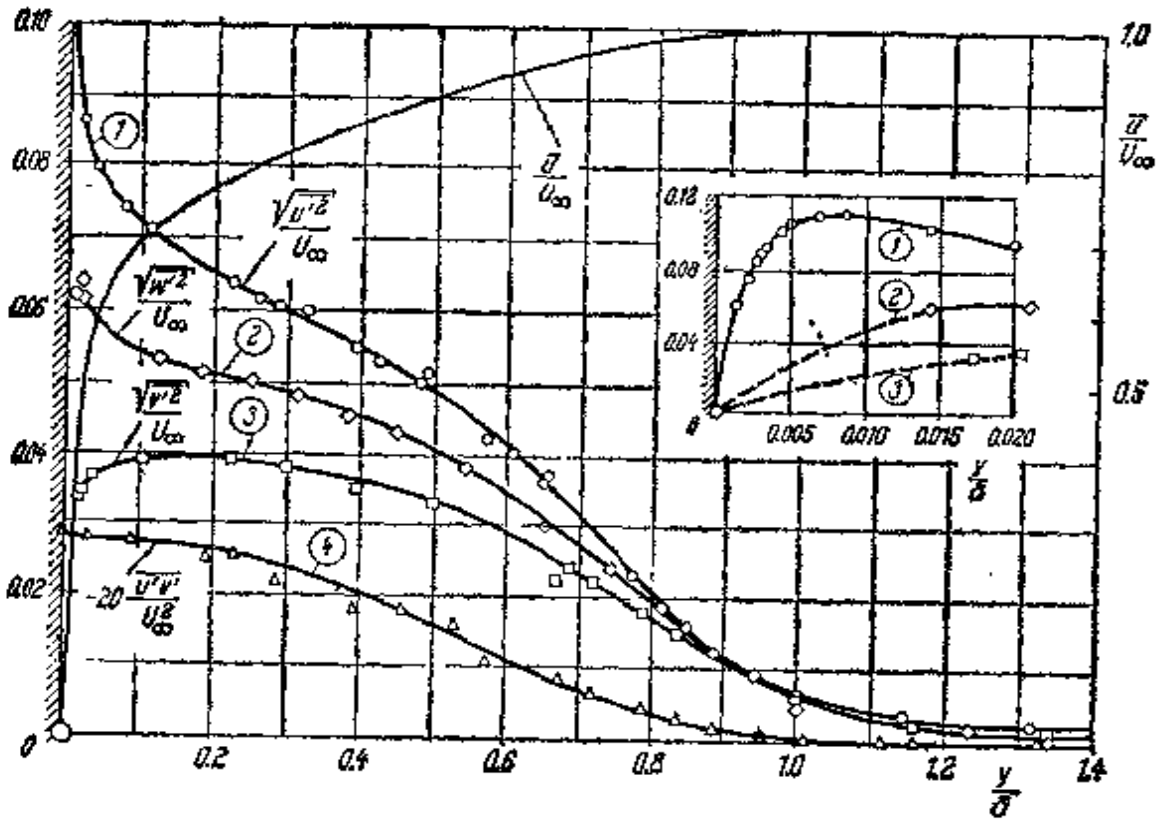


图 18.5 零攻角平板边界层中湍流脉动速度分量的变化, P. S. Klebanoff 测量^[25]

- 曲线(1), 纵向脉动: $\sqrt{u'^2}$;
 - 曲线(2), 平行于壁面的横向脉动: $\sqrt{w'^2}$;
 - 曲线(3), 垂直于壁面的横向脉动: $\sqrt{v'^2}$;
 - 曲线(4), 湍流切应力: $\overline{u'v'} = -\tau_t / \rho$.
- \bar{u} 表示平均速度

1) 这里顺便指出, 存在速度脉动引起的表观应力, 总是意味着存在两个不同方向的脉动速度分量的相关。在层流稳定性理论中所研究的扰动情形也存在这种相关; 参阅参考文献[58].

动 $\sqrt{v'^2}$ 的曲线比较平缓, 这两条曲线与在风洞中得到的结果也十分相像(图 18.3)。值得注意的是, 在平板边界层内(图 18.5), 平行于壁面的横向脉动 $\sqrt{w'^2}$ 也有很大的值, 而且超过 $\sqrt{v'^2}$ 所达到的值。靠近壁面测量的湍流切应力 $-\overline{u'v'}/U_\infty^2$ 与 $\tau/\rho U_\infty^2 \approx 0.0015$ 相吻合, 后者是图 21.10 曲线中的局部表面摩擦力系数 $\frac{1}{2}c'_f$ 。把在风洞中得到的图 18.3 和图 18.4 与边界层中得到的图 18.5 相比较可以看出, 在这两种情形下, 湍流脉动是非常相似的。这就为用管道流动的湍流定律来描述边界层流动提供了一个依据。在第二十一章我们将利用这种可能性。

G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[50] 还在有顺压和逆压梯度的平面湍流边界层内, 对湍流速度的脉动量和相关系数进行了非常仔细的测量。

J. Laufer^[52] 对管流中的脉动分量进行了广泛的测量。P. S. Klebanoff 和 Z. W. Diehl^[54] 早期对人工增厚的平板边界层所做的测量表明, 它的性质和相应增加入口长度的通常边界层的性质基本上相同。在 J. Laufer 的文章中^[50], 可以找到槽内湍流的详细结果。J. C. Laurence 后来的一篇文章^[53]里有他对自由射流中湍流强度的研究成果。

文献[25]中对平板边界层内湍流脉动的研究还表明, 边界层外缘的湍流是间歇的, 这一点很象第十六章 a 及图 16.2 和图 16.3 所描述的圆管进口段的流动。湍流脉动速度分量的波形图表明, 边界层中的强湍流和几乎无脉动的外流之间有明显的边界, 它的位置随时间强烈地变化。图 18.6 画出了间歇因子沿边界层厚度的变化。 $\gamma = 1$ 表示流动在所有时间内都是湍流, $\gamma = 0$ 相应于层流, 因此, 由图可以推断, 边界层从 $y = 0.5\delta$ 到 $y = 1.2\delta$ 之间是间歇的。湍流射流和尾迹也表现出类似的特性(参看文献[25a, 26, 28, 63])。

为了描述湍流的特征, 除了需要给出速度脉动分布之外, 还

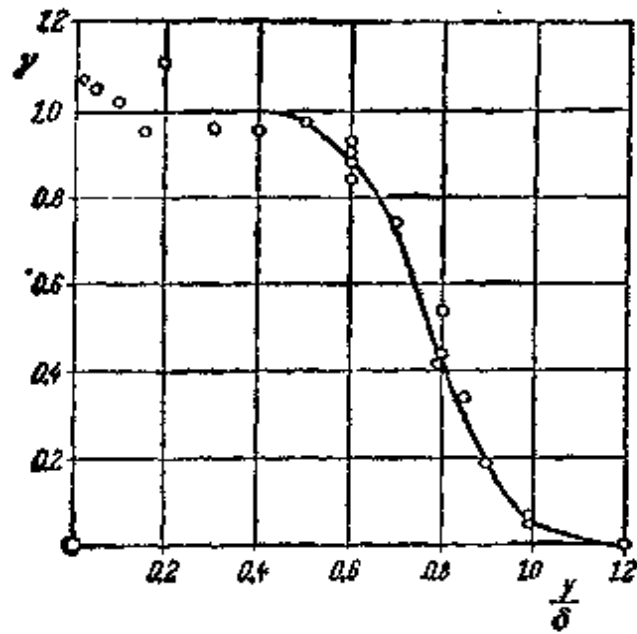


图 18.6 零攻角平板湍流边界层内间歇因子 γ 的变化,由 P. S. Klebanoff^[223] 测量

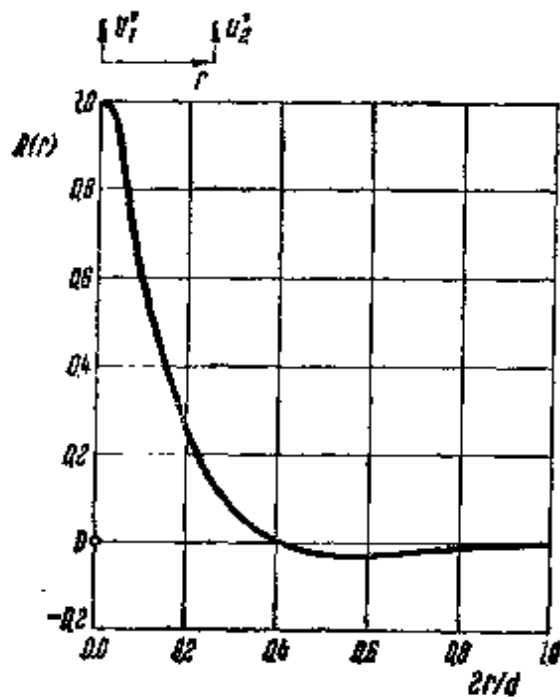


图 18.7 纵向速度分量的湍流脉动 u_1' 和 u_2' 的相关函数,其中 u_1' 是在圆管中心测量的, u_2' 是在距离 r 处测量的. 由 G. I. Taylor^[243] 报道的 F. G. Simms 的测量结果

必须给出另外一些数据。通过同时观测流场中两个相邻点 1 和 2 的速度脉动,可以得到关于湍流空间结构的定量描述。这使我们

能确定出相关函数

$$R = \frac{\overline{u_1 u_2}}{\sqrt{\overline{u_1^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_2^2}}} \quad (18.13a)$$

它是由 G. I. Taylor^[52] 首先引进的。图 18.7 的曲线引自 G. I. Taylor 的文章^[54]。它显示了在直径为 d 的圆管横截面内纵向脉动的一个典型的相关函数。一支热线探头放在圆管中心，另一支放在另外的距离 r 上。在 $r = 0$ 处，这两个脉动 u_1 和 u_2 是一样的，因此得出 $R(0) = 1$ 。当 r 增加时，相关函数值迅速降低，在这个特例下，甚至在某个范围内出现小的负值。这可以由连续性的要求得到解释，我们知道，通过任何横截面的流量都不随时间变化。相关函数 R 的积分，即

$$L = \int_0^{1/2d} R(r) dr \quad (18.14)$$

得出一个流动中湍流结构的特征长度。这个长度又称为湍流尺度，它确定了作为运动单元的质量的范围尺度，并且给出了湍流涡（“湍流球”）平均尺度的概念。在所讨论的这个例子中，可以得到 $L \approx 0.14 \left(\frac{1}{2} d \right)$ 。

如果式 (18.13) 中第二个速度 u_2 是在同一位置但不同时刻测量的（在 t_1 时为 u_1 ，在 $t_2 = t_1 + \tau$ 时为 u_2 ），我们可以得到所谓的自动相关函数。给出空间-时间相关函数，即给出两个在不同地点和不同时刻观察的速度分量，能使我们得到很多认识。作为一个例子，在图 18.8 中复制了这样一些空间-时间相关函数，它们是 A. J. Favre 和他的同事们^[46] 在平板湍流边界层中测得的。每条曲线最大值的时间后移 τ_0 是由湍流涡的行程引起的，这些涡以近似等于 $0.8U_0$ 的速度运动。这些最大值的减小是由这样一种过程引起的，它可以想象如下：随着时间的推移，湍流涡经过和周围湍流流体相混合而失去自己的特性，与此同时，又不断地产生新的涡。

如果不用相关函数而是给出运动的频率分析，则可以得到另一种描述湍流结构的方法，这使我们得到谱的概念。令 n 表示频

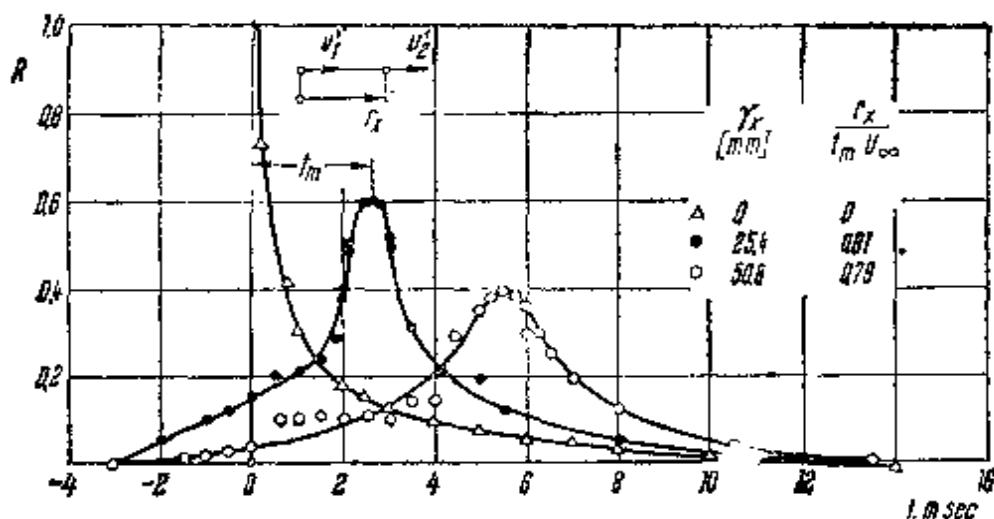


图 18.8 平板湍流边界层中速度脉动量的空间-时间相关函数, 由 A. J. Favre, J. J. Gaviglio 和 R. J. Dumas^[163] 测量离壁面的距离: $y/\delta = 0.24$, 边界层厚度: $\delta = 16.8\text{mm}$

率, 而 $F(n)dn$ 表示在频率从 n 到 $n + dn$ 范围内纵向脉动均方值 $\overline{u'^2}$ 的分数含量. 函数 $F(n)$ 代表频率为 n 时 $\overline{u'^2}$ 的分布密度, 它称作 $\overline{u'^2}$ 的谱分布. 根据定义, 一定有

$$\int_0^{\infty} F(n)dn = 1. \quad (18.15)$$

谱函数 $F(n)$ 可以解释为自动相关函数的 Fourier 变换¹⁾. 图 18.9 表示的谱是 P. S. Klebanoff^[25] 在平板湍流边界层中得到的. 除了在边界层外缘 ($y/\delta = 1$) 的测量外, $F(n)$ 的最高值总是出现在最低的测量频率上. 当频率 n 增高时, 函数 $F(n) \sim n^{-5/3}$, 与 A. N. Kolmogorov, C. F. von Weizsaecker^[64] 和 W. Heisenberg 提出的理论相符合. 当频率更高时, 在运动粘性系数的作用下, $F(n)$ 减小得更快. 按照 W. Heisenberg 的理论^[19a], 在频率值非常高时, 我们将看到 $F(n) \sim n^{-7}$. 这两种理论定律在图 18.9 中用两条直线表示出来, 它们分别标注为(1)和(2).

J. Maréchal^[36a] 对均匀湍流中的频谱进行过详细测量. 特别是他研究了流动中二维强收缩的影响.

1) 这点是 G. I. Taylor^[47] 首先认识到的.

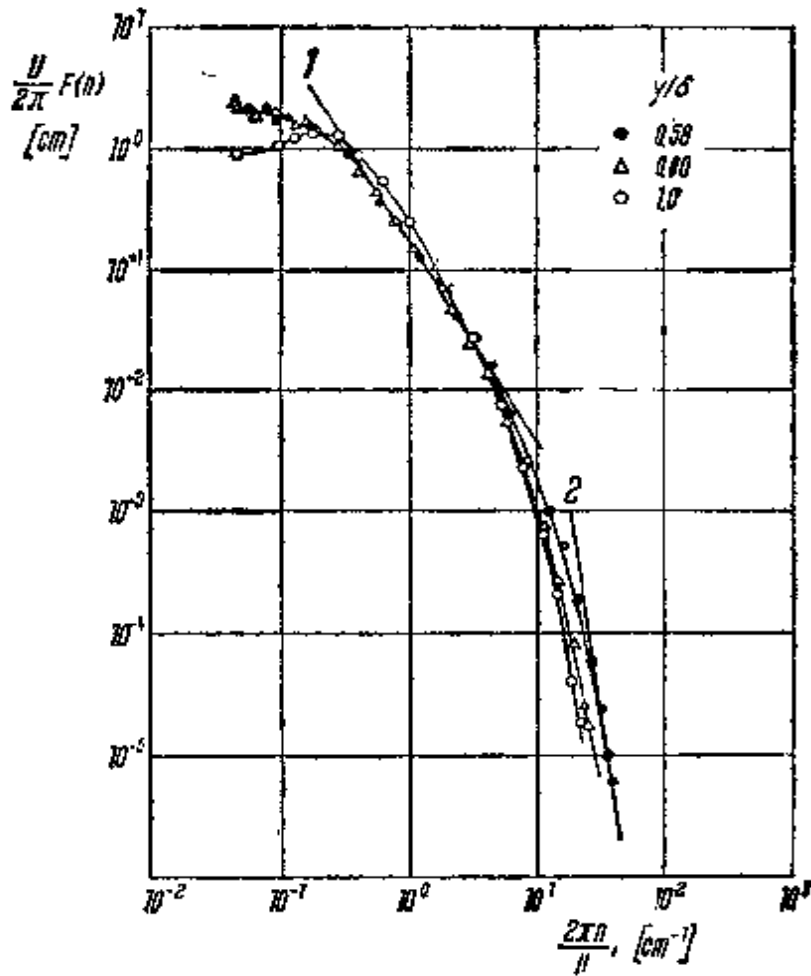


图 18.9 平板边界层内纵向脉动的频谱，由 P. S. Klebanoff^[21] 测量 曲线 (1): $F \sim n^{-5/3}$; 曲线 (2): $F \sim n^{-1}$. 理论是 W. Heisenberg^[19a] 提出的

脉动能量频谱分布的性质，使我们直接得到这种概念：湍流不是只有固定大小的涡，相反，它必定有许许多多不同尺度的涡。在很高 Reynolds 数时，这些涡的大小彼此能差几个量级。新近的一些文章涉及到湍流度对湍流边界层发展的影响^[5, 19, 22]。R. Emmertling^[23] 利用光学方法对湍流边界层的壁面压力进行了详细的研究。他发现，这种流动以无规则的时间间隔形成了一些高振幅的压力脉动区。在这些区域内，壁面压力脉动的极值以平均流动 40~80% 的瞬时速度沿平均流动方向移动。这种脉动的波形随时间缓慢地变化。还可参看 W. K. Blake^[24], M. K. Bull^[25], S. J. Kline 等^[26] 和 P. J. Mulhearn^[27a] 的文章，以及 W. W. Willmarth^[66, 67] 的评述。

f. 湍流的能量分布

附加的脉动运动通过湍流应力不断地从平均主流中带走能量。最后，由于粘性作用，这些能量又完全耗散为热量。如果将式(18.1)的速度代入式(12.8)的耗散函数表达式，我们就可以将只依赖于平均运动速度梯度的那些项分离出来。这部分称为直接耗散函数。其余部分对应于由于存在脉动而耗散的能量，称为湍流耗散函数。根据式(12.8)，湍流耗散函数由下述表达式给出：

$$\varepsilon = \nu \left[2 \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right]. \quad (18.16)$$

直接耗散函数只在固壁附近才有不可忽略的贡献。而在流场其他地方，湍流耗散函数比前者重要得多。

当湍流为均匀各向同性时，式(18.16)的表达式取很简单的形式。湍流场的统计分布在空间各点上都相同时，则称湍流场为均匀的；当这种分布不随坐标轴的任意转动和反射而改变时，则称为各向同性的。考虑到对称的性质和连续性的要求，可以将式(18.16)的右边化为一个单项的倍数，例如 $\overline{(\partial u' / \partial x)^2}$ 的倍数。这使 G. I. Taylor^[93] 能够把式(18.16)化简为下面形式：

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}. \quad (18.17)$$

严格地说，在自然界中各向同性湍流是不存在的。像在风洞中那样，让平行气流通过一个丝网，则可以得到一个湍流场，它在结构上近似等于各向同性假设的情形。在管流和边界层等流动中，对各向同性的偏离是很大的。但是，如果不用速度本身而用速度差的分布函数，那么各向同性湍流的概念可以得到更广泛的应用。按照 A. N. Kolmogorov¹⁾ 的作法，考察如下形式的相关函数：

$$B = \overline{(u'_2 - u'_1)^2},$$

(参看式(18.13)和图 18.7)，当该相关函数在某一限定区域内，即在点 1 和点 2 之间距离为 r 的有限范围内，不随坐标系转动和反射而改变时，则称这种湍流为“局部各向同性的”。

如果湍流 Reynolds 数

$$R = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}} L}{\nu}$$

足够大，可以发现，在足够小的区域 $r \ll L$ 内，这种局部各向同性存在于任何湍流中，其中 L 已用式(18.14)定义。它甚至也存在于有较大切应力的剪切流动中，例如管流和边界层流动等，但是非常邻近壁面和边界的地方除外。局部各向同性的湍流区，正

1) A. N. Kolmogorov 的这些工作，现在可以参阅德文和英文译文 [18a, 18b].

好在脉动梯度($\partial u'/\partial x$ 等)出现较大值的区域,因此,式(18.17)有非常广泛的适用性. 由 A. N. Kolmogorov 首先提出的及后来由 C. F. Weizsaecker^[64] 和 W. Heisenberg^[192] 独立得出的量纲理论,可以确定关于小距离 r 的相关函数形式或高频频谱形式的更多细节. 但是,除了再请读者参看图 18.9 外,我们在这里必须避免继续讨论这个问题.

下面几点对于理解湍流是非常重要的: 湍流应力主要是由大涡,即大小为 L 量级的那些涡引起的. 作为流动失稳的结果,出现了越来越小的涡,最后在最小的涡内,梯度 $\partial u'/\partial x$ 等变得很陡,结果在它们中间产生了由机械能向热能的转变. 由湍流应力引起的从平均运动传递给大涡的机械功率与粘性无关,这种功率逐级地传递给更小尺度的涡,直至耗尽为止. 这个机制导致这样的事实: 尽管所有能量损失都是由粘性引起的,但是表面摩擦力以及平均速度分布却很少依赖于 Reynolds 数.

g. 风洞的湍流度

在风洞测量中,纵向和横向速度脉动的相对值是一个非常重要的变量,它决定了在模型上进行的测量在多大程度上可以应用于全尺寸结构,以及在不同风洞中所做的测量怎样进行比较. 特别是在第十六章 d 中已经提到的,从层流向湍流的转换强烈地依赖于脉动速度分量的大小. 湍流边界层的整个发展过程、分离点的位置以及传热率都依赖于来流中的湍流度(参看第十二章 g). 在给定的风洞中,脉动量的大小由阻尼网和蜂窝器的网眼决定. 在离开阻尼网的一定距离上,存在各向同性的湍流,就是说平均的速度脉动在三个坐标方向上彼此相等:

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}.$$

在这种情形下,湍流度(或湍流强度)可以用 $\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty$ 来描述,它等同于

$$\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}/U_\infty.$$

如果使用足够多的细网眼阻尼网或蜂窝器,则用 $\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty$ 表示的

风洞湍流度可以降到百分之 0.1 左右(图 16.16)¹⁾。

圆球阻力系数急剧下降时的临界 Reynolds 数(图 1.5), 强烈地依赖于风洞的湍流度, 这个被实验证实的事实有重要的实际意义。临界 Reynolds 数²⁾的量级是 $(VD/\nu)_{crit} = 1.5 \times 10^5$ 至 4×10^5 , 其数值随湍流度的增加而降低。这个事实的物理原因是明显的。由于来流中的高湍流度引起在较低 Reynolds 数下出现转捩, 因此分离点后移, 尾迹减小, 这样就减小了阻力。另一方面, C. B. Millikan 和 A. L. Klein^[37] 所做圆球自由飞行的测量, 给出了意想不到的结果: 在自由大气中, 圆球的临界 Reynolds 数不依赖于随天气变化的湍流结构。自由飞行给出的临界 Reynolds 数是 $R_{crit} = 3.85 \times 10^5$ 。虽然低湍流度风洞中的一些测量接近这个值, 但它还是大于大多数风洞的测量值。在自由飞行中测量的临界 Reynolds 数不依赖于天气的事实可以这样解释: 大气中的湍流涡很大, 以致它们不可能影响圆球边界层中的现象。总之, 这些测量结果所得出的结论是, 如果要把模型测量结果用到全尺寸飞机的设计上去, 就必须设计低湍流度的风洞。在做低阻力翼型的测量时, 这是特别重要的, 这种翼型的边界层在很大范围内都是层流的(层流翼型, 参看第十七章b)。这种翼型的特性只有在低湍流度风洞中, 即湍流度非常低的风洞中 ($T \approx 0.0005$, 参看文献[14]), 才能成功地进行测量。在文献[6]中有大量风洞的湍流度测量的一览表。

由于直接测量速度脉动 $\sqrt{u'^2}/U_\infty$ 十分困难, 所以曾试图把

1) H. L. Dryden 和 G. B. Schubauer^[10] 对于在风洞中放置细网眼阻尼网对湍流度的影响进行了广泛的测量。增加单个阻尼网可以使湍流度按比率 $1/\sqrt{1+c}$ 降低, 其中 c 是阻尼网的阻力系数, 因此当使用 n 个阻尼网时, 湍流度降低的比率是 $\{1/(1+c)\}^{n/2}$ 。这样, 对于给定的压力损失, 选用许多小阻力的阻尼网比用一个大阻力的阻尼网要好, 这时湍流度降低得更大些。根据文献[10], 在风洞上增加一个收缩角, 会使纵向脉动分量的绝对值明显降低。另一方面, 横向分量或者保持不变, 或者反而增加。

2) 圆球的临界 Reynolds 数定义为这样的值, 在这个值下阻力系数取约定值 $c_D = 0.3$ 。

圆球临界 Reynolds 数看成是描述风洞湍流度的参数。圆球临界 Reynolds 数,或是通过测量阻力来确定,如 H. L. Dryden^[8,9] 所建议的,或是通过测量圆球前驻点和后部一点的压力差来确定,如 S. Hoerner^[21] 所建议的¹⁾。R. C. Platt^[40] 广泛使用了后面这种方法。H. L. Dryden 和 A. M. Kuethe^[31] 建立了圆球临界 Reynolds 数与平均纵向脉动的联系(图 8.10),并且发现这两个量满足单一的函数关系。在自由飞行中测量的圆球临界 Reynolds 数 $R_{crit} = 3.85 \times 10^5$, 相应于趋于零的小湍流度, $T \rightarrow 0$ 。

除了圆球之外,其他形状的物体也显示了湍流度对阻力的影响。这已为垂直于来流的平板的测量结果所证实, G. B. Schubauer 和 H. L. Dryden^[49] 完成了这些测量。

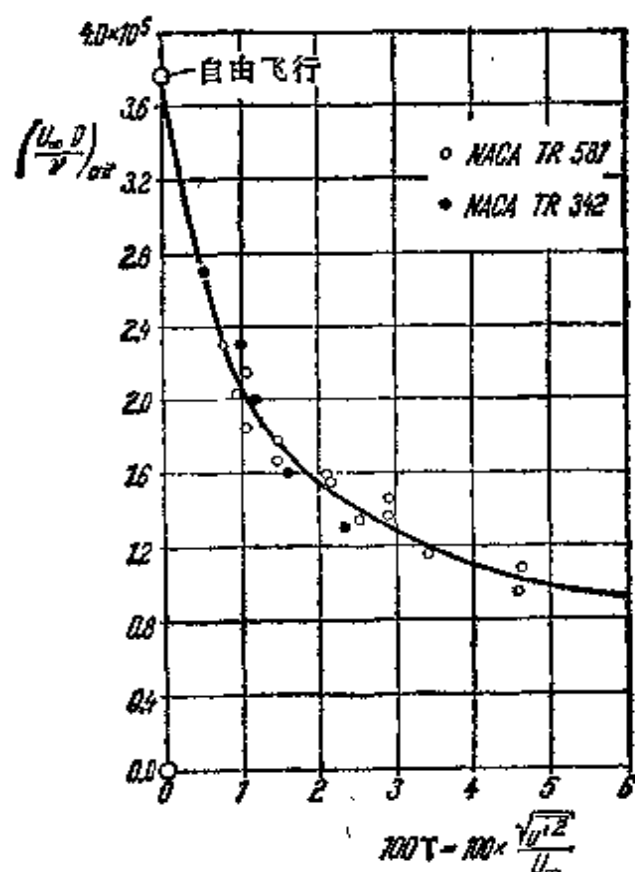


图 8.10 圆球临界 Reynolds 数与风洞湍流度的关系,根据 H. L. Dryden 和 A. M. Kuethe^[8,9]

1) 圆球前驻点和后部一点的压力差 $\Delta p = 1.22q$ 对应于约定值 $c_D = 0.3$, 其中 q 表示来流的动压,

G. I. Taylor^[53]和H. L. Dryden^[11]所进行的详细研究得出如下结论: 只确定速度分量的脉动值还不足以描述流动中的阻力, 因为阻力还受湍流结构的影响。在 G. I. Taylor 发展的湍流理论的基础上, 他提出圆球临界 Reynolds 数依赖于参数

$$\frac{\sqrt{u'^2}}{U_\infty} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/5},$$

其中 L 是湍流尺度, 即式 (18.14) 定义的相关函数的积分, 而 D 是圆球直径。H. U. Meier 等^[36b]研究了在低湍流度下湍流尺度 L 对湍流边界层的影响。当湍流尺度达到边界层厚度的量级时, 他们得到了最大的壁面切应力值。

风洞中的湍流尺度 L 是由阻尼网的网眼和导流片的间距决定的。由于小涡比大涡耗散能量快, 所以离开阻尼网后, 湍流尺度 L 的平均值是增加的。现在有许多关于阻尼网后面湍流发展的理论和实验研究, 在这方面可以参阅 G. K. Batchelor^[2], S. Corrsin^[7], G. Charney^[5], H. L. Dryden^[12], G. D. Huffman^[22] 和 J. E. Green^[19], Th. von Kármán^[23], C. C. Lin^[35,36], G. I. Taylor^[53], 以及 W. Tollmien^[60,61] 的著作。

第十九章 湍流计算的理论假设

a. 基本方程

由于湍流性质极其复杂的，很难说将来的科学研究一定能对湍流的机制获得彻底的了解。实际上感兴趣的主要变量是平均速度，但是目前还没有合理的理论，使我们能够通过计算来确定它们。为此，曾做出许多努力，想借助于半经验假设来建立研究湍流运动的数学基础。过去提出的那些经验假设，已经发展成比较完整的理论，但是其中没有一种能成功地、完整地分析过哪怕是一种情形的湍流。因此，在原有假设的基础上，必须补充一些随情形而定的附加假设，另外还必须通过实验导出某些函数形式，至少是某些数值。强调这种湍流经验理论的目的，在于根据实验测量结果归纳出至今还缺少的基本物理思想。

湍流混合运动不仅能引起动量交换，而且在温度和浓度分布不均匀的流场内还增加了传热和传质。迄今提出的计算湍流速度、温度和浓度场的方法都是建立在经验假设基础上的，这些经验假设试图建立混合运动产生的 Reynolds 应力与速度分量平均值之间的关系，以及关于传热和传质的适当假设。除非事先引进这一类假设，否则平均运动的动量方程(18.8)，以及温度的微分方程(在第十八章中未引用)，都不能得出适合积分的形式。

J. Boussinesq^[7, a)] 第一个研究了上面所叙述的问题。类比于层流 Stokes 定律

$$\tau_t = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

中的粘性系数，他通过设

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = A_r \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (19.1)$$

引进了湍流 Reynolds 应力的混合系数 A_r 。

湍流混合系数 A_t 对应于层流中的粘性系数 μ , 所以常称为“表观”或“有效”粘性系数(或湍流粘性系数)。

式(19.1)的假设有很大的缺点, 即 A_t 和 μ 不同, 湍流粘性系数 A_t 不是流体的性质, 而是依赖于平均速度 \bar{u} 。如果注意到湍流中的粘性力近似地正比于平均速度的平方, 而不像层流那样正比于平均速度的一次方, 就可以认识这一点。根据式(19.1), 这意味着 A_t 近似地正比于平均速度的一次方。

通常, 人们使用类比于运动粘性系数 $\nu = \mu/\rho$ 的表观(有效或湍流)运动粘性系数 $\epsilon_t = A_t/\rho$ 。如果这样做, 则切应力的公式可以重新写为

$$\begin{aligned} \tau_t &= \rho \cdot \nu \frac{d\bar{u}}{dy} \\ \text{和} \quad \tau_t &= \rho \cdot \epsilon_t \frac{d\bar{u}}{dy}. \end{aligned} \quad (19.2)$$

现在可以把边界层简化引进平均流动的 Navier-Stokes 方程(18.9)。就速度边界层而言, 这些简化类似于第七章 a 关于层流边界层所讨论的那些考虑。在二维、不可压、湍流情形下, 考虑到式(19.1), 我们得到下述微分方程组:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (19.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (19.3b)$$

它们应该和式(18.12)和(18.13)相对应。上面这组方程和层流的式(7.10)及(7.11)相似, 而且速度分量的边界条件也和层流情形的式(7.12)相同。

b. Prandtl 混合长度理论

如果对 A_t 与速度的依赖关系一无所知, 就不能利用式(19.1)和(19.2)的假设来计算实际例子。为了发展上面(Boussinesq 首先提出)的方法, 必须找到湍流粘性系数与平均速度的经验关系。

本节我们只限于讨论不可压缩的速度场,因为它不依赖于温度场。在第二十三章将详细讨论可压缩流场和温度场的计算,特别是湍流传热率的计算。

1925年 L. Prandtl^[22] 沿着这个方向取得了重大的进展。在推导他的假设时,我们将借助于最简单的平行流动的情形,其中速度只随流线的不同而变化。设流场的主要方向平行于 x 轴,则有

$$\bar{u} = \bar{u}(y); \quad \bar{v} = 0; \quad \bar{w} = 0.$$

上面这种类型的流动可以在矩形管道内实现,图 18.3 和图 18.4 给出了其中脉动速度分量的测量结果。在目前情形下,只有切应力

$$\tau'_{xy} = \tau_x = -\rho \overline{u'v'} = A_x \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (19.4)$$

不为零*。

按照 Prandtl 的思想,我们现在可以设想这种简化的流动机制如下:在湍流中当流体沿着壁面流动时,流体质点聚合成一些作整体运动的流体团,每个流体团在沿纵向和横向的某个给定的移动长度内粘合在一起,并保持其 x 方向的动量不变。现在假设,例如一个来自 $(y_1 - l)$ 层且速度为 $\bar{u}(y_1 - l)$ 的流体团,沿横向移动一个距离 l (图 9.1)。这个距离 l 称作 **Prandtl 混合长度**¹⁾。

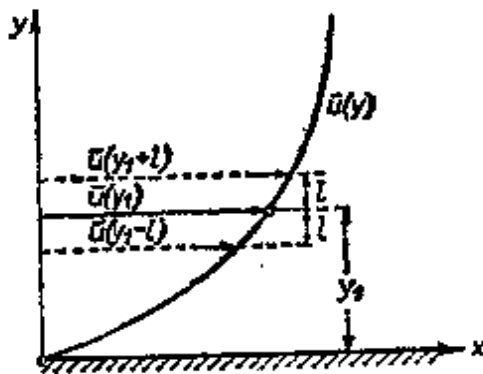


图 19.1 混合长度概念的说明

由于流体团保持其原有的动量,它在新的高度 y_1 层上的速度小于当地速度。其速度差是

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \\ &\approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1. \end{aligned}$$

最后这个表达式是通过将函数 $\bar{u}(y_1 - l)$ 展开成 Taylor 级数并略去所有高次项得到的。在这个横向运动中,我们有 $v' > 0$ 。类

* 这句话应该写为,在 x 方向的运动方程中,只有切应力 τ'_x 的贡献不为零。——中译者注

1) 混合长度这个术语也已用过了。

似地,由 $y_1 + l$ 层到达 y_1 的流体团具有的速度超过周围流体的速度,其速度差是

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1.$$

这里 $v' < 0$. 横向运动引起的速度差可以看成是 y_1 层的脉动速度分量. 所以我们可以计算出这个脉动绝对值的时间平均值, 并且得到

$$|\bar{u}'| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right|. \quad (19.5)$$

式(19.5)可以得出关于混合长度的如下解释. 混合长度是这样一个距离: 流体团带着原有的速度沿横向移动, 并达到其速度与新层速度之差等于湍流中平均横向脉动值时所走过的横向距离. 至于流体团沿横向运动时, 是保持其原来那层的速度呢? 还是部分地取所穿过那层的速度并沿横向继续运动呢? 这还是一个有待解决的问题. Prandtl 混合长度的概念在某种意义上与气体分子运动论中的平均自由程相类似, 其主要差别在于, 后者处理分子的微观运动, 而现在这个概念处理由流体质点组成的大流体团的宏观运动¹⁾.

可以想象横向速度脉动是这样引起的: 考察两个在 y_1 层相遇的流体团, 来自 $(y_1 - l)$ 层的较慢的流体团在前面, 来自 $(y_1 + l)$ 层的在后面. 在这种情形下, 两个流体团将以速度 $2u'$ 相碰撞, 然后向两侧散开. 这等价于在垂直 y_1 层的两个方向上存在横向速度分量. 如果两个流体团以相反的次序出现, 它们就以速度 $2u'$

1) 与式(19.5)相类比, 对于纵向湍流分量 u' 随时间的变化, 可以写成

$$u' = l' \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.5a)$$

这里 l' 表示长度, 它随时间变化并且可以取正值或负值. 所以, 由式(19.2) 我们得到

$$\tau_t = -\rho \overline{v'l'} \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \varepsilon_t \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (19.5b)$$

而有效运动粘性系数变为

$$\varepsilon_t = -\overline{v'l'}. \quad (19.5c)$$

离开,它们之间形成的真空将由周围的流体来补充,这就又在 y_1 层的两个方向上引起了横向速度分量,以上的讨论意味着横向分量 v' 具有和 u' 同样的量级,并设

$$|v'| = \text{常数} \cdot |u'| = \text{常数} \cdot l \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.6)$$

为了求出式(19.1)的切应力表达式,必须更深入地研究平均值 $\overline{u'v'}$. 由上面的叙述可以得出,到达 y_1 层具有正 v' 值(图 19.1 中由下向上)的流体团“绝大多数”引起负的 u' , 所以它们的乘积 $u'v'$ 是负的. 带有负 v' 值(图 19.1 中由上向下)的流体团“绝大多数”和正的 u' 相联系,而乘积 $u'v'$ 也是负的. 这里的定性词“绝大多数”,表示不排除会出现 u' 的符号和上述情形相反的流体团,但这是很少出现的. 因此,时间平均值 $\overline{u'v'}$ 不为零,而且是负值. 所以我们取

$$\overline{u'v'} = -c |u'| \cdot |v'|. \quad (19.6a)$$

其中 $0 < c < 1$ ($c \neq 0$). 对于数值系数 c 我们一无所知,但是大体看来,它和式(18.12)定义的相关系数是一样的. 图 18.4 画出的实验结果可以对其性质给出一些概念. 合并式(19.5)和(19.6),我们可以得到

$$\overline{u'v'} = -\text{常数} \cdot \rho \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

应该注意,上式中的常数与式(19.6)中的不同,因为根据式(19.6a),这里的常数还含有一个系数 c . 现在这个常数可以包含在未知的混合长度内,所以可以写出

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (19.6b)$$

因此,式(19.1)表示的切应力可以写为

$$\tau_x = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (19.6c)$$

考虑到 τ_x 的符号必须随 $d\bar{u}/dy$ 的符号而改变,所以更正确的写法是

$$\tau_x = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.7)$$

这就是 **Prandtl 混合长度假设**。后面将会看到，它在湍流计算中是非常有用的。

将式(19.7)与(19.1)的 Boussinesq 假设进行比较，可以得到下面关于有效粘性系数的表达式：

$$A_r = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (19.8a)$$

和式(19.2)中的有效运动粘性系数的表达式：

$$\varepsilon_r = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (19.8b)$$

由实验事实知道，湍流阻力大体上与速度的平方成正比，如果假设混合长度不依赖于速度值，由式(19.7)也可以得到这一结果。和 Stokes 定律中的粘性系数不同，混合长度不是流体的性质，但是它起码是位置的函数。

在许多情形下，可以建立混合长度 l 与流动各自的特征长度之间的简单关系。例如，在沿光滑壁面的流动中，由于壁面的存在而使横向流动受阻，所以在壁面上 l 必须等于零。在沿粗糙壁面的流动中，接近壁面的混合长度的大小必须趋向和固体突起物同样的量级。

应用 Prandtl 公式(19.7)已经成功地研究了**壁面湍流**(管、槽、板、边界层)和所谓的**自由湍流**问题。后面这个术语指的是没有固体壁面的流动，例如射流与周围静止空气的混合。这种应用的例子将在第二十章、第二十一章和第二十四章中给出。R. A. M. Galbraith 等^[13a]为混合长度概念的实用性提供了实验上的支持。

c. 关于湍流切应力的另外一些假设

Prandtl 的湍流切应力公式(19.7)仍不能令人满意，因为在 $d\bar{u}/dy$ 等于零的那些点上，即在速度有最大值和最小值的那些点上，式(19.8b)的表观运动粘性系数 ε 等于零。当然情形不会是这样，因为在最大速度点上(管道的中心线)，湍流混合并未消失。这个观点已为 Reichardt 的湍流脉动测量所证实(图 18.3)，这些测

量表明在管道的中心线上纵向和横向脉动都不为零。

为了克服这些困难，L. Prandtl^[23] 建立了一个相当简单的表观运动粘性系数公式。它只适用于自由湍流的情形，而且是根据 H. Reichardt^[24] 对自由湍流的大量测量数据得出的。在建立这个新假设时，L. Prandtl 假设在湍流混合中沿横向运动的流体团的尺度和混合区的宽度具有相同量级。这使我们想到，以前的假设意味着，比起流动区域的横向尺度来流体团的尺度是小量。现在，表观运动粘性系数 ϵ ，由时间平均速度的最大差值和正比于混合区宽度 b 的一个长度的乘积组成。因此

$$\epsilon_r = \kappa_1 b (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}). \quad (19.9)^{11}$$

这里 κ_1 表示由实验确定的无量纲常数。由式 (19.9) 可以得出，在每个横截面的整个宽度上， ϵ 都保持常数，而以前的假设 (19.7b) 意味着，即使假设混合长度不变， ϵ 也是变化的。由式 (19.9) 和 (19.1) 可以看出，湍流切应力由下式给出：

$$\tau_t = \rho \kappa_1 b (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.10)$$

在第二十四章中也给出应用这个假设的例子。

根据 T. Cebeci 和 A. M. O. Smith^[11a] 的分析，将式 (19.7) 的混合长度方法和式 (19.10) 的这种假设结合起来所得到的一种计算方法，已经受了时间的考验。边界层的内层部分 ($0 \leq y \leq y_k$) 用 van Driest^[12] 的混合长度公式

$$l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu A}\right) \right] \quad (19.11)$$

描述 (另外参看式 (20.15b))。在 $0 \leq y \leq y_k$ 区域内使用式 (19.8)，可以得到

$$\epsilon_t = \left\{ \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu A}\right) \right] \right\}^2 \cdot \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (19.12)$$

1) 将这个公式与式 (19.5c) 比较可以看出，根据现在这个假设，横向脉动 v' 正比于 $\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}$ ，而混合长度 l' 正比于宽度 b 。H. Reichardt^[24] 建立了与式 (19.9) 非常类似的另一种关于表观粘性系数的假设。

至于边界层外层,建议使用式(19.9)的假设. 在这个区域内,假设

$$\varepsilon_s = \kappa_2 U \delta_1 \gamma, \quad (19.13)$$

其中本来是常数的 ε_s 现在乘上了间歇因子 γ . 依照 P. Klebanoff 的测量结果(图 18.6),间歇因子可以用下面的关系来近似:

$$\gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}. \quad (19.14)$$

这些常数由 $\kappa = 0.4$, $A = 26$ 和 $\kappa_2 = 0.017$ 给出. 划分式(19.12)和式(19.13)有效范围的 y_k 值,是由在那里两个表观运动粘性系数值必须相等的要求得出的. 于是我们设

$$\text{在 } y = y_k \text{ 处, } \varepsilon_i = \varepsilon_s. \quad (19.15)$$

还可参阅文献[9b].

G. I. Taylor^[22] 基于他的涡量输运理论得到了一个类似于式(19.7)的结果. 在 Prandtl 理论中,作了流体团在横向运动过程中平均速度 \bar{u} 保持不变的假设; Taylor 理论则用旋度(即 $d\bar{u}/dy$) 保持不变来代替这个假设. 由此得到下面的公式:

$$\tau' = \frac{1}{2} \rho l_w^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (19.15a)$$

它和式(19.7)只差一个系数 1/2. 这就是说, G. I. Taylor 涡量输运理论的混合长度大于 L. Prandtl 动量输运理论的混合长度, 它们相差一个因子 $\sqrt{2}$. 因此 $l_w = \sqrt{2} l$. G. I. Taylor 在他研究的基础上断定, 在圆柱棒后面的混合区内将按照同样的规律产生温度差扩散和涡量扩散. 这个结论基本上与实验相符, 这可以用下述事实来解释: 在这里, 涡的轴线主要是按垂直于主流并垂直于速度梯度的方向排列的. 与此相反, 在非常靠近壁面的流场内, 则以轴线平行于流动方向的涡为主. 由于这个原因, 混合区内的温度场完全类似于速度场.

d. von Kármán 相似性假设

若有一个能使我们确定混合长度对空间坐标依赖关系的法则, 那是很方便的. Th. von Kármán^[27] 曾试图建立这样一种法则, 他假设湍流脉动在流场的所有点上都是相似的(相似律), 即

它们在各点上只是时间和长度的尺度因子不同。用湍流切应力可以构成一个表征湍流脉动运动的速度，借助于式(19.1)，该速度定义如下：

$$v_* = \sqrt{\frac{|\tau_t|}{\rho}} = \sqrt{|\overline{u'v'}|}. \quad (19.16)$$

v_* 称为**摩擦速度**，它是湍流涡流强度的度量，也是存在于 x 和 y 方向脉动分量之间的相关性的度量。对于目前讨论的相似律，我们设想一个沿 x 方向的二维平均流动，即 $\bar{u} = \bar{u}(y)$ 和 $\bar{v} = 0$ (平行流)，以及一个也是二维的附加运动。在这种情形下，可以证明，下面这个法则：

$$l \sim \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \quad (19.17)$$

是保证该相似性假设和涡量输运方程(4.10)之间相容的必要条件。

引进一个经验的无量纲常数 κ ，von Kármán 做了混合长度满足下式的假设：

$$l = \kappa \left| \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \right|. \quad (19.18)$$

按照上面的假设，混合长度 l 与速度的大小无关，它只是速度分布的函数。如前面所要求的那样，混合长度仅仅是位置的函数，而式(19.18)中的常数只能由经验确定。只要满足前面的假设(平行流)， κ 就是一个普适无量纲常数，对所有湍流都有相同的值。

最后，将式(19.18)代入式(19.6c)，可以得到湍流切应力为

$$\tau_t = \rho \kappa^2 \frac{(d\bar{u}/dy)^3}{(d^2\bar{u}/dy^2)^2}. \quad (19.19)$$

A. Betz^[4] 对式(19.18)给出了非常清晰的推导。后来，von Kármán 假设还被推广到可压缩流动^[20a]，参阅 C. C. Lin(林家翘)等人的文章，以及 G. Hamel^[9] 和 O. Bjorgum^[6] 所做的观测报告。

e. 普适的速度分布律

无论是 von Kármán 湍流摩擦定律式(19.19)，还是 Prandtl

定律式(19.7), 都很容易用于求解矩形管道内速度分布的问题. 由于这种普适的速度分布律对于以后各章的讨论具有基本的重要性, 还由于它也可以用于圆形管道, 所以我们要用一点篇幅进行推导.

假设管道的宽度为 $2h$, x 轴沿管道的中心线, y 坐标从中心线度量. 我们假设沿轴线的压力梯度不变, 设 $\partial\bar{p}/\partial x = C^D$. 由于 $-\partial\bar{p}/\partial x + \partial\tau/\partial y = 0$, 所以切应力是管道宽度的线性函数, 即

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{h}, \quad (19.20)$$

其中 τ_0 表示壁面上的切应力.

1. von Kármán 速度分布律 将 von Kármán 相似律式(19.19)代入式(19.20), 可以得到

$$\frac{\tau_0}{\rho} \frac{y}{h} = \kappa^2 \frac{(du/dy)^2}{(d^2u/dy^2)^2}.$$

积分两次, 并利用 $y = 0$ 处 $u = u_{\max}$ 的条件确定出积分常数, 我们有

$$u = u_{\max} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right] + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\}.$$

引进壁面上的摩擦速度 $v_{*0} = \sqrt{\tau_0/\rho}$, 可以把上式写成无量纲形式:

$$\frac{u_{\max} - u}{v_{*0}} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right] + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\}, \quad (19.21)$$

($y =$ 离开中心线的距离). 这就是 von Kármán^[17] 导出的普适速度分布律的形式. 图 19.2 中曲线 (2) 画出了这个分布律. 计算的速度分布曲线在管道中心线附近有扭曲, 因为按照式(19.18), 在中心线上混合长度等于零, 在这里不能满足相似性的要求. 在 $y = h$ 的壁面上, 式(19.21)得出的速度无限大, 这是因

1) 从这以后, 我们将略去符号上表示时间平均值的一杠, 因为不再有可能和依赖于时间的量相混淆.

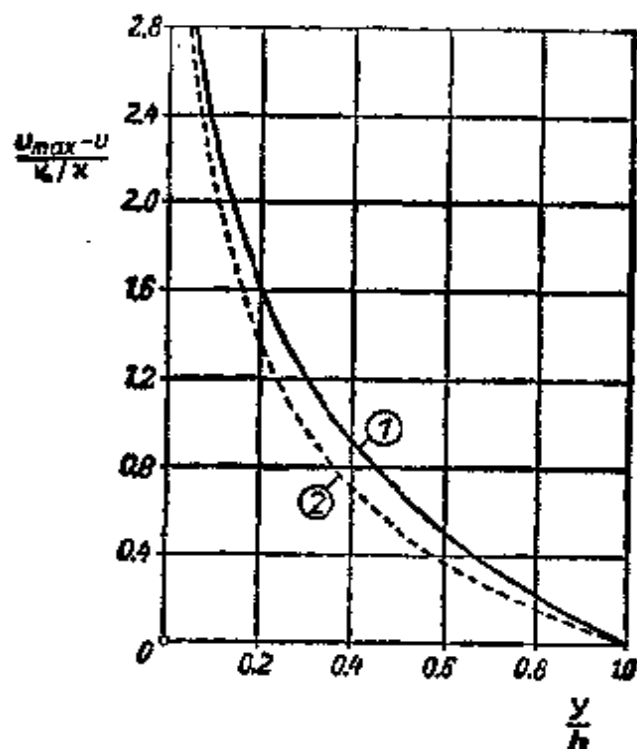


图 19.2 湍流管道内的普适速度分布律，根据 von Kármán 和 Prandtl^[17, 21]。曲线(1) 相应于式(19.28)；曲线(2) 相应于式(19.21)。
 y ——离开壁面的距离

为和湍流摩擦力相比，我们已经略去了分子摩擦力。这个假设在壁面附近失效，那里湍流边界层已过渡到层流次层，因此，我们在后面要给出另外一些考虑。在下面的讨论中，我们将把中心线附近和壁面附近的小区域排除在外。特别值得注意的是，式(19.21)给出的普适速度分布律，既不明显包含粗糙度，也不明显包含 Reynolds 数¹⁾。式(19.21)的速度分布律又称为**速度亏损律**，它可以用文字表述如下：如果将速度差 $u_{\max} - u$ 用壁面摩擦速度 v_{*0} 无量纲化，并且通过 y/h 画出来，则可以使矩形管道的速度分布曲线相重合。这个结果也适用于圆管，它将在第二十章 c 中与实验测量结果进行比较。

2. Prandtl 速度分布律 一个类似的速度分布律也可以由湍流切应力的 Prandtl 假设式(19.7)导出。在推导有关表达式的

1) 当然，在壁面切应力 τ_0 中隐含着它们的影响。

过程中，我们将对在紧靠壁面的邻域内占优势并在前面的讨论中被排除的条件有更多的了解。我们将考察沿光滑平壁的湍流，并用符号 y 表示离开壁面的距离，用 $u(y)$ 表示速度。在壁面附近，假设混合长度和壁面距离成正比，因此

$$l = \kappa y, \quad (19.22)$$

这里 κ 表示必须根据实验导出的无量纲常数。这个假设是合理的，因为壁面上的湍流切应力由于脉动消失而等于零。因此，根据 Prandtl 假设，湍流切应力为

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (19.23)$$

这时 Prandtl 引进了一个影响深远的附加假设，即切应力保持不变，就是说 $\tau = \tau_0$ ，其中 τ_0 表示壁面切应力。再次引入摩擦速度

$$v_{*0} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (19.24)$$

我们得到

$$v_{*0}^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (19.25)$$

或

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_{*0}}{\kappa y}. \quad (19.26)$$

经过积分，我们有

$$u = \frac{v_{*0}}{\kappa} \ln y + C. \quad (19.27)$$

这里积分常数 C 必须由壁面条件来确定，并且用来使湍流速度分布衔接到层流次层的速度分布。然而，即使不确定 C ，也可以由式 (19.27) 导出类似于式 (19.21) 的定律。尽管假设了 $\tau = \text{常数}$ ，式 (19.27) 只在壁面附近有效，但我们还是试图把该式用到整个区域，即一直用到 $y = h$ 。由于在 $y = h$ 处 $u = u_{\max}$ ，所以得到

$$u_{\max} = \frac{v_{*0}}{\kappa} \ln h + C,$$

因此，构成速度差后，可以得到

$$\frac{u_{\max} - u}{v_{*0}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{y} \quad (y = \text{离开壁面的距离}). \quad (19.28)$$

Prandtl 的这个普适速度亏损律在图 19.2 中用曲线 (1) 画出。在上面的讨论中，我们根据 Prandtl 摩擦定律成功地导出了一个普适的速度分布律，它完全类似于根据 Von Kármán 相似律得出的式 (19.21) 的速度律。它们唯一的区别，是分别出现在式 (19.21) 和 (19.28) 右边的 y/h 的函数形式不同。如果仔细地考虑切应力假设方面的差别，这也是可以理解的。von Kármán 假设了一个线性的切应力分布，混合长度是 $l \sim u'/u''$ 。另一方面，Prandtl 假设了一个不变的切应力和 $l \sim y$ 。图 19.2 有这两个速度律之间的比较。与实验结果进一步的比较将放在第二十章。

顺便值得指出的是，根据速度亏损律 (19.27)，并用 von Kármán 混合长度公式，可以得出简单的结果，即 $l = \kappa y$ 。读者很容易证明这一点。最后应该指出，上面的讨论证明了式 (19.22) 和 (19.18) 中的系数 κ 是一样的。

现在我们返回到确定式 (19.27) 中积分常数 C 的问题。如前所述，这个常数应该根据湍流速度分布在邻近壁面附近必须和层流速度分布相连接的条件来确定，那里层流切应力和湍流切应力有相同的量级。我们根据离开壁面为 y_0 的距离上 $u = 0$ 的条件来确定积分常数 C 。用这种方法得到

$$u = \frac{v_{*0}}{\kappa} (\ln y - \ln y_0). \quad (19.29)$$

距离 y_0 具有层流次层厚度的量级。利用量纲分析可以得出，这个距离 y_0 正比于运动粘性系数 ν 与摩擦速度 v_{*0} 之比 ν/v_{*0} ，因为它的量纲是长度的量纲。于是可以设

$$y_0 = \beta \frac{\nu}{v_{*0}} \quad (19.30)$$

其中 β 表示一个无量纲常数。把 β 代入式 (19.29)，我们得到

$$\frac{u}{v_{*0}} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y v_{*0}}{\nu} - \ln \beta \right). \quad (19.29a)$$

这是无量纲的对数普适速度分布律，而且可以断言：以摩擦速度 v_{*0} 为参考的无量纲速度，是无量纲壁面距离 $y v_{*0} / \nu$ 的函数。后者是一种根据壁面距离 y 和壁面摩擦速度组成的 Reynolds 数。式(19.29a)包含两个经验常数 κ 和 β 。依照上述论证可以期望，常数 κ 不依赖于壁面的性质（不管光滑还是粗糙），而且它还是一个湍流的普适常数。下一章中将要详细讨论的实验结果给出 $\kappa = 0.4$ 。第二个常数 β 依赖于壁表面的性质，有关的数值将在第二十章给出。

引进缩写符号

$$\frac{u}{v_{*0}} = \phi, \quad (19.31)$$

$$\frac{y v_{*0}}{\nu} = \eta, \quad (19.32)$$

可以把式(19.29a)缩写成

$$\phi(\eta) = A_1 \ln \eta + D_1 \quad (19.33)$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{\kappa} = 2.5; \quad D_1 = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta. \quad (19.34)$$

正如在下一章将会看到的，现在对平直壁面(矩形管道)导出的普适速度分布律，即式(19.33)对于通过圆管的流动也具有基本的重要性。现在我们预先说明，它与实验结果吻合得很好。

在结束本章讨论的时候，值得再次强调的是，用式(19.21)和(19.27)表示的两个普适速度分布律是在湍流情形下得出的，它们撇开壁面附近很薄的次层，仅考虑湍流切应力。同时应该了解，这样的假设只有在大 Reynolds 数下才能得到满足。因此，必须把这种速度分布律，特别是式(19.33)，看成是适用于很大 Reynolds 数的渐近的速度律。对于较小的 Reynolds 数，当在很薄的次层外面层流摩擦力产生一定影响时，实验得到如下的幂律形式：

$$\phi(\eta) = C \eta^n \quad (19.35)$$

或

$$\frac{u}{u_{*0}} = C \left(\frac{y u_{*0}}{\nu} \right)^n,$$

其中指数 n 近似等于 $\frac{1}{7}$, 但是随 Reynolds 数稍有变化, 这点在下一章还要继续讨论。

两个相对运动的平行平板之间的所谓 Couette 流动的情形 (图 1.1), 是流动中切应力保持常数的一个非常简单的例子。其切应力在层流和湍流情形下都严格保持常数, 且等于壁面切应力 τ_0 。H. Reichardt^[23,26] 对这种情形进行过广泛的研究。由图 19.3 可以推断出他的某些结果, 该图画出了几个在 Couette 流动中观测到的速度剖面。只要 Reynolds 数 $R < 1500$, 流动就是层流, 而且速度分布在很好的近似程度上是线性的。当 Reynolds 数 R 超过

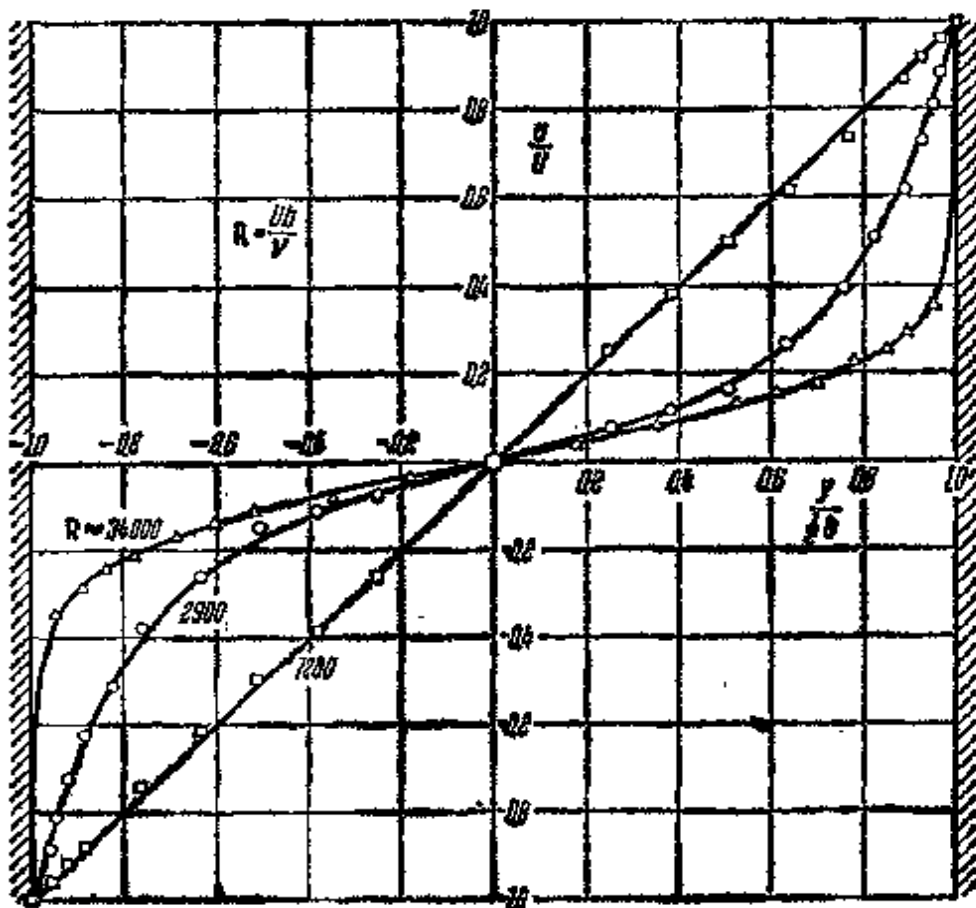


图19.3 反方向运动的两个平行平板之间平行 Couette 流动的速度剖面, 根据 H. Reichardt^[23,26] $R = 1200$ 时流动是层流; $R = 2900$ 和 3400 时流动是湍流

1500 时, 流动是湍流。湍流速度剖面在中心线附近非常平坦, 而在壁面附近非常陡。如果记得湍流中的切应力是由层流部分

$$\tau_l = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

和湍流混合引起的湍流部分

$$\tau_t = A_r \left(\frac{du}{dy} \right)$$

组成的, 则这种速度剖面正是在湍流中所期望的。因此

$$\tau = \tau_0 = (\mu + A_r) \frac{du}{dy},$$

其中 A_r 表示式 (19.1) 定义的混合系数。用这种方法证明了速度梯度与 $1/(\mu + A_r)$ 成正比。由于 A_r 从壁面处的零值变到管道中心的最大值, 所以如图 19.3 中的图线所证实的, 速度剖面在壁面附近必然很陡, 而在中心部分很平坦。湍流混合系数随着 Reynolds 数增加而增加, 相应地速度剖面的曲率变得更明显。请比较 A. A. Szezi^[31a] 的文章。

f. 理论假设的进一步发展

以前面讨论的和下面各章中具体应用的各种半经验假为基础的湍流计算还是不能令人满意的, 因为还不能用同一湍流摩擦力假设来分析不同种类的湍流问题。例如, 在细眼纱网后面的所谓各向同性湍流的情形下, 由于主流的速度梯度处处为零, 使得 Prandtl 的混合长度假设式 (19.7) 完全失效。L. Prandtl^[32] 在试图推导普遍适用的方程组 (壁面湍流、自由湍流、各向同性湍流) 时, 大大扩展了本章 b 和 c 讨论过的关于计算发展的湍流的假设。

能量方程: L. Prandtl 将他的新发展建立在考虑湍流脉动动能 $E = \frac{1}{2} \rho (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ 的基础上, 并对于随着主流运动的质点, 计算了附加运动动能随时间的变化 DE/Dt 。它由三项组成: 在流体团运动中由于内摩擦引起的能量减小; 由主流向附加运动的能量输运 (这项正比于 $(dU/dy)^2$); 最后, 从较强湍流区向较弱湍流区的动能输运。这三项之间的能量平衡关系导出了湍流附加运动的能量微分方程, 它必须加到平均运动的微分方程组中, 其形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} &= \frac{\partial E}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial E}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial E}{\partial y} \\ &= - \underbrace{\frac{E^{3/2}}{L}}_{\text{耗散}} + \underbrace{\frac{\tau_t}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{生成}} + \underbrace{\frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j k_g E^{1/2} L \frac{\partial E}{\partial y} \right)}_{\text{扩散}}. \end{aligned} \quad (19.36)$$

其中, 对于二维平均流动, $j = 0$; 对于轴对称流动, $j = 1$ (y 是离开轴线的径向距离). L. Prandtl 把上面这个方程称为第一基本方程. 第二个方程把湍流切应力和平均流动的速度梯度联系起来, 它类似于原来的混合公式 (19.2), 但是也含有湍流附加运动的能量, 即

$$\tau_t = \rho k E^{1/2} L \partial \bar{u} / \partial y. \quad (19.37)$$

式(19.36)和(19.37)这两个方程包含三个自由常数 c , k , k_e , 它们必须借助实验结果才能确定. 长度尺度 L 本质上是相当于式 (19.7) 中混合长度的局部函数, 但是, 这个量的定义也可以建立在两点速度分量的相关函数的积分上(参阅 J. C. Rotta^[22], 第 177 页 ff).

如果湍流结构沿流线不变, 如壁面对数律的情形, 而且假设没有湍流能量扩散, 就能使式(19.36)右边的头两项相等, 同时由于式(19.37), 还可以证明

$$E = \frac{k}{c} L^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (19.38)$$

如果设 $\rho E = |\tau_t| k / c$, 我们可以看出, 式(19.38)可以化为混合长度公式 (19.7). 其中 $l = L$. 最后, 如果使式(19.37)和式(19.7)相等, 可以导出

$$c = k^2. \quad (19.39)$$

上面的关系可以作为 k 的定义, 于是只剩下了两个可以调节的常数, 即 c 和 k_e . 各种研究表明, 似乎 $c = 0.165$ 和 $k_e = 0.6$ 是合适的数值. 这样, 方程(19.38)和(19.39)最后给出

$$\tau_t = c^{1/2} \rho E \approx 0.3 \rho E. \quad (19.40)$$

在均匀湍流情形下, 例如纱网后面的湍流, 上面三个湍流能量项中只出现第一项, 因此纱网后面的湍流沿流动方向是衰减的. 在管道流动的情形下, 所有这三项都会出现, 但是第三项(从较强湍流区到较弱湍流区的动能运输)只在壁面附近才是重要的, 在那里, 由于壁面切应力作用, 强烈地产生新的湍流, 所以存在一个特别高的湍流区(参看图 18.3), 而在中心附近不会产生湍流, 所以那里流动的脉动很弱. G. S. Glushko^[13] 推广了上面的方法, 以便包括 Reynolds 数的影响, 并对平板湍流边界层进行了计算. 这项计算包括连接粘性次层的从层流向湍流的过渡区. I. E. Beckwith 和 D. M. Bushnell^[23] 重复了同样的计算, 并把它们的适用范围推广到变压力梯度的边界层. 他们研究了这种修正对经验常数的影响.

Bradshaw 方法: 在 P. Bradshaw, D. H. Ferriss 和 N. P. Atwell^[10] 提出的方法中(主要是为计算湍流边界层而设计的), 式(19.37)的湍流应力表达式换成了对湍流能量的线性依赖关系式

$$\tau_t = 2a_1 \rho E, \quad (19.41)$$

这相应于式(19.40), 其中 $a_1 = 0.15$. 这样, 能量方程(19.36)就已经转换为湍流切应力的微分方程. 在二维平均流动情形下, 可以得到

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_t}{2a_1 \rho} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_t}{2a_1 \rho} \right) \\ = - \frac{(\tau_t / \rho)^{3/2}}{L} + \frac{\tau_t}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \left(\frac{\tau_{\max}}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\tau_t}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (19.42)$$

假设长度尺度 L 是 y/δ 的函数。这样，

$$L = \delta f_1(y/\delta). \quad (19.43)$$

和 Prandtl 把湍流能量扩散看作是能量从高位区向低位区的迁移不同，Bradshaw 及其合作者们假设，湍流能量的扩散通量正比于 $(\tau_{\max})^{1/2} \tau$ 。这里 τ_{\max} 表示切应力在 $0.25\delta \leq y \leq \delta$ 范围内的最大值。式(19.42)中的函数 G 定义为

$$G = (\tau_{\max}/\rho U^2)^{1/2} f_2(y/\delta), \quad (19.44)$$

其中 f_2 是 y/δ 的第二个函数。图 19.4 中画出了这两个函数。Bradshaw 的方法适合于光滑和粗糙表面的湍流边界层计算，它的适用性已经推广到可压缩流动以及有抽吸和吹除的情形。

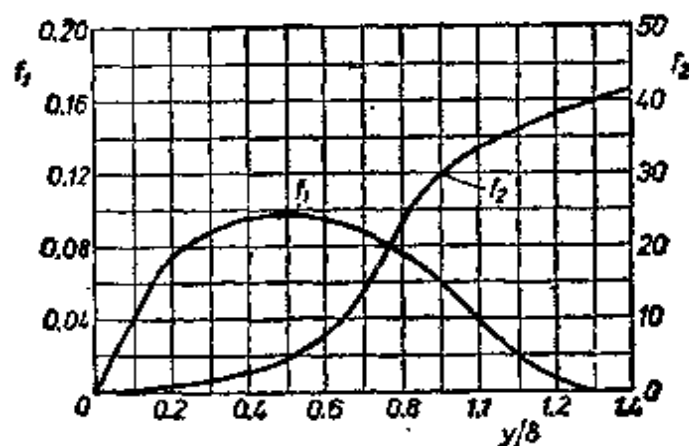


图 19.4 在 P. Bradshaw^[103] 湍流边界层计算方法中出现的经验函数 f_1 和 f_2 ，参看式(19.42)到(19.44)

关于长度尺度的微分方程：只有用处理式(19.7)中混合长度的同样方法，对长度尺度 L 作出某种说明，才能用微分方程(19.36)和(19.37)对规定了初始条件和边界条件的流场进行计算。因此，J. C. Rotta^[22, 29] 对式(19.36)和(19.37)补充了第三个用于计算 L 的方程。数值计算^[32a]表明，上述方程组不需要任何其他假设就可以得到与实验结果令人满意的一致。对于许多特殊的外形，包括槽流、管流、二维和轴对称射流，自由射流表面和二维尾迹等情形也是如此。最近时期，还提出了另外一些计算方法，它们大体上和这里所讨论的方法相类似。这个领域的新发展已经由 P. Bradshaw^[6a]，B. E. Launder 和 D. B. Spalding^[20]，J. C. Rotta^[30]，G. L. Mellor 和 H. J. Herring^[20b] 以及 W. C. Reynolds^[26a] 做出概述。

流线的曲率：湍流中的流线曲率意外地引起了湍流结构方面的很大变化。在大多数情形下，这种变化比起垂直于边界层的压力梯度的影响重要得多。在通常的翼型的情形下，对动量输运和传热的影响是明显的，在涡轮机叶片和压缩机叶片情形下，其影响特别大。P. Bradshaw^[11] 讨论了我们对于曲率效应方面的理解和我们通过计算掌握这种效应的能力这两方面的现状。

第二十章 管道湍流

a. 光滑管道的实验结果

由于管道湍流问题具有很重要的实际意义，因此过去曾对它进行了极为充分的研究^[24,31,48,49,59,61,62,71,711]。由此得到的结果不仅对于管流是重要的，而且还帮助我们扩充了关于一般湍流的基础知识。只有在详尽的管流实验的基础上，才能提出处理其他湍流问题的方法，例如沿平板或沿流线型物体流动。

当流体从一个大容器流进圆管时，在进口段的各个横截面上，速度分布随着离开进口的距离而改变。在靠近进口的各个截面上，速度分布几乎是均匀的。再往下游，速度分布由于摩擦力的影响而改变，直到在某个特定截面上达到充分形成的不再改变的速度剖面。第十一章 b 中描述了层流圆管进口段内速度剖面的变化（图 11.8）。进口段的长度近似等于 $l_1 = 0.03d \cdot R$ ，所以当 $R = 5000$ 到 10000 时，其长度在 150 到 300 倍圆管直径的范围内变化。湍流的进口段要比层流进口段短得多，根据 H. Kirsten^[33] 的测量，湍流进口段的长度为 50 到 100 倍直径，而 J. Nikuradse^[45] 确定出，在 25 倍到 40 倍直径的进口段之后，就已经存在充分形成的速度剖面了，读者还可参阅文献[75]。

下文中，我们主要讨论在圆截面直管中的充分发展的湍流问题。向外离开轴线的径向坐标用 y' 表示。我们将考察一个在充分发展的湍流中长度为 L 、半径为 y' 的流体柱体。这个流体柱体不受任何惯性力的作用，所以依照式 (1.9)，可以写出作用在周面的切应力 τ 与作用在柱体端面的压力差 $p_1 - p_2$ ²⁾ 之间的平衡条件，

1) 以下的叙述主要以 J. Nikuradse^[45,46] 报道的实验结果为基础。

2) 从这里开始，我们将略去表示时间平均的符号上的一杠，因为读者现在不会在和依赖于时间的量相混淆了（如在第 663 页已经声明的）。

其形式为

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{y'}{2}, \quad (20.1)$$

这个关系对层流和湍流同样适用。在目前的分析中， τ 表示层流和湍流切应力之和，所以横截面上的切应力分布是线性的，其最大值 τ_0 出现在壁面上，

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{R}{2}. \quad (20.2)$$

可见，通过测量沿圆管的压力梯度，可以直接确定壁面上的切应力 τ_0 。

在层流情形下，可以从理论上确定压力梯度与流量 $Q = \pi R^2 \bar{u}$ 之间的关系，其结果与实验测量相符合。在湍流情形下，这种关系只能靠经验得出¹⁾，因为到目前为止对湍流所进行的纯理论分析的尝试，哪怕只对于一种特殊情形也是完全失败的。这个关系通常是由所谓的摩擦律或阻力定律给出的。现有的文章包含有大量的管道摩擦律的经验公式，另外，那些比较老的公式常常是以依赖于各自单位制的形式给出的，而且不满足 Reynolds 相似律。为了利用无量纲变量，现在一般都使用无量纲阻力系数 λ ，并定义 λ 为(还可见式(5.10))

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2, \quad (20.3)$$

其中 $d = 2R$ 表示横截面的直径。比较式(20.2)和(20.3)，可以导出后面需要的如下关系：

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \lambda \rho \bar{u}^2. \quad (20.4)$$

1911年 H. Blasius^[9] 对当时已有的众多实验结果进行了认真的调查，并用 Reynolds 相似律按无量纲形式对它们进行了整理。最后，他建立了如下的经验公式：

1) 圆管流动的平均速度 \bar{u} 将定义为 $\bar{u} = Q/\pi R^2$ ，而 U 表示横截面上的最大速度。

$$\lambda = 0.3164 \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \right)^{-1/4} = 0.3164/R^{0.25}, \quad (20.5)$$

它适用于圆截面光滑管道的摩擦阻力,并称为 **Blasius 阻力公式**. 这里 $\bar{u}d/\nu=R$ 表示用平均流速 \bar{u} 和圆管直径计算的 Reynolds 数, 根据这个结果,圆管无量纲阻力系数只是 Reynolds 数的函数. 可以发现, Blasius 公式适用于 Reynolds 数 $R = \bar{u}d/\nu \leq 100000$ 的范围. 因此,在这个范围内湍流中的压力降正比于 $\bar{u}^{7/4}$. 在 Blasius 建立式 (20.5) 的那个时候,还没有更高的 Reynolds 数的测量结果. 在图 20.1 中可以看到 Blasius 公式(20.5)与实验结果的比较. 直到 Reynolds 数高这 $R = 100000$ 时,该公式还很准确地再现实验结果,但是,从图 20.1 中 J. Nikuradse 报道的实验结果可以看出, $R > 100000$ 时得到的那些实验点明显偏高.

J. Nikuradse 在很宽的 Reynolds 数范围内,即 $4 \times 10^3 \leq R \leq 3.2 \times 10^6$, 对光滑圆管的摩擦律和速度剖面进行了很全面的实验研究. 在图 20.2 中可以看到相应于几个 Reynolds 数的速度剖面.

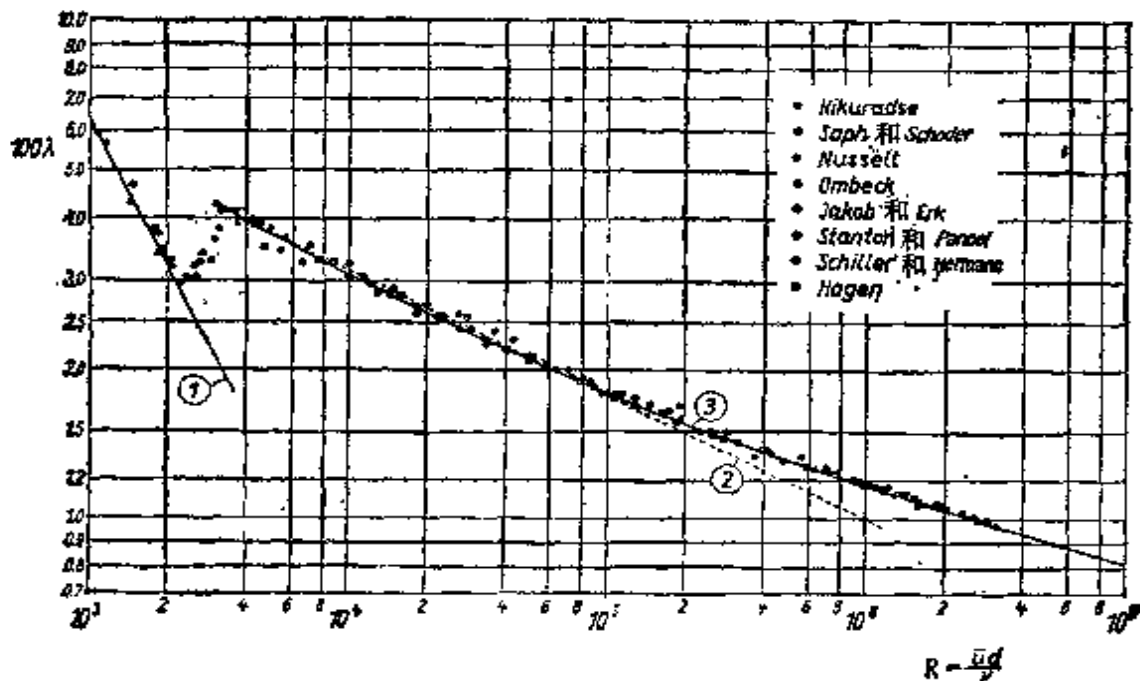


图 20.1 光滑圆管中的摩擦阻力.

曲线(1)由式(5.11),根据 Hagen-Poiseuille, 层流; 曲线(2)由式(20.5), 根据 Blasius^[57], 湍流; 曲线(3)由式(20.30),根据 Prandtl^[58], 湍流

它们用无量纲形式给出,画出了 u/U 与 y/R 的关系。可以注意到,当 Reynolds 数增高时,速度剖面更加饱满。它可以用经验公式表示如下:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (20.6)$$

其中指数 n 随 Reynolds 数稍有变化。图 20.3 中的曲线表明:简单的 $1/n$ 次幂律的假设与实验结果符合得很好,因为适当地选取 n 之后, $(u/U)^n$ 与 y/R 的关系的曲线都落在一些直线上。这项研究中得到,在低 Reynolds 数 $R = 4 \times 10^3$ 时,指数 n 的值是 $n = 6$; 在 $R = 100 \times 10^3$ 时,它增加到 $n = 7$; 而在最高 Reynolds 数 $R = 3240 \times 10^3$ 时,它增加到 $n = 10$ 。

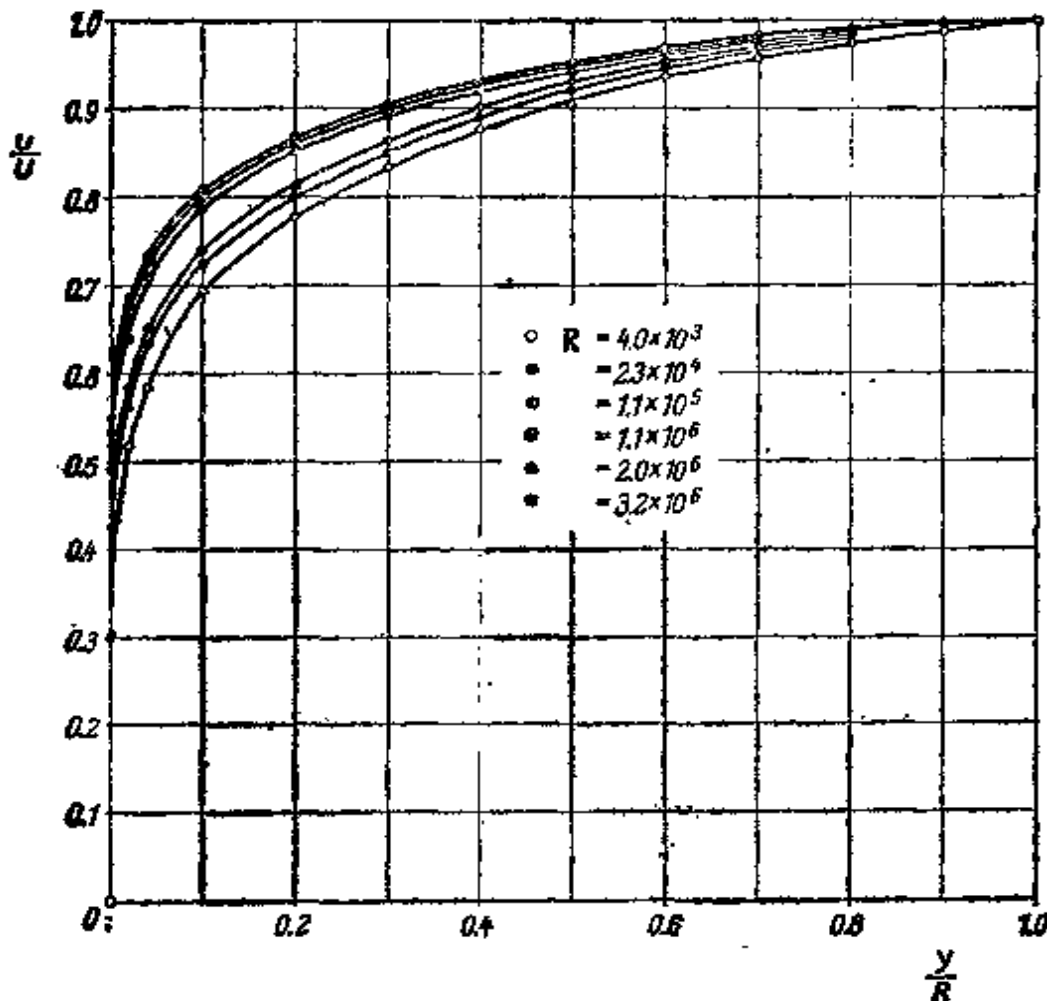


图 20.2 不同 Reynolds 数下光滑圆管中的速度分布,根据 Nikuradse¹⁹³³

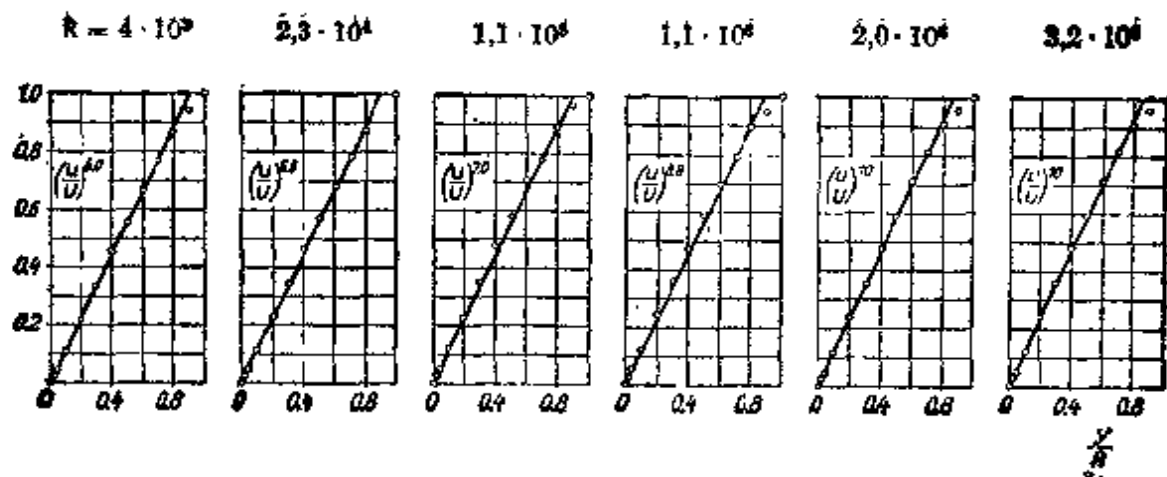


图 20.3 光滑圆管中的速度分布，式(20.6)中的假设的验证

表 20.1 圆管流动中平均速度对最大速度的比值与速度分布指数 n 的关系，根据式(20.7)

n	6	7	8	9	10
\bar{u}/U	0.791	0.817	0.837	0.852	0.865

这里，我们还要进一步指出平均速度与最大速度比值 \bar{u}/U 的表达式，它很容易由式(20.6)推导出来。可以求出

$$\frac{\bar{u}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}, \quad (20.7)$$

在表 20.1 中给出了各自的数值。

b. 摩擦律与速度分布的关系

速度分布公式(20.6)与式(20.5)表示的 Blasius 摩擦律有关，这个首先由 L. Prandtl^[51] 发现的关系在湍流理论中具有十分重要的意义。它能使我们从圆管实验中得出适用于平板的结果^[52]，在第二十一章将利用这些结果。

将式(20.5)的 λ 值代入式(20.4)，可以得到壁面切应力的下述表达式：

$$\tau_0 = 0.03955 \rho \bar{u}^{7/4} \nu^{1/4} d^{-1/4}.$$

引进半径 R 代替直径 d ，则必须用 $2^{1/4} = 1.19$ 来除上面公式的数

值系数,于是,得到

$$\tau_0 = 0.03325 \rho \bar{u}^{7/4} \nu^{1/4} R^{-1/4} = \rho v_*^2, \quad (20.8)$$

其中 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ 表示第十九章中引用的摩擦速度。如果把 v_*^2 分成 $v_*^{7/4}$ 和 $v_*^{1/4}$, 我们得到

$$\left(\frac{\bar{u}}{v_*}\right)^{7/4} = \frac{1}{0.03325} \left(\frac{v_* R}{\nu}\right)^{1/4}$$

或

$$\left(\frac{\bar{u}}{v_*}\right) = 6.99 \left(\frac{v_* R}{\nu}\right)^{1/7},$$

如果用最大速度 U 消去平均速度 \bar{u} , 即设 $\bar{u}/U = 0.8$ (由表 20.1 看出,这近似对应于指数 $n = 7$, 即 Reynolds 数 $R = 10^5$), 则有

$$\frac{U}{v_*} = 8.74 \left(\frac{v_* R}{\nu}\right)^{1/7}. \quad (20.9)$$

现在很自然地假设,这个公式对于离开壁面的任意距离 y 都适用,而不只适用于管轴(壁面距离 $y = R$)。因此,由式(20.9)得到

$$\frac{u}{v_*} = 8.74 \left(\frac{y v_*}{\nu}\right)^{1/7}. \quad (20.10)$$

上述讨论表明, $\frac{1}{7}$ 次幂速度分布律可以由 Blasius 阻力公式导出。前面已经证明,这样的分布律在一定的 Reynolds 数范围内与实验相符,同时可以看出 Blasius 摩擦律与 n 次幂速度分布律之间存在一定的联系。引进式(19.31)和(19.32)中用过的缩写符号 $u/v_* = \phi$ 和 $y v_*/\nu = \eta$, 我们可以将式(20.10)化为

$$\phi = 8.74 \eta^{1/7}. \quad (20.11)^{\nu}$$

这就再次导出了式(19.35),它最初是由考虑相似性得出的,差别

1) 推广到其他指数后,按照 K. Wieghardt^[326] 的方法;得到 $u/v_* = C(n) \times (y v_*/\nu)^{1/n}$ 和下面的数值:

n	7	8	9	10
$C(n)$	8.74	9.71	10.6	11.5

在于当时的待定常数 C 和 n 的数值，现在已由圆管摩擦律得出。在图 20.4 中，式 (20.11) (曲线 (4)) 与 J. Nikuradse 的实验结果进行了比较。可以看出，一直到 Reynolds 数高达约 $R = 100000$ ， $\frac{1}{7}$ 次幂律都与实验符合得很好。我们不能期望它们符合得更好，因为导出 $\frac{1}{7}$ 次幂律的 Blasius 公式 (20.5) 最多只能用到这个极限 (图 20.1)。

为了达到更好的一致，必须在 Blasius 公式中引用较小的指数，比如说用 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{6}$ 来代替 $\frac{1}{4}$ 。进行相应的计算可以发现，为了与测量值一致，速度分布律中的 $\frac{1}{7}$ 应分别用 $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{9}$ 等来代替。图 20.4 中用曲线 (5) 画出了关系式 $\phi = C \times \eta^{1/10}$ ，可以看出，在较高 Reynolds 数时，它确实很好地再现了实验值，但是在较低 Reynolds 数时符合得不好。

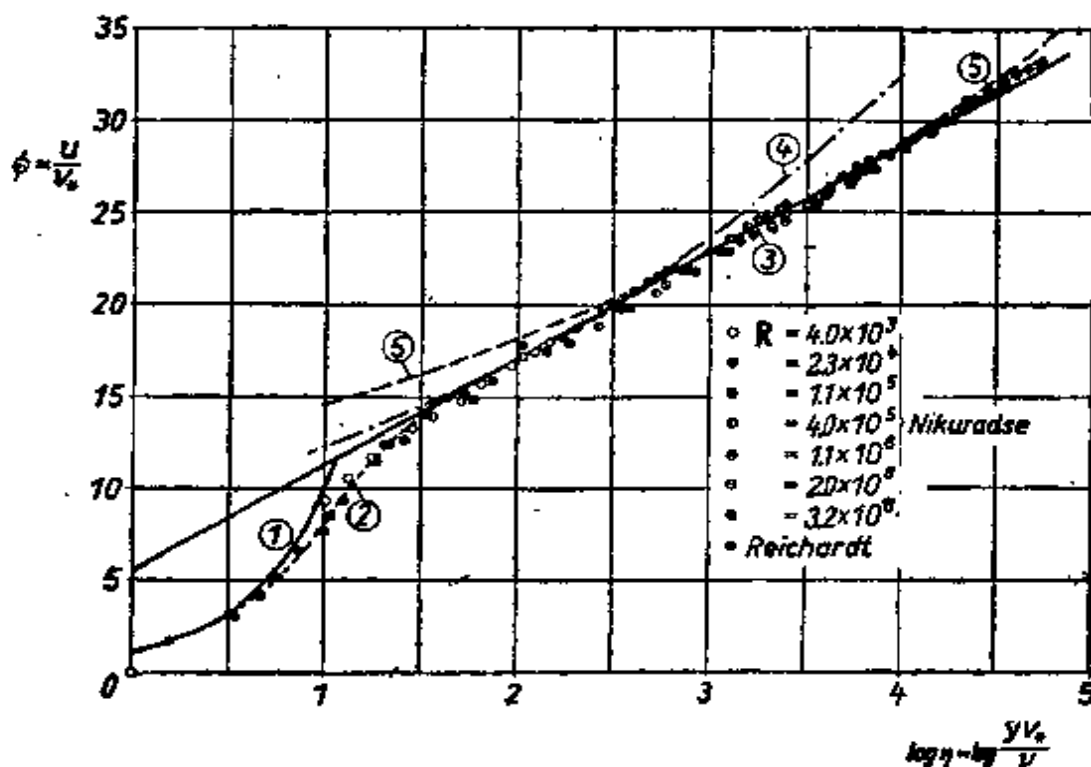


图 20.4 光滑圆管的普适速度分布律

- (1) $\phi = \eta$, 层流; (2) 由层流向湍流转换; 根据 Reichardt^[13]; (3) 式 (20.14), 湍流, 所有 Reynolds 数; (4) 式 (20.11), 湍流, $R < 10^5$; (5) $\phi = 11.5\eta^{1/10}$

为了将来作为参考,现在我们打算根据式(20.10)写出摩擦速度 v_* 的表达式。可以得到

$$v_* = 0.150u^{1/2}\left(\frac{\nu}{y}\right)^{1/8}$$

和

$$\tau_0 = \rho v_*^2 = 0.0225\rho u^{1/2}\left(\frac{\nu}{y}\right)^{1/4} \quad (20.12)$$

或

$$\tau_0 = 0.0225\rho U^{1/2}\left(\frac{\nu}{R}\right)^{1/4} \quad (20.12a)$$

这也可以用无量纲形式写为

$$c_f' = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.045\left(\frac{UR}{\nu}\right)^{-1/4} \quad (20.12b)$$

其中 c_f' 表示局部表面摩擦系数。这个关系等价于式(20.5),称为圆管流动的 Blasius 表面摩擦律。这个关系以后要用到。

c. 很大 Reynolds 数下的普适速度分布律

圆管阻力定律和速度分布表达式中的指数随着 Reynolds 数的增加而减小,这个事实表明,二者必然渐近地各自趋向某种适用于很高 Reynolds 数的表达式,而且式中必然包含自变量的对数,因为它是多项式在指数很小时的极限。详细研究很高 Reynolds 数下的实验结果,可以证明这样的对数律确实存在。从物理上讲,这种渐近律的特征是,与湍流摩擦力相比,层流摩擦力完全可以略去。与 $1/n$ 次幂律相比,这种对数律的很大优点在于,它们是很大 Reynolds 数下的渐近表达式,因此,它们可以外推到实验范围以外的任意大的 Reynolds 数值。相反,当使用 $1/n$ 次幂律时,指数 n 值将随 Reynolds 数范围的扩大而改变。

在沿平板流动的情形下,已经由式(19.33)给出了这样的渐近对数律。它是在混合长度正比于离开壁面的距离 ($l = ky$) 的假设下,根据 Prandtl 湍流切应力公式(19.7)推导出来的,并适用于

离壁面距离小的 y 。这个公式的形式为

$$\phi = A_1 \ln \eta + D_1 \quad (20.13)^{19}$$

其中 $A_1 = 1/\kappa$ 和 $D_1 = -(1/\kappa) \cdot \ln \beta$ 是自由常数。我们将这个公式原封不动地应用到圆管流动。将这个公式与 J. Nikuradse 的测量结果进行比较,如图 20.4 中曲线(3)所示,可以看出不仅在接近壁面的那些点,而且在直到管轴的整个区域都得到了极好的一致。所得到的常数值是

$$A_1 = 2.5; \quad D_1 = 5.5.$$

由此给出了如下的 κ 和 β 值:

$$\kappa = 0.4; \quad \beta = 0.111.$$

因此,在很高 Reynolds 数情形下,普适速度分布律具有这种形式²⁰:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 2.5 \ln \eta + 5.5 \\ \phi &= 5.75 \log \eta + 5.5. \end{aligned} \right\} \text{(光滑)} \quad (20.14)$$

利用类似于上节的推理,可以由上面的普适速度分布公式得到相应的普适渐近阻力公式。

作为湍流公式,式(20.14)只适用于那些与湍流切应力相比较可以略去层流切应力的区域。在紧靠壁面的地方,湍流切应力减小为零,而层流切应力占主要地位,这里必然会出现对这种速度分布律的偏离。在管道流动中, H. Reichardt^[54,55] 将这种测量延伸到离壁面很小的距离内。图 20.4 中的曲线(2)表示由层流次层(参看第十八章 c)到湍流边界层的过渡。在上述曲线图中,由(1)表示的曲线相应于 $\tau_s = \mu u/y$ 的层流。由于 $\tau_s = \rho v_*^2$, 我们得到 $u/v_* = y v_* / \nu$, 或

$$\phi = \eta \quad (\text{层流}). \quad (20.14a)$$

1) H. Reichardt^[55] 指出了一种改进的速度分布表达式。它适用于从圆管壁面 $y=0$ 到中心线 $y=R$ 的整个范围,就是说它在层流次层内也能用,而式(20.13)不能用于这一层。它还适用于中心线附近,在那里测量的速度分布曲线对式(20.13)表现出系统的偏离。特别是,这个公式很好地再现了图 20.4 中曲线(2)所表示的过渡区。这个普适速度分布律,是通过理论估算和对式(19.1)定义的湍流混合系数 A 非常仔细的测量推导出来的。还请比较 W. Szablowski^[44] 的文章。

2) 在以下公式中, \ln 表示自然对数,而 \log 表示以 10 为底的对数。

由此可见, 当值 $yv_*/\nu < 5$ 时, 湍流摩擦力的贡献和层流摩擦力相比可以略去. 在 $5 < yv_*/\nu < 70$ 的范围内, 两者的贡献具有相同的量级; 而当 $yv_*/\nu > 70$ 时, 与湍流摩擦力相比较, 层流的贡献可以略去. 于是

$$\left. \begin{aligned} \frac{yv_*}{\nu} < 5: & \text{ 纯层流摩擦力,} \\ 5 < \frac{yv_*}{\nu} < 70: & \text{ 层流-湍流摩擦力,} \\ \frac{yv_*}{\nu} > 70: & \text{ 纯湍流摩擦力.} \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

所以可以看出, 层流次层的厚度等于

$$\delta_l = 5 \frac{\nu}{v_*} \quad (20.15a)$$

现在打算将管流速度分布测量的结果与第十九章中给出的另一种普适公式, 即形式为 $(U - u)/v_* = f(y/R)$ 的公式进行比较. 我们知道, 它既可以由 von Kármán 的相似理论得到, 又可以由 Prandtl 的切应力假设及混合长度关系 $l = \kappa y$ 得到. 在第一种情形下得到式(19.21), 而在第二种情形下得到式(19.28).

利用混合长度的一个适当选取的 y 函数, 可以在整个区域内, 即从壁面 ($y = 0$) 到充分发展的湍流区, 计算出普适速度分布律. E. R. van Driest 基于在自身平面内作振动的平板 Stokes 解的讨论(第五章 7, Stokes 第二问题), 导出了这样一种关系, 它的形式为

$$l = \kappa y [1 - \exp(-\eta/A)]. \quad (20.15b)$$

其常数值为 $A = 26$. 对于很大的 y 值, 我们重新得到关系 $l = \kappa y$, 但是在层流和湍流摩擦力之间的重叠区, l 值是比较小的. 为了积分下述 τ_0 等于常数的方程:

$$\tau_0 = \tau_l + \tau_t = \rho \left(\nu + l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \right) \frac{du}{dy},$$

我们首先求出 du/dy , 并得到

$$u = 2v_* \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{1 + [1 + 4(v_* l/\nu)^2]^{1/2}}$$

接着,引进式(20.15b)的 l 表达式,然后得到与图 20.4 所示的实验结果很符合的速度分布。E. R. van Driest 的表达式成功地应用于有抽吸和吹除的湍流边界层计算^[50],以及可压缩流动¹⁾。

壁面律: 对于离开壁面足够大的距离(充分发展的湍流区),速度分布可以用式(20.14)的对数律来表示。在邻近壁面的区域(层流次层)内,可以应用式(20.14a)的线性律。在过渡区(层流-湍流的混合区),速度分布用 Reichardt 的分布律,即图 20.4 中的曲线(2)来表示。这三个分布律合起来,现在称为“壁面律”。van Driest 积分是壁面律的另一种形式,关于这个课题的一些重要考虑可以在 F. H. Clauser^[5a] 的一篇综述文章中找到,还可参阅 D. B. Spalding^[6a] 和 G. Kleinstein^[3a] 的文章。第二十一章的文献[5a]和第二十三章的文献[46,47]给出了进一步的讨论。

由于混合长度的简化假设 $l = \kappa y$ 并非对整个圆管直径都适合,所以最好直接根据实验导出混合长度与距离的依赖关系,然后应用 Prandtl 假设

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (20.16)$$

并根据线性切应力分布

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R} \right) \quad (20.17)$$

计算速度分布。

现在可以直接由式(20.16)和(20.17)以及测量的速度分布计算混合长度随 y/R 的变化。这个计算已经由 J. Nikuradse^[45] 作出,他得出了图 20.5 所表示的出色结果,这个结果表示在光滑圆管情形下混合长度沿圆管直径的变化。可以看到,把 Reynolds 数

1) 在新近的刊物中, W. C. Reynolds (*Annual Reviews of Fluid Mechanics*, Vol. 8, p. 187) 曾报道, van Driest 常数 $A = 26$ 只适用于零压力梯度的边界层和无渗透的壁面。在出现吹除或抽吸,以及有压力梯度时,常数 A 可能取不同的值。在顺压梯度和有吹除的情形下,这个值比 $A = 26$ 大很多。

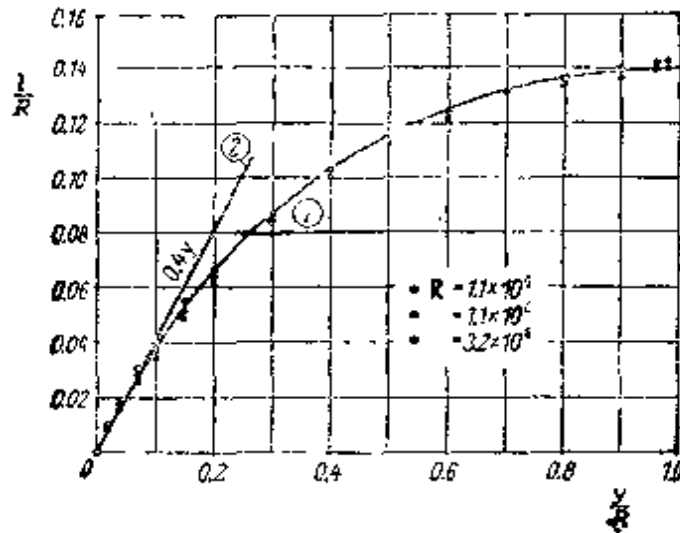


图 20.5 在不同 Reynolds 数下，混合长度沿光滑圆管直径的变化

曲线 (1) 由式 (20.18) 得出

低于 10^3 的那些值排除后，混合长度不依赖于 Reynolds 数，这个函数可以用经验关系表示如下：

$$\frac{l}{R} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4. \quad (20.18)$$

在壁面附近，这个公式可以简化为

$$l = 0.4y - 0.44 \frac{y^2}{R} + \dots, \quad (20.18a)$$

这表明，在离开壁面的小距离内，Prandtl 假设 ($l = \kappa y$) 得到了证实，其中

$$\kappa = 0.4. \quad (20.19)$$

可以进一步证明，式 (20.18) 给出的混合长度随壁面距离的变化关系，不仅适用于光滑圆管，同时也适用于粗糙圆管。图 20.6 表示了 J. Nikuradse 对用不同大小砂粒人为粗糙的圆管所测量的结果，由此可见上述说法得到了证实。此外，还可以预料，由式 (20.18) 的混合长度计算的速度分布，对于光滑圆管和粗糙圆管都适用。

为了简单起见，可以将混合长度的表达式写成

$$l = \kappa y \cdot f\left(\frac{y}{R}\right), \quad (20.20)$$

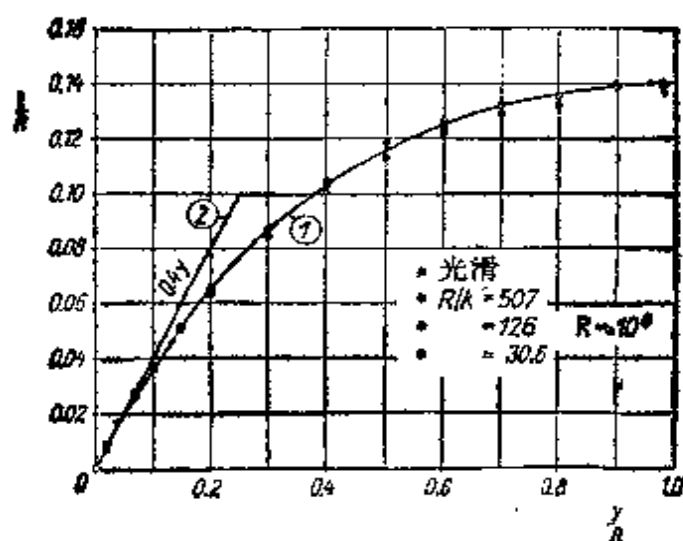


图 20.6 混合长度沿粗糙圆管直径的变化

曲线 (1) 由式 (20.18) 得出

其中当 $y/R \rightarrow 0$ 时, $f(y/R) \rightarrow 1$. 引进 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, 再将式 (20.17) 和 (20.16) 结合起来, 可以得到速度分布的微分方程:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa} \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}}}{yf\left(\frac{y}{R}\right)},$$

由此, 经过积分得到

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \int_{y_0/R}^{y/R} \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}} d\left(\frac{y}{R}\right)}{\frac{y}{R} f\left(\frac{y}{R}\right)}. \quad (20.21)$$

这里在速度等于零处的积分下限 y_0 具有层流次层厚度的量级, 因此根据式 (20.15a), 它正比于 ν/v_* . 于是 $y_0/R = F_1(\nu_*R/\nu)$. 圆管中心的最大速度 U 可以由式 (20.21) 导出为

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \int_{y_0/R}^1 \frac{\sqrt{1 - \frac{y}{R}} d\left(\frac{y}{R}\right)}{\frac{y}{R} f\left(\frac{y}{R}\right)}. \quad (20.21a)$$

由于式(20.21)和(20.21a), 现在有

$$U - u = v_* F\left(\frac{y}{R}\right). \quad (20.22)$$

这就又得到了普适速度分布律式(19.21)和式(19.28). 现在得到的基本结论是, 式(20.22)的普适分布律对于光滑圆管和粗糙圆管都是正确的, 在这两种情形下, 函数 $F(y/R)$ 是相同的. 式(20.22)说明, 如果将 $(U - u)/v_*$ 通过 y/R 画出来, 则在所有 Reynolds 数和所有粗糙度下, 沿圆管半径画出的速度分布曲线可以缩并为一条曲线(图 20.7). 可以指出, 上述形式的速度分布律是 T. E. Stanton^[72] 首先导出的. 通过积分式(20.21), 可以得出 $F(y/R)$ 的显式表达式, 但是, 利用已知的光滑圆管速度分布律(式(20.14))更简单些. 这样, 用类似于导出式(20.9)和(20.10)的方法, 我们

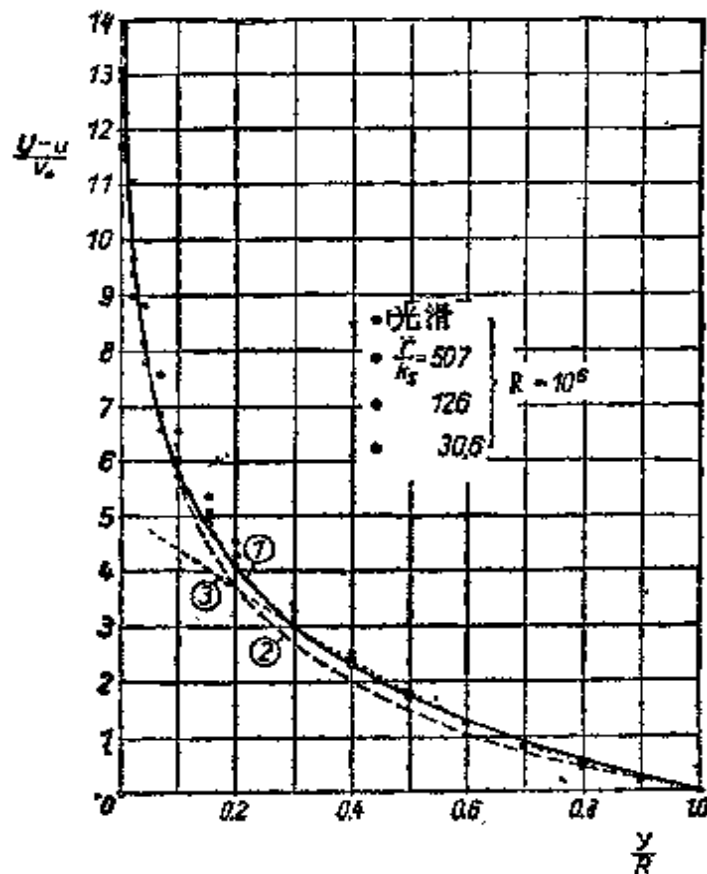


图 20.7 光滑和粗糙圆管的普适速度分布律. 曲线(1)由式(20.23), Prandtl; 曲线(2)由式(20.24), von Kármán; 曲线(3)由式(20.25), Darcy

有

$$U - u = 2.5v_* \ln \frac{R}{y} = 5.75v_* \log \frac{R}{y},$$

因此

$$\frac{U - u}{v_*} = 5.75 \log \frac{R}{y}. \quad (20.23)$$

图20.7中的曲线(1)是由该式画出的,并与光滑和粗糙圆管的实验结果进行了比较.该式含有经验常数 κ ,其数值 $\kappa = 0.4$ 已经在式(20.19)中给出.理论与实验符合得很好.

由 von Kármán 相似律式(19.21)也可以导出普适速度分布律.由此可以得到

$$\frac{U - u}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \left[1 - \sqrt{1 - \frac{y}{R}} \right] + \sqrt{1 - \frac{y}{R}} \right\}, \quad (20.24)$$

其中 y 表示离开壁面的距离.如果选取 $\kappa = 0.36$,这个公式也与实验值符合得很好,如图20.7中曲线(2)所示.图20.7还有另外一条基于 H. Darcy^[9] 经验公式的曲线(3).1855年 Darcy 根据他对速度分布非常仔细的测量得出了这条曲线,用现在的符号,它可以写成

$$\frac{U - u}{v_*} = 5.08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20.25)$$

除去靠近壁面($y/R < 0.25$)的区域外, Darcy 公式都给出了很好的结果.

这里值得指出的是,正如通过上一章论述所看到的那样,对于槽内的二维流动,已经得到了两种普适速度分布律,即式(20.23)和(20.24).它们与轴对称管流的实验结果还是符合很好的,这个事实可以作为一个证据,证明二维速度分布与轴对称分布之间存在广泛的相似性.应该想到,在层流情形下,这两种情形的速度分布都是抛物线分布.

从 G. I. Taylor 的涡传递理论入手,也可以导出式(20.22)那种形式的普适速度分布律,但是其中的函数 $F(y/R)$ 显然与

Prandtl 或 von Kármán 计算中的不同。在 S. Goldstein^[20] 和 G.I. Taylor^[76] 的文章中，有根据 G. I. Taylor 涡传递理论和根据 Prandtl 动量传递理论所得结果之间的比较，但是不能得出支持其中哪种理论的明确结论。

通过考察圆管截面上表观运动粘性系数 ϵ_r 的变化，可以更好地理解管流的物理特性；根据 J. Nikuradse 的实验结果，在图 20.8 中画出了这种变化。由式(19.2)的 $\tau = \rho \epsilon_r (du/dy)$ 出发，代入式(20.17)的 τ 值，我们可以由测量的速度分布得到 ϵ_r 的变化。正如混合长度那样，表观运动粘性系数也不依赖于 Reynolds 数，但是 ϵ_r 的这种变化比 l (图 20.5) 更加复杂。 ϵ_r 的最大值落在壁面到轴线的中间，而在轴线上 ϵ_r 很小，但还没有减小为零。鉴于图 20.8 中的曲线，必须承认，寻找描述 ϵ_r 变化的合理假设要比混

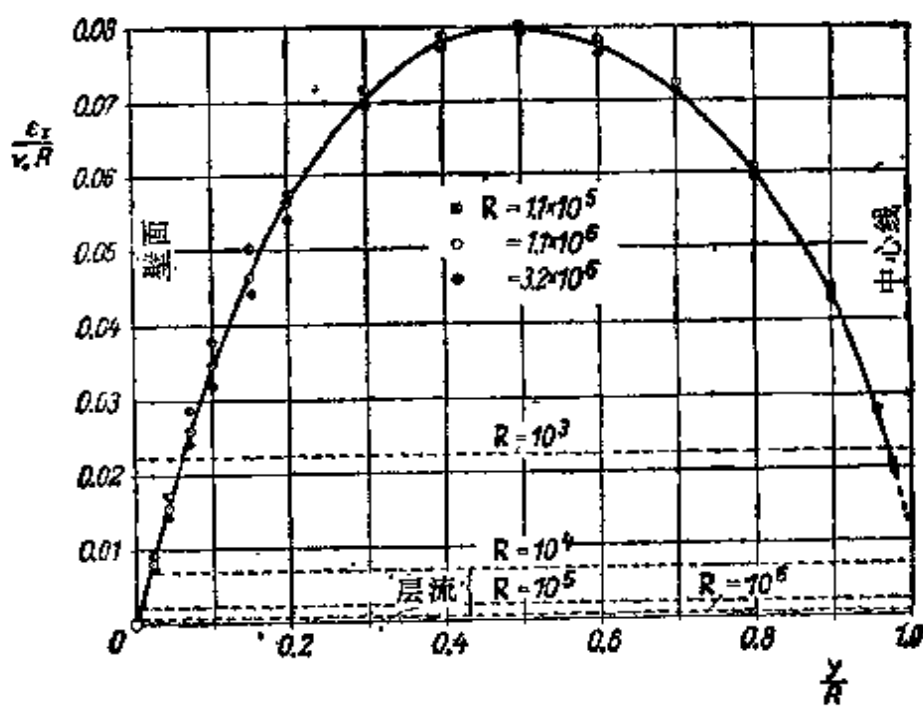


图 20.8 光滑圆管的无量纲有效运动粘性系数，根据 Nikuradse^[44] 的实验结果画出

合长度的情形困难得多。以前曾提过这种情况(第十九章 b)，作为支持将混合长度而不是将表观粘性系数引用到方程的一个理由，现在可以看到这个观点得到了实验结果的证实。为了比较层流和湍流摩擦力，图 20.8 包含了 Poiseuille 流动的相应的各自值。

当然后者和 ν 是一样的，因为由式(20.4)可见， $v_* = \left(\sqrt{\frac{1}{8}\lambda}\right)\bar{u}$ ，而对于层流，由式(5.11)可见， $\lambda = 64/R$ ，所以可以得到

$$\frac{E_{lam}}{v_* R} = \frac{\nu}{v_* R} = \frac{1}{\sqrt{2R}}$$

这表明湍流摩擦力比层流摩擦力大得多，特别是在大 Reynolds 数时更是如此。

d. 很大 Reynolds 数下光滑圆管的普适阻力定律

回顾本章 b 关于从 Blasius 阻力公式到 $\frac{1}{7}$ 次幂速度分布律的论证步骤，我们现在可以根据普适的对数速度分布律导出一个新的圆管阻力公式。式(20.23)的对数速度分布律，是在层流摩擦力比起湍流摩擦力来可以略去的假设下导出的，这就是说它可以外推到任意大的 Reynolds 数中去。可以预料，对于将要推导的阻力定律也是如此。以下论证将以 L. Prandtl 的文章^[52]为基础。

在横截面上积分式(20.23)，可以得到流动的平均速度

$$\bar{u} = U - 3.75v_* \quad (20.26)$$

Nikuradse 的实验表明，常数 3.75 必须稍微做些调整，所以

$$\bar{u} = U - 4.07v_* \quad (20.27)$$

由式(20.4)可以得到

$$\lambda = 8\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^2 \quad (20.28)$$

同时，由普适速度分布律式(20.14)，我们有

$$U - v_* \left\{ 2.5 \ln \frac{Rv_*}{\nu} + 5.5 \right\},$$

将它代入式(20.26)，给出

$$\bar{u} = v_* \left\{ 2.5 \ln \frac{Rv_*}{\nu} + 1.75 \right\}. \quad (20.29)$$

我们可以引入 Reynolds 数

$$\frac{Rv_*}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}d}{\nu} \frac{v_*}{\bar{u}} = \frac{\bar{u}d}{\nu} \frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}$$

于是由式(20.28)和(20.29)得到

$$\lambda = \frac{8}{\left\{ 2.5 \ln \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 2.5 \ln 4\sqrt{2} + 1.75 \right\}^2}$$

$$= \frac{1}{\left\{ 2.035 \log \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.91 \right\}^2}$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.91.$$

根据这个结果,如果画出 $1/\sqrt{\lambda}$ 相对于 $\log(R\sqrt{\lambda})$ 的关系,则这个普适圆管摩擦律将给出一条直线,如由图20.9所见,这条图线与实验吻合得极好,图中画出了许多作者的实验结果。经过这些实验点的平均曲线的数值系数,与上面导出的结果只有很小的差别。图20.9中经过实验点的曲线(1)可以用下述公式表示:

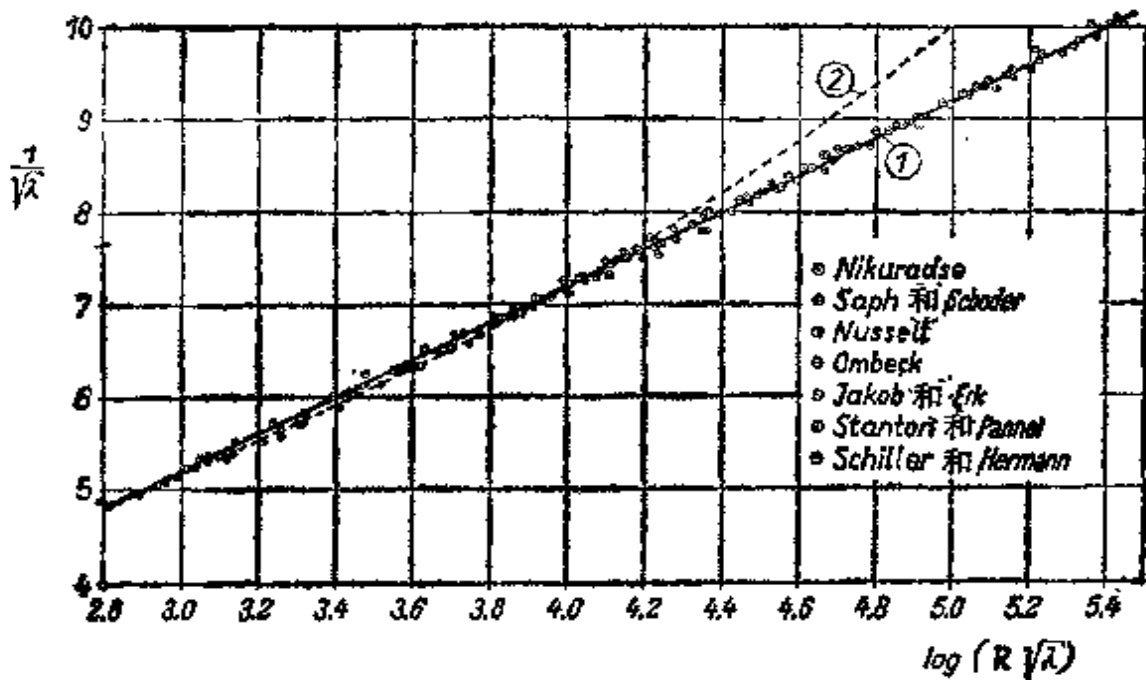


图 20.9 光滑圆管的普适摩擦律

曲线(1)由式(20.50), Prandtl; 曲线(2)由式(20.5), Blasius

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log \left(\frac{\bar{u}d}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.8 \quad (\text{光滑}) \quad (20.30)$$

这就是光滑圆管的 Prandtl 普适摩擦律。直至 Reynolds 数为 3.4×10^6 ，它都为 J. Nikuradse^[45] 的实验所证实，并且可以看到其符合程度非常好。根据上述推导过程，显然它可以外推到任意大的 Reynolds 数，因此可以说更高 Reynolds 数下的测量是不必要的。表 20.2 中给出了根据式(20.30)计算的数值。在图 20.1 中用曲线(3)表示了这个普适摩擦律。这个普适公式直至 $R = 10^5$ 都与 Blasius 公式符合得很好，但在较高 Reynolds 数时，Blasius 公式对测量结果的偏离逐渐加大，而式(20.30)则一直保持很好的吻合。

表 20.2 光滑圆管的阻力系数与 Reynolds 数的关系，还可参看图 20.9

	Prandtl, 式 (20.30)	Blasius, 式 (20.5)
$R = \frac{\bar{u}d}{\nu}$	λ	λ
10^3	(0.0622)	(0.0567)
$2 \cdot 10^3$	(0.0494)	(0.0473)
$5 \cdot 10^3$	0.0374	0.0376
10^4	0.0309	0.0316
$2 \cdot 10^4$	0.0259	0.0266
$5 \cdot 10^4$	0.0209	0.0212
10^5	0.0180	0.0178
$2 \cdot 10^5$	0.0156	0.0150
$5 \cdot 10^5$	0.0131	—
10^6	0.0116	(0.0100)
$2 \cdot 10^6$	0.0104	—
$5 \cdot 10^6$	0.0090	—
10^7	0.0081	(0.0056)

W. Froessel^[46] 研究了一些以很高的速度通过光滑圆管的气体流动。图 20.10 中画出了在不同质量流量下压力沿圆管的变化。这些曲线上标注的数字是相对于以同样压力通过同样直径喷嘴的最大质量流量的分数值。那些向右下降的曲线是指亚声速流动，而那些向右上升的曲线则适用于超声速流动。后者曲线包括向激

波引起的高压及亚声速流动的突变。如由图 20.11 所看到的，其阻力系数与不可压缩流动没有明显的差别。作为比较，标注(1)的直线对应于式(20.30)。K. Oswatisch 和 M. Koppe^[50] 给出了圆管可压缩流体流动的理论分析，他们的结果与 Froessel 的实验符合得很好。

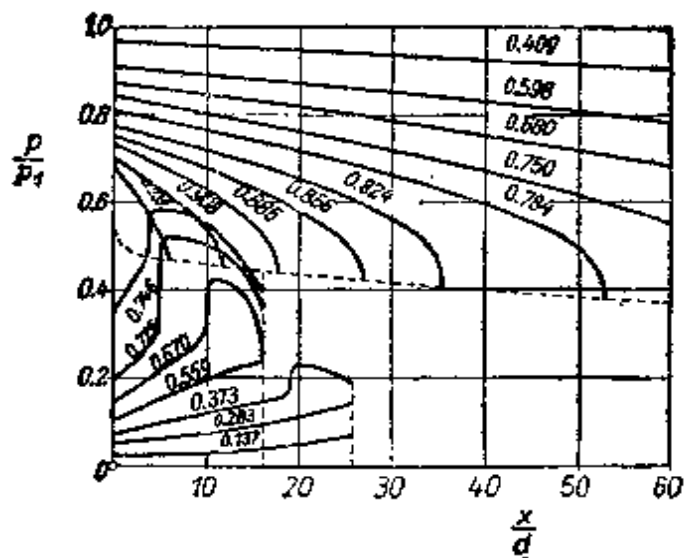


图 20.10 可压缩流动的沿圆管的压力分布，根据 Froessel^[14]

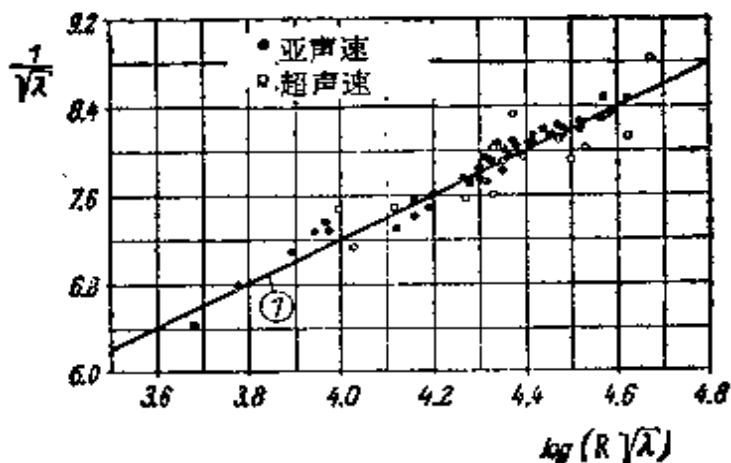


图 20.11 可压缩流动的光滑圆管阻力定律。
曲线(1)由式(20.30)得出

e. 非圆截面管道

L. Schiller^[60] 和 J. Nikuradse^[44] 研究了非圆截面管道内的流动，他们确定了矩形、三角形、不规则四边形截面的管道及带凹槽圆管的摩擦律和速度分布。比较方便的办法是，将用水力学直

径 d_h 表示的阻力系数引入这类流动:

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{d_h} \rho \bar{u}^2,$$

其中

$$d_h = \frac{4A}{C},$$

而 A 表示横截面积, C 表示浸湿的周长. 在圆截面情形下, 水力学直径等于圆的直径.

图 20.12 画出了一系列截面形状下的 λ 与 R 的关系曲线. 在湍流情形下, 这些结果可以用圆管阻力定律很好地表示出来(曲线 2). 但是在层流范围内, 用水力学直径整理后, 这些实验数据并不

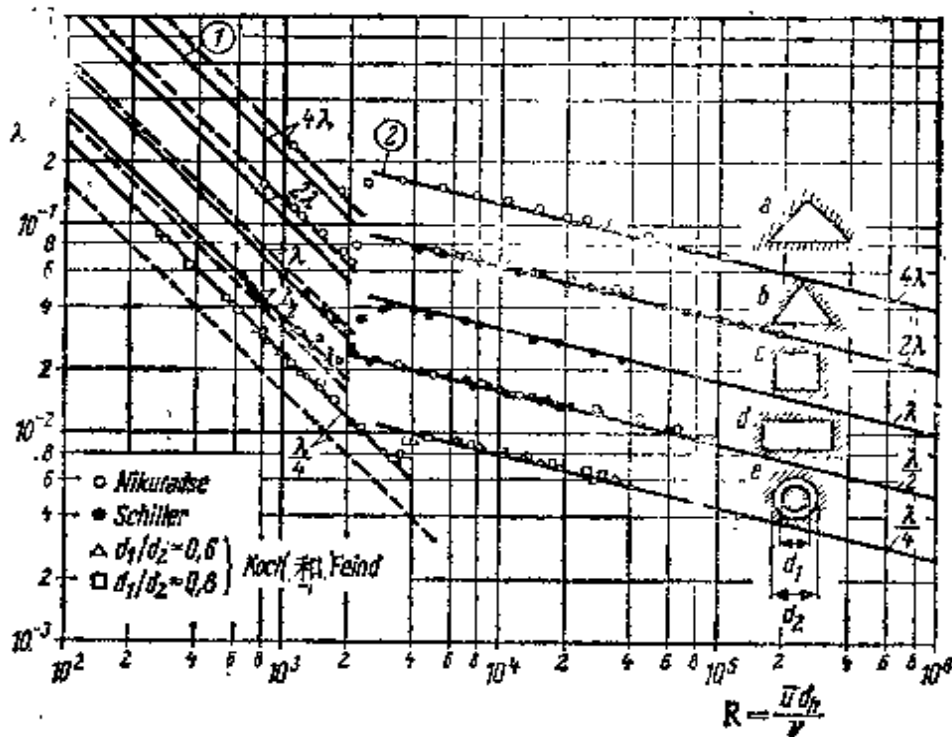


图 20.12 非圆截面光滑管道的阻力公式

(1)——层流: $\lambda = \frac{c}{R}$. (2)——湍流: $\lambda = \frac{0.316}{R^{1/4}}$ (Blasius).

——层流, 圆管, $c = 64$ (Hagen-Poiseuille). (a) 直角等腰三角形, $c = 52$; (b) 等边三角形, $c = 53$; (c) 正方形, $c = 57$; (d) 矩形 (3.5:1), $c = 71$; (e) 圆环 ($d_2/d_1 \rightarrow 1$), $c = 96$. \circ 测量值, Nikuradse^[44]; \bullet 测量值, Schiller^[30]; \triangle $d_1/d_2 = 0.6$, \square $d_1/d_2 = 0.8$, 测量值, Koch 和 Feind^[32]

落在一条曲线上。其偏差程度取决于管道截面的形状。对于湍流，水力学直径概念的适用性直至 Mach 数 $M = 1$ 都在实验上得到了证明。这些管道内的速度分布特别值得注意。在图 20.13 和 20.14 中画出了 J. Nikuradse^[43,44] 得到的矩形和三角形截面上的等速度线。在所有的情形下，拐角附近的速度都是比较大的，这是由于在所有非圆截面直管内都有二次流的缘故。这些二次流是这样的：流体沿角平分线流向拐角，然后向两边流开。二次流由管道中心向各个角不断地传递能量，所以在那里产生了较高的速度。图 20.15 画出了矩形和三角形管道内二次流的示意图。可以看到，矩形截面中的二次流在长边的端点附近和在短边的中间从壁面向内流动，它形成了一些低速区。在图 20.13 的等速度线图形中，它们表现得很清楚。如图 20.16 的等速度线图形所证明的，这种二次流在开口槽中也发生作用。其最大速度不是在自由表面附

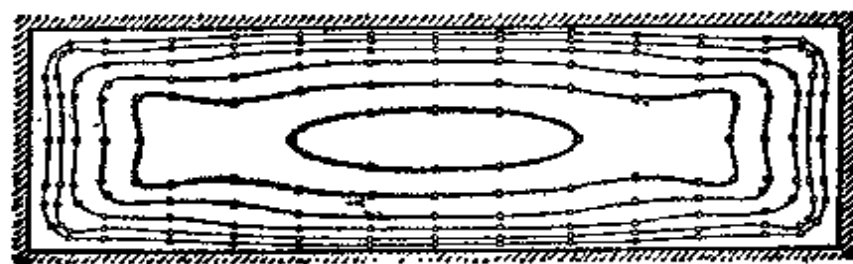


图 20.13 矩形截面管道的等速度线，根据 Nikuradse^[43]

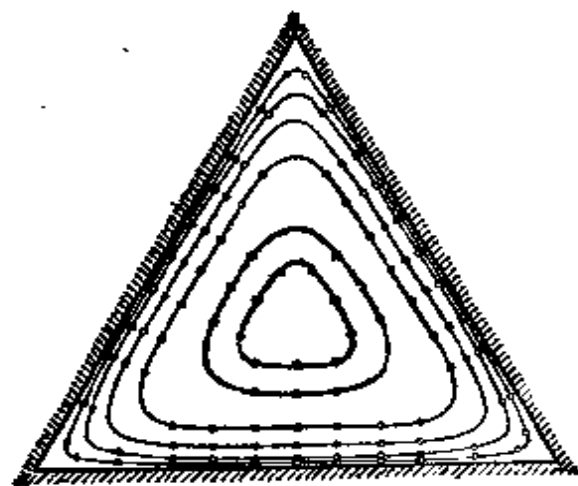


图 20.14 等腰三角形截面管道的等速度线，
根据 Nikuradse^[44]

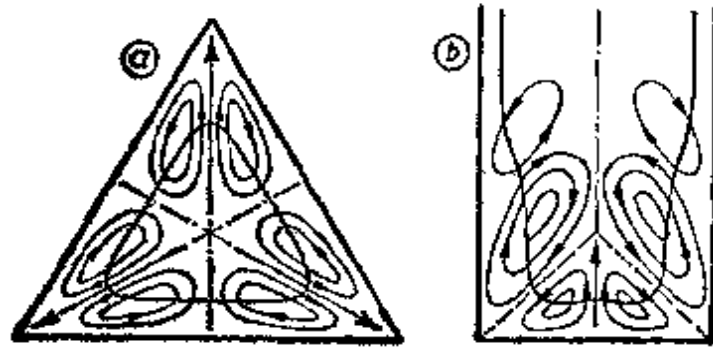


图 20.15 三角形和矩形截面管道内的二次流(示意图)

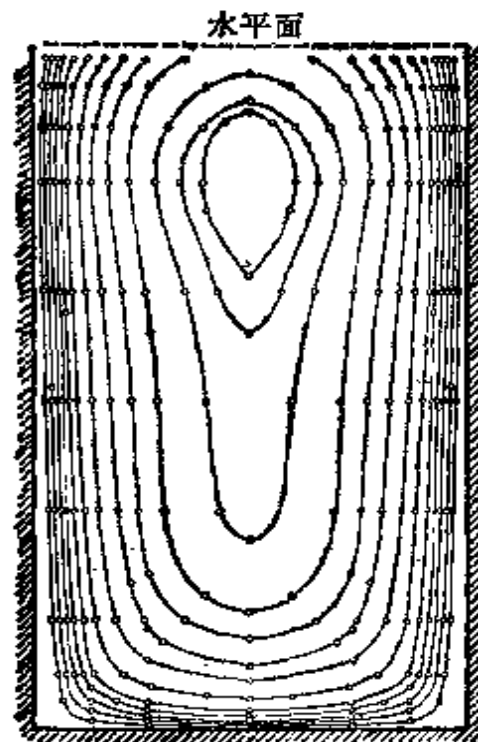


图 20.16 矩形开口槽的等速度线，
根据 Nikuradse^[49]

近,而是在向下约五分之一深度的地方,同时正如所预料的那样,自由表面内的流动根本不是二维的。在管道横截面有一个狭窄区时,整个流动并不是同时发生转捩。例如,在三角形的尖角区内,直至很高 Reynolds 数时,流动还是层流的,虽然大部分区域的流动早就是湍流了。这种情形可以用图 20.17 来说明,它是 E. R. G. Eckert 和 T. E. Irvine^[33] 做出的测量结果。在 Reynolds 数 $R = 1000$ 时,在三角形高度百分之四十的区域内流动都是层流,

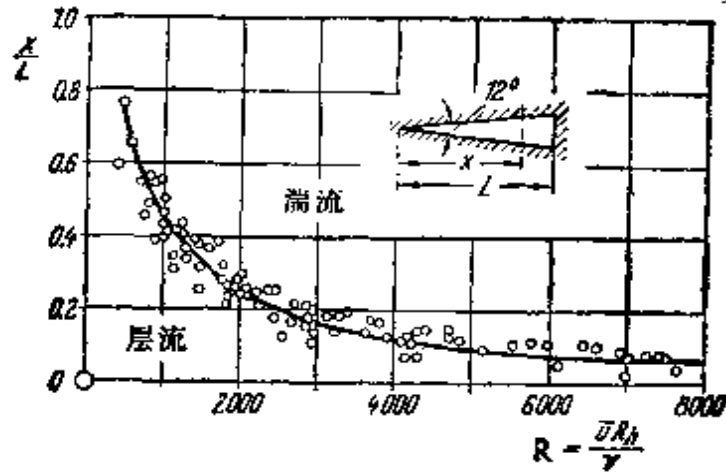


图 20.17 尖三角形管道内层流和湍流之间的界限，利用注入烟流直观测量的，根据 E. R. G. Eckert 和 T. E. Irvine^[13]

R_h ——水力学半径 = $d_h/2$

这种层流区随着 Reynolds 数的增加而减小。

E. Meyer^[36] 研究了直管道流动的压力和速度分布，其中管道截面的形状是变化的，但其面积保持不变。他使用的管道由圆截面逐渐过渡到边长比为 1:2 的矩形截面。过渡是在两个不同长度范围内沿两个方向实现的，而且发现，在从圆形到矩形的过渡区域内的压力损失明显超过沿相反方向的损失。

f. 粗糙管道和等效砂粒粗糙度

工程设备中使用的大多数管道，至少在较高 Reynolds 数时不能看作是水力学光滑的。粗糙壁所造成的流动阻力大于上述光滑管道公式所给出的阻力。因此，粗糙管道的摩擦律具有很大的实际意义，关于这个问题的实验工作也开展得很早。但是由于几何形状多种多样，使描述粗糙度的参数数量非常大，这个基本困难使系统地探索粗糙管道摩擦律的希望落空。例如，如果我们考察有同样突起物的壁面，我们一定会得出这样的结论：阻力依赖于这种粗糙度的分布密度，即依赖于它们在单位面积上的数量及它们的形状和高度，最后还依赖于它们在表面上的分布方式。因此，经过很长的时间才建立起一些清晰而简单的描述粗糙管道中流动的定律。I. Hopf^[25] 对大量的早期实验结果进行了综合评述，并发

现了两种与粗糙管道和开口槽阻力公式有关的粗糙度。第一种粗糙度引起正比于速度平方的阻力，这就是说其阻力系数不依赖于 Reynolds 数，并对应于比较粗糙和分布紧密的粗糙元，例如粘敷在表面上的粗砂粒、水泥、或粗铸铁。在这些情形下，粗糙度的性质可以用一个粗糙度参数 k/R ，即所谓的**相对粗糙度**来表示，其中 k 是突起物的高度，而 R 表示截面的半径或水力学半径。根据相似性考虑，我们可以断定，在这种情形下阻力系数只依赖于相对粗糙度。其实际关系可以通过对水力学半径不同而绝对粗糙度相同的管和槽进行测量来实验地确定。K. Fromm^[27] 和 W. Fritsch^[46] 进行了这种测量，他们发现对于几何相似的粗糙度， λ 正比于 $(k/R_s)^{0.314}$ 。

当突起物比较圆滑或者有少量突起物分布在较大面积上时，则出现第二种阻力公式，例如木制管或商用钢管中的突起物就是这种情形。这时，阻力系数既依赖于 Reynolds 数又依赖于相对粗糙度。

从物理观点来看，一定可以断定，突起物的高度与边界层厚度之比应该是决定性因素。特别是，可以预计这种现象依赖于层流次层的厚度 δ_1 ，所以必须把 k/δ_1 看作是表征这种粗糙度的一个重要的无量纲量。显然，假如突起物很小（或边界层很厚），它们都埋在层流次层里，也就是说，如果 $k < \delta_1$ ，则粗糙度不会引起阻力增加，这时可以把壁面看成是水力学光滑的。这就像粗糙度对 Hagen-Poiseuille 流动的阻力没有影响一样。回想在第十九章 c 中的一些考虑，可以得出层流次层厚度由 $\delta_1 = \text{常数} \cdot \nu/v_*$ 给出，而且无量纲粗糙度系数是

$$k/\delta_1 \sim kv_*/\nu.$$

这是由粗糙元颗粒尺度和摩擦速度 v_* 组成的 Reynolds 数。

J. Nikuradse^[46] 对粗糙圆管进行了非常系统、广泛和仔细的测量¹⁾，他使用的圆管在其壁面上尽可能紧密地粘敷着某种规定尺

1) 在下文中，我们将用符号 k_s 表示 Nikuradse 砂粒粗糙度中的颗粒尺度，而用 k 表示其他种类的粗糙度。

度的砂粒。通过选择不同直径的圆管和改变砂粒的尺度，他能从大约 $1/500$ 到 $1/15$ 的范围改变相对粗糙度 k_s/R 。在这些测量过程中发现的变化规律性，可以用一种简单的方法与光滑圆管联系起来。

我们将首先描述 Nikuradse 的测量，然后证明，早先在光滑圆管情形下发现的阻力公式与速度分布之间的关系，可以很自然地推广到粗糙圆管的情形。

阻力公式：图 20.18 表示用砂粒粗糙了的圆管的摩擦律。在层流区，所有粗糙圆管都有和光滑圆管同样的阻力。临界 Reynolds 数同样不依赖于粗糙度；在湍流区，对于一个给定了粗糙度的圆管也存在这样一个 Reynolds 数范围，在这个范围内，它的性质和光滑圆管相同，因此，在这个范围内也可以把粗糙圆管说成是水力学光滑的，同时 λ 只取决于 R 。从某个 Reynolds 数开始（它的大小随 k_s/R 减小而增加），粗糙圆管的阻力曲线就偏离了光滑圆管的曲线，并且在某个更高的 Reynolds 数下达到了二次方阻力定律区，其中 λ 只取决于 k_s/R 。因此，必须考察下面三种状态：

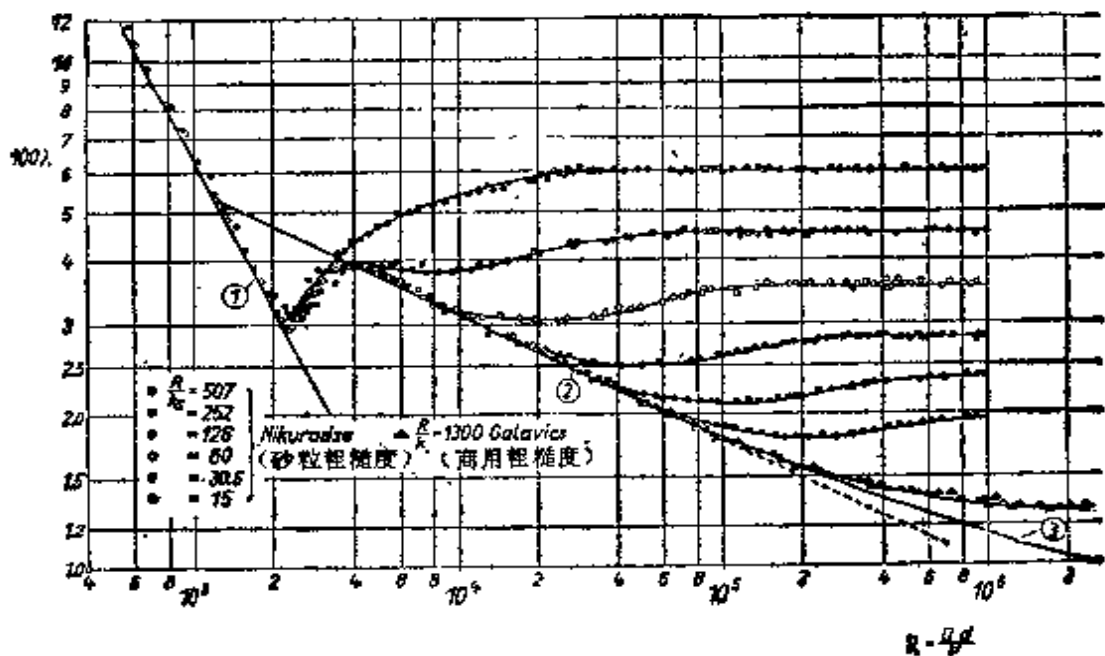


图 20.18 粗糙圆管的阻力公式

曲线(1)由式(5.11),层流;曲线(2)由式(20.5),湍流,光滑;曲线(3)由式(20.30),湍流,光滑

1. 水力学光滑¹⁾状态:

$$0 \leq \frac{k_s v_*}{\nu} \leq 5: \quad \lambda = \lambda(R).$$

这种粗糙度的尺度很小,所有突起物都埋在层流次层内。

2. 过渡状态:

$$5 \leq \frac{k_s v_*}{\nu} \leq 70: \quad \lambda = \lambda\left(\frac{k_s}{R}, R\right).$$

突起物部分地伸出了层流次层,与光滑圆管相比,附加阻力主要是由突起物在边界层内所受到的形阻造成的。

3. 完全粗糙状态:

$$\frac{k_s v_*}{\nu} > 70: \quad \lambda = \lambda(k_s/R).$$

所有突起物都伸出了层流次层,绝大部分阻力是由作用于它们的

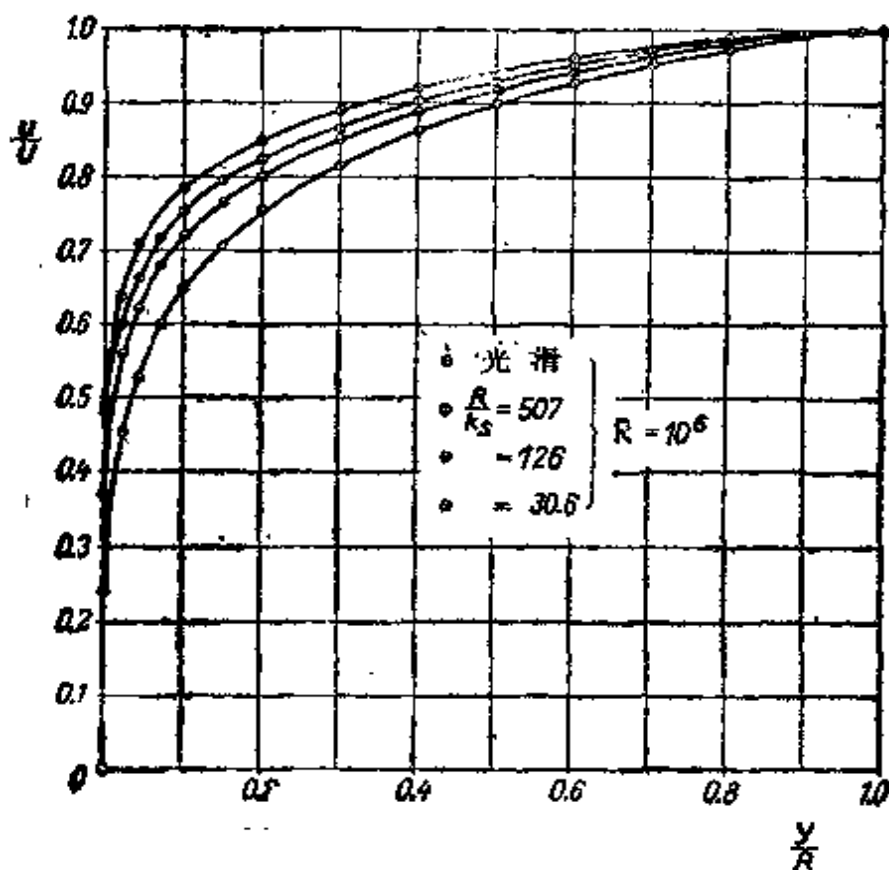


图 20.19 粗糙圆管的速度分布,根据 Nikuradse^[46]

1) 这里引用的 $k_s v_* / \nu$ 的数值将在后面由速度分布律推导出来。它们只适用于用砂粒得到的粗糙度。

形阻引起的,因此,阻力定律是二次方的。

速度分布: 图 20.19 画出了光滑圆管和几个粗糙圆管中速度比 u/U 与距离比 y/R 的关系曲线,它们都是在二次方阻力定律的适用范围内测定的,由图可见,粗糙壁面附近的速度梯度没有光滑壁面的那么陡。用式(20.6)那种幂次公式重新表示速度函数,可以得到指数为 $\frac{1}{4}$ 到 $\frac{1}{5}$ 。根据这些曲线计算的截面上混合长度的变化已经画在图 20.6 中,由图可见,这种变化对粗糙圆管和对光滑圆管完全一样。它可以用经验公式(20.18)来表示。特别是在壁面附近,我们有 $l = \kappa y = 0.4y$ 。

因此,速度分布的对数律式(19.29),对于粗糙圆管也是适用的,只是积分常数 y_0 必须取不同的数值。而且很自然的是,要使 y_0 正比于粗糙度高度 k_s ,即设 $y_0 = \gamma k_s$,因此现在式(19.29)变为

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{k_s} - \ln \gamma \right), \quad (20.31)$$

常数 γ 还要依赖于具体粗糙度的性质。将这个公式与 J. Nikuradse 的测量结果进行比较,可以发现,这些结果实际上可以用下述形式的公式来表示:

$$\frac{u}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + B, \quad (20.32)$$

其中常数 $2.5 = 1/\kappa = 1/0.4$,而 B 在前面讨论的三个粗糙度范围内各取不同的值。在完全粗糙状态范围内,我们有 $B = 8.5$,所以在这个区域内

$$\frac{u}{v_*} = 5.75 \log \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (\text{完全粗糙}). \quad (20.32a)$$

可以看到,相应的直线与测量结果符合得很好,图 20.20。一般说来, B 是粗糙度 Reynolds 数 $v_* k_s / \nu$ 的函数。根据式(20.32)和(20.14),立即得到相应于水力学光滑流动的 B 值,它是

$$B = 5.5 + 2.5 \ln \frac{v_* k_s}{\nu} \quad (\text{水力学光滑}). \quad (20.33)$$

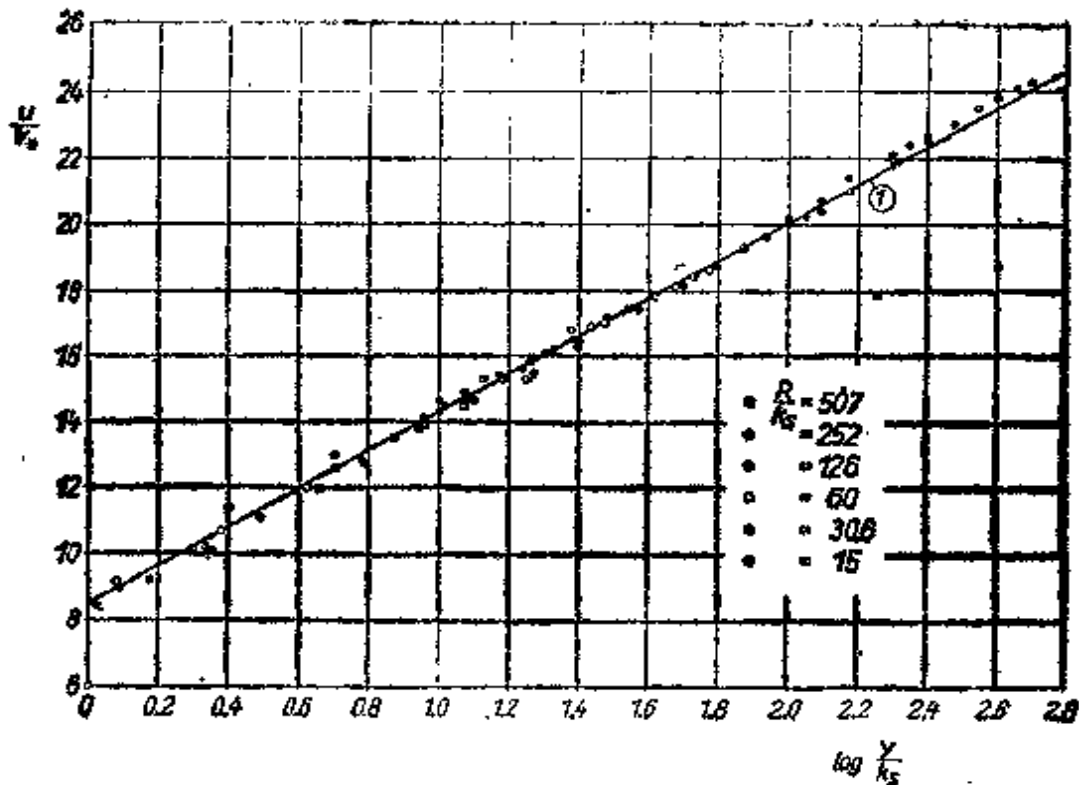


图 20.20 粗糙圆管的普适速度分布

曲线(1)由式(20.32a)得出

在从水力学光滑流动到完全粗糙流动的过渡区内， B 值相对于 $\nu_* k_s / \nu$ 的变化示于图 20.21 中，可以看出，这些点极好地落在一条曲线上。

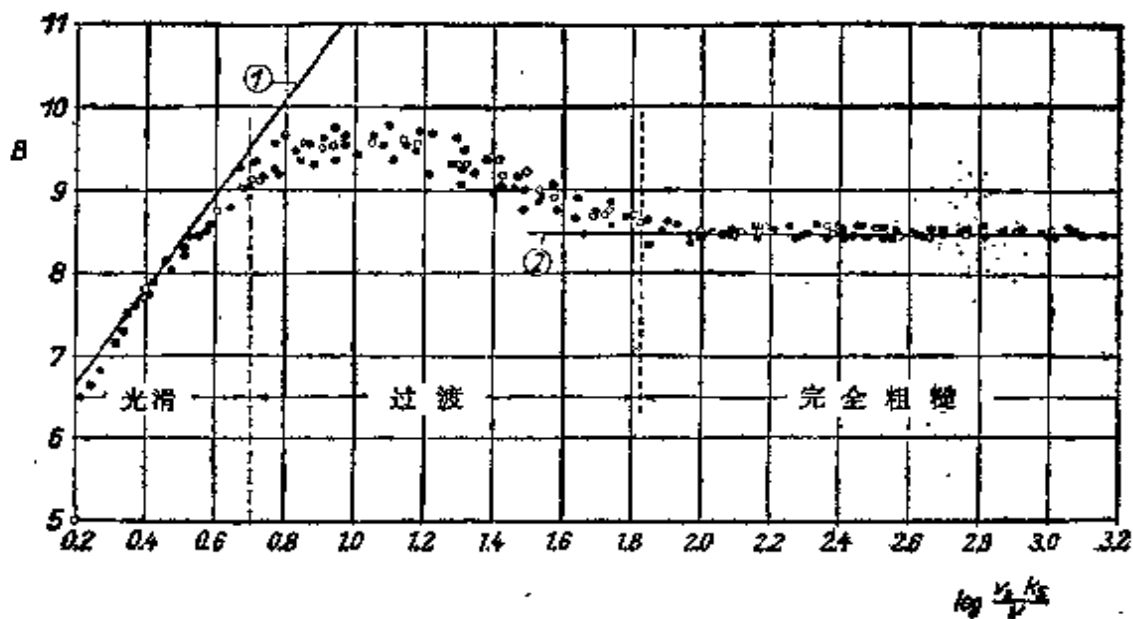


图 20.21 粗糙度函数 B 与 $\nu_* k_s / \nu$ 的关系，对于 Nikuradse 砂粒粗糙度

曲线(1)：水力学光滑，式(20.33)；曲线(2)： $B = 8.5$ ，完全粗糙

对于管轴 $y = R$, $u = U$, 写出式 (20.32), 并构成速度差 $U - u$, 可以再次得到速度亏损公式 (20.23):

$$\frac{U - u}{v_*} = 2.5 \ln \frac{R}{y} = 5.75 \log \frac{R}{y}. \quad (20.23)$$

我们知道, 它适用于图 20.7 的光滑圆管. 为了更清楚地看出光滑与粗糙圆管速度分布之间的关系, 最好是像光滑圆管的公式 (20.13) 和图 20.4 那样, 用无量纲速度 $u/v_* = \phi$ 与 Reynolds 数 $yv_*/\nu = \eta$ 的关系的形式, 重新画出这些粗糙圆管的结果. 将粗糙圆管的式 (20.32a) 写成下面形式:

$$\frac{u}{v_*} = 5.75 \log \frac{yv_*}{\nu} + D_1 \quad (\text{完全粗糙}), \quad (20.33a)$$

并与式 (20.32a) 进行比较, 可以得出

$$D_1 = 8.5 - 5.75 \log \frac{k_s v_*}{\nu} \quad (\text{完全粗糙}), \quad (20.33b)$$

按照 N. Scholz^[65] 的方法, 图 20.22 中画出了这个速度分布. 根据式 (20.33a), 它既表示粗糙圆管的速度分布, 也表示光滑圆管的速度分布. 这张曲线图由一族平行直线组成, 其中 $v_* k_s / \nu$ 起一

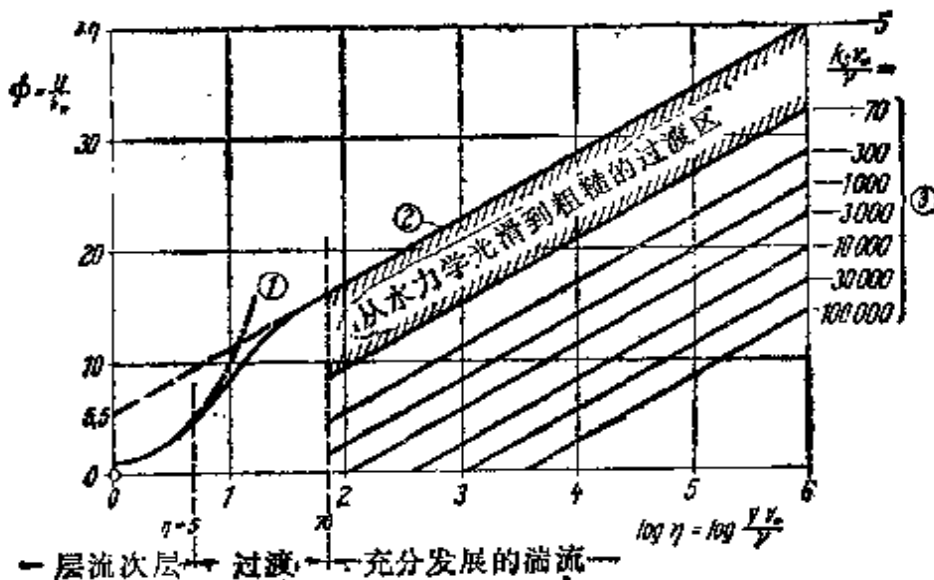


图 20.22 对光滑壁和粗糙壁都适用的圆管湍流普适速度剖面, 根据 N. Scholz^[65]

- (1) 光滑, 层流次层, $\phi = \eta$; (2) 光滑, 湍流, 式 (20.14); (3) 粗糙, 湍流, 式 (20.33a), 其中 D_1 由式 (20.33b) 得出

个参数的作用。如前所述， $v_* k_s / \nu = 5$ 的值相应于水力学光滑壁面， $v_* k_s / \nu = 5$ 到 70 之间的范围，相应于从水力学光滑到完全粗糙的过渡状态，而当 $v_* k_s / \nu > 70$ 时，流动是完全粗糙的。特别是，这张图清楚地表明，在水力学光滑圆管中厚度达 $y v_* / \nu = 5$ 的层流次层，对于完全粗糙的圆管是不重要的。

阻力公式与速度分布的关系： 这种关系对于粗糙圆管也是存在的，并且可以用本章 § 关于光滑圆管的同样方法推导出来。对于完全粗糙状态，这个关系最简单。我们首先用计算式 (20.26) 的同样方法，由式 (20.23) 计算出平均速度：

$$\bar{u} = U - 3.75 v_* \quad (20.34)$$

将由式 (20.32a) 得到的 $U = v_* (2.5 \ln R/k_s + 8.5)$ 代入上式，我们有

$$\bar{u}/v_* = 2.5 \ln(R/k_s) + 4.75,$$

或

$$\lambda/8 = (v_*/\bar{u})^2 = [2.5 \ln(R/k_s) + 4.75]^{-2},$$

即

$$\lambda = [2 \log(R/k_s) + 1.68]^{-2},$$

这是完全粗糙流动的二次阻力公式。它是 Th. von Kármán (第十九章 [17]) 根据相似律首先推导出来的。与 J. Nikuradse 的实验结果 (图 20.23) 所进行的比较表明，如果把常数 1.68 换成 1.74，可以得到更接近的吻合。所以完全粗糙状态的阻力公式成为

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{R}{k_s} + 1.74\right)^2} \quad (20.35)^0$$

实验结果非常接近于用 $1/\sqrt{\lambda}$ 相对于 $\log(R/k_s)$ 画出的直线。

1) Colebrook 和 White^[6] 建立了关联从水力学光滑到完全粗糙流动的整个过渡区的公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \log \left(\frac{k_s}{R} + \frac{18.7}{R \sqrt{\lambda}} \right) \quad (20.35a)$$

当 $k_s \rightarrow 0$ 时，这个公式变为适用于水力学光滑圆管的式 (20.30)。当 $R \rightarrow \infty$ 时，它变为完全粗糙状态的式 (20.35)。在过渡区内，式 (20.35a) 画出的 λ 对于 R 的曲线，类似于图 20.18 和 20.25 中标有“商用粗糙”的曲线。

另外值得指出的是,如果用水力学半径 $R_h = 2A/C$ (A = 面积, C = 浸湿的周长) 代替 R , 则式 (20.35) 可以用于非圆截面的管道。

同样容易导出过渡区的阻力定律与速度分布的关系。由式 (20.32), 有

$$B = \frac{u}{v_*} - 2.5 \ln \frac{y}{k_s} = \frac{U}{v_*} - 2.5 \ln \frac{R}{k_s}.$$

另一方面,由式(20.34)可以得到

$$\frac{U}{v_*} = \frac{\bar{u}}{v_*} + 3.75 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} + 3.75,$$

上面这个公式给出

$$\begin{aligned} B \left(\frac{v_* k_s}{\nu} \right) &= \frac{u}{v_*} - 2.5 \ln \frac{y}{k_s} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} + 3.75 - 2.5 \ln \frac{R}{k_s}. \end{aligned} \quad (20.36)$$

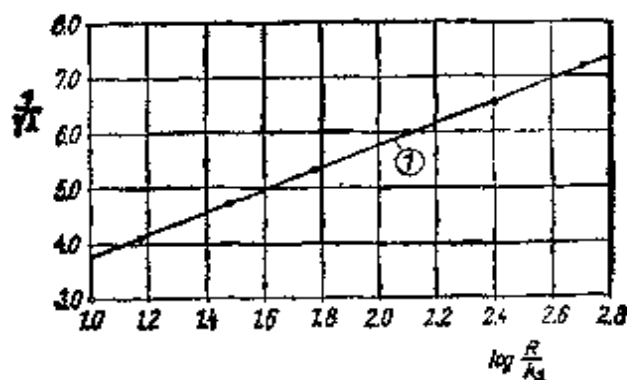


图 20.23 用砂粒粗糙的圆管在完全粗糙状态下的阻力公式

曲线 (1) 由式 (20.35) 得出

如果从速度分布得出常数 B , 最后这个公式就可用来确定阻力系数 λ 值。另一方面, 根据速度分布或根据阻力公式, 可以用式 (20.36) 确定作为 $v_* k_s / \nu$ 函数的常数 B 。图 20.21 中的图线与这两种方法的任何一种结果都符合得很好, 这就证明了, 对于粗糙圆管来说, 根据阻力公式计算速度分布也是允许的。

这三种状态之间的界限,即前面已经给出的水力学光滑流动、过渡状态、和完全粗糙状态之间的界限,现在可以直接由图 20.21 得到。我们有

$$\left. \begin{array}{l} \text{水力学光滑:} \quad \frac{v_* k_s}{\nu} < 5, \\ \text{过渡:} \quad 5 < \frac{v_* k_s}{\nu} < 70, \\ \text{完全粗糙:} \quad \frac{v_* k_s}{\nu} > 70. \end{array} \right\} \quad (20.37)$$

这些界限与在紧靠光滑壁面的边界层内测量的速度分布完全一致。速度分布是 H. Reichardt 测量的,并画在图 20.4 中。水力学光滑状态的界限 $v_* k_s / \nu = 5$ 给出层流次层的厚度,并与 Hagen-Poiseuille 纯层流速度分布律适用范围的极限相吻合。过渡状态的极限 $v_* k_s / \nu = 70$ 也与下述一点相吻合。在这点上测量的速度分布沿切向过渡到完全湍流摩擦的对数律分布,式 (20.14)。

S. Goldstein^[19] 根据如下判据成功地导出了水力学光滑状态下 $v_* k_s / \nu = 5$ 的界限: 在这一点上在单个突起物上刚要开始形成 von Kármán 涡街。根据 F. Homann 对圆柱进行的测量,这种情形将发生在 Reynolds 数等于 60 至 100 时,其中 Reynolds 数是由直径和来流速度定义的(图 1.6)。在新近的研究中, J. C. Rotta^[58] 发现,粗糙壁面层流次层的厚度比光滑壁的小,对于光滑壁可以应用式 (20.15a)。

g. 其他类型的粗糙度

Nikuradse 用砂粒得到的粗糙度可以说具有最大的密度,因为这些砂粒是尽可能紧密地粘敷在壁面上的。在许多实际应用中,壁面粗糙度的密度要小得多,而且这种粗糙度不能只用突起物的高度 k , 或其相对尺度 k/R 来描述。方便的作法是,按照标准粗糙度的某种尺度来布置这种粗糙度,并采用 Nikuradse 的砂粒粗糙度作为对比,因为后者已在很大的 R 和 k/R 值范围内进行

了研究。在完全粗糙状态下,这种对比关系最简单。如前所述,这时阻力系数由式(20.35)给出。将任意给定的粗糙度与**等效砂粒粗糙度**联系起来是方便的,并定义后者为这样的值:代入到式(20.35)后,它给出实际的阻力系数。

对于大量按规则方式布置的粗糙度, H. Schlichting^[63] 从实验上测定了它们的等效砂粒粗糙度,为此目的而使用的特殊实验风洞,具有矩形的横截面,有三个光滑侧壁和一个可更换的长侧壁,为了适应这种实验,它的粗糙度可以改变。通过测量中心截面的速度分布,就能借助于对数公式确定粗糙壁面的切应力,因而也

No	项目	尺寸	D [cm]	d [cm]	k [cm]	k _s [cm]	照片
1	圆		4	0.41	0.41	0.093	
2			2	0.41	0.41	0.344	
3			1	0.41	0.41	1.26	
4			0.6	0.41	0.41	1.56	
5			最密	0.41	0.41	0.257	
6			1	0.21	0.21	0.172	
7			0.5	0.21	0.21	0.759	
8	帽		4	0.8	0.26	0.031	
9			3	0.8	0.26	0.049	
10			2	0.8	0.26	0.149	
11			最密	0.8	0.26	0.365	
12	圆		4	0.8	0.375	0.059	
13			3	0.8	0.375	0.164	
14				2	0.8	0.375	
15	短面		4	0.8	0.30	0.291	
16			3	0.8	0.30	0.618	
17			2	0.8	0.30	1.47	

图 20.24 规则粗糙度模型的测量结果,根据 H. Schlichting^[63]:

k ——突起物的实际高度; k_s ——等效砂粒粗糙度

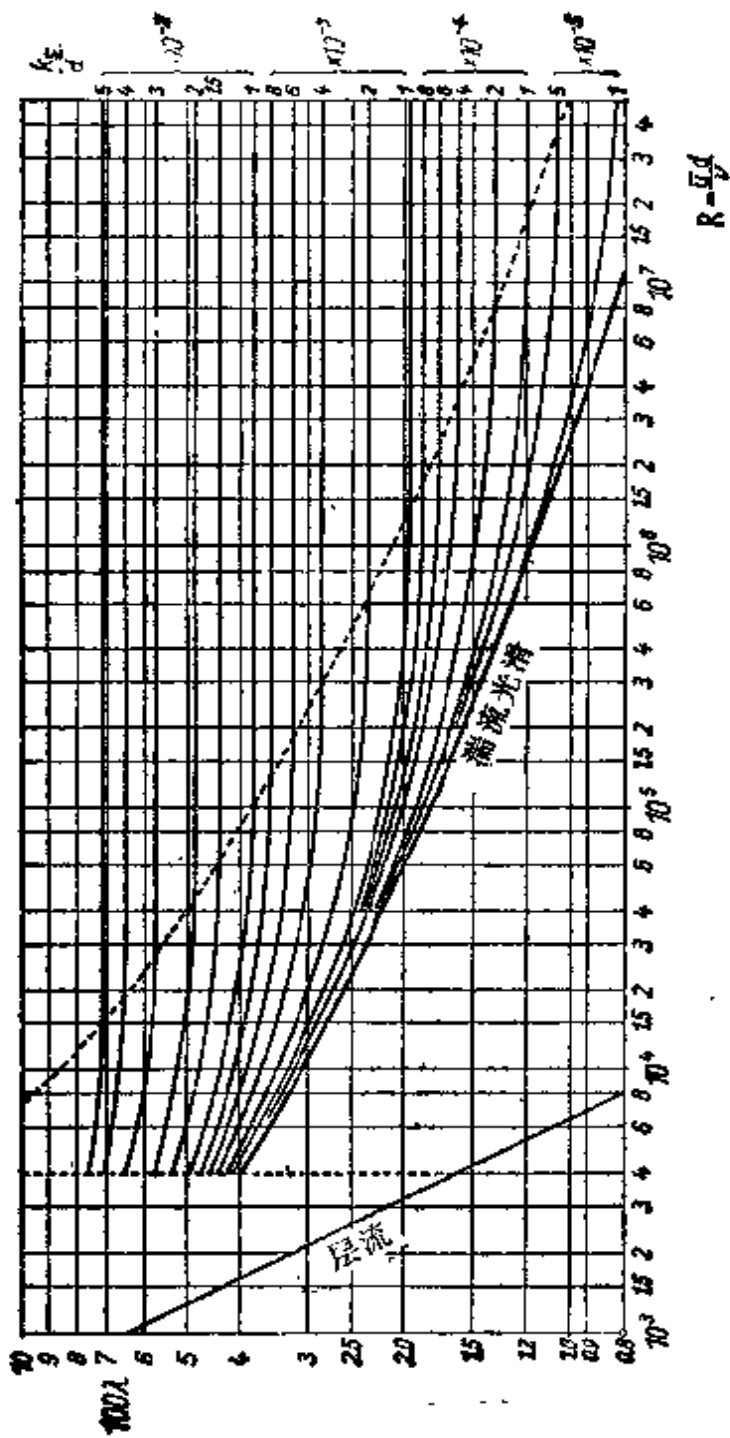


图 20.25 商用粗糙圆管的阻力, 根据 L. F. Moody⁽¹⁹⁾

k_s ——等效砂粒粗糙度, 在一些具体情形下根据图 20.26 中的附图确定, 虚线表示可以应用二次方摩擦律的完全粗糙状态的界限

能确定等效砂粒粗糙度。为此,对于给定的 k 值,只需要确定普适公式 $u/v_* = 5.75 \log(y/k) + B$ 中的常数 B 。与式 (20.32a) 相比较,我们由下式得到等效砂粒粗糙度:

$$5.75 \log k_s/k = 8.5 - B. \quad (20.38)$$

图 20.24 中概括了这种测量的一些结果。V. L. Streeter^[73] 和 H. Moebius^[39] 对管道进行了类似的测量,他们在管道内壁面刻上不同形状的条纹而使其人为地粗糙化。

一般来说,那些按工程惯例被看作是光滑的管道,并不能认为就是水力学光滑的。图 20.18 中给出了这种差别的一个例子,其中可以看到, B. Bauer 和 F. Galavics^[3] 对有热水流动的“商用光滑”钢管所做的测量结果和对于砂粒粗糙圆管的 Nikuradse 测量值画在一起。

将上述计算应用于实际情形的困难在于,对于给定的管道,其粗糙度值是不知道的,在 L. F. Moody 的一篇文章^[40]中,有商用粗糙圆管阻力的非常广泛的实际结果。图 20.25 表明,在不同的 k_s/d 值下 λ 相对于 R 的图线与图 20.18 中 J. Nikuradse 的图线大体相同。等效相对砂粒粗糙度的各自值可以由图 20.26 中的辅助图线得出,我们看到,图中那些圆管是按 Nikuradse 等效砂粒粗糙度的尺度顺序排列的。由这个事实可以得出,用 k_s/d 表示的 λ 值与图 20.18 中的 Nikuradse 值在完全粗糙状态下是一致的。在这种商用圆管中,由小 Reynolds 数下水力学光滑状态向大 Reynolds 数下完全粗糙状态的过渡,要比在 Nikuradse 的人工粗糙化圆管中的过渡缓和得多。

有时不能使商用粗糙表面令人满意地符合砂粒粗糙度的尺度。在 Ecker 谷地的输水管中发现了一种具有很大阻力系数的特殊类型的粗糙度^[68,82]。这根水管的直径是 500mm,经过长期使用后,发现其质量流量降低了百分之五十以上。通过检查注意到,管壁布满了仅有 0.5mm 高的肋条样的沉淀物,这些肋条垂直于流动方向。所以,这种几何形状的粗糙度值很小, $k/R=1/500$,然而根据阻力系数计算,其有效砂粒粗糙度的值为 $k_s/R=1/40$ 到 $1/20$,

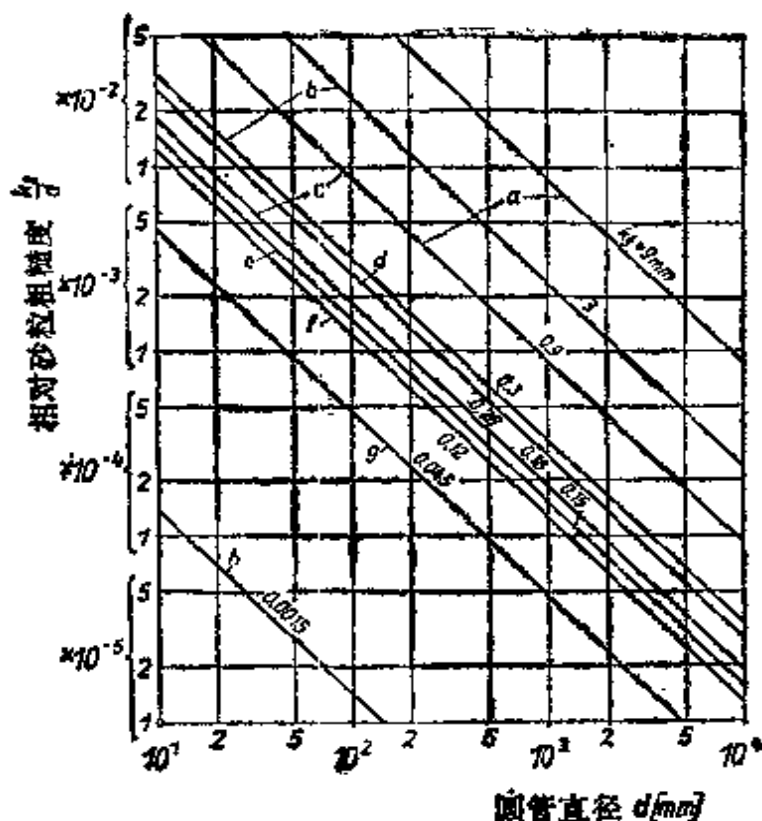


图 20.26 计算商用圆管等效相对砂粒粗糙度的辅助图线,根据 L. F. Moody^[40]

- (a) 铆接钢管; (b) 钢筋混凝土管; (c) 木管;
 (d) 铸铁管; (e) 镀锌钢管; (f) 涂沥青的钢管;
 (g) 构造和锻造的钢管; (h) 轧制管

这里阻力系数也是借助于测量的质量流量确定的,由此可以看出,肋样皱纹的阻力要比相同绝对尺度的砂粒粗糙度的阻力大得多。在 E. Huebner 的一篇文章中^[26],可以找到大量关于商用管道中阻力增加的实验描述,例如矿井中的例子。

关于粗糙壁面对流动阻力影响的更多细节,特别是一些单个突起物引起的阻力,将在讨论平板阻力的第二十一章中给出。

b. 弯曲管道和扩压器中的流动

弯曲管道: 以上关于管道流动的讨论只适用于直管道。在弯曲管道内,由于轴线附近的高速质点比壁面附近的低速质点有更大的离心力,所以存在二次流,这就出现了中心部分向外、壁面附近向内(即指向曲率中心)的二次流(图 20.27)。

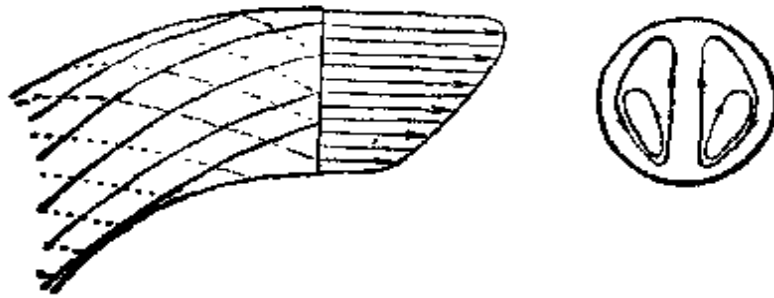


图 20.27 弯曲管道中的流动, 根据 Prandtl^[53]

曲率在层流中的影响比在湍流中的要强。C. M. White^[80] 和 M. Adler^[2] 进行了层流的实验研究。湍流情形由 H. Nippert^[47] 和 H. Richter^[56] 进行了实验研究。W. R. Dean^[10] 和 M. Adler^[2] 对层流情形进行了理论计算。在层流情形下, 决定曲率影响的无量纲特征变量是 **Dean 数**:

$$D = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{\bar{u} R}{\nu} \sqrt{\frac{R}{r}}, \quad (20.39)$$

其中 R 是截面半径, 而 r 是曲率半径。

M. Adler 对于 $r/R = 50, 100$ 和 200 所做的测量说明, 当 $R\sqrt{R/r} > 10^{1/2}$ 时, 由曲率引起的流动阻力明显增加。根据他的计算, 弯曲管道的层流阻力系数 λ 由下式给出:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 0.1064 \left[R \sqrt{\frac{R}{r}} \right]^{1/2}, \quad (20.40)$$

其中 λ_0 表示直管的阻力系数, 即式(20.30)。但是测量指出, 上式只有渐近的适用性, 它可以用于参数 $\sqrt{R/r}$ 超过约 $10^{2.8}$ 的那些值。测量的这些结果能以很高的精度用下述经验公式来近似:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 0.37 D^{0.35}, \quad (20.41)$$

该式是 L. Prandtl^[53] 首先给出的。这个公式在以下范围内与实验结果很一致:

$$10^{1.0} < R(R/r)^{1/2} < 10^{3.0}$$

C. M. White^[80] 得出, 弯曲管道的湍流阻力系数可以用下式表示:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + 0.075R^{1/4} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2}, \quad (20.42)^{1)}$$

这种形式清楚地指出，Dean 数不能再作为适合的独立变量了。后来，H. G. Cuming^[25] 对弯曲管道中的二次流现象进行了研究。

在层流情形下，Ito^[26a] 把式 (20.40) 的适用性推广到较低的 Dean 数，根据他的计算，给出阻力系数 λ 如下：

$$\lambda/\lambda_0 = 0.103K^{1/2}(1 + 3.945K^{-1/2} + 7.782K^{-1} + 9.097K^{-3/2} + \dots),$$

其中 $K = 2D$ 。如果把括号外面的数值系数换成 0.101，这个公式在 $K > 30$ 的范围内与实验结果很符合。

在湍流情形下，Ito^[27] 已经在理论上证明，阻力系数的比值 λ/λ_0 可以通过无量纲变量 $R(R/r)^2$ 来表示。Ito^[28] 的实验结果能够以足够的精度用脚注中提到的公式来表示。

在弯头和弯管流动中，不仅在弯头部分内有一些能量损失，而且在它后面的直管内也有部分由弯头引起的损失。H. Ito^[29] 给出了光滑管弯头损失系数的广泛测量，并给出了这些结果的一个相互关系。W. M. Collins 等^[5b] 报道了一些理论结果。

在径向旋转的直管内的流动中，由于 Coriolis 力的作用也产生了类似于弯管中出现的二次流，它引起了很大的阻力。关于这个课题，H. Ito 和 K. Nanbu^[30] 进行了广泛的测量和理论计算。

R. W. Detra^[31] 也进行了关于湍流摩擦损失的广泛测量和理论计算，在他的研究中还包括非圆截面的弯曲管道。可以发现，当椭圆长轴位于曲率平面内时，椭圆管道给出的阻力大于长轴垂直于曲率平面时的阻力。

1) H. Ito^[27] 给出：

$$\lambda \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} = 0.029 + 0.304 \left[R \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right]^{-0.23}; \quad 300 > R(R/r)^2 > 0.034$$

和

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left[R \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right]^{0.03}; \quad R(R/r)^2 > 6.$$

这些公式与上述 C. M. White 公式稍有不同，但总的来说还是一致的。

E. Becker^[40] 研究了固定曲率的矩形管道内的二次流, 其中截面的径向宽度比其高度大得多。D. Haase^[21] 研究了进口段急转成 90° 的矩形弯头内的死水区和分离的形成。

扩压器: J. Ackeret^[13], H. Sprenger^[69,70] 以及 S. J. Kline 和他的合作者们^[15,34,41] 对于直的和弯曲的扩压器的特性进行了大量的实验研究。这些研究的最重要的成果之一, 是进口的边界层厚度对压力恢复的效率有很大的影响。压力恢复效率定义为

$$\eta_D = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho (\bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2)} \quad (20.43)$$

这里 p 表示静压, \bar{u} 是截面上的平均速度。而下标 1 和 2 分别表示进口和出口的状态。图 20.28 中的图线代表圆截面扩压器的效率随比值 $2\delta_{11}/D_1$ 的变化。符号 δ_{11} 表示进口的位移厚度, D_1 是相应的扩压器直径。对于直扩压器, 当进口的位移厚度是半径 $\frac{1}{2} D_1$ 的 0.5% 时, $\eta_D = 0.9$, 而当 δ_{11} 增加到 $\frac{1}{2} D_1$ 的 5% 时,

降到 $\eta_D = 0.7$ 。可以进一步看出, 当偏转角增加时, 其效率降低很快。此外还可以确认, 当扩压器弯曲时, 进口的横截面形状将起重要的作用, 例如, 当进口截面为圆形而出口截面为椭圆时, 如果椭圆长轴位于曲率平面内, 则效率 η_D 要低得多。如果长轴转为垂直于曲率平面, 则效率 η_D 会增加。在前者情形下, 出现更加强烈的二次流, 它使损失增加。J. Ackeret 成功地对圆截面直扩压器的效率进行了理论计算。这是用第二十二章的湍流边界层公式做出的。由图 20.28 可以看到, 这个计算与测量结果符合得很好。H. Schlichting 和 K. Gersten^[64] 也对直扩压器的边界层进行了系统的计算。这些计算得出这样的结论: 在相同的面积比 (进口对出口) 和相同的进口 Reynolds 数情形下, 存在一个最佳的扩张夹角 2α 。这时效率 η_D 达到最大值。最佳角度位于 $2\alpha = 3^\circ$ 和 8° 之间, 并且随 Reynolds 数增加而减小。

在这方面应该注意 F. A. L. Winternitz 和 W. J. Ramsay^[83] 及 J. S. Sobey^[68b] 所进行的扩压器的实验研究。

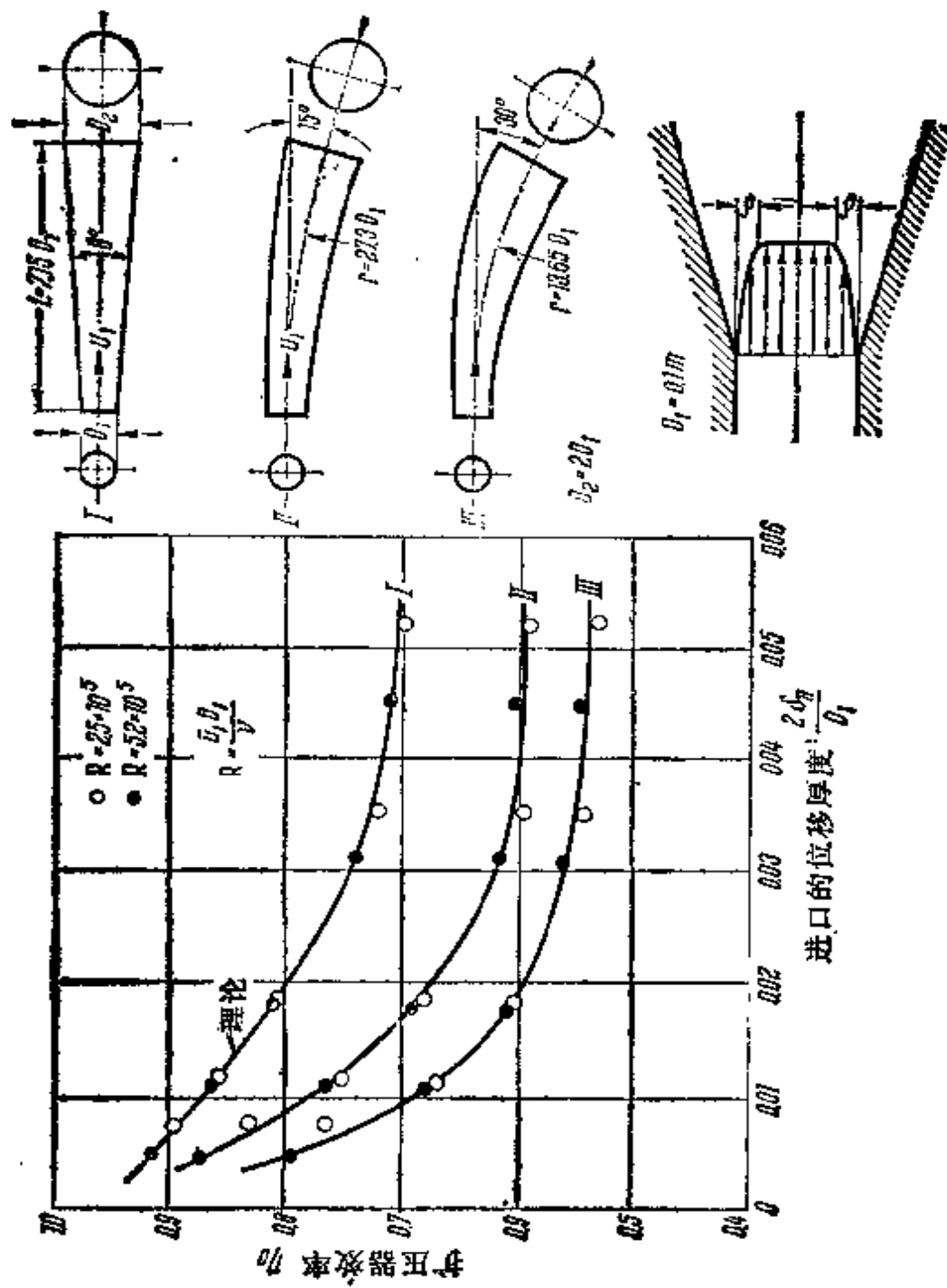


图 20.28 圆截面直的和弯曲的扩压器的扩压器效率，效率按式 (20.43) 定义，图线表示对进口边界层厚度与截面半径之比的依赖关系，根据 J. Ackeret^[191a] 和 H. Sprenger^[20]

D. J. Cockerell 和 E. Markladd^[7] 给出了扩压器中流动机制的综合评述。

i. 管道中的非定常流动

F. Schultz-Grunow^[66] 研究了脉动流动的问题，即叠加有周期脉动的定常平均流动问题。实验装置由一个管子组成，管内通入固定水头的水，它的端面面积是间歇增加和减小的。管内的速度剖面在加速期间和减速期间彼此明显不同。在加速期间，它们非常类似于逐渐收缩管道内的定常流动剖面，而在减速期间，它们很像在第二十二章说明的扩张管道(扩压器)内的定常状态剖面，在那章详细地画出了这种速度剖面。在某些情形下，在减速期间可以出现逆流和壁面附近的分离。当脉动缓慢时，阻力系数的时间平均值与其定常值没有明显的区别。在另一篇文章中，F. Schultz-Grunow^[67] 描述了一种测量脉动流动排出率的实用方法。

j. 添加聚合物减阻

在湍流中，通过添加少量的聚合物粒子，可以使管中的压力降比较式(20.30)明显减小。在层流中，类似的添加剂使压力降实际上不改变。阻力降低的程度取决于聚合物的分子量及其浓度。图 20.29 的图线描述了不同溶液浓度 c 时的阻力系数 λ 与 Reynolds 数 $R = \bar{u}d/\nu$ 的函数关系，其中 ν 是溶液的运动粘性系数。测量是 R. W. Paterson 和 F. H. Abernathy^[50a] 做出的。当浓度增加时，减小的阻力系数趋于一条减小最大的曲线，即 P. S. Virk^[77] 指出的曲线(3)。图 20.29 的图线画出了沿管道两个测量位置得到的一些实验点。这两个截面的阻力系数值的差别可以这样来解释：在湍流流动中聚合物分子被撕开，结果引起浓度沿流动方向的明显减小。尽管对这种现象进行了充分的研究(参看 M. T. Landahl^[56] 的文章)，但是对其发生原理至今还没有提出满意的解释。然而，实验明确无误地说明，阻力的减小与湍流结构的改变有关。借助于实验测量的速度分布律，可以得到对这个过程最恰当

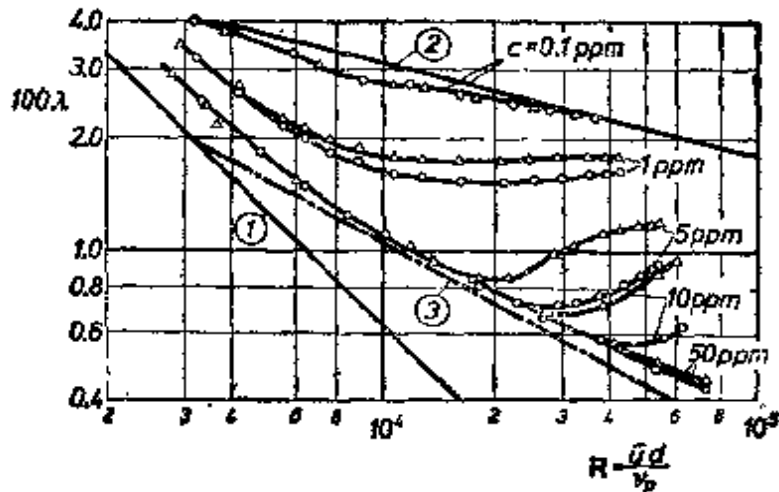


图 20.29 在聚合物溶液的湍流中，光滑圆管的阻力系数 λ 与 Reynolds 数的函数关系，R. W. Paterson 和 F. H. Abernathy^[50] 测量。给定浓度 c 的聚乙烯氧化物溶液；1ppm 表示每 10^6 克水有 1 克聚合物

ν_p = 溶液的运动粘性系数；O = 距进口 214d 的测量位置； Δ = 距进口 1541d 的测量位置；(1) 层流， $\lambda = 64/R$ ；(2) 湍流，牛顿流体，式(20.5)；(3) 最大阻力减小的渐近线，根据 P. S. Virk^[77]，式(20.45)

的说明。

根据 P. S. Virk^[78,79]，必须区分三个速度分布区：

- (1) 层流次层 ($0 \leq \eta \leq 10$)，这对应于图 20.4 中的曲线 (1)。
- (2) 充分发展的湍流区。这里的速度分布遵守式 (20.13) 的分布律，不管溶液的物理性质如何， $A_1 = 25$ 。常数 D_1 随浓度有很大变化。
- (3) 称为“弹性”区域。这个区域位于层流次层和充分发展湍流区之间^[77]。这里速度用对数律描述：

$$\varphi = 11.7 \ln \eta - 17. \quad (20.44)$$

对于足够高的浓度，这个分布律实际上可以用到管道中心。与式 (20.30) 相类似，我们可以通过积分该式来推导阻力公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 9.5 \log \left(\frac{\bar{u}d}{\nu_p} \right) - 19.3 \quad (\text{高的聚合物浓度}). \quad (20.45)$$

上面这个公式可以看作是能得到最大阻力减小的渐近律，P. S.

Virk^[76] 的实验进一步证明,在聚合物溶液的流动中,表面粗糙度的影响在很大程度上受到了抑制。最近,在一个国际讨论会论文集^[15a]中广泛地报道了这个领域的问题,还可以比较 N. B. Berman 的评述^[4a]。

第二十一章 零压力梯度的湍流边界层； 平板；旋转圆盘；粗糙度

人们可能推测，只要借助于第十九章讨论的假设之一，首先建立起粘性力大小的表达式，则根据式(19.3a)和(19.3b)，就能利用如层流边界层那样的一般方法，进行沿平板或沿任意物体的湍流边界层计算。但是，迄今这种方法尚未获得成功，因为这里存在着难以克服的困难：我们对于从湍流边界层到紧靠壁面的层流次层的过渡区一无所知，同时也不知道层流次层内的摩擦律。根据这个观点，就所谓自由湍流问题而言，其条件是比较有利的。自由湍流是不存在固体边界的湍流运动，例如当流体射流与周围静止大气混合时，或当物体后面的尾迹扩散到流动中时，就是这种流动。这些情形可以借助于微分方程和经验的湍流摩擦律来求解。至于其他湍流问题，尚未提出积分运动方程的成功方法。目前在数学上处理湍流边界层的唯一可利用的方法，是在层流边界层理论中使用过的那些近似方法。这些方法主要基于动量方程，这个方程已经在层流边界层研究中成功地得到了应用。

湍流边界层最简单的情形发生在零攻角平板上，而且这种情形有很重要的实际意义。例如，它出现在船舶、航空工程中的升力面和机身，以及涡轮机和旋转压缩机叶片等的表面摩擦阻力的计算中。零攻角平板讨论起来比较简单，因为沿壁面的压力梯度等于零，因而边界层外面的速度保持不变。在上述的一些例子中，其压力可能不等于零，但是，正如层流情形那样，只要没有发生分离，这些例子的表面摩擦力就和平板的摩擦力没有实质性的区别。所以研究平板问题是计算无明显分离的所有物体形状表面摩阻的基础。下一章包括把这种研究向有明显压力梯度的湍流边界层的推广。在许多实际情形下(船舶、飞机)，其 Reynolds 数 $R = U_{\infty} l / \nu$

(U_∞ ——来流速度, l ——板长)如此之大,以致不可能在实验室内进行测量。此外,即使在中等 Reynolds 数下,在平板边界层内进行测量也比在管道内困难得多,因此,能够根据已有的大量管道数据,利用 L. Prandtl^[40] 和 Th. von Kármán^[30] 的方法来计算平板的表面摩擦力是非常有利的。无论光滑壁面还是粗糙壁面,都可以利用这种方法计算表面摩擦力。F. R. Hama^[23] 对这方面的工作给出了一个很好的总结。

a. 光滑平板

用于这个问题的近似方法,是以第八章式(8.32)给出的边界层理论的动量积分方程为基础的,其中沿边界层厚度的速度剖面用一个适当的经验公式来近似。动量方程给出了边界层特征参数,即位移厚度、动量厚度及壁面切应力之间的关系。

在以下讨论中,我们首先假设边界层从前缘($x = 0$)开始就是湍流的,并选取一个如图 21.1 所示的坐标系, b 表示平板的宽度。边界层厚度 $\delta(x)$ 随 x 增加而增加。在将圆管数据转换为平板数据时,我们注意到,前者的最大速度 U 相应于后者的来流速度 U_∞ , 圆管半径 R 相应于边界层的厚度 δ 。

现在我们引用 L. Prandtl 的基本假设,即平板边界层内的速度分布与圆管内的速度分布相同。当然,这个假设不可能是精确的,因为圆管内的速度分布是在有压力梯度的影响下形成的,而在平板上压力梯度等于零。但是,由于阻力是由动量积分计算的,所以速度分布中的一些小差别不太重要。此外, M. Hansen^[23a] 和 J. M. Burgers^[6] 得到的实验结果已经证明,至少在中等 Reynolds 数范围内 ($U_\infty l/\nu < 10^6$), 这个假设可以得

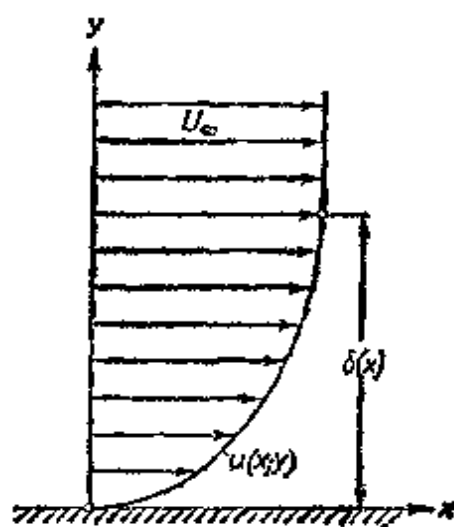


图 21.1 零攻角平板的湍流边界层

到很好的满足。他们两人都发现，在圆管中得到的幂律形式的公式 (20.6)，可以相当好地描述平板边界层内的速度剖面。当讨论管道内和平板上的速度剖面在大 Reynolds 数下的系统偏差时，我们将再次回到这个问题(第 725 页)。

由第十章式 (10.1) 和 (10.2) 可以看出，长为 x 的平板一侧的摩擦阻力 $D(x)$ 满足下述关系：

$$D(x) = b \int_0^x \tau_0(x') dx' = b\rho \int_0^{\delta(x)} u(U_\infty - u) dy. \quad (21.1)$$

这里 τ_0 表示距离前缘为 x 处的切应力，而第二个积分是在 x 处对整个边界层厚度进行积分。引进式 (8.31) 中用 $\delta_2 U_\infty^2 = \int_0^{\delta} u(U - u) dy$ 定义的动量厚度 δ_2 ，我们可以将式 (21.1) 改写如下：

$$D(x) = b\rho U_\infty^2 \delta_2(x). \quad (21.2)$$

根据式 (21.1) 和 (21.2)，可以得到局部切应力：

$$\frac{1}{b} \frac{dD}{dx} = \tau_0(x) = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx}. \quad (21.3)$$

在均匀位势流动 $U(x) = U_\infty = \text{常数}$ 的情形下，式 (21.3) 和边界层理论的动量积分方程是一样的。

现在，我们要在适用于中等 Reynolds 数的速度剖面 $\frac{1}{7}$ 次幂律的假设下，对平板阻力进行计算。以后，我们只引用一些适合于任意大 Reynolds 数的对数律的结果 (图 20.4)，因为在这种情形下，完整的计算是相当冗长的。

1. 由 $\frac{1}{7}$ 次幂速度分布律导出的阻力公式 按照前面的讨论并根据式 (20.6)，可以看出圆管速度分布的 $\frac{1}{7}$ 次幂律导致平板边界层的如下速度分布：

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad (21.4)$$

其中 $\delta = \delta(x)$ 表示边界层厚度，它是距离 x 的函数，并且要在计算过程中确定。式 (21.4) 的假设意味着沿平板的速度剖面是相似

的,即所有的速度剖面用 u/U 相对于 y/δ 画出来是同一条曲线。

壁面切应力公式也可以直接按圆管公式(20.12a)写出:

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/2}. \quad (21.5)$$

根据式(8.30)和(8.31),以及式(21.4),我们可以算出位移厚度 δ_1 和动量厚度 δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{\delta}{8}; \quad \delta_2 = \frac{7}{72} \delta. \quad (21.6)^{1)}$$

由式(21.3)和(21.6),我们有

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}, \quad (21.7)$$

于是,比较式(21.5)和(21.7),可以得到

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/2},$$

这是关于 $\delta(x)$ 的微分方程。由于 $x=0$ 处的起始值 $\delta=0$, 积分给出

$$\delta(x) = 0.37x \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/2}, \quad (21.8)$$

所以

$$\delta_2(x) = 0.036x \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/2}. \quad (21.9)$$

可以看出,边界层厚度随着距离的 $x^{1/2}$ 而增加,而在层流情形下我们有 $\delta \sim x^{1/2}$ 。在长为 l 、宽为 b 一侧浸湿的平板上,总的表面摩擦阻力由式(21.2)给出

$$D = 0.036 \rho U_\infty^2 b l (U_\infty l / \nu)^{-1/2}.$$

可以看出,湍流中平板阻力正比于 $U_\infty^{3/2}$ 和 $l^{1/2}$,而在层流情形下分别为 $U_\infty^{3/2}$ 和 $l^{1/2}$ (式(7.33))。引进局部的和总的无量纲表面摩擦力系数,即设

1) 在一般幂律 $u/U = (y/\delta)^{1/n}$ 情形下,有

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{1+n}, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(2+n)}.$$

$$c_f' = \frac{\bar{\tau}_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}, \quad \text{和} \quad c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b l}$$

可以由式 (21.3) 和 (21.2) 得到

$$c_f' = 2 \frac{d\delta_2}{dx}, \quad c_f = 2 \frac{\delta_2(l)}{l}. \quad (21.10)$$

因此, 由式 (21.9) 可以写出 $c_f' = 0.0576(U_\infty x/\nu)^{-1/2}$ 和 $c_f = 0.072(U_\infty l/\nu)^{-1/2}$. 如果将常数 0.072 换成 0.074, 则对于从前缘起就是湍流边界层的平板来说, 最后的公式与实验结果符合得很好. 于是

$$c_f = 0.074(R_f)^{-1/2}; \quad 5 \times 10^5 < R_f < 10^7. \quad (21.11)$$

图 21.2 中曲线(2)画出了阻力公式(21.11). 按照 Blasius 圆管阻

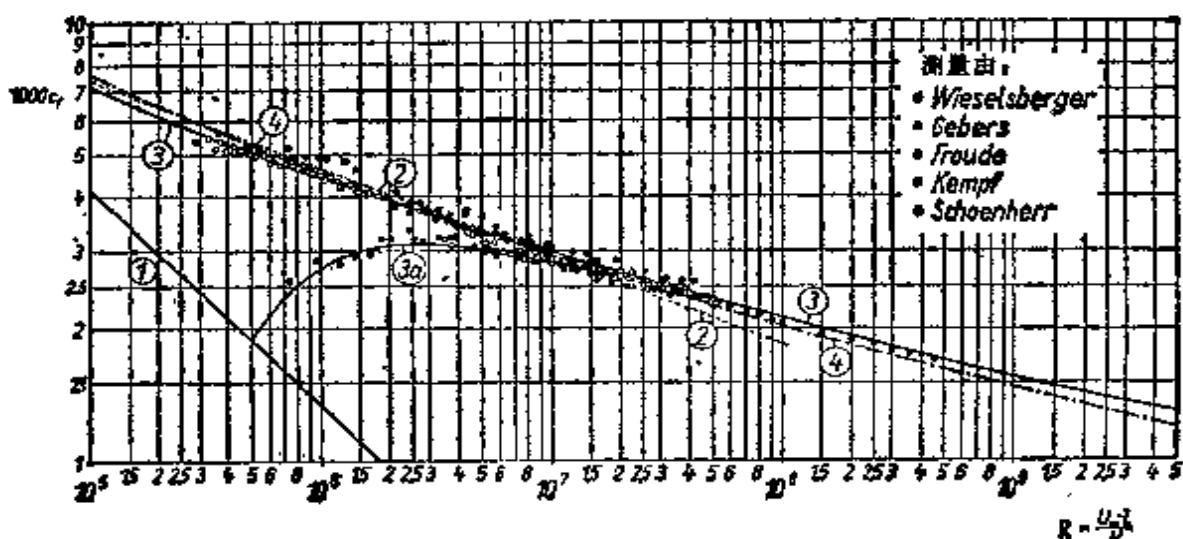


图 21.2 零攻角光滑平板的阻力公式;理论与实验之间的比较

理论曲线: 曲线(1)根据式(7.34),层流, Blasius; 曲线(2)根据式(21.11),湍流, Prandtl; 曲线(3)根据式(21.16),湍流, Prandtl-Schlichting; 曲线(3a)根据式(21.16a),层流向湍流转换; 曲线(4)根据式(21.19b),湍流, Schultz-Grunow

力公式的限制, 这个公式的适用范围限制在 $U_\infty \delta/\nu < 10^5$. 根据式(21.8), 这相当于 $U_\infty l/\nu < 6 \times 10^6$. 由于当 $R_f < 5 \times 10^5$ 时, 平板边界层完全是层流的, 所以可以规定出式(21.11)的适用范围: 只取整数, 则 $5 \times 10^5 < R_f < 10^7$. 引进数值系数的必要修正, 可以得到局部表面摩擦系数表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} &= \frac{1}{2} c' = 0.0296 (R_x)^{-1/2} \\ &= 0.0128 \left(\frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (21.12)$$

正如前面已经说过的,式(21.11)是在边界层从前缘起就是湍流的假设下成立的。实际上,边界层是从层流开始的,然后在下游才变为湍流。转捩点的位置将依赖于外流的湍流度,并且用临界 Reynolds 数来确定,其值在 $(U_\infty x/\nu) = R_{crit} = 3 \times 10^5$ 到 3×10^6 的范围内变化(参看第十六章 a)。层流区的存在使阻力减小,而按照 L. Prandtl 的做法,如果假设在转捩点后面湍流边界层的特性与从前缘开始的一样,则这种减小是可以估算出来的。因此,需要从完全湍流边界层的阻力中,减去转捩点 x_{crit} 前这段长度的湍流阻力,然后再加上这段长度的层流阻力。这样,阻力的减小为 $\Delta D = -(\rho/2)U_\infty^2 b x_{crit}(c_{ft} - c_{fl})$, 其中转捩发生在 R_{crit} , 而 c_{ft} 和 c_{fl} 分别为转捩前这段长度的湍流和层流的总表面摩擦力系数。于是,关于 c_f 的修正是

$$\begin{aligned} \Delta c_f &= -(x_{crit}/l)[c_{ft} - c_{fl}] \\ &= -(R_{x,crit}/R_l)[c_{ft} - c_{fl}]. \end{aligned}$$

设 $\Delta c_f = -A/R_l$, 我们得到由转捩点位置 R_{crit} 确定的常数值 A , 即

$$A = R_{x,crit}(c_{ft} - c_{fl}).$$

这样,包括层流起始段影响的总表面摩擦系数成为

$$c_f = \frac{0.074}{\sqrt{R_l}} - \frac{A}{R_l}, \quad 5 \times 10^5 < R_l < 10^7. \quad (21.13)$$

根据式(21.11),取 c_{ft} , 根据 Blasius 公式(7.34),取 $c_{fl} = 1.328 R_x^{-1/2}$, 我们得到 A 值如下:

$R_{x,crit}$	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1050	1700	3300	8700

2. 根据对数速度分布律导出的阻力公式 在平板问题的实际应用中, 其 Reynolds 数大大超过式(21.13)的适用范围¹⁾, 因此有必要得出一个能适用于更高 Reynolds 数的阻力公式. 原则上, 只要用与圆管流动的式(20.13)和(20.14)相类似的普适对数速度剖面公式来代替 $\frac{1}{7}$ 次幂律, 就可以用和以前一样的方法导出这种公式. 由于正如以前证明的, 普适对数公式在管流情形下能够外推到任意大的 Reynolds 数, 所以对于平板, 我们也可以期望得到一个能够外推到任意大 Reynolds 数的阻力公式. 总之, 这再次暗示我们, 管流和平板边界层表现出同样的速度剖面(还可见第 725 页).

在对数律情形下, 其推导过程不象 $\frac{1}{7}$ 次幂公式那样简单, 这主要是因为将对数律应用于平板时, 不能再得到相似的速度剖面. 因此, 我们在这里将避免重复计算的细节, 请读者参看 L. Prandtl 的原文^[40].

在式(20.14)中导出了管流的对数公式, 其形式为

$$\varphi = A_1 \log \eta + D_1, \quad (21.14)$$

其中

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{v_*} \quad \text{和} \quad \eta = \frac{y v_*}{\nu},$$

而

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$$

表示用壁面切应力 τ_0 构成的特征速度. 在第二十章中讨论的管流情形下, 其数值为 $A_1 = 5.75$ 和 $D_1 = 5.5$. 但是, 大量的实验研究(参看图 21.3)表明, 在目前讨论的这两种情形下, 即在圆管内和平板上, 其速度剖面稍有不同, 所以有必要将这两个数值修改为

$$A_1 = 5.85; \quad D_1 = 5.56. \quad (21.15)$$

计算导出了一组关于局部和总表面摩擦力的方程, 它们是用长度 Reynolds 数 $R_l = U_\infty l / \nu$ 表示的方程, 相当麻烦. 在这个过程中, 还

1) 在大型高速飞机情形下, 机翼 Reynolds 数的量级是 $R_l = 5 \times 10^7$; 大型中等快速的轮船可达约 $R_l = 5 \times 10^8$, 还可见第 746 页的表 21.3.

得出了一个无量纲边界层厚度 $v_*\delta/\nu = \eta_\delta$ 的公式. 表 21.1 中列出了数值结果, 图 21.2 中用曲线(3)画出了 c_f 相对 R_x 的关系曲线.

表 21.1 根据式 (21.14) 和 (21.15) 的对数速度剖面
计算的平板阻力公式; 参看图 21.2 中的曲线 (3)

$\left(\frac{v_*\delta}{\nu}\right) \cdot 10^{-3} = \eta_\delta \cdot 10^{-3}$	$R_x \cdot 10^{-4}$	$c_f \cdot 10^3$	$c_f \cdot 10^3$
0.200	0.107	5.51	7.03
0.353	0.225	4.54	6.04
0.500	0.355	4.38	5.48
0.707	0.548	4.03	5.05
1.000	0.864	3.74	4.59
1.30	1.20	3.53	4.33
2.00	2.07	3.22	3.92
3.00	3.43	2.97	3.57
5.00	6.43	2.69	3.23
7.07	9.70	2.53	3.02
12.0	18.7	2.30	2.71
20.0	34.3	2.11	2.48
28.3	51.8	2.00	2.34
50.0	102	1.83	2.12
100	229	1.65	1.90
170	425	1.53	1.75
283	768	1.42	1.63
500	1476	1.32	1.50

由于用来计算表 21.1 所示的阻力定律的精确公式非常麻烦, H. Schlichting 根据表 21.1 将 c_f 与 R_x 之间的关系拟合了一个经验公式, 其形式如下:

$$c_f = \frac{0.455}{(\log R_x)^{2.58}} \quad (21.16)^{1)}$$

为了对层流起始段进行修正, 需要做象前面式 (21.13) 同样的推导. 这样

1) 表 21.1 中的局部表面摩擦力系数 c_f 的结果也可以拟合如下的经验公式:
 $c_f = (2 \log R_x - 0.65)^{-2.2}$.

$$c_f = \frac{0.455}{(\log R_L)^{2.58}} - \frac{A}{R_L} \quad (21.16a)$$

其中常数值 A ，如第 721 页表中所规定的，依赖于转换点的位置。这就是零攻角光滑平板的 Prandtl-Schlichting 表面摩擦力公式。它在 Reynolds 数高达 $R_L = 10^9$ 的整个范围内都是成立的，而且直到 $R_L = 10^7$ 都与式 (21.13) 相符合。图 21.2 中用曲线 (3a) 画出了这个公式，其中选择 $A = 1700$ ，这相当于转换发生在 $R_L = 5 \times 10^5$ 的地方。作为比较，图中还画出了相应于 $c_f = 1.328 R_L^{-1/2}$ 的 Blasius 层流曲线，即曲线 (1)。

Th. von Kármán^[29] 对平板表面摩擦力作出了非常相似的理论计算。K. E. Schoenherr^[50] 利用了 von Kármán 方法，并由此导出表达式

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4.13 \log(R_L c_f). \quad (21.17)$$

在图 21.2 中可以看到，许多实验测量结果和这些理论曲线画在一起。C. Wieselsberger^[67] 在用布覆盖的光滑平板上所做的测量结果，位于湍流曲线 (2) 的上面一点，这表明在他的测量中没有明显的层流段，同时粗糙度很小。F. Gebers^[29] 在 $R_L = 10^6$ 到 3×10^7 范围内所做的测量结果，在这个范围较低的一端落在式 (21.16a) 的转换曲线 (3a) 上，在较高的 Reynolds 数下，其结果落在式 (21.16) 的曲线 (3) 上。K. E. Schoenherr^[50] 报道的测量结果也与理论符合得很好。G. Kempf^[31] 达到的 Reynolds 数最高，他得到的数值高达 $R_L = 5 \times 10^8$ 。这些结果显示出与式 (21.16a) 的理论曲线极好的一致性。D. W. Smith 和 J. H. Walker^[56] 描述了大量的实验，它们涉及到 $10^6 < R_L < 4.5 \times 10^7$ 的范围，并与 Kempf^[31] 和 F. Schultz-Grunow^[53] 的结果符合得很好，但是它们

1) 他只测量了局部摩擦力系数。L. Prandtl 通过积分计算了相应的总摩擦力系数，见 Reports AVA Goettingen, 第四部分。

略低于式(2.17)的曲线。值得注意的是, D. W. Smith 和 J. H. Walker 借助于安装在表面的 Pitot 管测量了表面摩擦力系数,而且近来许多研究者使用这种方法取得了很大的成功。在这方面可以参考 J. H. Preston^[43], R. A. Dutton^[41], G. E. Gadd^[42], P. Bradshaw 和 N. Gregory^[45], 以及 J. F. Naleid 和 M. J. Thompson^[37] 的工作。总之,上述结果已经为整个 Reynolds 数范围的测量结果所证实。

3. 进一步的改进 正如已经讲过的,前面的计算方法基于这样的假设:如果圆管的最大速度 U 和半径 R 用平板的来流速度和边界层厚度 δ 来代替的话,则平板边界层上和圆管内的速度剖面是一样的。F. Schultz-Grunow^[44] 以平板边界层非常仔细的测量为基础,检验了这个假设。研究表明,平板边界层外层的速度剖面向上系统地偏离圆管的对数速度分布律。图 21.3 给出了他的平板测量结果。正如在圆管情形

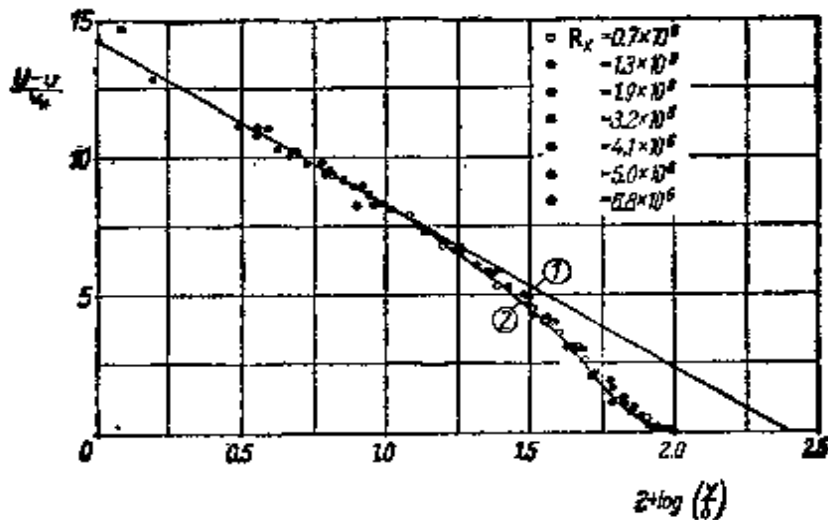


图 21.3 零攻角平板边界层内的速度分布,根据 Schultz-Grunow^[44]

曲线(1), 管流对数律。可以看出平板速度分布的外层明显偏离圆管内的速度分布。曲线(2)被 Schultz-Grunow 用来作为平板边界层计算的基础,并且导出了式(21.19a)和(21.19b)

下所发现的那样(式(20.23)),它们可以用速度亏损律很好地表示出来:

$$\frac{U_m - u}{v_*} = f_1\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (21.18)$$

可以看出,平板的动量损失略小于圆管对数公式给出的损失,因此平板阻力必定小于直接应用圆管公式得出的阻力。用式(21.18)和图 21.3 表示的速度分布对于普适对

数速度分布(壁面律,式(21.14))的偏离,已经由 F. Schultz-Grunow 根据实验确定出来¹⁾,它相当于 D. Coles^[34] 引进的所谓尾迹律。根据 F. Schultz-Grunow 的结果,尾迹律不依赖于 Reynolds 数,因此在某种程度上具有普适速度律的性质。关于尾迹律的更多的细节,读者应该参阅 D. Coles 的原文^[34]。

F. Schultz-Grunow 根据前面的那组公式,并借助于他通过实验得到的函数 $f_1(y/\delta)$,重新推导了阻力公式。其结果可以用下述插值公式来表示:

$$c_f = 0.370(\log R_x)^{-2.584}, \quad (21.19a)$$

$$c_f = 0.427(\log R_f - 0.407)^{-2.64} \quad (21.19b)$$

图 21.2 中的曲线(4)画出了最后这个公式。应该注意到,它对 Prandtl-Schlichting 曲线(3)的偏离是很小的。

L. Landweber^[35] 严格地检验了计算湍流表面摩擦力的各种方法。

K. Wieghardt^[69] 对圆管和平板速度分布之间的差别提出了一种解释,指出在这两种情形下,在边界层外缘处脉动的影响不同。在平板情形下,外流的湍流度低,速度脉动在边界层外缘处实际上等于零,而在圆管中心,由于另一侧的影响,速度脉动会有明显的数值。在平板上,外流的湍流度越低,对应着速度的增加越陡,因而边界层越薄。他还能证明,如果外流是高湍流度的,则平板的速度剖面非常接近于管流的剖面。

J. Nikuradse^[39] 也进行了一系列非常广泛的平板实验。他发现在大 Reynolds 数 $R_x = 1.7 \times 10^6$ 到 18×10^6 的范围内,如果画出 u/U 相对于 y/δ_1 的曲线,则这些速度剖面是相似的,其中 δ_1 表示位移厚度。所以普适速度分布律 $u/U = f(y/\delta_1)$ 与 Reynolds 数无关。借助于动量定理并根据测量的速度剖面,已经计算出局部和总表面摩擦力系数。

对于速度分布、位移厚度、动量厚度和表面摩擦力系数,分别得出了如下插值公式:

$$\frac{u}{U_\infty} = 0.737 \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^{0.1125},$$

$$\frac{U_\infty \delta_1}{\nu} = 0.01738 R_x^{0.861},$$

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1.30,$$

$$c_f = 0.02296 R_x^{-0.139},$$

$$c_f = 0.02666 R_f^{-0.139}.$$

关于平板表面摩擦力的计算,还可以参看 V. M. Falkner^[11] 的文章。在 D. Coles 的一篇文章中^[34],速度剖面是用两个普适函数的线性组合表示的,其中一个称为尾迹律,另一个是已经提到过的壁面律。

H. Motzfeld^[36] 进行的测量涉及波纹壁面上的湍流边界层。H. Schlichting^[64]

1) 应用圆管公式,我们有

$$f_1(y/\delta) = A \ln(\delta/y) = 2.5 \ln(\delta/y),$$

它得到图 21.3 中的一条直线。可以看出,接近壁面的那些点都落在这条直线上,而相应于边界层外层的曲线部分明显地向下偏离这条直线。

给出了一些有抽吸和吹除的湍流边界层的计算。当应用均匀(即连续均匀分布)抽吸时,就象层流那样,渐近边界层的厚度为常数,但是,在湍流情形下,边界层对抽吸流量的改变比层流情形敏感得多。A. Favre, R. Dumas 和 E. Verollet^[63] 对多孔平板湍流边界层所做的非常广泛的测量表明,应用抽吸对湍流运动有强烈的影响。

4. 有限尺度效应; 拐角内的边界层 对于零攻角有限展长的平板,可以发现,侧缘附近的边界层不再是像沿平板中心线那样的二维边界层。J. W. Elder^[13] 所进行的实验表明,侧缘附近出现了类似于在非圆截面管道内所看到的二次流(参看第二十章e)。这使得沿侧缘的局部表面摩擦系数有很大的增加。附加的阻力总是沿展向求平均。根据 Elder 的测量,这种附加阻力与长度 Reynolds 数 R_l 或平板宽度无关,这是非常明显的。但是,在非常接近平板前缘的区域却是例外,这里的局部表面摩擦系数沿流动方向和垂直于沿流动方向的变化都是无规则的。同样根据 Elder 的测量,给出阻力增加如下:

$$\Delta c_f = 3.62 \times 10^{-4} - \frac{30}{R_l} \quad (21.20)$$

这个公式的第二项说明前缘效应的迅速衰减(关于这方面的细节,读者还可以参看 A. A. Townsend^[64] 的文章)。

当两个与流动方向平行的平板构成凹角时,也会出现类似的效应。K. Gersten^[20] 研究了成直角情形的两个边界层之间的相互作用。他指出存在如下的附加阻力值:

$$\Delta D = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 l^2 \Delta c_f \quad (21.21)$$

其中,根据 K. Gersten 的分析,相互作用的贡献是

$$\text{和} \quad \left. \begin{aligned} \Delta c_f &= -\frac{5.76}{R_l} && \text{层流,} \\ \Delta c_f &= -\frac{0.0052}{R_l^{2/3}} && \text{湍流.} \end{aligned} \right\} \quad (21.21a)$$

附加阻力是负的,这意味着对连接或直角的两块平板,当只有内侧浸湿时,其阻力小于总面积相同的平板上的阻力。

E. Eichelbrenner^[12] 研究了成任意角度的拐角情形。

5. 具有抽吸和吹除的边界层 测量: 在这一节中,我们将对有抽吸和吹除的平板边界层给出简要评述,它可以作为第十四章关于有抽吸的层流边界层讨论的扩展。早在1942年,H. Schlichting^[65,67] 就对这个课题进行了最初的理论研究。后来 J. C. Rotta^[64] 进行了实验及理论研究。

在图21.4中用图线表示了 Rotta 的一些实验结果。这表示动量厚度 δ_2 沿有均匀抽吸或吹除的多孔平板的变化曲线,在壁面上有不同的抽吸速度 v_w 值。外流速度是 $U_\infty = 20$ 至 30 m/s , 而壁面法向速度在 $v_w = -0.10 \text{ m/s}$ (抽吸) 至 0.13 m/s (吹除) 范围内变化。体积系数在 $\epsilon_Q = v_w/U_\infty = -0.005$ 至 $+0.005$ 之间变化,因此是非常小的¹⁾。这些测量证实了一个众所周知的事实: 边界层厚度沿流动方向的增长

1) 抽吸和吹除是在离开前缘一小段距离后开始的,而不是从前缘开始的。

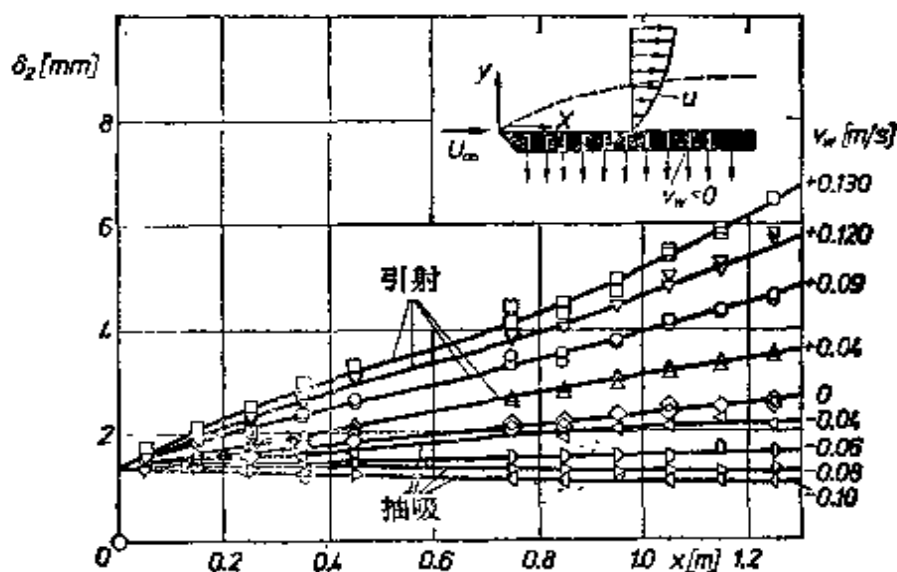


图 21.4 有均匀抽吸和引射的平板湍流边界层；沿平板的动量厚度 δ_2 ，依照式 (7.38)，J. C. Rotta^[44] 测量

率，随着吹除率的增加而增加。当 $\epsilon_Q = -0.005$ 时，边界层厚度在下游达到一个常值，并且是第十四章 b 意义上的渐近边界层。

研究有抽吸的湍流边界层有许多用途。在此可以提到，通过多孔壁面或缝隙向边界层注入外来气体，是一种非常有效的薄膜冷却法或发汗冷却法。象燃气轮机叶片那样，这将降低从热气流向固体的传热率。类似地，在以高超声速飞行的物体上，当边界层由于气动加热而变得很热时，这也是降低从边界层向物体的热流率的一种途径。吹除还可以导致阻力的显著减小。L. O. F. Jeromin^[28] 发表了一篇关于这些应用的很好的评述。

理论：为了计算有均匀抽吸的渐近湍流平板边界层，从方程 (18.12) 我们注意到，在边界层的整个厚度上法向速度 $v = v_w$ 等于常数。所以，我们可以沿法线方向积分 x 方向的运动方程，而且得到

$$v_w u = \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\tau_w}{\rho} - \overline{u'v'} \quad (21.22)$$

引进摩擦速度 $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ ，并且考虑到在离壁面较远处（即层流次层以外），比起端流应力 $-\overline{u'v'}$ 来，可以略去粘性切应力 $\nu(\partial u/\partial y)$ ，就能由式 (21.22) 得出

$$v_w u + v_*^2 = -\overline{u'v'} \quad (21.23)$$

利用式 (19.6b) 的 Prandtl 混合长度假设

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

并设 $l = \kappa y$ ，就可以由式 (21.23) 导出

$$(\kappa y)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = v_w u + v_*^2 \quad (21.24)$$

这里 $\kappa = 0.4$ 表示 von Kármán 常数。上式直接证明，速度分布可以给出如下的无量纲形式：

$$\frac{u}{v_*} = f\left(\eta, \frac{v_w}{v_*}\right), \quad (21.25)$$

按照式(19.32)，这里 $\eta = yv_*/\nu$ 是离开壁面的无量纲距离。对式(21.24)进行积分给出

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C + \frac{1}{4} \frac{v_w}{v_*} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \eta + C \right)^2. \quad (21.26)$$

式(21.26)可以当成是不可渗透湍流边界层的普适速度分布律(式(19.33))向有抽吸或吹除的可渗透壁面情形的推广。为了在我们的讨论中考虑到层流次层，最好引进 E. R. van Driest^[10] 的衰减项，即式(19.11)。图 21.5 画出了这种计算的结果。

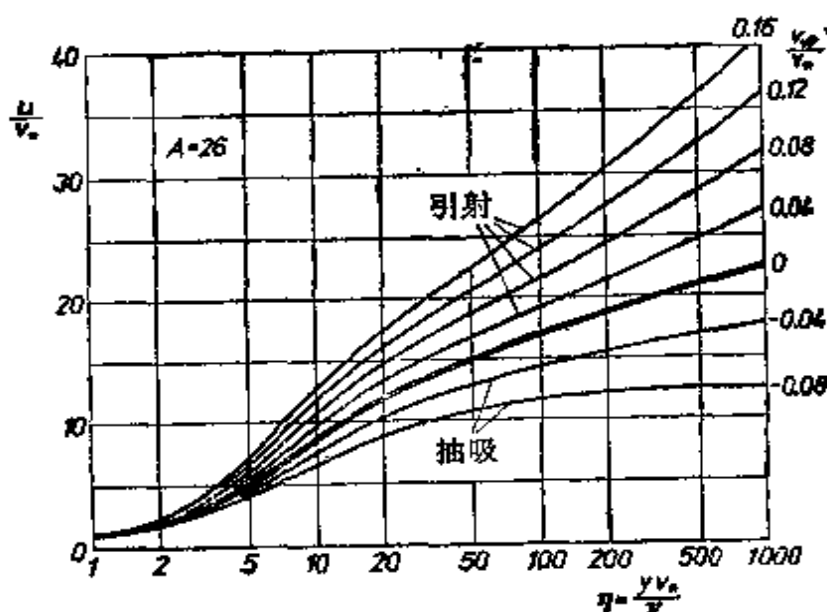


图 21.5 有均匀抽吸和引射的平板湍流边界层：理论速度分布，依照式(21.26)，根据 J. C. Rotta^[44]
 $A = 26$, van Driest 常数, 式(19.11)

图 21.6 给出了与 J. C. Rotta 实验结果的比较。如果选出可调常数 C 的适当值，则它们的符合程度是令人满意的。

L. C. Squire^[52] 对有引射的湍流边界层进行了实验研究，将同质或异质气体通过多孔壁面注射到 Mach 数 $M = 3.6$ 的可压缩气体中。计算表明，Prandtl 混合长度假设在这里也得出了满意的结果。

b. 旋转圆盘

1. “自由”圆盘 旋转圆盘附近的流动具有很重要的实际意义，特别是它与旋转机械密切相关。像平板流动情形一样，这种流

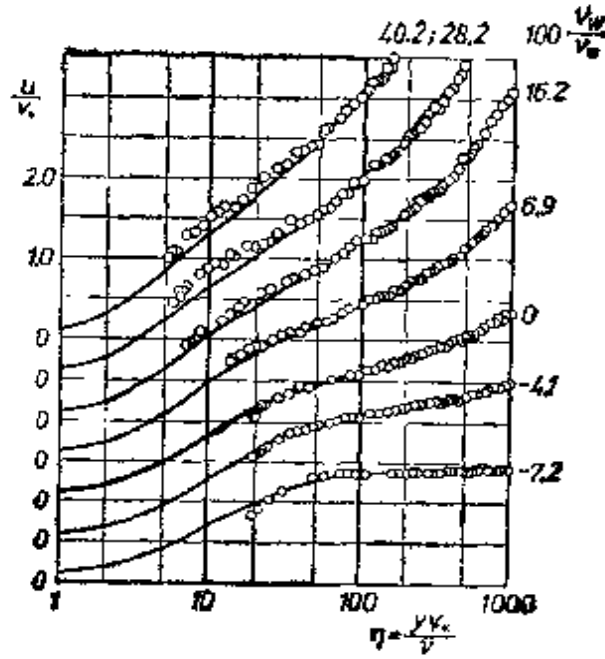


图 21.6 有均匀抽吸和引射的平板湍流边界层不同抽吸参数 v_w/v_* 下的边界层速度分布，依照式 (21.26)，根据 J. C. Rotta^[44]

○ 测量； - 计算

动在大 Reynolds 数下 ($R = UR/\nu > 3 \times 10^5$) 也将变为湍流。这里 R 表示半径，而 $U = \omega R$ 是圆盘边缘速度。在第五章 11 中描述了这种流动的性质，其中给出了圆盘在无限大流体中旋转时（“自由”圆盘）的层流精确解。由于摩擦作用，紧靠圆盘的流体被带动起来，然后在离心加速度的作用下被迫向外流开。边界层内的速度有径向分量和切向分量，同时由于离心力的驱使而向外流动的流体质量要由轴向流动来补偿。在层流中对粘性力和离心力的平衡做一简单估算，就可以证明边界层厚度 δ 正比于 $\sqrt{\nu/\omega}$ ，因而与半径无关，同时，正比于 $\mu R^3 U/\delta$ 的力矩必然由 $M \sim \rho U^2 R^3 (UR/\nu)^{-1/2}$ 这种形式的表达式给出。层流情形的精确解进一步表明：对于双面浸湿的圆盘，定义为

$$C_M = \frac{2M}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^5} \quad (21.27)$$

的无量纲力矩系数由式 (5.56) 给出，并且等于

$$C_M = 3.87R^{-1/2} \quad (\text{层流}), \quad (21.28)$$

其中 $\bar{R} = R^2\omega/\nu$ 是 Reynolds 数 (图 5.14)。

现在打算以平板情形下使用过的湍流阻力公式为基础, 在最简单的情形下, 即以速度分布的 $\frac{1}{7}$ 次幂律为基础, 对湍流情形做同样的估算。在离轴线距离为 r 且在边界层内旋转的流体质点上, 作用有大小为 $\rho r\omega^2$ 的单位体积离心力。在面积为 $dr \times ds$ 和高为 δ 的体积上作用的离心力为 $\rho r\omega^2\delta dr \times ds$ 。切应力 τ_0 与切向成 θ 角, 其径向分量必须与离心力相平衡。所以我们有

$$\tau_0 \sin\theta dr \times ds = \rho r\omega^2\delta dr \times ds,$$

或

$$\tau_0 \sin\theta = \rho r\omega^2\delta.$$

另一方面, 切应力的切向分量可以用在平板情形下使用的式 (21.5) 来表示, 同时用切向速度 $r\omega$ 来代替 U_∞ 。这样

$$\tau_0 \cos\theta \sim \rho(\omega r)^{7/4}(\nu/\delta)^{1/4}.$$

使这两个表达式中的 τ_0 相等, 可以发现

$$\delta \sim r^{3/5}(\nu/\omega)^{4/5}.$$

可以看出, 在湍流情形下, 边界层厚度按 $r^{3/5}$ 的比例向外增加, 而不再象层流那样保持常数。另外, 力矩为 $M \sim \tau_0 R^3 \sim \rho R\omega^2(\nu/\omega)^{1/5} R^{3/5} R^3$, 所以

$$M \sim \rho U^2 R^3 \left(\frac{\nu}{UR} \right)^{4/5}.$$

Th. von Kármán^[30] 通过动量方程和类似于上节在平板研究中使用的近似方法, 研究了旋转圆盘上的湍流边界层。假设横跨边界层的切向速度分量的变化遵守 $\frac{1}{7}$ 次幂律, 这样, 对于双侧浸湿的圆盘, 可以证明其粘性力矩等于

$$2M = 0.073\rho\omega^2 R^5 (\nu/\omega R^2)^{1/5}, \quad (21.29)$$

而用式(21.27)定义的力矩系数为

$$C_M = 0.146R^{-4/5} \quad (\text{湍流}). \quad (21.30)$$

在图 5.14 中已用曲线(2)画出了这个公式。当 $R > 3 \times 10^5$ 时,

它显示出与 W. Schmidt 和 G. Kempf¹⁾ 的实验结果很好的一致性。在边界层厚度公式中尚未确定的数值系数为 0.526, 于是

$$\delta = 0.526r(\nu/r^2\omega)^{1/3}, \quad (21.31)$$

对应于层流中的式(5.57), 这里给出沿轴向的体积流量为

$$Q = 0.219R^3\omega R^{-1/3}. \quad (21.32)$$

S. Goldstein^[21] 基于对数速度分布律 $u/v_* = A_1 \ln(yv_*/\nu) + D_1$ 进行了近似计算, 他得到了下述力矩公式:

$$\frac{1}{\sqrt{C_M}} = 1.97 \log(R\sqrt{C_M}) + 0.03 \quad (\text{湍流}) \quad (21.33)$$

值得注意的是, 这个公式具有与普适圆管阻力公式(20.30)同样的形式。为了得到与实验结果尽可能好的一致, 其数值系数已做了调整。图 5.14 中用曲线(3)画出了这个公式。关于这个课题, 还可参看 P. S. Granville^[22] 的文章。

2. 外壳内的圆盘 涡轮机和旋转压缩机内的圆盘基本上是在很紧的外壳内运行的, 其中与圆盘半径 R 相比, 间隙的宽度是较小的(图 21.7), 因此, 有必要研究外壳内的旋转圆盘问题。

层流。 当流动是层流, $R < 10^5$, 且间隙很小时, 流动关系特别简单。如果间隙 s 小于边界层厚度, 则切向速度横跨间隙的变化就像 Couette 流动那样是线性的。所以, 离开转轴距离为 r 处的切应力等于 $\tau = r\omega\mu/s$, 圆盘一侧的粘性力矩等于

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = \frac{\pi}{2} \frac{\omega\mu R^4}{s}.$$

这样, 对于圆盘的两侧, 我们有

$$2M = \pi\omega R^4\mu/s,$$

而式(21.27)的力矩系数为

$$C_M = 2\pi \frac{R}{s} \frac{1}{R} \quad (\text{层流}). \quad (21.34)$$

当 $s/R = 0.02$ 时, 图 21.8 中用曲线(1)画出了这个公式, 它与

1) 参看第五章中的文献 [16] 和 [31].

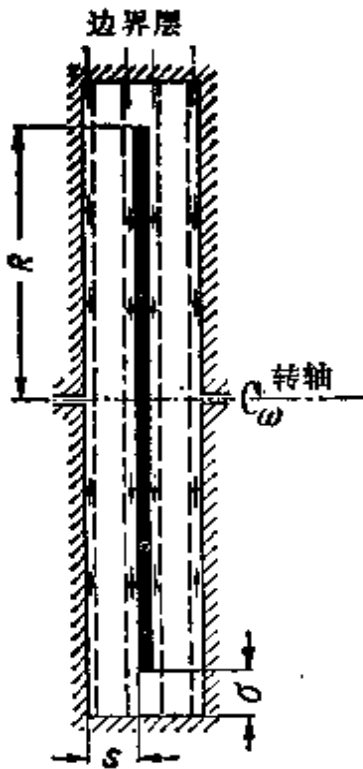


图 21.7 外壳内旋转圆盘问题的符号说明

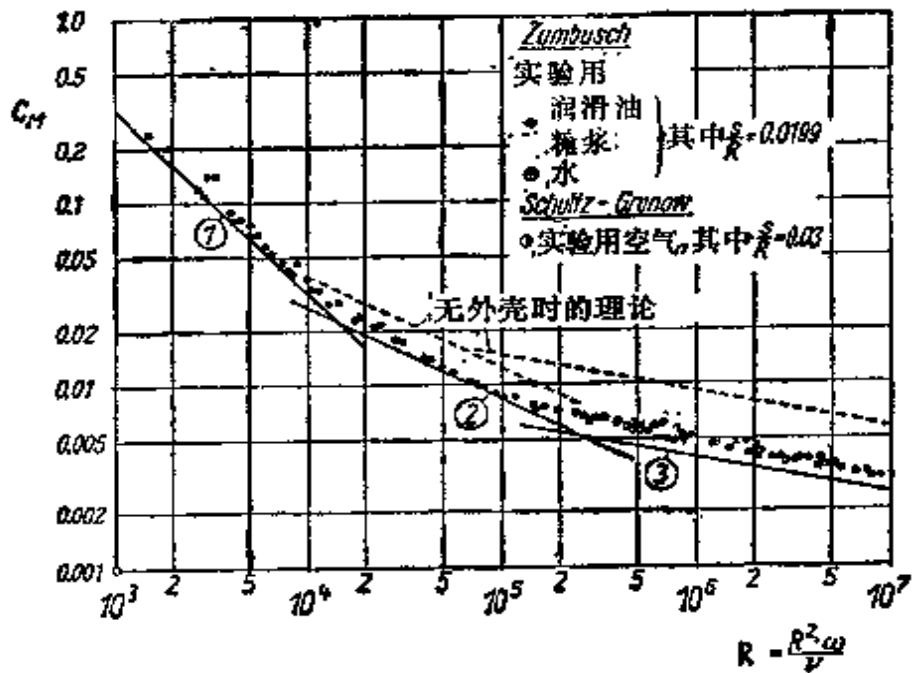


图 21.8 外壳内旋转圆盘的粘性阻力
 曲线(1), 根据式(21.34), 层流; 曲线(2), 根据式(21.35), 层流; 曲线(3), 根据式(21.36), 湍流; 无外壳(自由圆盘)的理论, 参看图 5.14

O. Zumbusch 的实验值(参看文献[54])符合得很好。

C. Schmieden^[49] 在很小的 Reynolds 数(蠕动流)假设下, 研究了在圆柱形外壳内圆盘边缘间隔宽度 σ (图 21.7)的影响。由于 Reynolds 数很小, 所以 Navier-Stokes 方程可以得到简化(参看第四章 d), 而且力矩系数的解以 $C_M = K/R$ 的形式出现, 它类似于式(21.34)。常数 K 依赖于两个无量纲的比值 s/R 和 σ/R 。在 σ/R 值很小 ($\frac{\sigma}{R} < 0.1$) 的情形下, C_M 值明显大于式(21.34)的值, 而对于较大的 σ/R 值, 式(21.34)仍然成立 ($K = 2\pi R/s$)。

在大间隙情形下, 流动图象明显地不同于上述的简单图象。F. Schultz-Grunow^[54] 从理论上和实验上研究了这种情形。如果间隙是边界层厚度的几倍, 则在外壳上将形成另外一个边界层(图 21.7)。旋转圆盘边界层中的流体离心向外流动, 同时这将由静止

外壳边界层中向内的流动来补偿。在流体旋转角速度约为圆盘角速度一半的中间层内,没有明显的径向分量。F. Schultz-Grunow 研究了这种流动的层流和湍流情形。力矩表达式的形式和自由圆盘的式(5.56)一样,只是数值系数不同。在层流和两侧浸湿的圆盘上,摩擦力矩为 $2M = 1.334\mu R^4\omega\sqrt{\omega/\nu}$, 因此力矩系数为

$$C_M = 2.67R^{-1/2} \quad (\text{层流}). \quad (21.35)$$

在图 21.8 中用曲线(2)画出了这个公式。直到约 $R = 2 \times 10^5$, 它都与测量值相符合,并且与式(21.34)连接得相当好。

湍流。当 Reynolds 数 $R > 3 \times 10^5$ 时,外壳内旋转圆盘周围的流动通常是湍流。F. Schultz-Grunow 基于图 21.7 的示意图用近似方法解决了这个问题。假设切向速度遵守 $\frac{1}{7}$ 次幂律,并且证明在这种情形下核心区的角速度也大约等于圆盘角速度的一半。力矩系数等于

$$C_M = 0.0622(R)^{-1/5} \quad (\text{湍流}). \quad (21.36)$$

图 21.8 中用曲线(3)画出了这个公式。与测量结果相比较,这个公式得到的值约小百分之十七;这显然是由于在计算中使用的粗糙假设造成的。

特别值得注意的是,除了间隙非常小的情形外(式(21.34)),从式(21.35)和(21.36)可以看出,粘性力矩完全不依赖于间隙的宽度。将“自由”圆盘与外壳内旋转圆盘的摩擦力矩相比,即将式(21.35)和(21.36)与式(21.28)和(21.30)相比,可以看出,自由圆盘上的力矩大于外壳内旋转圆盘上的力矩(图 21.8)。这个事实可以用存在核心区来解释。核心区的旋转角速度为圆盘角速度的一半,这就使切向速度的横向梯度大约减小到自由圆盘的一半,因此,阻力也小于“自由”圆盘的阻力。

后来 J. Dailey 和 R. Nace^[8b] 从实验上研究了图 21.7 所描绘的流动过程:旋转圆盘上的边界层向外流动,而外壳上的边界层向内流动。它们的测量涉及的范围很宽,间隙宽度 $s/R = 0.01$ 到 0.20, Reynolds 数 $R = R^2\omega/\nu = 10^3$ 到 10^7 , 并包括层流和湍

流两种情形。图 21.8 中所示的关于力矩的结果已经基本上得到证实。

传热: 在燃气轮机设计中, 从受热的旋转圆盘到较冷的静止外壳的传热率是重要的。在圆盘和外壳之间的间隙内形成的温度场, 强烈地受到间隙内复杂流动图象的影响, 而这又对从圆盘到外壳的热流有很大的影响。一些年前 K. Millsaps 和 K. Pohlhausen^[24a] 研究了较简单的“自由”旋转圆盘的情形, 还可见第二十章 d 和图 5.11。在 R. Caly^[6a] 发表在 Aachen 大学的论文中, 可以找到在层流和湍流情形下关于外壳内圆盘的理论 and 实验的资料。Caly 既对速度边界层也对温度边界层进行了测量, 并包括了具有单个边界层的窄间隙情形和两个边界层分开的宽间隙情形, 其中一个在内壁上, 一个在外壁上。在大多数情形下, 得到了理论与热流测量之间很好的一致性。

c. 粗糙平板

1. 均匀粗糙平板的阻力公式 在与平板有关的大多数实际应用中(例如, 船舶、飞机的升力面、涡轮机叶片等), 不能认为壁面是水力学光滑的。因此, 就象粗糙圆管流动那样, 沿粗糙平板的流动具有很大的实际意义。

圆管的相对粗糙度 k/R 现在用 k/δ 来代替, 其中 δ 表示边界层厚度。粗糙管流和沿粗糙平板流动之间的本质差别在于, 由于 δ 沿顺流方向增加, 所以当 k 保持不变时, 相对粗糙度沿平板减小, 而在圆管内 k/R 保持常数。就粗糙度对阻力的影响而言, 这种情形使平板前后两部分表现出不同的特性。为了简单起见, 假设边界层从前缘开始就是湍流的。我们发现, 前面部分是完全粗糙平板的流动, 接着是过渡状态, 最后, 如果平板足够长, 它可以是水力学光滑的。这三个区域的界限用无量纲粗糙度参数 $\nu_* k/\nu$ 确定, 和砂粒粗糙度给出的式 (20.37) 一样。

与本章 a 给出的详细叙述完全相似, 用和光滑平板完全相同的方法, 可以把圆管的计算结果转换到粗糙平板的情形。L. Pran-

dtl 和 H. Schlichting^[41] 利用 Nikuradse 的砂粒粗糙圆管的结果 (第二十章 f) 进行了这种计算。计算基于式(20.32)那种形式的粗糙圆管的对数速度分布律, 由此 $u/v_* = 2.5 \ln(y/k_s) + B$ 。图 20.21 中的图线给出了粗糙度函数 B 对粗糙度参数 $v_* k_s / \nu$ 的依赖关系。这种计算基本上和本章 a 是一样的, 但对于过渡状态和完全粗糙状态必须分别进行计算。关于这个方法的细节, 需要参考原文。

可以用两张曲线图, 即图 21.9 和图 21.10 来表示这个结果。图中画出了总摩擦阻力系数 c_f 和局部摩擦阻力系数 c_f' 相对 Reynolds 数 $R = U_\infty l / \nu$ 的关系, 其中使用相对粗糙度作为参数。在局部系数情形下, 使用了 $U_\infty x / \nu$ 和 x/k_s 。另外, 这两张图还有 $U_\infty k_s / \nu = \text{常数}$ 的曲线, 它们可以根据前面的曲线立即计算出来。这两族曲线的意义如下: 如果改变给定平板上的速度, 而 l/k_s 保持不变, 则表面摩擦力系数沿 $l/k_s = \text{常数}$ 的曲线变化; 另一方面,

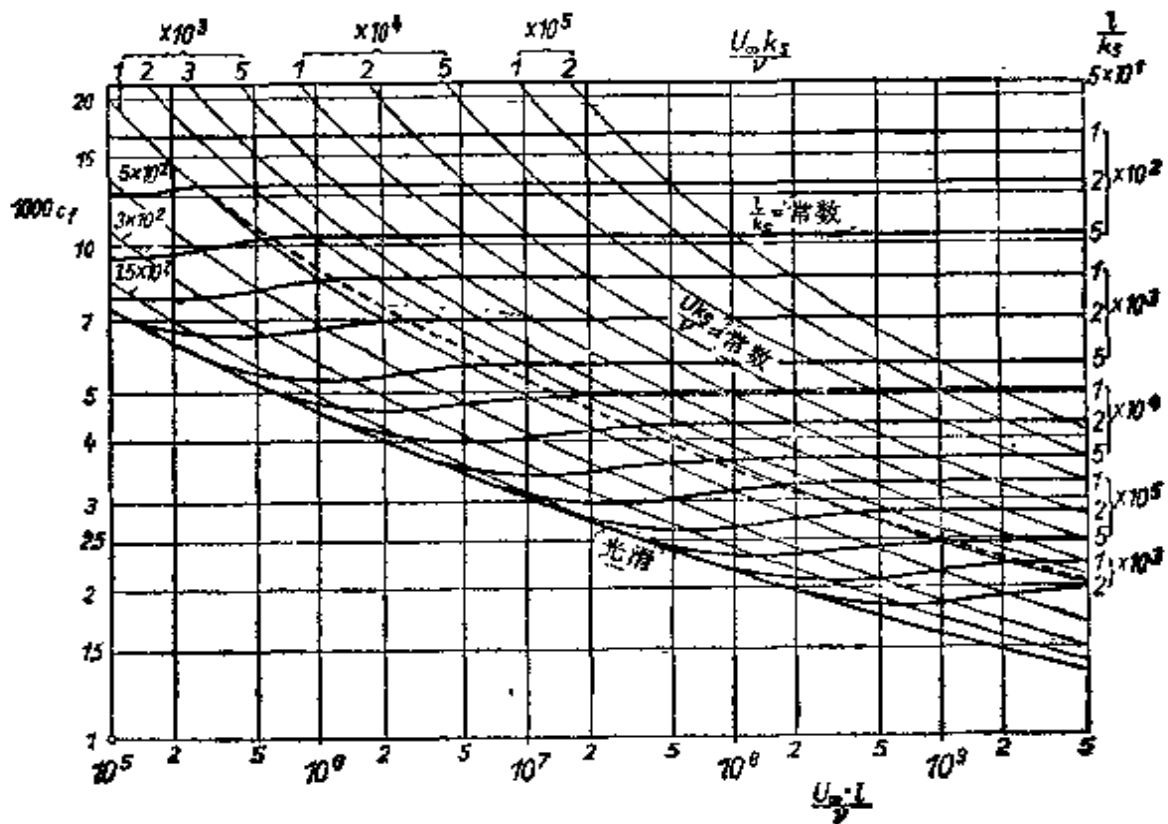


图 21.9 砂粒粗糙平板的阻力公式, 总表面摩擦力系数

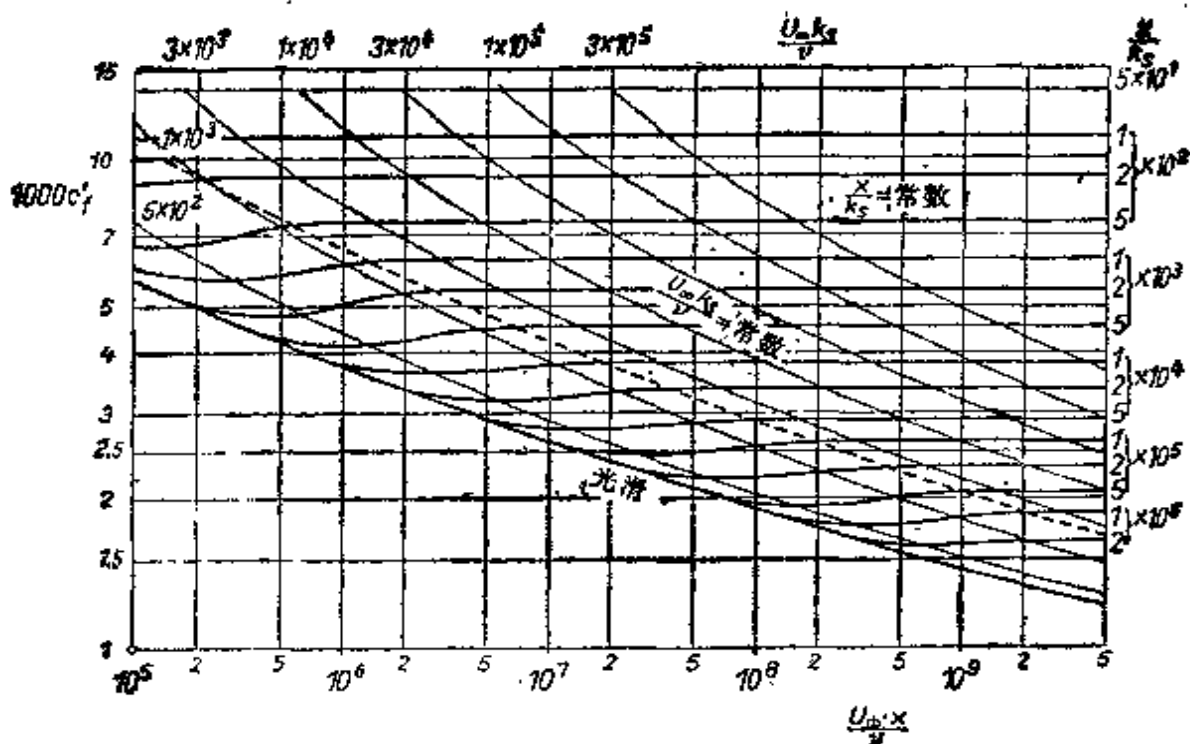


图 21.10 砂粒粗糙平板的阻力公式,局部表面摩擦力系数

如果改变板长,而 $U_{\infty} k_s / \nu$ 保持不变,则表面摩擦力系数沿 $U_{\infty} k_s / \nu = \text{常数}$ 的曲线变化。这两张图是在湍流边界层刚好从前缘开始的假设下计算出来的。图中的虚线表示完全粗糙度的界限。可以指出,与管流完全相似,只有当 Reynolds 数超过某个值时,一个给定的相对粗糙度才会引起表面摩擦力系数的增加(参看本章 d)。

在完全粗糙状态下,可以使用下述用相对粗糙度表示的表面摩擦力系数的插值公式:

$$c_f = \left(2.87 + 1.58 \log \frac{x}{k_s} \right)^{-2.5}, \quad (21.37)$$

$$c_f = \left(1.89 + 1.62 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2.5}, \quad (21.38)$$

它在 $10^2 < l/k_s < 10^6$ 的范围内成立。

为了能对不是砂粒的粗糙度使用这些曲线图,必须象第二十章 g 说明的那样确定出等效砂粒粗糙度。

在船舶阻力计算中,重要的是要考虑粗糙度很小的板(涂漆的

金属板)以及覆盖一些单个突起物(例如铆钉头、焊缝、接头等)的光滑板。F. Schultz-Grunow^[52] 在第二十章中提到的 Goettingen 研究所的开口水槽中,对这些表面做了大量的测量。在 G. Kempf^[52] 的几篇文章中,也可以找到关于在造船业中出现的粗糙度的另外一些综合数据。根据这些测量,对新下水的船,可以使用等效砂粒粗糙度的平均值 $k_s = 0.3\text{mm}$ (近似等于 0.12in)。在船舶所遇到的高 Reynolds 数情形下,与水力学光滑壁面相比,由于粗糙度的影响,将使阻力增加百分之三十四到四十五。由于附着在船身的杂草引起的粗糙度,对于阻力有特别不利的影响。在这种情形下,与正常条件相比,很可能使阻力增加百分之五十。在涡轮机、涡轮压缩机及类似的发动机中,表面粗糙度也是重要的。通常制造的叶片的表面光滑度,不足以保证水力学光滑条件^[17a,57],还可见第 744 页。

如 A. D. Young^[69] 进行的研究所证明的,飞机表面使用的伪装油漆可以很好地折合成等效砂粒粗糙度,在研究中已经测量出等效砂粒粗糙度为 $k_s = 0.003$ 到 0.2mm (近似为 0.0001 到 0.1in),它约等于平均几何突起物尺寸的 1.6 倍,即 $k_s = 1.6k$ 。在这方面值得指出的是,在亚音速流动范围内,由粗糙度引起的阻力增加不依赖于 Mach 数。

W. Paeschke^[39] 证明,在这些实验研究中产生的沿粗糙壁面流动的摩擦定律,可以应用到地球表面上自然风的运动。覆盖有各种植被的有效表面粗糙度,可以通过测量靠近地球表面的风速分布来确定。由管流结果导出的表示粗糙表面上方速度剖面的式(20.32) ($u/v_* = 2.5 \ln(y/k) + B$) 在这里得到确认,当把植被的物理高度作为粗糙度参数 k 时,得到 $B = 5$ 。依照式(20.38),这相当于取等效砂粒粗糙度 $k_s = 4k$ 。

2. 单个粗糙元的测量 K. Weighardt^[66] 在 Goettingen 的一个专用风洞中对粗糙度进行了大量的测量。这个靠空气运行的风洞,壁面光滑,长 6m (约 20ft),有 $140 \times 40\text{cm}$ (约 $4.5 \times 1.3\text{ft}$) 的矩形截面的实验段。阻力是用连接到一块矩形试验平板 ($50 \times 30\text{cm}$, 或约 $1.65 \times 1.00\text{ft}$) 的天平测量的。这块试验平板放进风洞下壁 ($1.4 \times 6\text{m}$ 或约 $4.5 \times 20\text{ft}$) 的一个凹槽内,它可以在一个小距离内自由运动。有粗

糙元和没有粗糙元的试验平板的阻力之差，给出了由于粗糙度引起的阻力增加 ΔD 。一般来说，这种增加由两项组成，第一项是粗糙度本身的形阻，第二项归因于粗糙元的存在改变了它附近的速度剖面，因而改变了例如凸起后面倒流区的壁面切应力。粗糙元高度与边界层厚度之比 k/δ ，是把这种结果应用到实际的船体和飞机上去的一个重要参数。当把同样的粗糙元放到风洞壁面的不同位置时，这个比值是不同的。从实际应用的观点出发，用附加阻力定义一个适当的无量纲系数也是重要的。K. Wieghardt 使用了如下定义的无量纲系数：

$$C_D = \frac{\Delta D}{\bar{q}A}, \quad (21.39)$$

其中 ΔD 表示测量的附加阻力， A 是垂直于流动方向的粗糙元的最大迎风面积，而 \bar{q} 是沿粗糙元高度平均的动压，即

$$\bar{q} = \frac{1}{k} \int_0^k \frac{1}{2} \rho u^2(y) dy = \frac{1}{k} \frac{1}{2} \rho U^2 \int_0^k \left(\frac{y}{\delta}\right)^{4/7} dy.$$

这里 $u(y)$ 表示光滑壁面的速度分布，例如 $u/U = (y/\delta)^{1/7}$ 。对许多种粗糙元进行了试验，其中包括与流动成直角或锐角摆放的矩形肋，三角形和圆形截面的凸起，金属板

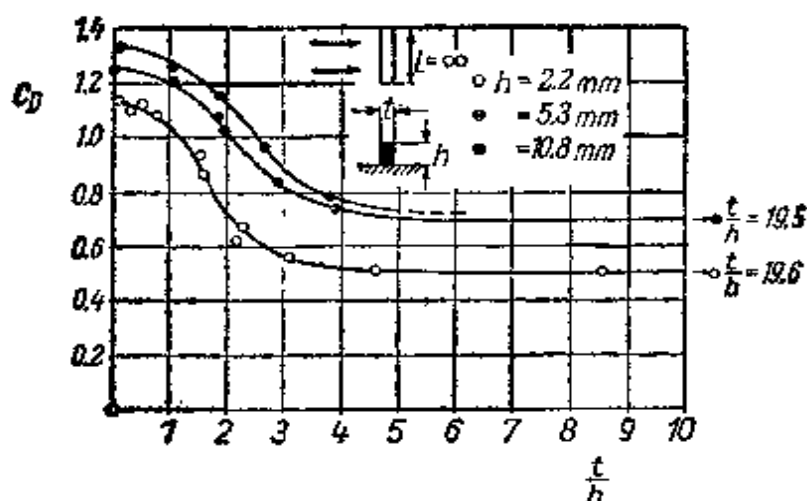


图 21.11 矩形肋的阻力系数，Wieghardt^[46] 测量

的接头，单个铆钉头或成排的铆钉，壁面上的空穴以及其他等等。图 21.11 中画出了与流动成直角的矩形肋的某些测量结果。系数 c_D 值随着 t/h (t ——宽度， h ——高度) 的增加而减小。由于外流引起空穴内的流体参与运动，所以壁面上的孔和空穴引起阻力系数值增加。

图 21.12 表示圆形凹坑引起的阻力增加，这些凹坑由略图示出(直径为 d ，深度为 h)。因为在这种情形下，前面采用的 \bar{q} 的定义失去意义了，所以要用边界层外面的动压对阻力无量纲化， $\Delta c_D = \Delta D / \frac{1}{4} \rho U^2 \pi d^2$ 。当凹坑深度 h 对边界层厚度 δ 的比值较小时，阻力的增加是比较小的。值得注意的是，所有曲线在 $h/d \approx 0.5$ 处都有一个最大值。另外在 $-h/d \approx 0.1$ 和 1.0 处出现较小的局部最大值。在它们之间的最小值出现在 $-h/d \approx 0.2, 0.8$ 和 1.35 处。根据凹坑深度的不同，有时恰巧在凹坑内形成

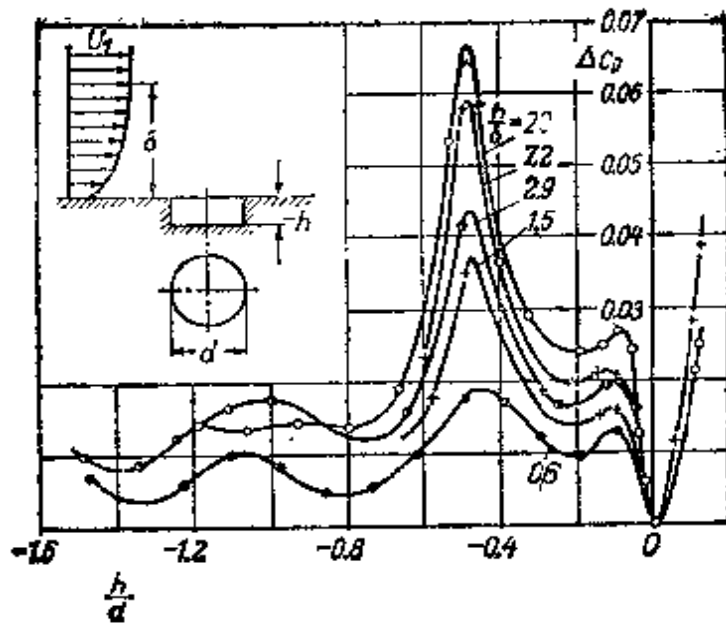


图 21.12 平直壁上不同深度圆形凹坑的阻力系数, Wieghardt^[66] 测量

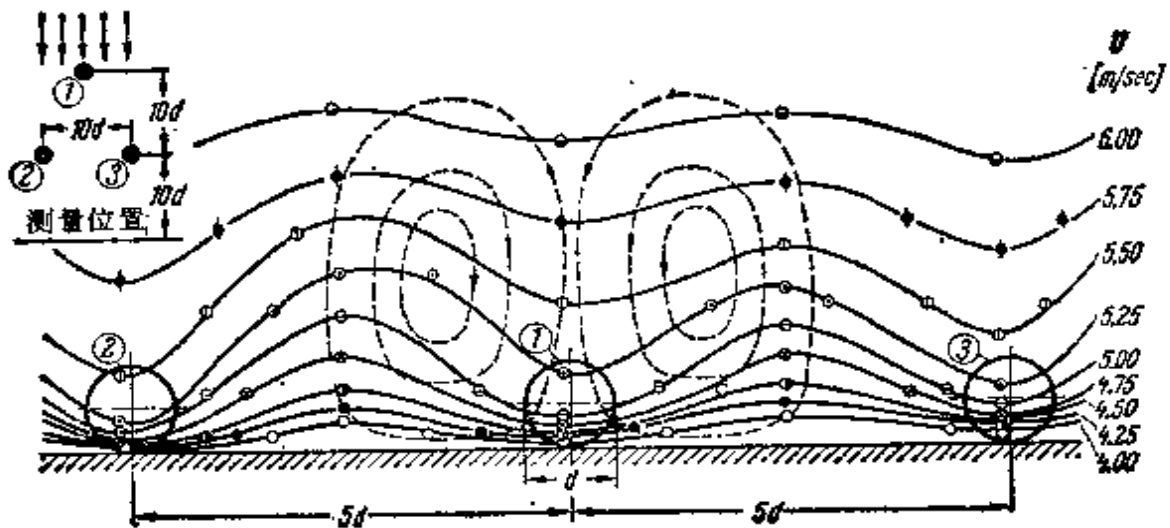


图 21.13 一排圆球后面流场内的等速度线(实线),根据 H. Schlichting^[43] 的测量;圆球后面边界层内的伴随二次流(虚线),根据 F. Schultz-Grunow^[55a] 的计算。在壁面附近,圆球后面的速度大于间隔内的速度。圆球产生“负尾迹效应”,这可以用存在二次流来解释

圆球直径 $d = 4\text{mm}$

了规则的旋涡结构,因而导致不同的阻力值。如从曲线相对于 $h/d = 0$ 的对称性可以看见的那样,一直到 $-h/d = 0.1$, 浅坑都和相应的小突起有同样的阻力增加。

在平板上垂直于流动方向刻出的凹槽或凸脊形的粗糙度,是 A. E. Perry 等人^[59]近来研究的主题。

壁面边界层内障碍物后面的流动图象,明显地区别于自由来流中障碍物后面的流

动图象。这种情形清楚地出现在 H. Schlichting^[45] 的实验中，并示于图 21.13 中。这个实验是测量光滑板面上一排圆球后面的速度场。等速度线的图形清楚地显示出一种负尾速效应。最小速度是在自由间隔内测量到的，在那里沿整个平板长度都没有圆球分布；另一方面，最大速度是在这排圆球后面测量到的，那里本来应该期望有较小的速度。W. Jacobs^[27] 对这种特殊效应进行了较详细的研究。依照 F. Schultz-Grunow^[28] 所做的解释，这种性质似乎与类似于升力物体那样的二次流有关。在图 12.13 中用简图画出了这种二次流的流线。D. H. Williams 和 A. F. Brown^[46] 在装有一排排铆钉的翼型上进行了测量，他们证实了这种效应。

现在有很广泛的关于翼型粗糙度的文献[9, 24, 25]。

3. 从光滑表面到粗糙表面的过渡 W. Jacobs^[27] 研究了壁面附近的流动图象，壁面是由一个光滑段后接一个粗糙段组成的，或者反过来接。这个问题在气象学上有一定意义，并且出现在风从海洋吹向陆地或从陆地吹向海洋的时候，这时流动经过了粗糙度彼此明显不同的表面。应该注意，只是在这两段交界线后面的一定距离上才形成相应于下游壁面的速度剖面。根据测量的速度剖面，在图 21.14 和 21.15 中画出了借助于 Prandtl 假设 $\tau = \rho l^2 (dw/dy)^2$ 计算的切应力变化。这些图线显示出一个值得注意的性质，就是在这两段的交界线后面，壁面切应力马上就达到相应的充分发展流动的新值。例如，要计算由光滑段和粗糙段组成的平板的阻力时，这个结果很重要。在过渡区内，切应力 $\tau(y)$ 沿垂直于壁面方向的变化介于两个线性函数之间，这两个函数分别代表粗糙壁面和光滑壁面上充分发展的流动。借助于经验关系

$$\tau(x, y) = \left\{ \tau_r - (\tau_r - \tau_s) e^{-11.0 \frac{y}{\delta}} \right\} \frac{h - y}{h} \quad (\text{光滑} \rightarrow \text{粗糙}), \quad (21.40)$$

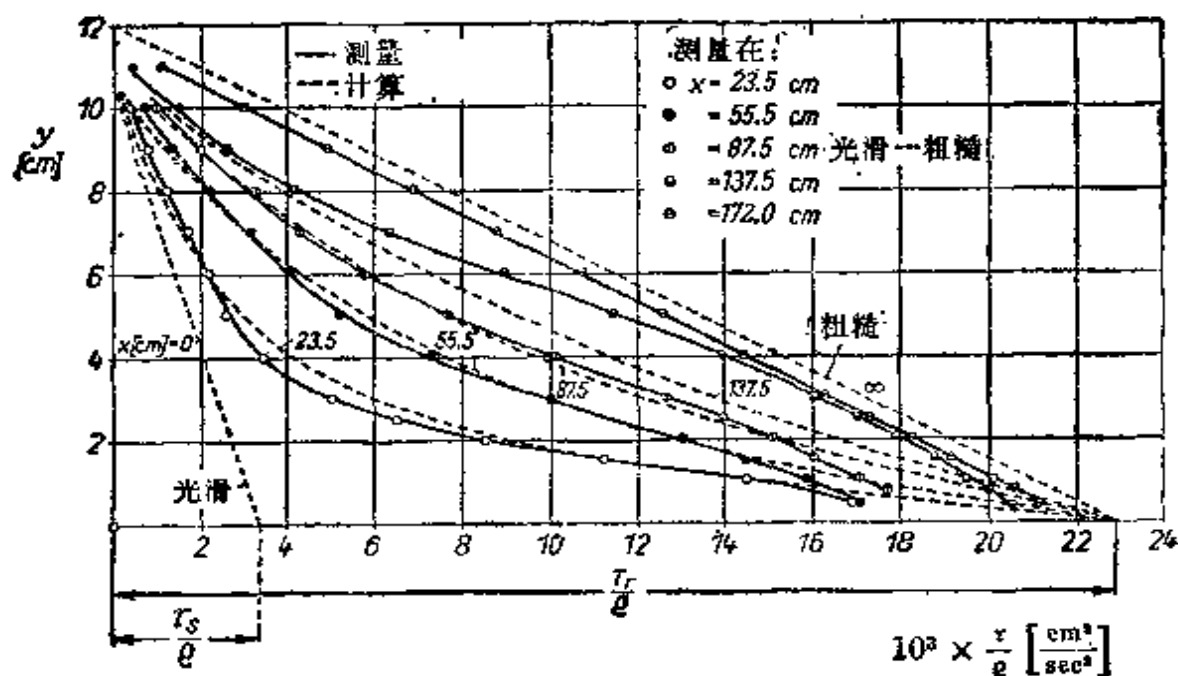


图 21.14 从壁面光滑部分向粗糙部分过渡时，边界层内切应力的变化，W. Jacobs^[27] 测量

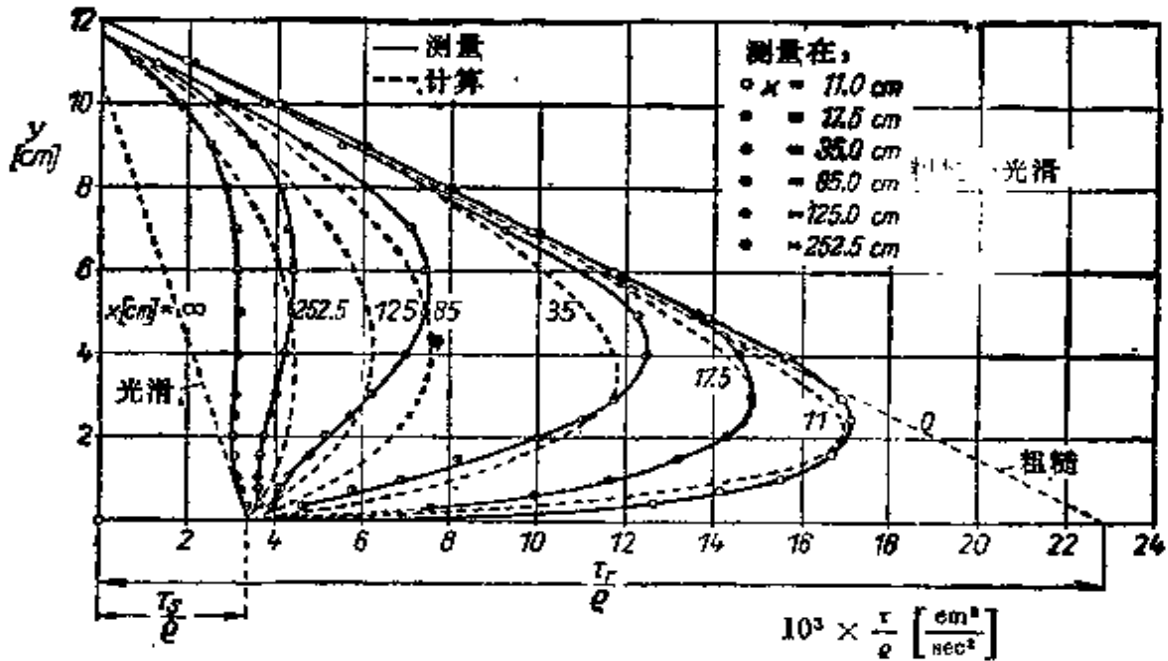


图 21.15 从壁面粗糙部分向光滑部分过渡时, 边界层内切应力的变化, W. Jacobs^[27] 测量

可以插值得出测量的切应力函数 $\tau(y)$ 。在图 21.14 和 21.15 中, 虚线代表式(21.40), 这里 τ_r 和 τ , 分别表示粗糙壁面和光滑壁上充分发展流动的切应力, x 是从平板上交界线开始计算的沿壁面的距离, y 是离开壁面的距离, 而 h 表示风洞的高度。对于相反次序的过渡(粗糙 \rightarrow 光滑), 可以利用同样的公式, 只是 τ_r 和 τ , 必须互换。

W. H. Schofield^[28] 和 R. A. Antonia^[29] 研究了压力梯度从光滑壁面到粗糙壁面过渡的影响。在这样一种突然改变的下游, P. J. Mulheam^[30] 观察到了局部压力的剧烈脉动。

d. 粗糙度的容许值

在工程应用中被认为是“容许的”粗糙度值是, 和光滑壁面相比不引起阻力增加的各自粗糙元的最大高度。对于一些给定的情形, 确定粗糙度容许值的实际意义是很大的, 因为它决定了加工一个给定表面所需要花费的工作量。根据所考虑的流动是层流还是湍流, 这个问题的答案实际上是不同的。

在湍流边界层情形下, 如果所有突起物都埋在层流次层内, 则粗糙度不产生影响, 壁面是水力学光滑的。如前面讲过的, 层流次层的厚度只是边界层的一小部分。对于管流, 可以发现式(20.37)

给出了壁面为水力学光滑的条件,就是说无量纲粗糙度 Reynolds 数¹⁾

$$\frac{v_* k}{\nu} < 5 \quad (\text{水力学光滑}), \quad (21.41)$$

其中 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ 表示摩擦速度. 对于零攻角平板来说,这个结果也可以认为是成立的. 但是从实用观点出发,规定一个相对粗糙度 k/l 值似乎更方便. 借助于图 21.9 中所表示的平板阻力公式的曲线,从一条 l/k 一常数的曲线偏离光滑壁面曲线的那个点,我们可以得到 k/l 的容许值. 可以看出, k/l 的容许值随着 Reynolds 数 $U_\infty l/\nu$ 的增加而减小. 表 21.2 列出了根据图 21.9 得出的已经化为整数的数值. 它们可以概括为如下的简单公式:

$$\frac{U_\infty k_{adm}}{\nu} = 100, \quad (21.42)$$

从图 21.9 可以直接推断这个公式是近似成立的.

表 21.2 容许的突起物高度与 Reynolds 数的关系

$R_l = \frac{U_\infty l}{\nu}$	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\left(\frac{k}{l}\right)_{adm}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

这个公式对于整个平板长度只给出了一个 k_{adm} 值. 但是,由于前缘附近的边界层厚度比较小,所以上游的 k 的容许值要比远在下游的值小. 当引进 $v_*^2/U_\infty^2 = \tau_0/\rho U_\infty^2 = \frac{1}{2} c_f$ 时,可以得到一个计及这种情形的公式,其中 c_f 表示如表 21.1 所给出的局部表面摩擦力系数. 这样我们得到

$$\frac{U_\infty k_{adm}}{\nu} < \frac{7}{\sqrt{c_f}}. \quad (21.43)$$

对于 $R_l < 10^6$ 的小 Reynolds 数,式 (21.42) 和 (21.43) 实际上

1) 这节所做的估计没有区分等效砂粒粗糙度 k_s 与实际突起物高度 k 的差别.

给出了同样的结果,而在大 Reynolds 数时,式(21.43)给出的值稍微大些. 因此,我们有理由保留这个比较简单的公式(21.42),因为它没有把 k_{adm} 定得太大的危险. 式(21.42)说明,粗糙元的容许高度不依赖于平板的长度,它只根据速度和运动粘性系数按照下述条件确定:

$$k_{adm} \leq 100 \frac{\nu}{U_{\infty}} \quad (21.44)$$

由此得出,对于模型及其原形来说,如果这两种情形的速度和运动粘性系数都一样,则它们的容许粗糙度的绝对值也是相等的. 对于一些长物体来说,比起它们的线性尺度来,其容许粗糙度是非常小

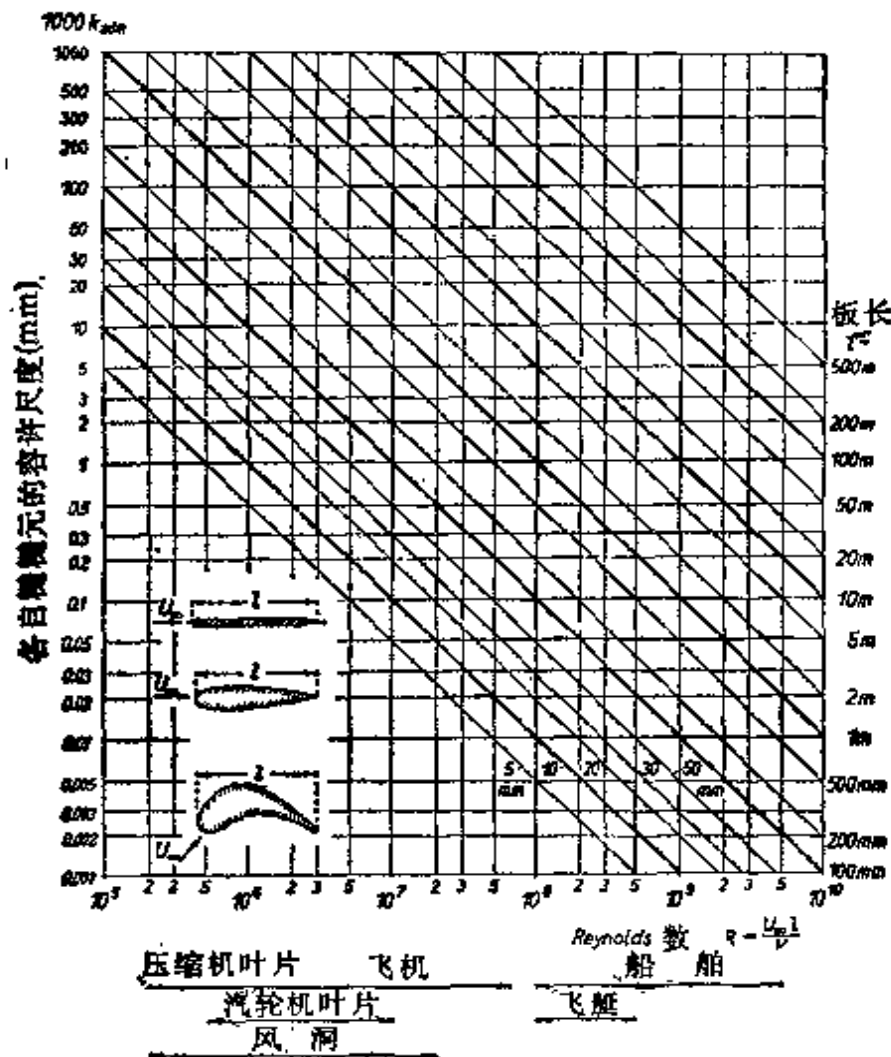


图 21.16 零攻角粗糙平板和机翼的容许粗糙度 k_{adm} , 根据式(21.44)

的,参看表 21.3.

对于实际应用来说,更为方便的是:把粗糙度的容许值直接与板长 l 联系起来,或者更一般地说,与所考虑的物体长度(例如船身、翼弦的长度,涡轮机或旋转压缩机叶片弦向长度)联系起来,因为这可以对所要求的表面平滑度得出一个更直观的度量方法.为了实现这一点,可以将式(21.44)改写为

$$k_{adm} \leq l \times \frac{100}{R_l}, \quad (21.45)$$

其中 $R_l = U_\infty l / \nu$. 图 21.16 中的图线可以用来减轻对式(21.45)的计算. 这张图含有突起物的容许尺度相对于 Reynolds 数的图线,其中用特征长度作为参数. 为了便于使用,这张图的底部给出了在各种工程应用(船舶、飞艇、飞机、压缩机叶片、汽轮机叶片)中遇到的 Reynolds 数范围. 另外,表 21.3 给出了借用图 21.16 计算的几个例子的一览表. 在船体情形下,容许粗糙度的量级是百分之几毫米(万分之几到千分之几英寸),实际上要得到这样小的值是不可能的,因此总要考虑到由于粗糙而引起的很大的阻力增加. 对于飞艇也是一样. 关于飞机表面,可以看到容许粗糙尺度在 0.01 到 0.1mm (0.0004 到 0.004in) 之间. 经过非常仔细的表面加工,有可能符合这些要求. 在模型飞机和压缩机叶片情形下,它们要求同样量级的平滑度,即 0.01 到 0.1mm (0.0004 到 0.004in), 因此不难得到水力学光滑表面. 在汽轮机中所遇到的 Reynolds 数是比较大的,因为尽管线性尺度小,但是压力比较高¹⁾, 因此容许粗糙度非常小. 所要求的值介于 0.0002 到 0.002mm (10^{-5} 到 10^{-4} in) 之间,这在新加工的叶片上是很难达到的. 经过一段运行之后,由于侵蚀和剥落,当然会超过这些值. 现在需要说明,以上

1) 关于过热蒸汽的运动粘性系数,参看 Escher Wyss Reports, vol. X, No. 1, p. 3 (1937), 或 NBS-NACA Tables of Thermodynamic Properties of Gases, Washington, 1954. 还可见 J. Kestin 和 J. Whitelaw, Trans. ASMA (A), J. Basic Engineering, 88(1966) 82—104. 大多数的新近值可以取自 Mechanical Engineering, 88, 79 (1976).

表 21.3 关于容许粗糙度的计算例子, 根据图 21.16

项 目	说 明	长度 l m(ft)	速度 w			运动粘性系数 $10^6 \times \nu$		$R = \frac{wl}{\nu}$	容许粗糙度 k_{adm}	
			km/h	m/s	ft/s	m ² /s	ft ² /s		mm	in
船 身	大型、高速	250 (820)	56 30节	15	49	1.0	10	4×10^9	0.007	0.00028
	小型、低速	50 (165)	18 10节	5	165	1.0	10	3×10^8	0.02	0.0008
飞 艇	—	250 (820)	120	33	1100	15	150	5×10^8	0.05	0.002
	大型、高速	4 ¹⁾ (13)	600	166	545	15	150	5×10^7	0.01	0.0004
飞机(机翼)	小型、低速	2 (6.5)	200	55	180	15	150	8×10^6	0.025	0.001
	低速	0.1 (0.33)	—	150	490	15	150	1×10^6	0.01	0.0004
模型机翼	小型	0.2 (0.65)	144	40	130	15	150	5×10^6	0.05	0.002
	高压 $f = 300C(\sim 550F)$	10mm (0.4in)	—	200	650	0.4	4	5×10^6	0.0002	0.000008
汽轮机叶片	高压 $f = 500C(\sim 950F)$	10mm (0.4in)	—	200	650	0.8	8	2.5×10^6	0.0005	0.00002
	低压	100mm	—	400	1300	8	80	5×10^6	0.002	0.00008

1) 弦长

的考虑只适用于相当于砂粒粗糙度的紧密排列的突起物。在障碍物宽间隔分布的情形下,或在壁面呈波纹形的情形下,其容许值稍微大些。

粗糙度对于在汽轮机一级内损失的影响,在很大程度上取决于通过它的压力降,即这级的反力度。从图 21.17 可以清楚地看出这点,这张图表示 L. Speidel^[58] 对带有不同砂粒粗糙度的涡轮叶栅所进行的测量结果。这张图含有损失系数 $\zeta_r = \Delta g / \frac{1}{2} \rho w_2^2$

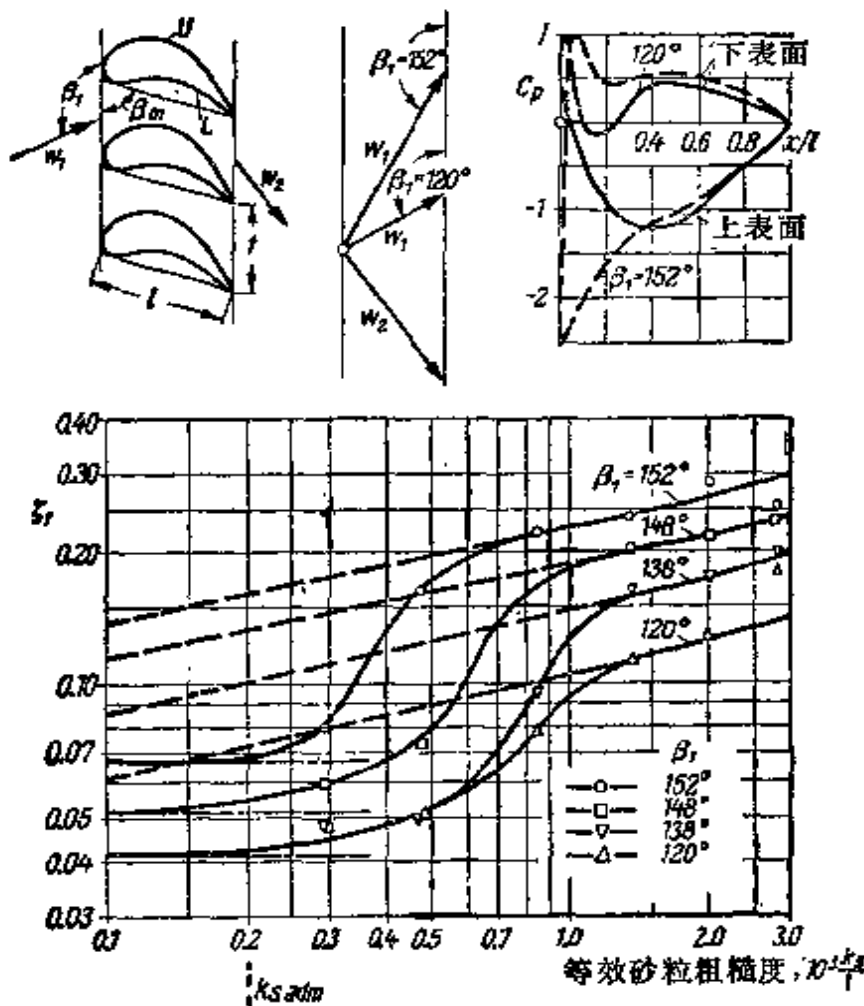


图 21.17 带有砂粒粗糙度的汽轮机叶片的损失系数, L. Speidel^[58] 测量

$\zeta_r = \Delta g / \frac{1}{2} \rho w_2^2$; Δg ——动压头损失。实线 $t/l = 0.67$;
 平均叶片安装角 $\beta_m = 72^\circ$; Reynolds 数 $R = w_2 l / \nu = 5 \times 10^5$; $C_p = (p - p_2) / \frac{1}{2} \rho w_2^2$

的曲线,其中 Δg 表示沿栅距进行平均的动压头损失的平均值,它已经用出口动压头 (w_2 表示离开速度) 无量纲化了. 损失系数 ζ_l 值随 β_1 的增加而增加,因为参照速度三角形可以证明, w_1 随 β_1 的增加而增加. 在边界层沿整个叶片都是湍流的假设下, ζ_l 的增加率用图 21.17 中的直虚线表示. 对于较低的粗糙度, 测量点明显地落在这些直线的下方. 在研究中已经查明, 这个特性是由于存在着一个长的层流边界层区引起的. 当粗糙度增加时, 层流边界层的长度减小. 用式 (21.45) 对粗糙度容许值的估计可以得到, 当 $R = w_2 l / \nu = 5 \times 10^5$ 时, $k_s / l = 0.2 \times 10^{-3}$. 在图 21.17 中已经标出了这个极限, 并且可以看到它与实验结果符合得很好. 还可参考 K. Bammert 和 K. Fiedler^[2,3] 的文章.

在层流边界层中, 引起转换的突起物的高度将称为**临界高度**或**临界粗糙度**(参看第十七章 g). 粗糙度通过将转换点沿逆流方向移动来影响壁面的阻力. 其阻力可能增加也可能减小, 这取决于物体的形状. 当物体的阻力主要来源于表面摩擦力时(例如翼型), 转换点的这种移动使阻力增加. 当物体的阻力主要来源于型阻时(例如圆柱), 在某种情形下阻力是可以减小的. 依照几位日本学者的测量^[6,2], 可以给出如下的临界粗糙度:

$$\frac{v_* k_{crit}}{\nu} = 15. \quad (21.46)$$

对于长为 2m 的机翼以速度 $U_\infty = 83 \text{ m/s} \approx 300 \text{ km/h}$ (约 185 mile/h) 在空气 ($\nu = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) 中飞行的情形, 我们计算 k_{crit} 值. 我们有 $R_l = U_\infty l / \nu \approx 10^7$. 考察机翼上 $x = 0.1l$ 的点, 即 $R_x = U_\infty x / \nu \approx 10^6$ 的那点. 由于存在负的压力梯度, 直到这一点边界层都可以是层流的. 对于层流边界层, 壁面切应力由式 (7.32) 给出, 并且等于 $\tau_0 / \rho = 0.332 U_\infty^2 \sqrt{\nu / U_\infty x} = 0.332 \times 6900 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2 = 2.29 \text{ m}^2/\text{s}^2$. 因此 $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = 1.52 \text{ m/s}$. 代入到式 (21.46), 我们有

$$k_{crit} = 15 \cdot \frac{\nu}{v_*} = \frac{15}{1.52} \times 0.14 \times 10^{-4} \text{ m}$$

— 0.14mm (约 0.0056in)。

这表明,和已掌握的湍流边界层的粗糙度容许值相比,引起转捩的突起物临界尺度要大十倍左右,如表 21.3 所计算的,小型飞机湍流边界层的粗糙度容许值约为 0.02mm(0.0008in)。和湍流边界层相比,层流边界层“可以经受”大得多的粗糙度。K. Scherbarth^[48] 对于在壁面装有单一障碍物(铆钉头)时层流边界层的性质进行了实验研究。已经查明,在障碍物后面形成一个楔形湍流扰动区,它的夹角约为 14° 到 18° 。

如在本十七章 g 讲过的, E. G. Feindt^[17] 进行的非常广泛的测量,改进了式(21.46)中给出的临界高度的判据。

粗糙度对于型阻的影响可以归纳如下:有尖缘的物体,例如垂直于气流的平板,对表面粗糙度很不敏感,因为转捩点就是由这些边缘确定的。另一方面,比如圆柱体等钝体的阻力,对于粗糙度是非常敏感的。阻力表现出突然下降(图 1.4)的临界 Reynolds 数,在很大程度上依赖于表面粗糙度。根据图 21.18 所示的测量^[1,10]结果,临界 Reynolds 数将随相对粗糙度 k/R 的增加而降低 ($d = 2R =$ 圆柱直径)。边界层好像被粗糙度扰动到这样程度,以致在比光滑柱体情形低得多的 Reynolds 下就出现了转捩。

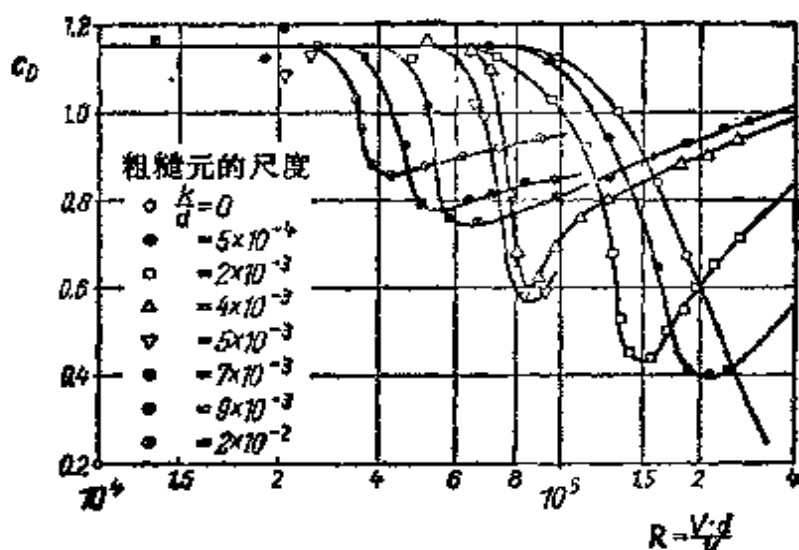


图 21.18 不同粗糙度的圆柱上的阻力,根据 Page 和 Warsap^[14]

因此，粗糙度和 Prandtl 绊线（图 2.25）有同样的作用，即它在 Reynolds 数的某个范围内确实能降低阻力。无论如何，在超临界 Reynolds 数范围内，粗糙柱体的阻力总要比光滑柱体的阻力大些，请参阅文献[60]。

第二十二章 有压力梯度的不可压缩 湍流边界层¹⁾

上一章考虑了无压力梯度平板上的湍流边界层，作为该主题的延伸，本章将讨论壁面上有正压梯度或负压梯度时湍流边界层的特性。对于飞机机翼或涡轮叶片阻力的计算，以及对于发生在扩压器中的过程的了解，目前这种情形都是特别重要的。除了表面摩擦力之外，我们所关心的是：在给定的条件下，边界层是否会分离，如果分离，我们希望能确定出分离点。和层流边界层中的情形一样，负压梯度的存在，特别是正压梯度的存在，对湍流边界层的结构有着强烈的影响。直至今日，这些极为复杂的现象还远未完全了解，但是存在着若干半经验的计算方法，可以用来得出比较满意的结果。

1962年，J. C. Rotta^[85]对这个广阔的学术领域作了全面而细致的评论。为了提出有压力梯度的不可压缩湍流边界层的计算方法，我们必须从圆管和零攻角平板以外的实验关系着手，为此，我们先来给出若干实验结果的简要说明。

a. 若干实验结果

F. Doench^[28]，J. Nikuradse^[71]，H. Hochschild^[45]，R. Kroe-ner^[57]以及J. Polzin^[76]在平直壁面的收缩管和扩张管中，对有压力降和压力升的二维流动进行了早期的系统的实验。F. A. L. Winternitz和W. J. Ramsay的文章^[23]叙述了在圆形扩张管中的测量，特别是对其中能量转换过程效率的测量。这些实验表明：速度剖面的形状非常强烈地依赖于压力梯度。图22.1画出了J.

1) E. Truckenbrodt 教授撰写了本章的新版本，对于他的合作，特此致谢。

Nikuradse 在略微收缩和略微扩张的管中测得的速度剖面。管道的半夹角 α 分别为 $\alpha = -8^\circ, -4^\circ, -2^\circ, 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 。收缩管的边界层厚度远小于压力梯度为零的直管情形，而扩张管中边界层厚度非常厚，并一直延伸到管的中心线处。当扩张管的半夹角达到 4° 时，速度剖面在整个管道宽度上完全对称，没有显示出与分离有关的特性。一旦半夹角增加到超过 4° 时，则速度剖面发生了根本的改变。对于半夹角为 $5^\circ, 6^\circ, 8^\circ$ 的扩张管，图 22.2 和图 22.3 分别画出了对应的速度剖面，这些速度剖面不再是对称的了。当半扩张角为 5° 时(图 22.2)，还不能识别出回流，但是分离正在管的一个扩张壁上开始。除此之外，流动变得不稳定，因此，

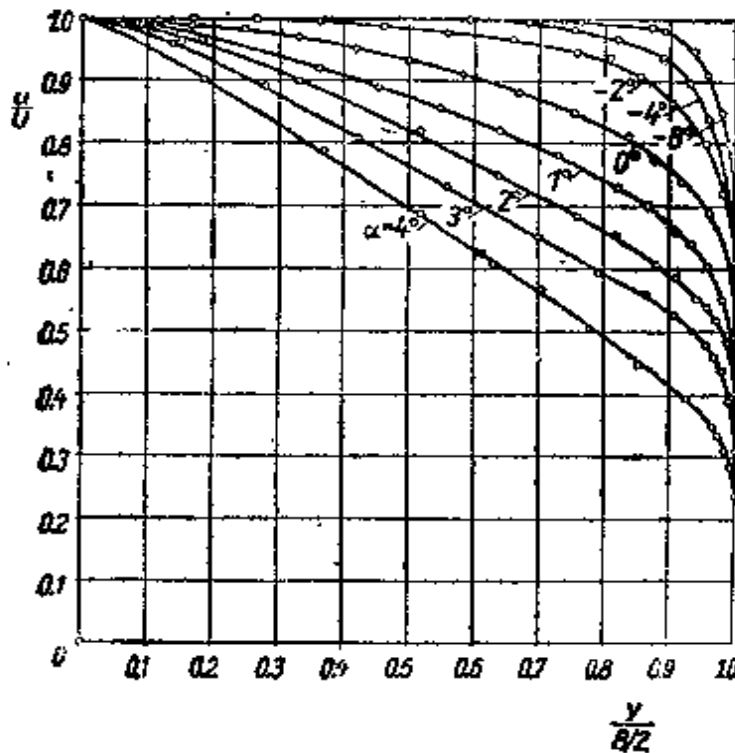


图 22.1 平直壁的收缩管和扩张管中的速度分布,根据 J. Nikuradse^[71] 的测量, α ——半夹角; B——横截面的宽度

若受到不规则的扰动，流动将交替地附着在这个或另一个扩张壁上。这种不稳定性是初期分离的特征。J. Nikuradse 观测到最初出现分离的角度在 $\alpha = 4.8^\circ$ 至 5.1° 之间。在角度 $\alpha = 6^\circ$ 时(图 22.2)，速度剖面的不对称性更为显著。流动中的回流说明分离的开始。当 $\alpha = 8^\circ$ 时，回流区的宽度远大于 $\alpha = 6^\circ$ 的情形，

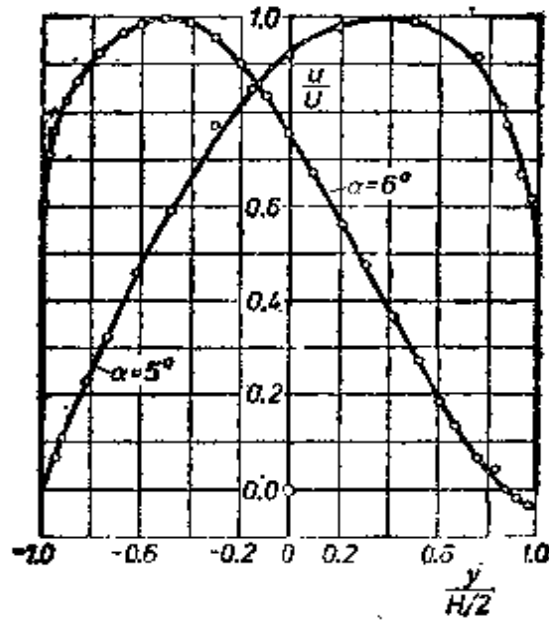


图 22.2 在半夹角 $\alpha = 5^\circ$ 和 $\alpha = 6^\circ$ 的扩张管中的速度分布, 根据 J. Nikuradse^[71] 的测量. 速度分布失去对称性意味着初期分离

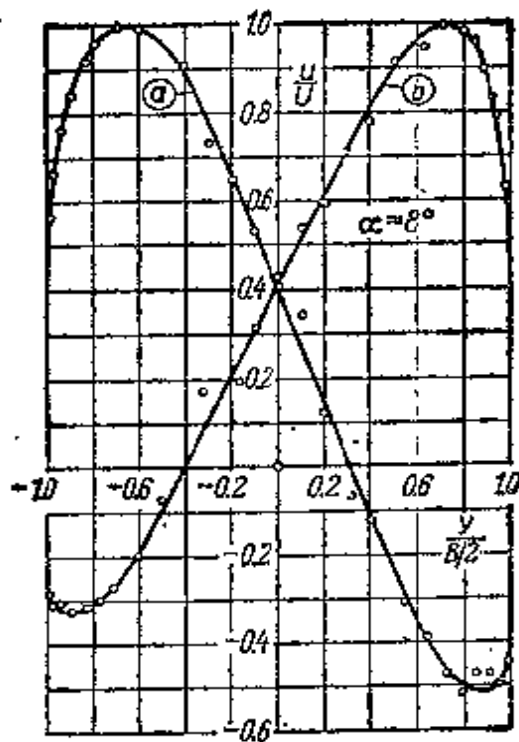


图 22.3 在半夹角 $\alpha = 8^\circ$ 的扩张管中的速度分布, 根据 J. Nikuradse^[71] 的测量. 回流充分发展, 流动以较长的时间间隔在图象(a)和(b)之间摆动

并且观测到流动从一个扩张壁到另一个扩张壁频繁地来回摆动。这种现象在 $\alpha = 5^\circ$ 和 6° 时是没有的。但是，每一个特定流动形态的持续时间，对于得到一组读数来说是足够长的。当扩张角继续增加时，回流区变得更宽，并且摆动得更加频繁。

图 22.4 画出了翼型上所形成的湍流边界层的例子，是 J. Stueper^[105] 在自由飞行中测量的。在目前这种情形下，因为压力面的压力在整个翼型上都是增加的，所以压力面的边界层从前缘开始就是湍流状态。在吸力面上，转换点位置在紧靠最小压力点的后面，与第十七章 b 中给出的说明相同。从边界层本身厚度的突然增加就可以推断出边界层已变成湍流状态。

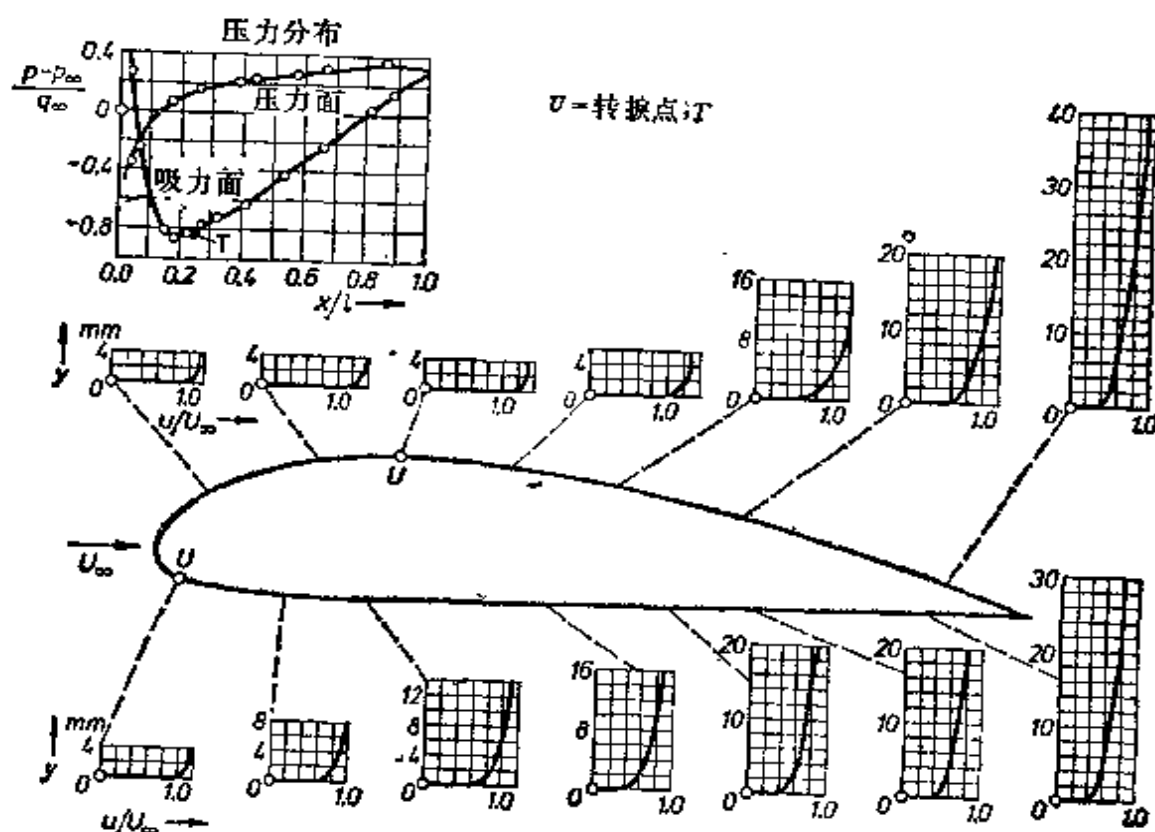


图 22.4 机翼翼型上的边界层，根据 Stueper^[105] 的测量；飞行实测。升力系数 $c_L = 0.4$ ；Reynolds 数 $R = 4 \times 10^6$ ；弦长 $l = 1800\text{mm}$ 。由于逆压梯度，边界层沿整个压力面是湍流的；在吸力面，最小压力点的上游是层流的，其下游是湍流的

近来，G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff^[97]，J. Laufer^[58] 和 F. H. Clauser^[21] 已对有压力梯度的湍流边界层的特性进行了

非常全面的实验研究。特别是，上面的前两篇文章包括湍流脉动以及第十八章中定义的相关系数的测量结果，而最后一篇文章中包括切应力的广泛的测量结果。下面几节所要阐明的计算方法，显然只能应用于完全附着在壁面上的流动，即只适用于类似于图 22.1 和图 22.4 所示的流动。

b. 二维湍流边界层的计算

1. 概述 迄今为止，所有计算湍流边界层的方法都是近似的，都不能在纯理论的意义计算由湍流脉动所引起的速度和切应力分量，以及由此产生的能量损失¹⁾。另外，这些方法中仍需引入一些经验关系，如 1925 年由 Prandtl 所创立的著名的混合长度公式。因为湍流的统计理论至今还没有产生出取代它的方法。令人惊讶的是在 Prandtl 假设提出后的半个世纪中，它在有关湍流边界层计算的文献中仍起着非常重要的作用。大多数现代的计算方法都是近似的，它们利用了速度边界层(以区别于本节不讨论的热边界层)的动量方程和能量方程，以及由它们得出的某些关系式。在第十章和第十一章中，已导出了层流边界层中与它们相应的关系式。

我们可以把目前有用的湍流边界层计算方法分成两类：以基本方程的积分形式为基础的方法和以微分方程为基础的方法。前者可以追溯到 Th. von Kármán 在 1921 年所做的工作。在这种方法中，首先将偏微分方程沿横向解析地积分，由此化为常微分方程组，参阅第八章和第十三章。而在另一类方法中，是应用数值方法直接积分偏微分方程组，例如在第九章；所描述的有限差分法，或者用有限元法。显然，用微分方程方法所需的工作量大大超过用积分方法的情形。前者需要使用配备有大存储器的大型数字计算机，而后者在小的计算器上甚至用计算尺就能够完成计算。

在下面的几节中，我们只限于介绍这样的方法，即能够计算出

1) 英文原版中此句缺字，今参照原书的前几个版本以及上下行文加上的，并非原文，希读者注意。——中译者注

诸如速度、局部切应力以及分离区等湍流变量的时间平均值方法。因为我们预计到工程人员只对这种平均值才有真正的兴趣，所以我们不去计算所有由脉动产生的量，例如相关系数、湍流度和湍流尺度。读者对这方面有兴趣的话，可以参阅更专门的著作^[10,81]。

到1968年由 S. J. Kline 组织的 Stanford 大学讨论会时，湍流边界层的研究已经取得了很大的进展。S. J. Kline, M. V. Morkovin, G. Sovran, D. J. Cockrell, D. E. Coles 和 E. A. Hirst^[54] 将当时获得的成果编辑成两大卷出版。在增补的由 W. C. Reynolds^[78] 撰写的“分类评述”中，读者可以找到关于 20 种积分方法和 8 种微分方法的介绍，并按各自的物理基础叙述了它们的特征(到 1967 年为止的情况)。原则上，这些方法的差别在于：为了使方程组可解而引进的经验封闭函数不同。此外，在会议中还提供了 33 组实验数据，作为计算方法的验证材料。大约十年后，W. C. Reynolds^[81] 再次对数量很多的计算方案作了简要的评论，该文登载在 1976 年的流体力学年鉴上(参阅同一作者在 1974 年发表在化学工程进展上的文章^[80])。1974 年出版了 F. M. White 的书^[119]。其中介绍了 20 种积分方法和 11 种微分方法。从迄今已有的如此大量的方法中要选出“最佳方法”是困难的，我们也不打算这样做。

再早一些时候，A. Walz^[116] 和 J. C. Rotta^[80,87] 发表关于许多这类方法的综述，主要是积分方法。P. Bradshaw 的文章^[9,12,13,14] 有微分方法的评述。此外，T. Cebeci 和 A. M. O. Smith 的书^[20] 以及这两位作者较早的两篇论文^[13,19] 中，对许多计算方法有很好的评论。L. S. G. Kovasznay^[56] 和 F. H. Clauser^[211] 的两篇早期评论也有参考价值。

我们也不打算详细地叙述若干个这类的数值方法，而是将注意力集中在这许多方法中的一个上，使读者可以直接用它来开展工作。为此目的，我们选择了由 E. Truckenbrodt^[111] 所发展起来的积分方法。这个方法的第一个文本公布于 1952 年。现在，已从目前对这个方法的物理理解上加以更新^[114]。该方法便于讨论，并

且从精度的观点来看,也是最佳的积分方法之一。

2. Truckenbrodt 积分方法 在详细介绍 E. Truckenbrodt^[140] 方法之前,我们简要地作一个历史回顾,这样有助于我们对它的理解。正如前面已经指出的那样,湍流边界层的所有计算方法都依赖于一定的经验关系。随着时间的推移,特别是从三十年代中期开始,经验算法的基础以及半经验的和理论的计算方法都经历了不断改进的过程。

1931年, E. Gruschwitz^[41] 建立了计算有压力梯度湍流边界层的第一个方法。后来, A. Kehl^[53] 改进了该方法所依据的实验数据。几乎同时, A. Buri^[59] 公布了一个类似的方法。H. C. Garner^[55] 在 A. E. von Doenhoff 和 N. Tetervin^[27] 工作的基础上提出了一个方法,从数值计算的方便与否来看,证明它比上述第一种方法要优越。1952年, E. Truckenbrodt^[113] 基于 K. Wieghardt^[120], H. Ludwing 和 W. Tillmann^[60] 以及 J. C. Rotta^[82,83] 等人的实验结果,建立了一个简单的求积分的方法。这个方法不但适用于二维流动,也适用于轴对称流动。1974年,在当时认识的基础上改进了这个方法^[144]。这就是目前我们要较为详细地讨论的内容。

特征数: 为了给速度边界层基本特性的描写创造条件,必须知道它的厚度,并给出边界层中速度分布的性态。由于**边界层厚度** $\delta(x)$ 代表着这样的一种边界,耗散层在这里与无摩擦的外流 $U(x)$ 汇合,即 $u(x, y = \delta) = U(x)$,所以没有一个确切的定义。因此,最好是去计算以前在式(8.30), (8.31)和(8.34)所定义的那些厚度。这些包含着下述的量

$$\delta_1(x) = \int_0^\delta (1 - u/U) dy \quad (\text{位移厚度}), \quad (22.1a)$$

$$\delta_2(x) = \int_0^\delta (1 - u/U)(u/U) dy \quad (\text{动量厚度}), \quad (22.1b)$$

$$\delta_3(x) = \int_0^\delta [1 - (u/U)^2](u/U) dy \quad (\text{能量厚度}), \quad (22.1c)$$

通过引进适当的由外流速度构成的 **Reynolds 数**,可以将这

些量无量纲化。因此,我们可以使用

$$R_1 = \delta_1 U / \nu; R_2 = \delta_2 U / \nu \text{ 等等.} \quad (22.2a, b)$$

速度剖面强烈地依赖于外流的压力梯度(压力梯度可以通过 dU/dx 来表示),并由一些形状因子来表征。首先将这些参数无量纲化,并可以根据式(22.1)将它们定义成厚度比的形式。习惯上采用下列缩写符号

$$H_{12} = \delta_1 / \delta_2; H_{23} = \delta_2 / \delta_3; H_{32} = \delta_3 / \delta_2 \text{ 等等.} \quad (22.3a, b, c)$$

在这里,我们不再介绍 E. Gruschwitz^[41] 和 A. Buri^[42] 所采用的形状因子。长期以来,大家都知道对于描写速度剖面来说,由式(22.3)所定义的形状因子是十分有用的参量,这已被 Stanford 会议上发表的许多总结性文章所确认。除此之外,测量表明湍流速度剖面可以用单参数曲线族来描写。正如由图 22.5 中曲线所证

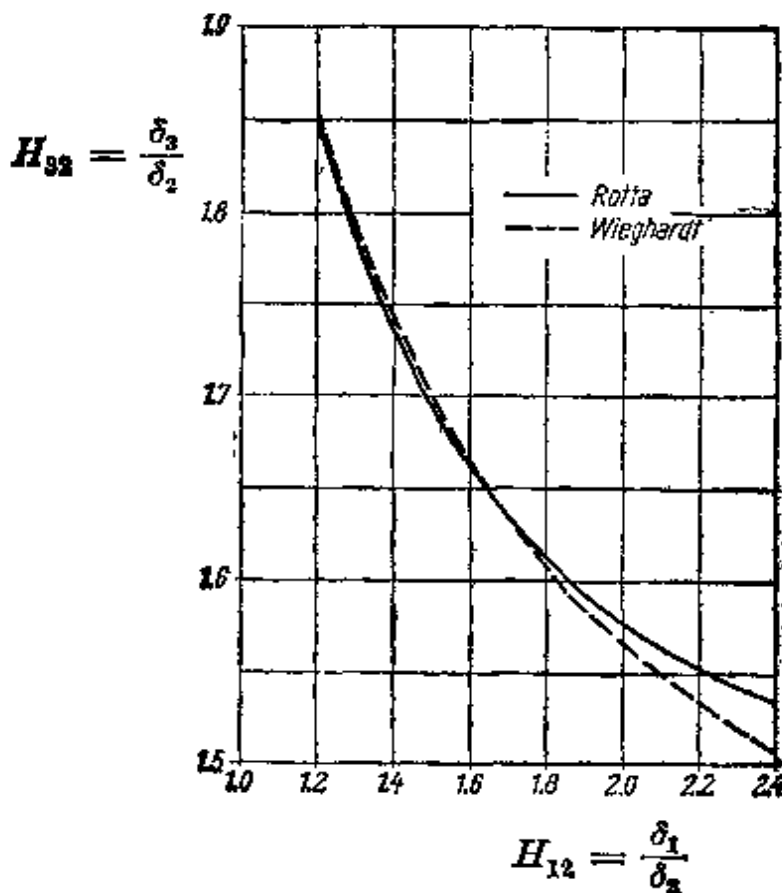


图 22.5 边界层厚度比 $H_{32} = \delta_3 / \delta_2$ 对 $H_{12} = \delta_1 / \delta_2$ 的曲线,根据 J. C. Rotta^[44] 和 K. Wieghardt^[120], 也可参阅 H. Fernholz^[38]

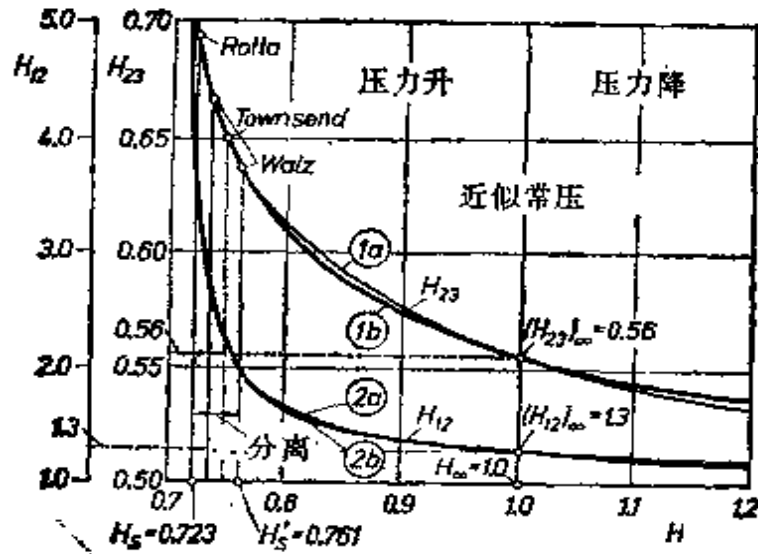


图 22.6 湍流边界层的形状因子

H = 式(22.4)的修正的形状因子

H_{∞} = 参考状态;近似的常压流动

H_s = 分离的边界层

$H_s \leq H \leq H'_s$ = 容易分离的边界层

(1) = H_{23} 对 H 的曲线

(1a)由式(22.4a)数值计算的结果

根据参考文献[23a, 46a]

$$H_{12} = 1 + 1.48(2 - H_{23}) + 104(2 - H_{23})^{4.7}$$

(1b)用式(22.5)计算的结果

(2) = H_{12} 对 H 的曲线

(2a)和(2b)类似于(1a)和(1b)

实的那样,这意味着形状因子 H_{12} 和 $H_{23} = 1/H_{23}$ 相互间存在着单值关系。如果忽略不计一些对 Reynolds 数轻微的依赖关系,这一事实可以由关系式 $H_{12} = f(H_{23})$ 来表示。以上述分析为指导, E. Truckenbrodt^[14]引入¹⁾修正的形状因子

$$H = \exp \left\{ \int_{(H_{23})_{\infty}}^{H_{23}} \frac{dH_{23}}{(H_{21} - 1)H_{23}} \right\} = \exp \left\{ - \int_{(H_{23})_{\infty}}^{H_{23}} \frac{dH_{23}}{(H_{12} - 1)H_{23}} \right\} \quad (22.4a, b)$$

因为参考值 $(H_{23})_{\infty} = (H_{21})_{\infty}$ 相当于无压力梯度流动的平均值,所以将它们选为积分的下限。在湍流边界层的情形下,我们选取

1) 参考文献[11]采用修正的形状因子 $L = \ln H$ 。

$(H_{12})_{\infty} = 1.3$ 。在 H. Fernholz^[83] 所指出的关系式的基础上，就可以对关系式(22.4)进行数值计算。图 22.6中画出了其计算结果。

在无压力梯度流动的情形下，我们根据定义(湍流情形下是平均值)，求出 $H = H_{\infty} = 1$ 。有逆压梯度流动(压力沿下游方向增加)的特征为 $H_s \leq H < 1$ ，而在加速流动的情形下(压力沿下游方向减少)，我们求出 $1 < H \leq H_0$ ，其中 H_s 表示出现初期分离时速度剖面的形状因子，而 H_0 表示二维驻点流速度剖面的形状因子。按照 K. Wieghardt 的实验结果，在所谓幂律速度剖面假设的基础上，形状因子 H_{12} 和 H_{32} 相互间满足关系式

$$H_{12} = H_{32} / (3H_{32} - 4).$$

将这个表达式代入式(22.4a)，并对 H_{32} 积分，我们可以导出湍流边界层中修正的形状因子的下述表达式

$$H = \frac{(H_{32})_{\infty}}{H_{32}} \left(\frac{2 - (H_{32})_{\infty}}{2 - H_{32}} \right)^{1/2} = 0.5442 H_{23} \times \left(\frac{H_{23}}{H_{23} - 0.5049} \right)^{1/2}. \quad (22.5a, b)^D$$

对于可能出现分离的湍流边界层，文献中给出的数值变化很大。J. C. Rotta^[86] 推荐 $4.05 > (H_{12})_s > 4.0$ 或 $H_s \approx 0.723$ ，而 A. Walz^[116] 则建议 $1.50 < (H_{32})_s < 1.75$ 或 $0.736 < H_s < 0.761$ 。按照 A. A. Townsend^[110a] 的看法(参阅 Stratford^[104])，在 $U(x) \sim x^p$ 而 $p = -0.234$ 的外流所产生的速度剖面的情形下，零切应力发生在 $(H_{12})_s = 2.274$ 或 $H_s = 0.784$ 处。图 22.6 中画出了有关初期分离的各种形状因子。修正的形状因子 H_s 值的起伏要比 $(H_{12})_s$ 和 $(H_{23})_s$ 的起伏小得多。参考文献 [114] 指出：分离可能发生在

$$H_s \leq 0.723 \quad (\text{分离}). \quad (22.6)$$

$H_s = 0.723 \leq H \leq 0.761 = H'_s$ 的范围描述了易于分离的速度剖面。

1) 为了描述目前已有的实验结果，已将式(22.5b)中的数值常数作了调整。

3. 基本方程 为了计算边界层厚度和形状因子(后者刻划了速度剖面), 需要有两个方程, 它们是: 动量积分方程(8.32)和能量积分方程(8.35). 在第二个方程中, 必须在其右边引入一个尚未确定的由湍流切应力所引起的耗散功的表达式.

作为动量厚度 $\delta_2(x)$ 和能量厚度 $\delta_3(x)$ 的基本方程组, 我们分别得到¹⁾

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12}) \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} = c_T, \quad (22.7a)$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} = 2c_D, \quad (22.7b)$$

其中 c_T 为表面摩擦力系数, c_D 为耗散系数. 这两个与切应力有关的系数强烈地依赖于式(22.2)中的 Reynolds 数 R 和式(22.4)中的形状因子 H . 它们的下述幂律关系已经经受到长时间的检验, 即

$$c_T = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\alpha(H)}{R_1^2}; c_D = - \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho U^2} \right) dy = \frac{\beta(H)}{R_1^2}. \quad (22.8a, b)$$

这些表达式包含着因子 $\alpha(H)$ 和 $\beta(H)$, 它们是形状因子和当地 Reynolds 数 R_1 或 R , 某个幂次方的单值函数. 图 22.7(a) 和 (b)画出了 α 和 β 的数值以及 $\alpha' = \alpha/\alpha_\infty$ 和 $\beta' = \beta/\beta_\infty$ 作为 H 函数的曲线, 同时标出了 α_∞ 和 β_∞ (表示零压力梯度流动的值). 该图的说明中也援引了它们相应的公式. 可以看出, β' 随 H 的变化较为平缓, 而 α' 选取分离时的值 $\alpha'(H = H_s) = 0$, 然后当 H 增加时迅速地增加.

现在将式(22.8a, b)代入方程 (22.7a, b), 我们分别导出相应于 $\delta_2(x)$ 和 $\delta_3(x)$ 的动量方程和能量方程的修正形式.

为了完成计算, 还必 知道形状因子函数 $H(x)$. 参考文献

1) 上述方程组中略去了式(18.10)中 Reynolds 应力张量法向分量 $\overline{\rho u'^2}$ 和 $\overline{\rho v'^2}$ 的影响, 在参考文献[85, 87]中, 说明了在这简化不容许时如何来修改这些方程.

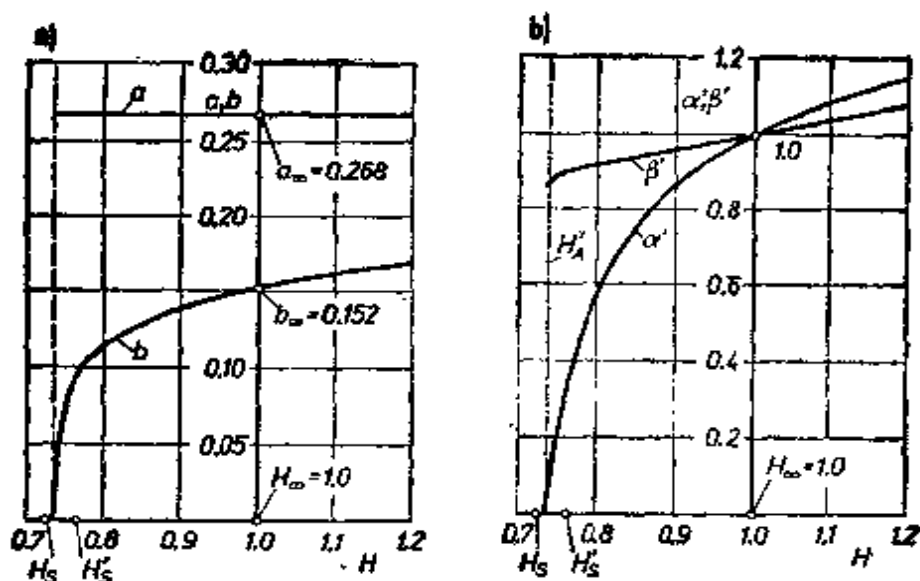


图 22.7 湍流边界层中的切应力, 对应于式(22.8), 根据参考文献 [33]和[120]. (a)指数 α 和 b 随 H 的变化; (b)因子 α 和 β 随 H 的变化

$$\alpha' = \alpha/\alpha_m, \text{ 其中 } \alpha_m = 0.0157$$

$$\beta' = \beta/\beta_m, \text{ 其中 } \beta_m = 0.0053$$

[113] 的第 487 页中说明, 为了计算 $H_{32}(x)$ 和 $H_{23}(x)$, 将方程 (22.7a, b) 化为便于计算的形式

$$\delta_2 \frac{dH_{32}}{dx} - (H_{12} - 1)H_{32} \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} = 2c_D - H_{32}c_T, \quad (22.9a)$$

$$\delta_3 \frac{dH_{23}}{dx} + (H_{12} - 1)H_{23} \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} = c_T - 2H_{23}c_D. \quad (22.9b)$$

现在可以用一对耦合的方程来计算形状因子, 即方程 (22.7a) 和 (22.9a) 或方程 (22.7b) 和 (22.9b). 为了区分这两种可能的方法, 我们称第一种情形为动量法, 称第二种情形为能量法. 在大多数计算中采用动量法, 而 E. Truckenbrodt^[111, 114] 采用的是能量法. 采用能量法有两个理由: (a) 和方程 (22.7a) 不同, 方程 (22.7b) 的左边不明显地依赖于形状因子. 因此, 我们还可以将方程(22.7b)改写为

$$\frac{1}{U^3} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2c_D. \quad (22.10)$$

(b) 方程 (22.7b) 右边的耗散系数 c_D 必须通过式 (22.8b) 在

整个边界层厚度($0 \leq y \leq \delta(x)$)上的积分来计算, 而方程(22.7a)右边的表面摩擦力系数 c_T 只取决于壁面上的局部切应力(式(22.8a)). 这就表明, 形状因子对耗散功的影响比壁面上局部切应力对耗散功的影响要小得多. 这从图22.7b中 $\alpha'(H)$ 和 $\beta'(H)$ 的曲线已得到证实. 因此, 在能量法中, 确定边界层厚度的方程(能量方程)和确定形状因子的方程之间的耦合关系比动量法中的耦合关系要弱得多.

参考文献 [114] 说明了如何才能将边界层厚度的基本方程(22.7a,b)转变成确定局部 Reynolds 数(由式(22.2)所定义)的方程. 类似地, 这篇参考文献中也说明了如何才能将形状因子的基本方程(22.9a,b)转变成修正的形状因子(由式(22.4)所定义)的方程. 用这一方法, 我们得到

$$\frac{dR}{dx} + m \frac{R}{U} \frac{dU}{dx} = U(x)\Phi(R, H), \quad (22.11a)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H}{U} \right) = \frac{\phi(R, H)}{R(x)}. \quad (22.11b)$$

表22.1中列出了缩写符号 m , Φ 和 ϕ 的表达式. 对于动量法, R, m, Φ 和 ϕ 标以下标 2, 而对于能量法, 则标以下标 3.

4. 关于计算平板湍流边界层的积分 在一定的简化假设下, 还可以进一步简化方程组(22.11a,b). 按照这种方法, 对于任何一个(零压力梯度、逆压梯度或顺压梯度)的外流速度分布 $U(x)$,

表22.1 计算无量纲动量厚度 R_2 , 无量纲能量厚度 R_3 , 以及形状因子等方程中各种量的一览表, 见方程(22.11a,b)

	动量法(下标 2)	能量法(下标 3)
R	$R_2 = U\delta_2/\nu$	$R_3 = U\delta_3/\nu$
m	$m_2 = H_{12} + 1 = m_2(H)$	$m_3 = 2 = \text{常数}$
$\Phi(R, H)$	$\Phi_2 = c_T/\nu = \alpha(H)/\nu R_2^2$	$\Phi_3 = 2c_D/\nu = 2\beta(H)/\nu R_3^2$
$\phi(R, H)$	$\phi_2 = -\frac{H}{\nu} \frac{c_T - 2H_{12}c_D}{H_{12} - 1}$ $= -\frac{H}{\nu} \frac{\alpha - 2\beta H_{12}^{1+b} R_2^{4-b}}{(H_{12} - 1)R_2^2}$	$\phi_3 = \frac{H}{\nu} \frac{2c_D - H_{32}c_T}{H_{32} - 1}$ $= \frac{H}{\nu} \frac{2\beta - \alpha H_{32}^{1+a} R_3^{b-a}}{(H_{32} - 1)R_3^2}$

我们可以通过积分导出 $R(x)$ 和 $H(x)$ 的显式表达式。现在就着手来导出这种近似的显式公式，同时说明如何适当地选取近似步骤才能得到逐步地改进。

层流边界层比拟(动量法): 在某种意义上，类似于第十章所阐明的层流边界层中的 K. Pohlhausen 近似方法, A. Buri^[13] 假设: 在湍流边界层的情形下, 厚度比 $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ 和表面摩擦力系数 $c_T = \tau_0/\rho U^2$ 仍然是某一个形状参数的函数¹⁾

$$\Gamma = \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} R_2^a (a = 1/4). \quad (22.12)$$

他引入下列函数, 参看式 (22.8a):

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = f_1(\Gamma), \quad c_T = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{f_2(\Gamma)}{R_2^a}. \quad (22.13a, b)$$

现在将这些关系式代入动量方程 (22.7a), 得出

$$\frac{d}{dx} (\delta_2 R_2^a) = F(\Gamma), \quad (22.14)$$

其中 $F(\Gamma)$ 是由

$$F(\Gamma) = (1+a)f_2(\Gamma) - [2+a+(1+a)f_1(\Gamma)]\Gamma$$

给出的普适函数。A. Buri 利用他自己的和 J. Nikuradse^[14] 的实验结果, 证实了可以将 $F(\Gamma)$ 表示成有很好近似程度的线性关系

$$F(\Gamma) = \Gamma_\infty - n\Gamma = \Gamma_\infty - n \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} R_2^a. \quad (22.15)$$

对于加速流动或减速流动, 当 $a = 0.25$ 时, 他求出 $0.01475 \leq \Gamma_\infty \leq 0.0175$ 和 $3.94 \leq n \leq 4.15$ 。如果现在将式 (22.15) 代入式 (22.14), 我们就可以将方程单独地对 x 积分。用以动量厚度为参考长度的 Reynolds 数来表示, 其结果为

$$[R_2(x)]^{1+a} = \frac{1}{\nu'} \frac{E_2(x)}{[U(x)]^c}, \quad (22.16)$$

1) 根据式(10.27), 在层流边界层中与形状参数 Γ 相对应的是

$$K = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} R_2.$$

其中 $\nu' = \nu/\Gamma_\infty$,

$$E_2(x) = E_2(x_1) + \int_{x_1}^x U^n dx, \quad (22.16a)$$

表 22.2 中列出了指数 a, c, n 以及修正的运动粘性系数 ν' 的数值。积分常数为

$$E_1(x_1) = \nu' [U(x)]^c [R_1(x_1)]^{1+a}.$$

表 22.2 计算动量厚度和能量厚度的显式方程中数值常数的一览表, 见式(22.16), (22.17)和(22.19)。其中 b 见图 22.7(a); β 取自图 22.7(b)

比拟	动 量 法		能 量 法	
	层流边界层	平板湍流边界层(下标 ∞)		自相似解
m	—	$H_{12} + 1 = 2.30$	2	($H = \text{常数}$)
c	$a = 0.25$	$a = 0.268$	$b = 0.152$	b 根据图 22.7(a)
e	$2.94 < e < 3.15$	$m(1+a) = 2.92$	$2(1+b) = 2.30$	b 根据图 22.7(a)
n	$3.94 < n < 4.15$	$1 + m(1+a) = 3.92$	$3 + 2b = 3.30$	b 根据图 22.7(a)
ν'	$57\nu < \nu' < 68\nu$	$\frac{\nu}{(1+a)\alpha} \approx 50\nu$	$\frac{\nu}{2(1+b)} \approx 78\nu$	β 根据图 22.7(b)
	$68\nu > \nu/\Gamma_\infty > 57$			

平板湍流边界层比拟。 虽然沿着零攻角平板(常压流动)的外流速度保持不变 ($U(x) = U_\infty = \text{常数}$), 但是一般情形却以变化的外流速度 ($U(x) \approx \text{常数}$) 为特征, 即 $dU/dx \approx 0$ 。我们假定: 当 $U(x) \approx \text{常数}$ 时, 形状因子的值与假想的 $U_\infty = U(x)$ 问题中的值相同, 这隐含着 $H(x) = H_\infty = 1^D$ 。因此 $H_{12} = (H_{12})_\infty = 1.3$, 同时按照表 22.1, 不论是动量法还是能量法, 都必须取 $m = \text{常数}$ 。所以 $\alpha = \alpha_\infty, \beta = \beta_\infty, a = a_\infty$ 以及 $b = b_\infty$, 见图 22.7。就外流而论, 我们常常采用实际的速度分布 $U(x)$ 。因为已经取定形状因子的值为 $H(x) = 1$, 所以剩下的唯一要计算的量就是由方程(22.11a) 所确定的局部 Reynolds 数。又因为 $m = \text{常数}$, 我

1) 严格地讲, 对于平板来说, 实际上是 $H(x) \approx 1.0$, 这里不予计较。

们可以将其左边的两项合成一项，然后分别对 $R_2(x)$ 和 $R_1(x)$ 进行积分，求出问题的解。用缩写的形式，它们是

$$\{R(x)\}^{1+e} = \frac{1}{\nu'} \frac{E(x)}{[U(x)]^e}, \text{ 其中 } E(x) = E(x_1) + \int_{x_1}^x U^n dx. \quad (22.17)$$

表 22.2 中分别对动量法和能量法列出了指数 i, e, n ，以及修正的运动粘性系数 ν' 所采用的关系式和数值。积分常数为

$$E(x_1) = \nu' \{U(x_1)\}^e \{R(x_1)\}^{1+i}.$$

将式(22.17)对 x 进行微分，并根据表 22.1 和表 22.2 中所定义的缩写符号，我们可以证明它与方程 (22.11a) 是一致的。在动量法的情形下，如果令 $i = a$ ， $R = R_2$ 和 $E = E_2$ ，式 (22.17) 就与 (22.11a) 相同。

比较表 22.2 中的数据，我们发现动量法和能量法给出的结果极为一致。尽管形状因子的假设和壁面上切应力的假设有很大的差别，我们发现关于计算动量厚度的两个显式是等价的。可以推荐下列的具体数值：

$$R = R_2; \quad a = 0.268, e = 3, n = 4, \nu' = 50\nu. \quad (22.18)$$

下面将讨论能量法。

自相似解比拟(能量法)：在湍流中，人们将边界层理论中的自相似解称为**平衡流动**。自相似解的特征在于：对于一些外流的速度分布 $U(x)$ ，解在不同 x 处的速度剖面 u/U 是相似的。这意味着形状因子 $H(x)$ 不随 x 变化，即 $dH/dx = 0$ 。图 22.7 暗示这样一个事实，在这类平衡边界层中，所有依赖于 x 的变量都变成常量了。

现在将 c_D 的表达式 (22.8b) 代入方程(22.10)，可以指出，根据 $b = \text{常数}$ 和 $\beta' = \text{常数}$ ，所得的方程本身就可以对 x 积分。于是，给出以能量厚度为参考长度的 Reynolds 数为

$$\{R_3(x)\}^{1+b} = \frac{1}{\nu'} \frac{E_3(x)}{[U(x)]^e}, \text{ 其中 } E_3(x) = E_3(x_1) + \beta' \int_{x_1}^x U^n dx. \quad (22.19)$$

关于 b, e, n 和 ν' 的数值，将根据表 22.2 和图 22.7a 中的关系式

来选取. 例如, 在 $H_5 \leq H \leq H'_5$ 有分离倾向流动的特殊情形下, 我们求出 $1 + b'_5 = 1.094$ 和 $1 + b_\infty = 1.152$. 这两个值相差约为 5%. 从这类近方法固有的误差来看, 这种差异是允许的. 换句话说, 我们采用基于平板比拟的数值来进行计算是可行的. 形状因子对出现在式 (22.19) 中的 $\beta' = \beta/\beta_\infty$ 也只有轻微的影响. 作为近似方法, 我们令 $\beta' = 1$, 因此, 用式 (22.19) 来计算能量厚度可以基于下列的数值:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3; \quad b = 0.152; \quad e = 2.3; \quad n = 3.3; \quad \nu' = 78\nu; \quad \beta' = 1. \quad (22.20)$$

正如所期望的那样, 利用这些假设, 并考虑到 $i = b$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3$ 和 $E = E_3$, 式 (22.19) 就能转化为式 (22.17).

参考文献 [114] 证明: 当采用能量法时, 方程 (22.11a) 本身就足以解决问题. 对比之下, 当采用动量法时, 方程 (22.11a) 和方程 (22.11b) 之间的耦合是不容忽视的¹⁾. 后者只给出一个平凡的结果, 因为从定义 $H_{23} = \delta_2/\delta_3$ 来看, 必然得出 $\mathbf{R}_2 = H_{23}\mathbf{R}_3$. 在迄今所考虑的近似程度上, 可以证明动量法和能量法是一致的. 但是, 两种方法本质上的差别在于: 动量法使用了两个基本方程 (22.11a) 和 (22.11b), 而能量法只用了一个方程 (22.11a). 就以简单的积分形式来发展另外的近似方法而论, 我们已经详细地讨论了动量法潜在的固有性质. 在能量法中, 如上所述, 我们用方程 (22.11b) 自身封闭的积分导出了形状因子的公式, 现在就来指出这一点.

E. Truckenbrodt 的积分方法: E. Truckenbrodt^[111, 114] 发展了湍流边界层方程组显式积分的近似方法, 用以得出边界层厚度 (能量厚度) 和 (修正的) 形状因子. 对于工程应用中的计算来说, 已证明该方法的第一个文本^[111] 是切实可行的. 因此, 按照新近的发现来修正它是有价值的. 采用上面引入的分类方法, 我们称它为 **能量法**. 可以将这个方法用于二维的或轴对称的流动, 参阅第

1) 作为引伸, 我们可以指出: 当 $a = \text{常数}$ 和 $b = \text{常数}$ 时, 参考文献 [114] 中表 6 所导出的结果同样有效.

二十四章 c1.

这个方法基于方程 (22.11a), 是用于计算以能量厚度为参考长度的 Reynolds 数的方程. 在这里, 依照表 22.1, 设 $R = R_3$, $m = 2$ 和 $\Phi = \Phi_3 = (2/\nu)\beta R_3^{-b}$. 如果我们假设 $b = \text{常数}$ 和 $\beta(x)$ 是已知的, 就可以将方程 (22.11a) 对 x 积分, 并得到

$$\{R_3(x)\}^{1+b} = \frac{1}{\nu'} \frac{E_3(x)}{[U(x)]^2}, \text{ 其中 } E_3(x) = E_3(x_1) + \int_{x_1}^x \beta' U^2 dx. \quad (22.21)$$

式(22.20)中的数值对 $\beta'(x) = \beta(x)/\beta_\infty$ 同样有效. 然而, 从图 (22.7b) 中可以查明 β' 对 1.0 的偏离不大. 在这种情形下, 式(22.21) 转变成式(22.19). 因此, 如果对 Reynolds 数数值的精度要求不高的话, 就得出

$$R_3(x) = \left(\frac{1}{\nu'} \frac{E_3(x_1) + \int_{x_1}^x U^{3+2b} dx}{\{U(x)\}^{2(1+b)}} \right)^{1/(1+b)} \quad (22.22a)$$

这里已采用了下列的数值(参看表 22.2——能量法):

$$b = 0.152; \nu' = 80\nu; \text{ 其中 } E_3(x_1) = \nu' \{[U(x_1)]^2 R_3(x_1)\}^{1+b}. \quad (22.22b)$$

这个显式公式中只包含外部自由流速度 $U(x)$, 而 $U(x)$ 可以由位势理论或由实验测量获得. 式中 $x = x_1$ 是计算的起点.

除了速度 $U(x_1)$ 之外, 积分常数 $E_3(x_1)$ 中还包含能量厚度 $\delta_3(x_1)$. 如果点 x_1 与转换点重合, 则在整个 $0 < x < x_1$ 的层流边界层区域内, 可以计算出能量厚度. 这里 $x = 0$ 表示边界层的起始位置, 例如平板的前缘或钝头体的驻点. 参考文献[114]表明, 式 (22.22a) 对层流边界层亦成立, 此时取 $b = 1$, $\nu'_i = \nu/4\beta_\infty = 0.917\nu$ 和 $E_3(x_1 = 0) = 0$. 在这种情形下, 用层流的起始长度来表示, 积分常数为

$$E_3(x_1) = \left[\frac{1}{\nu'} \int_0^{x_1} U^3 dx \right]^{1/2} \text{ (转换点)}. \quad (22.23)$$

如果边界层在 $x = x_1$ 处已是湍流, 则必须用当地 Reynolds 数

$R_3(x_1) = \delta_3(x_1)U(x_1)/\nu$ 代入关于 $E_3(x_1)$ 的式(22.22)。

在许多实际应用中,只知道边界层厚度的特性(在这里是能量厚度 $\delta_3(x)$)是不够的,分离初发时期或分离后的边界层就是这种情形。例如,如果需要对分离的可能性作出说明,那么就必须知道沿壁面的速度参数。本章 b1 中所指出的所有方法,除了给出边界层厚度(例如这里所讨论的动量厚度)的计算方法之外,还给出某些形状因子的计算方法。形状因子在不同的方法中有不同的定义,从而规定了计算它们的不同的微分方程。J. C. Rotta^[85] 对这些方法作了评述和比较。

通过动量积分和能量积分 (22.7a, b) 的耦合,我们得出形状因子 $H_{32}(x)$ 和 $H_{23}(x)$ 的微分方程 (22.9a, b)。如果假设了单参数速度剖面 $H_{12} = f(H_{32})$ 或 $H_{12} = f(H_{23})$, 并根据式 (22.8a, b), 将切应力系数 c_T 和 c_D 的近似表达式代入,上述微分方程就唯一地确定了形状因子。可以用 E. Truckenbrodt 建议的修正的形状因子 $H = f(H_{23})$ 来写出关于确定形状因子的方程 (22.11b), 再加上方程(22.11a), 这些关系式构成了关于 Reynolds 数 $R_3(x)$ 和形状因子 $H(x)$ 的联立微分方程组, 其中 $R_3(x)$ 是以能量厚度为参考长度的 Reynolds 数。按照表 22.1, 对于目前所讨论的能量法, 必须设 $m = 2 = \text{常数}$ 。函数 $\phi_3(R_3, H)$ 和 $\psi_3(R_3, H)$ 的形式取自同一个表 22.1。参考文献 [114] 将方程 (22.11a) 和 (22.11b) 概括为

$$H(x) = \frac{U(x)G'(x)}{E'(x)}, \quad (22.24)$$

其中

$$E'(x) = E(x_1) + \int_{x_1}^x \beta' U^n dx,$$

以及

$$G'(x) = G(x_1) + \int_{x_1}^x \nu' U^n dx.$$

表 22.2 (能量法)中有 e, n 和 ν' 。借助于 $a(H), b(H), \alpha(H), \beta(H), H_{12}(x), H_{32}(x)$ 以及 R_3 和 $H(x)$, 可以计算修正函数 $\nu'(x)$

$$= v(\mathbf{R}_s, H),$$

在湍流的情形下，修正函数 v' 或多或少地偏离于 1.0，不能足够可靠地加以确定。作为近似，我们假定 $v'(x) = \text{常数} = 1.0$ ，为了进一步简化解析解，引入一个新的量 $c = \text{常数} = 4.0$ 。为了使现有的测量结果和理论结果间达到最佳的一致，由此确定出上述的 c 值，这一点也可以参阅参考文献[114]。由下述式子得出修正的形状因子

$$H(x) = U(x)G(x)[N(x)]^{-1/c}, \quad (22.25)$$

这是一些代数变换的结果，在此不再重复。这里，外部速度的影响函数定义为

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= G(x_1) + \int_{x_1}^x U^{2(1+b)} dx; \\ N(x) &= N(x_1) + c \int_{x_1}^x U^{2(1+b)+c} G^{c-1} dx. \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

初值(即积分常数)为

$$\left. \begin{aligned} G(x_1) &= v'[H(x_1)] \{U(x_1)\}^{1+2b} \{\mathbf{R}_s(x_1)\}^{1+b}; \\ N(x_1) &= [U(x_1)G(x_1)/H(x_1)]^c. \end{aligned} \right\} \quad (22.26a)$$

我们取数值常数为

$$b = 0.152; c = 4.0; v' = 78v. \quad (22.26b)$$

计算形状因子的积分表达式(22.25)只包含外流速度分布 $U(x)$ ，这和计算 Reynolds 数相应的积分表达式(22.22)的情形相同。确定影响函数 $N(x)$ 则需对 x 积分两次。位置 $x = x_1$ 仍代表积分的起点。

积分常数 $G(x_1)$ 和 $N(x_1)$ 除了包含有速度 $U(x_1)$ 和 Reynolds 数 $\mathbf{R}_s(x)$ 之外，还包含着形状因子 $H(x_1)$ 。如果点 $x = x_1$ 与转捩点重合，则根据式(22.23)，必须要求层流边界层的能量厚度与湍流边界层的能量厚度一定相等。另一方面，形状因子在转捩点可以改变本身的值。形状因子的数值在 $1.0 \geq H \geq H_s = 0.723$ 的范围内。

第十七章中所介绍的湍流起因的理论得出与实验测量一致的结论：边界层从层流到湍流的转捩发生在外流速度最大那点下游

的不远处。因此,作为近似,在计算中可以将外流的零压力梯度点取作转捩点。依照式(22.4)中 H 的定义,零压力梯度点对于层流边界层和湍流边界层是相同的,即

$$H(x_1) = 1 \text{ (转捩)}. \quad (22.27)$$

如果边界层在 $x = x_1$ 处已是湍流,则必须采用相应的局部值 $G(x_1)$ 和 $N(x_1)$ 。

5. 方法的应用 上节叙述的近似方法只需要简单的积分,所以便于应用。对于参考文献[54]所收集的所有的实验数据(33组),都已用它们作了详细的计算,特别是应用公式(22.22)计算出了以能量厚度为参考长度的 Reynolds 数变量 $R_3(x)$, 和根据式(22.25)¹⁾ 计算了相应的修正的形状因子变量 $H(x)$ 。这样,实际的计算包括了很不同的外流状态,因此包括了很广泛的应用范围。图22.8中以一个有逆压梯度的机翼翼型为例,给出了理论和实验之间的比较。在图 22.9(a), (b) 中²⁾, 则对另外一些测量数据作了类似的比较,图中比较了 Reynolds 数的理论计算值和实验测量值,以及位于尽可能下游的形状因子的理论计算值和实验测量值。对直线的偏离大小构成了近似方法好坏的程度。图 22.9(a)中对 $\log R_3$ 的比较是令人满意的,特别是当我们考虑到这样的事实,在对 Reynolds 数计算数值的精度要求过高而没有多大实际意义时,更是如此。

按照理论分析,在图 22.9(b) 中画出六组测量数据,当 $H < H_c$ 时,呈现出初期分离现象。实验测量证实了这个事实,参考文献 [114] 对这一情形作了更详细的讨论。标有 Ident 1500 和 Ident 2600 的测量数组显示出理论和实验测量之间特别大的偏差。Ident 1500 的情形意味着物体上突出部分后面边界层的再附。在这种情形下,就 Reynolds 数和有关的形状因子计算而言,上述方法不能令人十分满意是可以理解的。Ident 2600 的情形是外流

- 1) 为了把流线可能收敛或发散的情形考虑在内,我们已引入对三维效应的修正。修正是基于 J. C. Rotta^[36] 的方法,参阅第 761 页的脚注。
- 2) 这些图包括本章d1中所讨论的轴对称的情形。

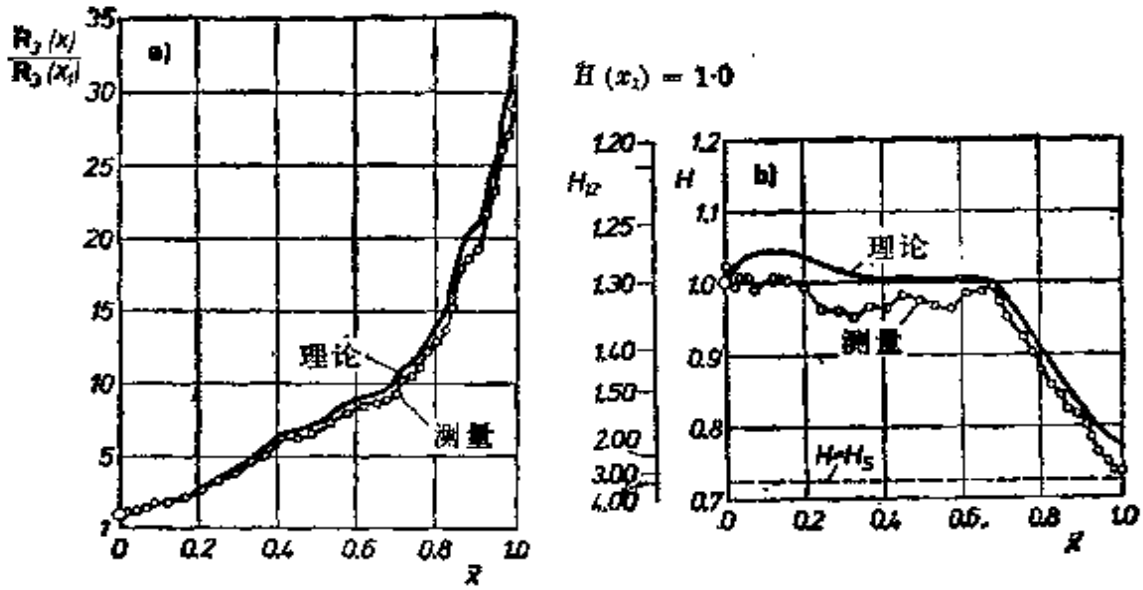


图 22.8 在逆压梯度下机翼翼型上的湍流边界层^[54]。情形 Ident 2100; $\bar{x} = (x - x_1)/(x - x_N)$, 其中 x_1 = 初始测量位置 (测量的起点), x_N = 终止的测量位置 (测量的终点)。测量点引自 G. B. Schubauer 和 P. S. Klebanoff. 理论曲线 (实线) 根据公式(22.22)和 (22.25)。 (a) Reynolds 数; (b) 形状因子 H_2 和 H

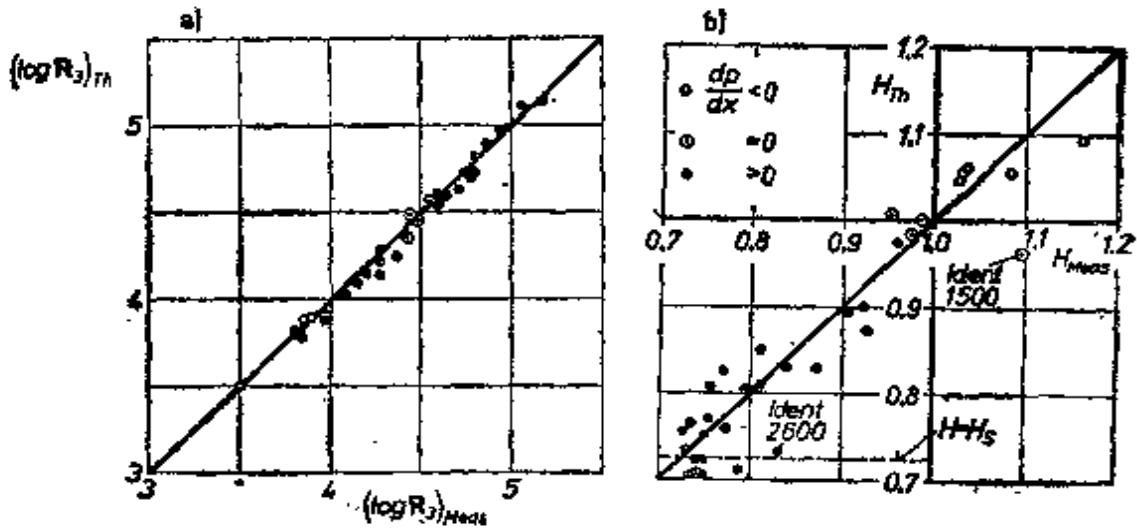


图 22.9 取自 33 组测量的湍流边界层数据, 其中来流具有不同的速度分布, 所画出的点是测量终点 x_N 处的测量值。测量数据 (记以下标 Meas), 根据参考文献 [54]。理论计算 (记以下标 Th), 根据公式 (22.22) 和 (22.25)。 (a) Reynolds 数 R_2 ; (b) 形状因子 H

速度 $U(x) \sim x^{0.255}$ 的所谓平衡边界层。A. A. Townsend 研究了类似的边界层, 其中 $U(x) \sim x^{0.234}$ 。他得出形状因子 $H=0.748$, 这与测量值 $H=0.823$ 有相当大的差异。近似方法则得出 $H=0.731$ 。目前还不能解释这种差别的原因。最后, 我们希望引起读者注意: 关于方程 (22.8b) 中耗散功系数 c_D 的简单假设只是在一定条件下成立, 因为它只描写了耗散功随局部 Reynolds 数和形状因子的变化。更精确的计算必须包括上游边界层对 c_D 的影响 (这方面的研究可参阅参考文献 [86])。

在外流速度可以假设成正比于 x 的幂次方的情形下, 例如 $U(x) \sim x^p$, 其中 p 一常数, 应用我们的方法变得非常简单。假设没有层流起始段, 湍流边界层开始于 $x=0$, 则方程 (22.22a) 和方程 (22.26) 中的积分常数为零。我们可以将所求的积分写成封闭形式。按照参考文献 [114], 得到

$$R_1(x) = \left(\frac{\beta U x}{r \nu} \right)^{1/(1+b)}, \quad (22.28a)$$

和

$$H(x) = (s/r)^{1/c}, \quad (22.28b)$$

其中 $b = 0.152$, $\bar{\beta} = 2(1+b)\beta_\infty = 0.0127$, $c = 4.0$, $r = 1 + (3+2b)p$ 和 $s = 1 + 2(1+b)p$ 。当给定 p 的值时, 形状因子为 $H(x) = \text{常数}$ 。这就是说, 当 $U(x) \sim x^p$ 时, 我们遇到的是一个自相似解 (平衡边界层)。 $p=0$ 是零攻角平板的情形, 其中 $U(x) = U_\infty = \text{常数}$ 。

6. 关于有压力梯度的湍流边界层特性的评述 将本章 b4 所描述的方法用于湍流边界层, 我们就可以计算出以能量厚度 $\delta_1(x)$ 为参考长度的 Reynolds 数 $R_1(x)$ 和修正的形状因子 $H(x)$ 沿流动方向的变化。有关边界层的其他物理量可由图 22.6 和 22.7 中列出的附加关系式求出。

当压力梯度很大时, 在较短的湍流边界层内, Reynolds 应力沿流线的变化不大。R. G. Deissler^[12] 证明了下述事实, 即切应力为常数的假设可以得出计算与实验测量之间符合得很好的结论。他用同样的方法, 在计算湍流边界层的传热系数中也获得了成功。

边界层厚度: 当 $H(x)$ 的值已知时, 图 22.6 中的曲线给出 $H_{12}(x) = H_{12}[H(x)]$

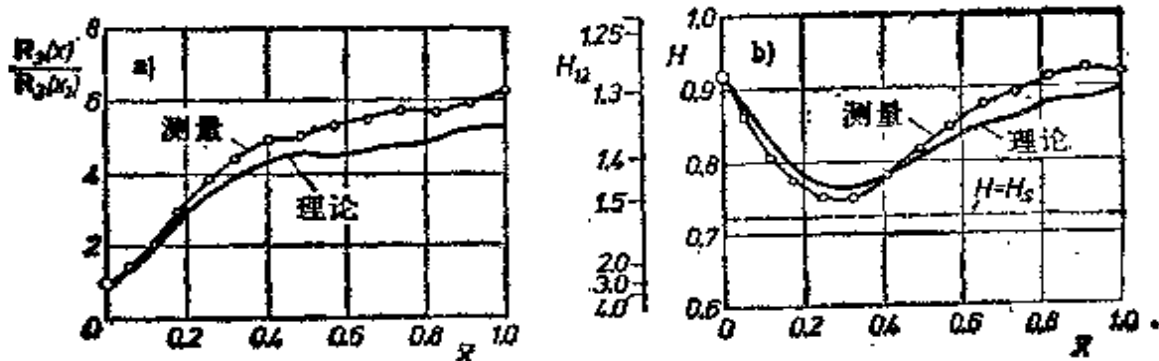


图 22.10 旋成体上的湍流边界层,其中起始段有很大的压力升,然后过渡到常压^[24]. 情形 Ident4000: $\bar{x} = (x - x_1)/(x - x_N)$, 这里 x_1 = 起始的测量位置(测量的起点), x_N = 终止的测量位置(测量的终点). 测量点引自 Moses (情形5). 理论曲线(实线)根据公式(22.1)和(22.2). (a) Reynolds 数 R_2 ; (b) 形状因子 H_2

和 $H_{21}(x) = H_{21}[H(x)]$ 的关系. 依次使用式(22.3b,c)中给出的定义,我们可以计算出位移厚度和动量厚度分别为

$$\delta_1(x) = H_{11}(x)H_{21}(x)\delta_3(x), \quad (22.29a)$$

$$\delta_2(x) = H_{21}(x)\delta_3(x). \quad (22.29b)$$

对于平衡边界层, 由于 $H_{11}(x) = \text{常数}$ 和 $H_{21}(x) = \text{常数}$, 正如由式(22.28a)表明的那样, 可得

$$\delta_1(x) \sim \delta_2(x) \sim \delta_3(x) \sim U^{(1-\delta_2)/(1+\delta_2)}.$$

总阻力: 在流动中物体的型阻由表面摩擦力和压差阻力组成. 表面摩擦力是切应力沿整个物体表面的积分. 即使在没有分离的情形下, 型阻也必须是表面摩擦力加压差阻力. 压差阻力的根源在于边界层对外流施加的位移作用. 边界层使位势流的流线由物体的表面向外移动, 移动的距离等于边界层的位移厚度. 这一位移稍微改变了物体表面的压力分布. 与位势流(d'Alembert 佯谬)不同, 由摩擦修正的压力分布的合力不再为零, 从而产生压差阻力. 表面摩擦力必须加上压差阻力, 由此给出型阻. 由尾缘处的动量厚度来确定型阻的计算, 这将在第二十五章中详细讨论.

无分离的边界层: 只有当分离可以避免时, 压差阻力才是很小的. 可以通过物体形状合理的设计来达到这个目的. 在第八章和第九章所讨论的层流自相似的流动中, 给出了有逆压梯度而不导致分离的流动例子. 当外流遵循幂律的速度分布 $U(x) \sim x^p$ 时, 层流中发生分离的 p 值为 $p_s \leq -0.09$. 将 $H = H_s \leq 0.723$ 代入式(22.28b), 就可以得到湍流中相应的值, 由此给出 $p_s \leq -0.27$, 而 A.A. Townsend 给出 $p_s \leq -0.234$. 这意味着湍流边界层要比层流边界层能够承受大得多的逆压梯度而不发生分离. 自相似解给我们一个启发, 为了在不分离的条件下承受最大可能的逆压梯度,

应如何来安排压力分布。逆压梯度在前缘很大而后逐渐减小的压力分布，将产生较薄的边界层，并能够承受比均匀压力梯度中更大的总压力升值。G. B. Schubauer 和 W. G. Spangenberg^[97] 以及 B. S. Stratford^[100] 已从实验上证实了这一点。在参考文献 [17] 中，有对各种计算分离点位置方法的评述。

再附的边界层：当分离的剪切层本身再附于壁面并在下游进一步发展成边界层时，这是一个非常有意义的情形。在 P. Bradshaw 和 F. Y. F. Wong^[143] 以及 P. Wauschkuhn 和 V. Vasanta Ram^[117] 的文章中，有关于这方面最新成果的报道。这方面的讨论涉及到在后台阶分离出来的边界层。这种边界层与“正常”边界层（例如平板或翼型的边界层）的主要差别在于：前面的分离已强烈地扰乱了它的湍流结构。湍流结构中的这种扰动给计算方法的公式化带来了很大的困难。P. Wauschkuhn 和 V. Vasanta Ram^[117] 报道了在再附层中壁面切应力，平均速度分布和 Reynolds 应力的测量，并与几种计算方法作了比较。

7. 有抽吸和引射的湍流边界层 通过吹气和抽吸影响边界层中流动的可能性，特别是从增加翼型的最大升力来看，具有重要的实际意义。在第十四章 b 中给出了有抽吸的层流边界层的计算方法；在第二十一章 a 中给出了湍流边界层中相应的计算方法。

H. Schlichting^[93] 最早阐明零攻角平板上有均匀抽吸和吹气的湍流边界层的计算方法，在第二十一章 a 中讨论了实验研究以及实验与理论间的比较。W. Pechau^[77] 和 R. Eppler^[52] 将上述方法推广到包括具有任意抽吸速度分布 $-v_0(x)$ 的情形。参考文献 [92, 94] 中讨论了这些方法所得到的结果，还包含有用这个方法计算的另一一些结果，并阐明了抽吸区域的大小、位置对消除机翼上分离所需的最小吸流量的影响。结果表明：最佳的方案是将抽吸区域集中在翼型吸力面一个狭窄的范围内，并放在前缘后不远处。这是可以理解的，因为在大攻角时，最大的局部逆压梯度发生在该处。所需的最小抽吸率用抽吸系数 $c_{p, min}$ 来表示，其数量级为 0.002 至 0.004。A. Raspet^[74] 对具有前缘抽吸的机翼进行了飞行测量。

另一种增加最大升力的有效办法，特别是襟翼具有大偏转角的机翼，在靠近襟翼的头部引射高速的射流，图 22.11。这种装置给予湍流边界层可观的能量，使它附着在机翼表面上。通过比较有分离的襟翼和无分离的襟翼上的压力分布，可以来估计由这种方法所获得的升力增益。按照 J. Williams^[122] 的分析，可以用无量纲的动量系数来评价射流的效率

$$c_m = \frac{\rho v_j^2 s}{\frac{1}{2} \rho U^2 l}, \quad (22.30)$$

其中 v_j 是射流的速度， s 是射流的宽度。F. Thomas^[109, 110] 对增加襟翼升力的引射效率作了广泛的测量。由此他提出一种方法，使我们计算出避免分离所需引射的动量系数数值，即通过狭缝注入湍流边界层的动量系数数值。此外，F. Thomas^[109] 在引射狭缝后的湍流边界层中进行了详细的测量。类似地，在大的逆压梯度中，P. Carriere 和 E. A. Eichelbrenner^[14] 研究了通过应用切向射流使已分离的边界层返回的问题。

关于通过适当地控制边界层来提高机翼最大升力方面的研究，H. Schlichting^[93]

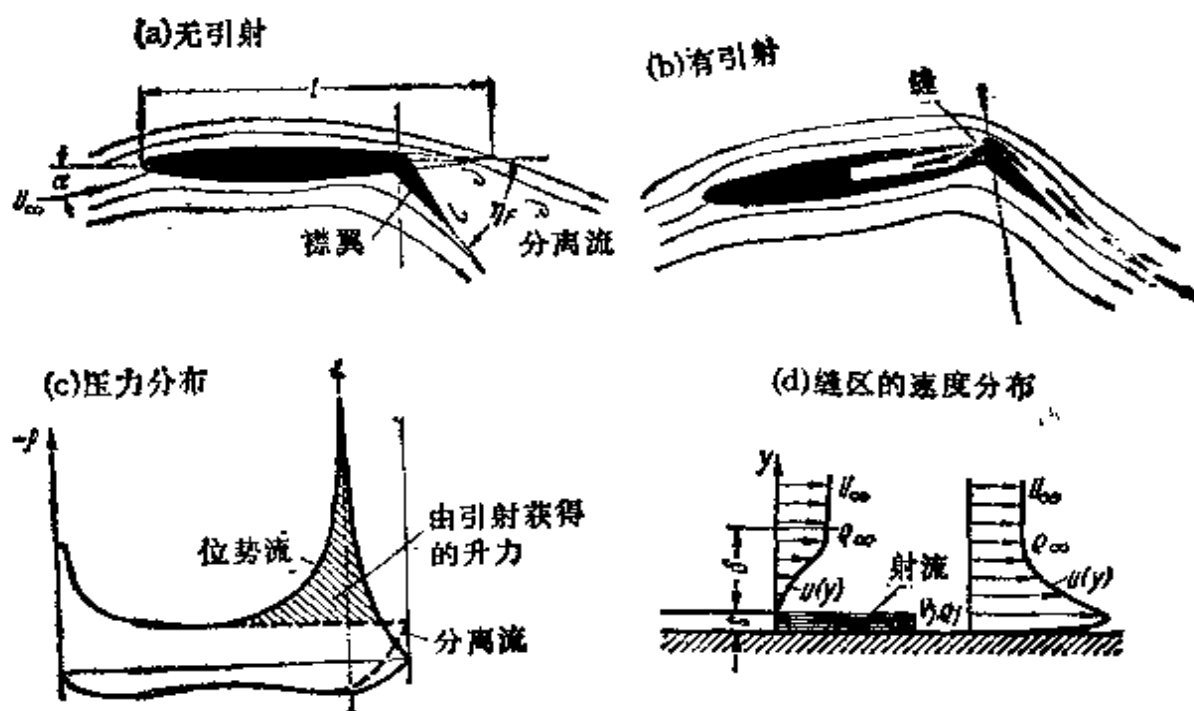


图 22.11 为了增加最大升力, 通过襟翼头部狭缝引射的平直机翼:
 (a) 没有引射的分离流; (b) 有引射的附着流; (c) 压力分布; (d)
 边界层中的速度分布

给出了简要的综述。

当不同的气体注入湍流边界层时, 和层流的情形一样(见第八章 c), 我们又遇到了二组元层, 其中注入气体的浓度在整个流场中是变化的。为了能够分析引射进入湍流边界层的过程, 已经提出了各种物理假设。D. L. Turcotte^[115] 假设混合过程基本上是在层流次层中完成的, 由此导出不可压缩流体情形下壁面切应力的近似公式。该公式已推广到可压缩边界层的情形, 其形式为

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w0}} = \exp\left\{-6.94\left(\frac{\rho_w}{\rho_1} \frac{v_w}{u_1} \sqrt{\frac{2\rho_w}{\rho_1 c_{f0}}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\tau_{w0}}{\tau_w}}\right)\right\}$$

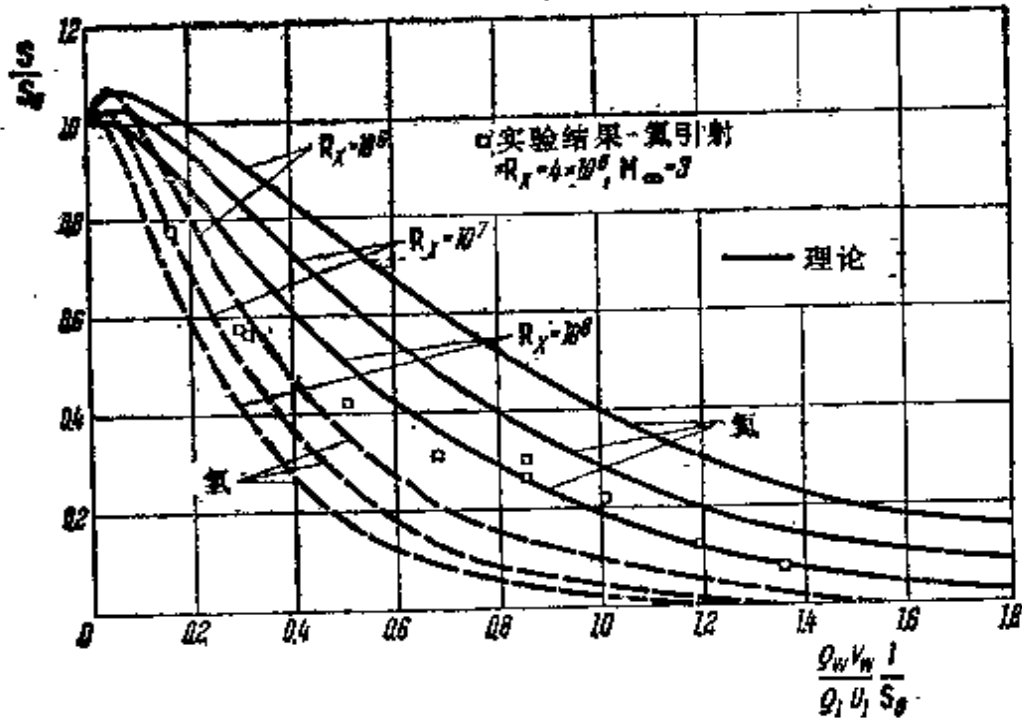
在这个公式中, 下标 \$w\$ 指壁面, 下标 0 指没有引射的情形, 下标 1 指来流。对于 Mach 数从 0 到 4.3 范围内的平板和锥, 若干作者已通过实验证实了上述公式是有效的。

有关可压缩流中注入其他气体对锥上边界层中壁面切应力的影响, C. C. Pappas 和 A. F. Okuno^[116] 已报道了广泛的实验测量。

M. W. Rubesin 和 C. C. Pappas^[117] 提出了关于计算在湍流边界层中注入异性气体效应的混合长度理论。这个方法用于计算壁面的传热率, 图 22.12 中说明了氮和氢引射的相应结果, 为了比较, 计算结果已和实验结果一起画出。实验结果显示传热率比理论预言有较大的减小。与此相反, 在湍流边界层和层流边界层中, 虽然对恢复因子有影响, 但是引射较轻的气体时, 其影响很小。

若将重气体(氟利昂)吹入空气的湍流边界层, 由实验得出的速度剖面与用空气吹入的情形大致相同, 尽管壁面处和边界层外缘处之间气体的密度比已高达 4。除去逆

压梯度或非常强力吹除的情形之外，借助于 Prandtl 混合长度理论都能很好的描述这种现象。



q = 热通量 T_s = 恢复系数 T_w = 壁温 S_0 = 无引射的 Stanton 数

图22.12 零攻角平板上二维边界层的传热率，以氢或氮注入空气的湍流边界层，根据 M. W. Rubesin 和 C. C. Pappas^[121]。Stanton 数 $S = q / \rho_1 u_1 c_{p1} (T_s - T_w)$ 的理论值和实验测量之间的比较

8. 曲壁上的边界层 H. Wileken^[121] 已对曲壁上的二维边界层作了研究(也可参阅 A. Betz 的文章^[4])。如果壁面是凹的，较快速的质点由于离心力的作用将挤向壁面，而较慢速的质点将偏离壁面。因此，加强了较快速和较慢速流体质点之间进行的湍流混合过程，增大了湍流强度。对于凸壁的情形正好相反，在凸壁附近，较快速的质点被迫离开壁面，而较慢速的质点则挤向壁面，因此阻碍了湍流混合过程。所以在相同的压力梯度下，与平板的湍流边界层相比，凹壁上湍流边界层的厚度要大，而凸壁上湍流边界层的厚度要小。H. Schmidbauer^[96] 将 Gruschwitz 的方法推广到凸壁的情形。G. L. Mellor^{[10]a, [10]b}，R. N. Meroney 和 P.

Bradshaw^[65a] 以及 B. R. Ramaprian 和 B. G. Shivaprasad^[77a] 提供了进一步的结果。

c. 翼型上的湍流边界层：最大升力

A. M. O. Smith^[101] 最近对翼型的高升力问题给出了非常全面的综述，下面将讨论翼型最大升力的理论计算问题。

众所周知，翼型的最大升力与其吸力面的边界层分离有关。因此，要推测最大升力必须讨论翼型截面上有局部分离的压力分布，以及这个压力分布与边界层之间的相互作用。K. Jacob^[49] 已着手研究这个问题，也可参阅 G. K. Korbacher^[55] 的综述文章。图 22.13 针对有较大攻角 $\alpha = 10.7^\circ$ 的一个翼型给出其压力分布的某些理论上和实验测量的结果。在两个 Reynolds 数 $R = 0.4 \times 10^5$ 和 $R = 4.2 \times 10^5$ 时，对应的压力分布 (a) 和 (b) 有很大差别；对于低 Reynolds 数，翼型吸力面上的流动几乎完全分离；而在较高的 Reynolds 数时，翼型吸力面上的流动只是部分地分离，其中 S 是分离点。翼型吸力面上有较长的近似于等压的区域表征了这两个分离区压力分布的特性。按照位势流理论，吸力面上的分离区假设为“死水区”，其边界上的压力分布近似地取作常数值，以此来计算翼型上的压力分布。利用表面奇点法，这样的区域可以用翼型吸力面尾部的某种点源分布所产生的外流来模拟。作了这种假设之后，现在的主要问题是要确定 Reynolds 数如何影响分离。借助于边界层理论，用下述方法就可以解决这个问题，即在位势流的计算中，将分离点的位置当作待定参数来处理。将有分离位势流压力分布的计算和由这个压力分布生成的层流或湍流边界层的计算结合起来，就可以确定出这个参数。一个“合理的流动”要求：边界层的分离点必须与有死水区的位势流的分离点重合，并通过迭代得出所需的结果，用这种方法，可以确定出分离点。由于湍流边界层分离点的位置依赖于 Reynolds 数，因此计算将给出 Reynolds 数的影响。图 22.13 说明：对于翼型 G6801 的压力分布，实验与上述理论之间吻合得相当好。

该理论已被推广到有分离的多段翼型系统^[48]中。图 22.14 中给出了另外一些例子，特别是有关升力的结果。图中曲线证明：对于带缝隙的翼型 NACA64-210，缝隙大大地改善了升力系数曲线 $c_L(\alpha)$ ，特别是大大地改善了最大升力系数 c_{Lmax} 。理论和实验之间的一致性也令人十分满意。最后，图 22.15 给出翼型 NACA 64-210 的最大升力系数 c_{Lmax} 对 Reynolds 数 R 的依赖关系，理论上很好地证实了实验中观测到的事实，即最大升力系数随 Reynolds 数的增加而增加。

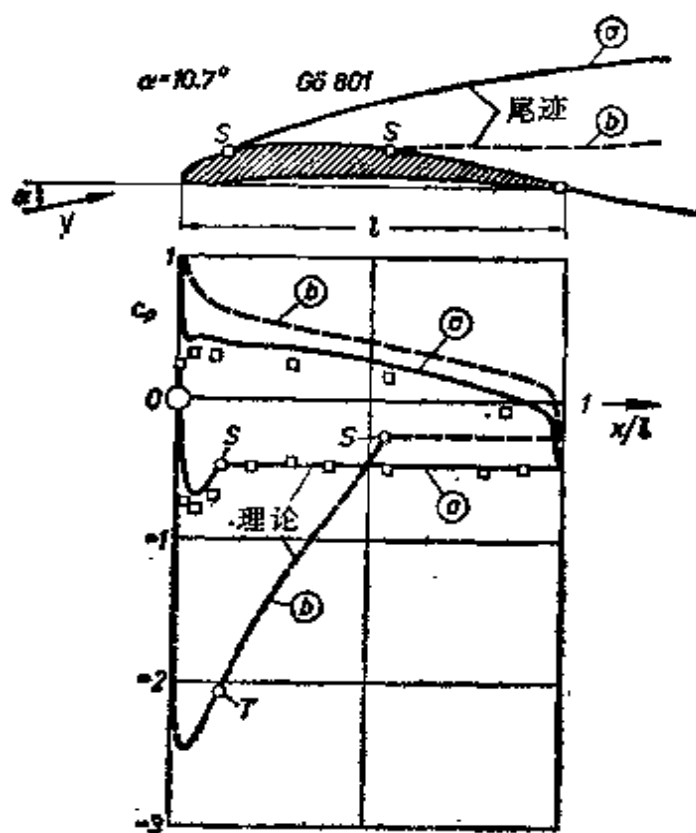


图 22.13 翼型上分离流中的压力分布，根据 K. Jacob^[47]，对应于两个不同的 Reynolds 数 $R = V l / \nu$

$$(a) R = 0.4 \times 10^5, \begin{cases} \alpha = 10.7^\circ \\ \alpha = 8^\circ \end{cases}$$

$$(b) R = 4.2 \times 10^5, \alpha = 10.7^\circ$$

S = 分离

T = 转换

G. H. Goradia 等人^[37,38]已进行了层流中机翼最大升力的计算。

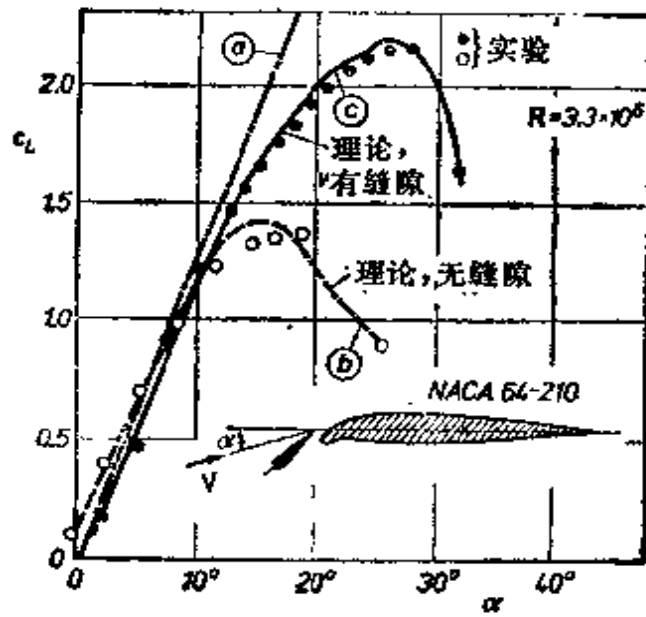


图 22.14 有缝隙的翼型上升力系数 c_L 随攻角 α 的变化曲线。理论曲线根据 K. Jacob 和 D. Steinbach^[47], 测量数据取自 W. Baumert^[53]

- (a) 理论, 有缝隙, 假设无粘流
- (b) 理论, 无缝隙, 假设粘性流
- (c) 理论, 有缝隙, 假设粘性流



NACA 2412

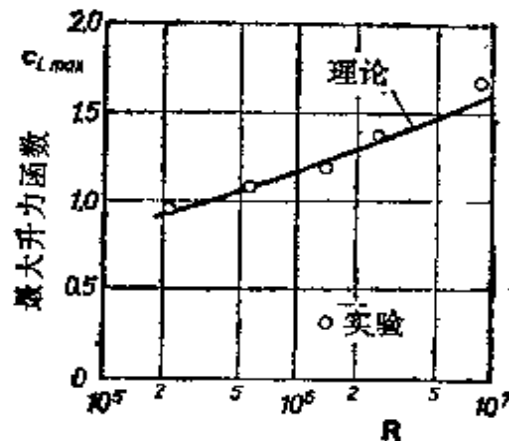


图 22.15 翼型最大升力系数 $c_{L,max}$ 随 Reynolds 数的变化, 根据 K. Jacob^[47]

d. 三维边界层

概述: 三维边界层最主要的物理特性是: 边界层内的速度方向显著地偏离外流的速度方向。这是由于压力梯度与主流方向有一个偏角所造成的, 其结果产生了强烈的二次流, 参阅第十一章图 11.1. R. C. Sachdeva 和 J. H. Preston^[99] 在对船体上边界层所进行的测量中, 给出了这种流动图案的典型例子。

J. C. Cooke 和 M. G. Hall 发表了有关三维不可压缩边界层计算的总结性文章^[23], 其中着重处理了层流边界层。J. F. Nash 和 V. C. Patel 发表了关于三维湍流边界层的内容广泛的专著^[70]。对于一般的情形, 例如后掠翼或三角翼的边界层, 虽然对这类问题的计算方法已提出大量建议, 但是, 其解析计算仍旧十分困难。这里可以举出一些作者的工作, 例如 N. A. Cumpsty 和 M. R. Head^[24], J. C. Cooke^[22], P. Bradshaw^[7], L. F. East^[29], R. Michel 等人^[66], A. Elsenaar 和 B. van den Berg^[31] 以及 F. M. White 等人^[119a]的工作。1975年在 Trondheim 举行的讨论会上, Fanneloep^[30a] 评论了这一领域的研究现状。下面, 我们将叙述三维湍流边界层中几个较简单的例子。然而, 这方面的理论现状还不能算是令人满意的¹⁾。

1. 旋成体上的边界层 C. B. Millikan^[67] 第一个计算了旋成体上的湍流边界层, 其方法基于动量积分方程。方程(11.39)给出了相应的动量方程。采用我们现在的符号, 可以将方程(11.39)写成

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(\frac{2 + H_{12}}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (22.31)$$

其中 $R(x)$ 代表旋成体当地横截面的半径。

在旋成体的尾部, 两个导数 dU/dx 和 dR/dx 是负的。从上述方程可以看出, 动量厚度将增加, 并在尾部变得非常大。这就可

1) “令人奇怪和沮丧的是: 理论越是完善, 与实验越不相符。” (F. M. White 的专著^[119], p.549)

能引起边界层理论的主要假设(即 $\delta_2 \ll R$) 失效的情况, 从而使得旋成体底部附近的计算是错误的, 并且无法可靠地确定出分离区的位置。按照 F. M. White^[19] 的分析, 当局部 Reynolds 数满足下述条件时, 即

$$\frac{U(x)R(x)}{\nu} > 1000,$$

方程(22.31)仍旧可用。

对于零攻角旋成体上的湍流边界层, P. S. Granville^[39] 建立了一个多参数的计算方法。该方法取决于动量厚度和形状因子的计算, 并能够应用于物体的后部, 这里的边界层厚度与物体当地半径有相同的量级。

有点类似于用来计算二维边界层的方法, Truckenbrodt^[111, 114] 的方法说明: 利用能量积分的方程可以导出计算能量厚度的显式积分公式。如果 x 表示沿子午面量度的流线弧长, $R(x)$ 是垂直于对称轴截面的半径, 就可以把由能量厚度定义的 Reynolds 数的式子 (22.22a) 推广成

$$R_3(x) = \left[\frac{1}{\nu'} \frac{E_3(x_1) + \int_{x_1}^x R^{1+b} U^{3+2b} dx}{\{R(x)\}^{1+b} \{U(x)\}^{2(1+b)}} \right]^{1/(1+b)} \quad (22.32)$$

上式中数值常数 b 和 ν' 应取自式 (22.22b), 积分常数为

$$E_3(x_1) = \nu' [R(x_1) \{U(x_1)\}^2 R_3(x_1)]^{1+b}.$$

在新近的公式^[110]中, 轴对称情形修正的形状因子的方程含有物体半径变化的函数。这与较早的公式^[111]完全不同, 在那里对于各种旋成体和二维物体, 其修正的形状因子都是相同的。现在, 公式 (22.25) 的广义形式为

$$H(x) = U(x)G(x)\{N(x)\}^{-1/c}, \quad (22.32a)$$

其中半径和外流速度分布的影响函数为

$$G(x) = G(x_1) + \int_{x_1}^x R^{1+b} U^{2(1+b)} dx;$$

$$N(x) = N(x_1) + c \int_{x_1}^x R^{1+b} U^{2(1+b)+c} G^{c-1} dx.$$

积分常数为

$$\left. \begin{aligned} G(x_1) &= \nu' [H(x_1) \{R(x_1)\}^{1+b} \{U(x_1)\}^{1+2b} \{R_s(x_1)\}^{i+b}]; \\ N(x_1) &= [U(x_1)G(x_1)/H(x_1)]^c. \end{aligned} \right\} \quad (22.33)$$

数值常数由公式 (22.26b) 得出。

图 22.10 中的图线给出关于旋成体绕流的理论与实验之间的比较, 图中画出了以能量厚度为参考长度的 Reynolds 数和修正的形状因子的曲线。

为了计及流线可能的收缩和扩张所引起的三维修正, J. C. Rotta^[86] 提出以有效半径 $R(x)$ 为基础的计算, 对于参考文献 [54] 中列出的所有的测量结果, 参考文献 [86] 总结了其 $R(x)$ 的数值, 并比较了由 W. W. Willmarth 等人^[122a] 和 A. M. O. Smith^[104a] 测量的数据。

2. 旋转物体上的边界层 第十一章 b 中讨论了轴向流中旋转物体上层流边界层的计算。该方法采用分别以子午线方向和周线方向列出的动量积分方程, E. Truckenbrodt^[112] 已将其推广到湍流的情形。此外, 他还成功地给出计算边界层参数的方便的积分。O. Parr^[74] 对旋转流线体上边界层进行了实验研究和进一步的理论研究。在这种情形下, 边界层随旋转参数 $\lambda = \omega R/U_\infty$ 迅速增长, 其中 ω 是旋转角速度, R 是物体的最大半径, U_∞ 是轴向参考速度。借助于方程组 (11.45) 至 (11.48), 可以计算轴向流中旋成体旋转时的湍流边界层, 但必须假设切应力随旋转参数是变化的。根据 O. Parr^[74] 对有球状头部圆柱体研究的报道, 图 22.16 中比较了其动量厚度 δ_{2r} 和 $\delta_{2r, \lambda}$ 的计算值和测量值, 它们吻合得很好。当旋转参数增加时, 由层流向湍流转捩的区域向前移动, 其位置与动量厚度突然增大的点相重合。也可参阅第十一章 b2。

对于静止物体和旋转物体上的三维边界层, 例如螺旋桨, 旋转压缩机和涡轮机叶片, A. Mager^[61] 指出了一种计算方法, 参考文献 [62] 中有相应的测量结果。H. Himmelskamp^[44] 作出了旋转螺旋桨上边界层的测量, 并由测得的压力分布确定出局部

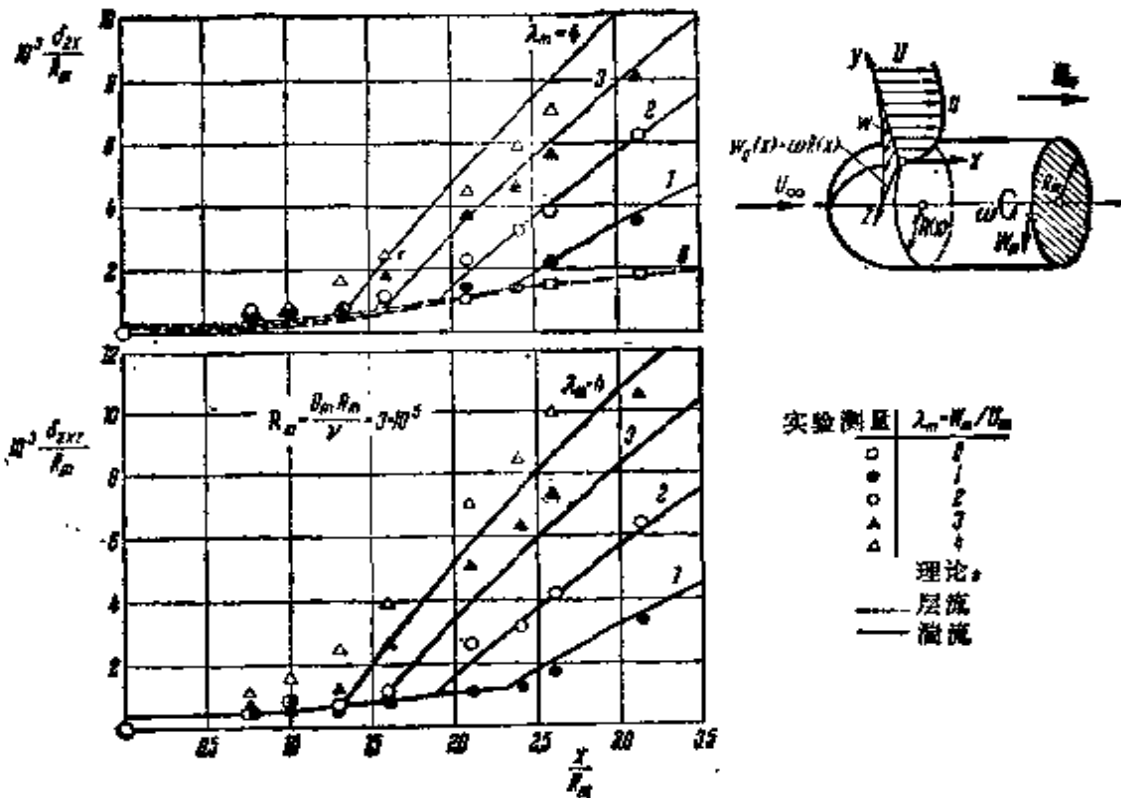


图 22.16 轴向流中旋成体上的动量厚度 $\delta_{2,x}$ 和 $\delta_{2,x}$, 根据 O. Parr^[74].
 $\delta_{2,x}$ 和 $\delta_{2,x}$ 根据公式(11.48)旋转参数 $\lambda_m = W_m/U_m$, Reynolds
 数 $R = U_m R_m/\nu = 3 \times 10^5$

升力系数。图 22.17 复制了他的部分结果，给出了各个径向截面上局部升力系数随攻角 α 变化的曲线。为了比较，图中还画出相应的风洞中静止叶片的测量结果。图 22.17 显示出：在叶片中心附近得到显著增大的升力系数，其原因可以归结为由于分离被推迟到了更大的攻角才发生，例如，与静止叶片上最接近中心处截面的最大升力系数 1.4 相比，在转动叶片上则达到 3.2。由 Coriolis 力产生的并作用在流动方向上的附加加速度，解释了分离推迟到更大攻角的原因，它具有与顺压梯度相同的作用。此外，就分离而言，离心力对边界层的作用也使叶片受到有利的影响，只是在程度上较小而已。离心力对边界层中流体质点的作用正比于半径。因此，从中心输送给每个叶片的流体要少于离开叶片而外流的流体，所以转动叶片上的边界层比绕同样形状的二维流动情形更薄。A. Betz^[51] 对此给出了一些理论上的讨论。F. Gutsche^[42] 通过螺

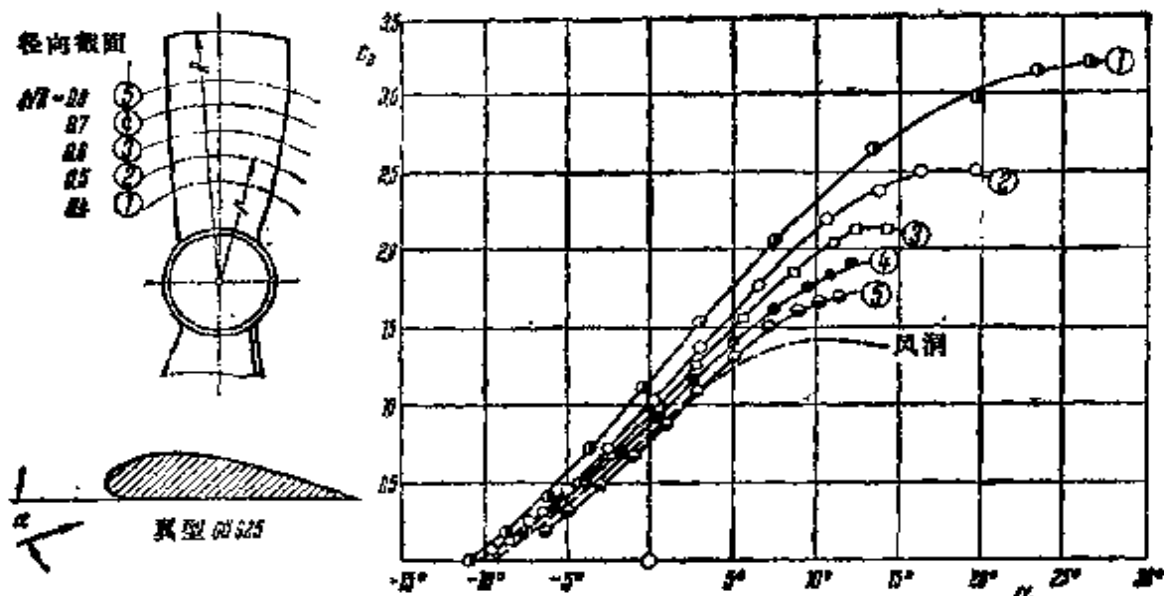


图 22.17 旋转螺旋桨各径向截面上的局部升力系数 $c_{l,loc}$ 根据 H. Himmelskamp^[44] 所进行的测量

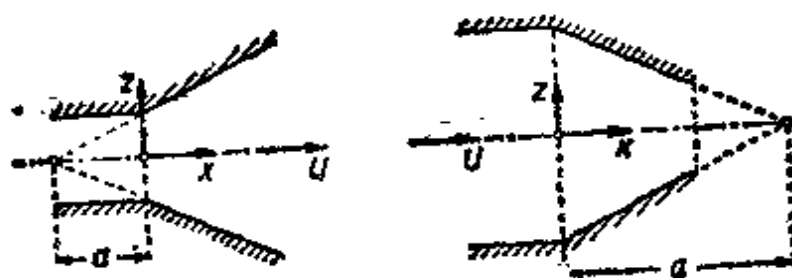


图 22.18 收缩段和扩张段的边界层；坐标系。

(a) 扩张段, $a+x > 0$;

(b) 收缩段, $a+x < 0$

旋桨叶片涂颜料的方法, 用来显示流动。H. Muesmann^[60] 在其论文中证明: 在其他条件相同的前题下, 旋转螺旋桨叶片上发生转捩的 Reynolds 远低于静止叶片时的情形。

3. 收缩段和扩张段的边界层 在本章 b 中叙述的湍流边界层计算方法, 已由 A. Kehl^[59] 推广应用到包括流线在侧向收缩或扩张的情形, 图 22.18。这种类型的边界层出现在扩压段或喷管中, 还出现在旋成体的头部或尾部附近。在这方面, Gruschwitz 已将实验测量范围扩展到 $R = U\delta_1/\nu = 3 \times 10^4$, 他的计算方法

也已推广到这种情形。假设坐标系如图22.18所示,在壁平面上选取 x 轴和 z 轴, y 轴垂直于壁面。我们注意到:沿着与轴线重合的流线,即沿着 $w=0$ 的流线,其运动方程与二维情形的方程(8.29)完全相同。但是,连续方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

动量积分方程(22.7a)增添了由流线的收缩或扩张所引起的附加项(根据具体情况而定)。回顾动量方程推导的过程,见第八章c中推导方程(8.29)的步骤,我们知道第一个运动方程中第二项的积分为

$$\int_0^h v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + u \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy + \int_0^h u \frac{\partial w}{\partial z} dy.$$

上式右边的最后两项是由流动沿 z 方向的扩张所引起的。考虑到流线的扩张,我们有

$$\frac{w}{u} = \frac{z}{x+a} \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{u}{x+a}.$$

因此,这两个附加项变为

$$-\frac{1}{x+a} \int_0^h u(U-u) dy = -\frac{\delta_2}{x+a} U^2,$$

从而动量积分方程必须增加附加项 $\delta_2 U^2/(x+a)$ 。所以,对称平面上动量积分方程现在为

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(\frac{1}{x+a} + \frac{H_{12} + 2}{U} \frac{dU}{dx} \right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}, \quad (22.34)$$

而不再是方程(22.7a)。对于流线扩张的情形,我们有 $a+x > 0$; 对应于流线收缩的情形,我们有 $a+x < 0$, 图22.18。于是由方程(22.34)立即可以看出:两者的动量厚度增长速率相对于二维情形而言,在流线扩张的情形下要小,在流线收缩的情形下要大。从物理上考虑,上述结论也是预料之中的。

拐角中的边界层, K. Gersten^[36] 从理论上和实验上研究了由

两平面壁构成直角拐角中的湍流边界层流动(参阅第二十一章 a4). J. D. Johnston^[49,50,51] 第一个考虑了圆柱体和平板接合处湍流边界层结构的有关问题,后来 H. G. Hornung 和 P. N. Joubert^[46] 作了更为完善的研究,也可参阅 S. G. Rubin^[49a] 以及 M. Shafir 和 S. G. Rubin^[52a] 的文章。

第二十三章 可压缩湍流边界层¹⁾

a. 总 论

在第十三章 a 中已经说明,高速边界层引起的温差很大,以致除了要考虑流体体积变化的影响之外,还必须考虑温度对流体性质的影响。另外,还可以发现,传热对可压缩边界层的特性也起着重要的作用,它将引起速度场和温度场之间强烈的相互作用²⁾。

1. 湍流传热 当温度不均匀的液体或气体发生湍动时,可以发现,该湍流混合运动除了引起熟悉的速度脉动之外,还将引起温度脉动。类似于速度脉动的式 (18.1), 我们可以将脉动温度写成

$$T = \bar{T} + T', \quad (23.1)$$

即写成对时间平均的温度 \bar{T} 和纯脉动温度 T' 之和。这些脉动引起附加的热流量,类似于由速度脉动引起的动量流量。为了说得更清楚,像我们以前在第十八章 b 中做过的那样,假设在时间 dt 内,通过垂直于 x 轴的面元 dA 的流体质量为 $dA\rho u dt$, 由于单位体积的焓为 $\rho c_p T$, 所以沿 x 方向的对流热流量为 $d\theta_x = dA\rho u c_p T$, 现在将 u 的表达式 (18.1) 和 T 的表达式 (23.1) 代入上式,并对热流量进行时间平均,则得

$$\overline{d\theta_x} = dA\rho c_p (\bar{u}\bar{T} + \overline{u'T'}).$$

可以看出,有了速度脉动和温度脉动之后,将产生沿 x 方向的附加热流量 $dA\rho c_p \overline{u'T'}$ 。同样可以得出 y 方向和 z 方向附加热流量的相应表达式。由此得出结论,附加热通量(单位时间通过单位面积的热量)的三个分量为

1) 感谢 J. C. Rotta 博士帮助作者改写了这一章。

2) 在 S. S. Kutateladze 和 A. I. Leont'ev 的书^[20]中,对可压缩湍流边界层理论作了全面的综述。

$$q'_x = \rho c_p \overline{u'T'}; q'_y = \rho c_p \overline{v'T'}; q'_z = \rho c_p \overline{w'T'}. \quad (23.2)$$

这里已经假设存在着速度脉动和温度脉动之间的统计相关。用与以前证明存在相关量 $\overline{u'v'}$ 同样的方法,在有平均温度梯度 $d\bar{T}/dy$ 存在的情况下,可以证明这些相关量是存在的。在第十八章 b 的最后一段中,如果用 \bar{T} 代替 \bar{u} ,用 T' 代替 u' ,则所作的论证仍然成立。在这种情形下,就会出现相关量 $\overline{v'T'}$ 。从这个论证还可以得出结论:如果同时存在梯度 $d\bar{u}/dy$ 和 $d\bar{T}/dy$,则必然存在 u' 和 T' 之间的强相关性。在加热壁^[41,42]上形成的可压缩的^[43]和不可压缩的边界层中,通过热线风速计的测量已证实了这个结论。根据 A. L. Kistler^[47]进行的测量,相关系数

$$\frac{\overline{u'T'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \times \sqrt{\overline{T'^2}}}$$

在可压缩边界层中的数值达到0.6至0.8。

2. 可压缩流动的基本方程 温度脉动和以前在第十八章 b 中提到的压力脉动一起,共同引起了密度脉动。由此,也假设密度为

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (23.3)$$

它是时间平均密度 $\bar{\rho}$ 与密度脉动量 ρ' 之和。通过气体状态方程(12.20),使温度、压力和密度的脉动量联系在一起。当气体作为完全气体来处理,以及脉动量很小时,作为首次近似,我们可以设

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (23.4)$$

除了湍流传热之外,密度脉动的出现是可压缩湍流中第二个重要的新现象。显然,在推导表观应力张量(见第十八章 c)的表达式时,这些脉动量的存在是不可以忽略的。因此,考虑到式(23.3)时,式(18.5)必须由下述湍流引起的附加项来代替,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{xx} &= -\bar{\rho} \overline{u'^2} - 2\bar{u} \overline{\rho' u'} - \overline{\rho' u'^2}, \\ \tau'_{xy} &= -\bar{\rho} \overline{u'v'} - \bar{u} \overline{\rho' v'} - \overline{v' \rho' u'} - \overline{\rho' u'v'}, \\ \tau'_{xz} &= -\bar{\rho} \overline{u'w'} - \bar{u} \overline{\rho' w'} - \overline{w' \rho' u'} - \overline{\rho' u'w'}. \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

其中 $\overline{\rho'u'}$, $\overline{\rho'v'}$ 和 $\overline{\rho'w'}$ 起着 x, y, z 三个方向上湍流质量通量分量的作用。对可压缩流动的连续方程(3.30)进行时间平均, 导出

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\rho\bar{u}})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho\bar{v}})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho\bar{w}})}{\partial z} + \frac{\partial\overline{\rho'u'}}{\partial x} \\ + \frac{\partial\overline{\rho'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{\rho'w'}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (23.6)$$

关于密度脉动, 首先可以指出, $\rho'/\bar{\rho}$ 几乎不可能超过 u'/\bar{u} 。现在, 由于 $u'/\bar{u} \ll 1$, 因此在式(23.5)中, 各等式的最后一项相对于其第一项来说, 显然是可以忽略不计的。当注意力集中在边界层时, 由于边界层中有 $\bar{v} \ll \bar{u}$, 还可以得到进一步的简化。J. C. Rotta^[60] 阐明, 在这种情形下, 如果像习惯上那样忽略掉法向应力本身, 则完全可以从边界层方程中消去密度的脉动。我们首先注意到, 在式(23.5)的 τ_{xy} 中, 因为有 $\bar{v}\overline{\rho'u'} \ll \bar{u}\overline{\rho'v'}$, 所以只需保留两项。此外, 对于二维边界层的情形, 因为 $\partial\overline{\rho'u'}/\partial x \ll \partial\overline{\rho'v'}/\partial y$, 所以时间平均的连续方程(23.6)变为

$$\frac{\partial(\overline{\rho\bar{u}})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho\bar{v}})}{\partial y} + \frac{\partial\overline{\rho'v'}}{\partial y} = 0. \quad (23.6a)$$

将方程(12.50a)乘以 u 再与方程(12.50b) 相加, 并将式(18.1)和(23.3)代入, 然后根据关系式(18.4)进行平均, 就可以导出边界层方程。当上述的那些项忽略不计时, 我们得到边界层方程最终的形式如下:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + (\bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho'v'}) \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial(\overline{\rho'u'v'})}{\partial y}. \end{aligned} \quad (23.7)$$

注意, 在方程(23.6a)和(23.7)中, 密度脉动只以 $\overline{\rho'v'}$ 的形式使 $\bar{\rho}\bar{v}$ 处增加一项。因此, 重新采用 y 方向质量通量的原来的表达式 $\overline{\rho v} = \bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho'v'}$, 而且把表观湍流应力定义为

$$\tau'_{xy} = -\overline{\rho'u'v'}$$

是方便的。在任何情况下, 垂直于壁面的平均速度分量 \bar{v} 确切的

值仍然是待定的，不过我们对它不感兴趣。能量方程(12.19)可以用同样的方法来处理。引入湍流热通量

$$\bar{q}_y = c_p \bar{\rho v' T'},$$

我们得出描述可压缩湍流边界层过程的下述方程组：

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} = 0, \quad (23.8a)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}, \quad (23.8b)$$

$$c_p \left(\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \bar{q}'_y}{\partial y} + \bar{\mu} \Phi + \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (23.8c)$$

这里，项 $\bar{\mu} \Phi$ 代表耗散项的时间平均值，可采用下述近似式：

$$\bar{\mu} \Phi = \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tau'_{xy} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (23.8d)$$

方程组还须补充时间平均量的状态方程的近似式

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}. \quad (23.9)$$

上述可压缩湍流边界层方程组代替了相应的层流边界层的方程组(12.50a)至(12.50d)。边界条件仍旧不变(参阅第十二章)。

为了研究可压缩介质湍动的细节，必须利用热线风速计来进行实验测量。由于要从单个信号中区分出是温度脉动的影响还是速度脉动的影响，这就产生了困难。由此而出现的问题就分别成了 L. G. Kovasznay^[41] 和 M. V. Morkovin^[65] 文章的主题。除了出现密度脉动和温度脉动之外，可以发现，可压缩流体的流动与不可压缩流体的流动大致相同。但是，随着 Mach 数的增加，速度脉动的强度下降，这已被 A. L. Kistler^[47] 的实验结果所证实，如图23.1所示。J. C. Rotta^[60] 已研究了在方程(23.8a)至(23.8c)中未曾包含的那些密度脉动项的影响。

为了使方程组(23.8a)至(23.8d)更适合于实际计算，如第十九章中所做的那样，可以引入关于动量输运和热输运的经验假

设。通常认为表观应力 $\tau_x = \tau'_x$ 的式(19.1)是不变的。就湍流热通量而论，习惯上给出的形式类似于导热的 Fourier 定律，式(12.2)。根据该式，我们有

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{层流}),$$

并假设

$$q_x = -c_p A_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{湍流}). \quad (23.10)$$

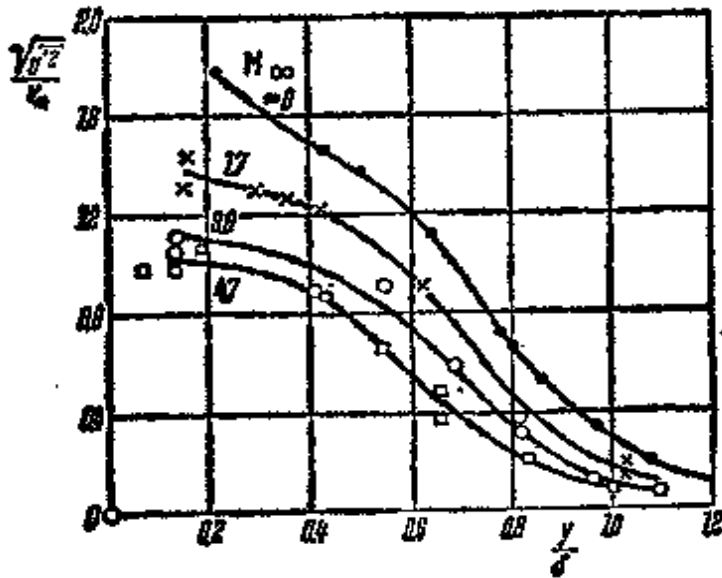


图23.1 在超声速气流中，零攻角平板边界层中湍流速度脉动的分布。根据 A. L. Kistler^[47] 和 P. S. Klebanoff^[48] 的测量。

事实上，虽然动量交换和热交换的机制是相似的，但是并不完全相同。因此，一般说来，动量交换系数 A_r 和热交换系数 A_t 有不同的值。考虑到方程(19.1)和(23.10)，以及(23.8d)，我们可以将方程(23.8a)至(23.8d)改写成如下形式：

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (23.11a)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + A_r) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (23.11b)$$

$$c_p \left(\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[(k + c_p A_r) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + (\mu + A_r) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx} \quad (23.11c)$$

3. 动量交换系数和热交换系数之间的关系 过去我们强调过，湍流中脉动的出现引起了不同速度的各层之间强烈的动量交换。当有温度梯度或浓度梯度时，它还将引起传热和传质的增加。由于这个缘故，总存在着传热和动量交换之间的一个直接关系。特别是，我们期望壁面上热通量和切应力之间存在某种关系。O. Reynolds^[76] 第一个发现了传热和动量交换之间存在着这种比拟关系，因此，我们称其为 Reynolds 比拟（参阅第十二章 f3）。这个比拟使得我们能够用在湍流边界层中熟知的阻力定律对传热作出说明。动量交换系数 A_r 和热交换系数 A_q 两者都具有粘性系数 μ 的量纲（在绝对单位制中为 kg/ms 或 lb/ms）。所以，为了方便起见，除了分子的 Prandtl 数 $P = \mu c_p / k$ 之外，还引入一个相应的无量纲湍流 Prandtl 数

$$P_t = \frac{A_r}{A_q} \quad (23.12)$$

由此，根据定义

$$\frac{q_t}{\tau_t} = - \frac{c_p \partial \bar{T} / \partial y}{P_t \partial \bar{u} / \partial y} \quad (23.13)$$

假设总的传热率为

$$q = - c_p \left(\frac{\mu}{P} + \frac{A_r}{P_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (23.14)$$

只要同时确定出速度剖面和温度剖面，就可以定出湍流 Prandtl 数。不幸的是，由于一般流动中测量局部温度的困难，还由于梯度 $d\bar{u}/dy$ 和 $d\bar{T}/dy$ 值的不确定性，因此，这些测量结果的可靠性程度很低。结果是 P_t 随着离开壁面的距离而变化。在 H. Ludwig^[55] 所进行的研究中发现，如图 23.2 所示，比值 $A_q/A_r = 1/P_t$ 是变化的，从壁面 ($r/R = 1$) 上约为 1 变到管心 ($r/R = 0$) 约为 1.5；

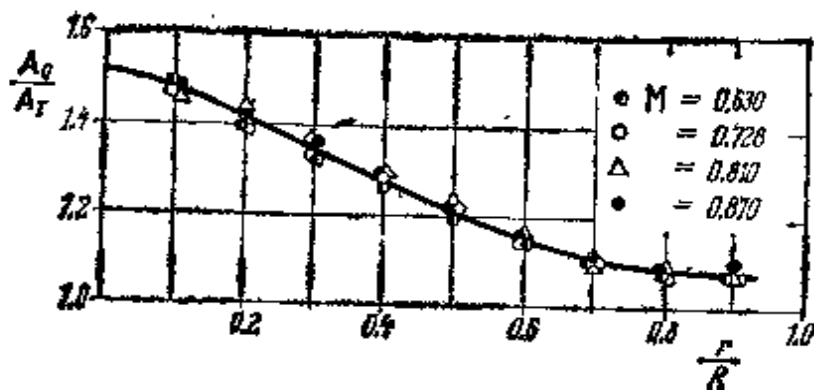


图 23.2 湍流管流中整个半径长度上的湍流交换系数比 A_q/A_r , 引自 H. Ludwig^[59]. Reynolds 数 $R = 3.2 \times 10^5$ 至 3.7×10^6

并与 Mach 数无关。D. S. Johnson^[42] 对加热壁的边界层作了测量,也报导了类似的结果。根据这些测量,比值 A_q/A_r 从壁面约为 1 增加到边界层边缘近似为 2。A. Fage 和 V. M. Falkner(参阅文献[97])以及 H. Reichardt^[72] 测得的值为 2,前者是在圆柱体后面尾迹中测量的,后者是在自由射流中测量的,两者都是不可压缩气流。根据上述的测量,由于壁面对边界层的影响,比值 A_q/A_r 在边界层中要比在自由射流中小。所以,可以合理地假设比值 A_q/A_r 在壁面上为 1(根据 Ludwig, 其值为 1.08, 给出 $P_r \approx 0.9$),而在远离壁面处增加到 2($P_r = 0.5$)。在实际应用中,通常将 A_q/A_r 取作常数,即 $A_q/A_r = 1$ ($P_r = 1$) 或 $A_q/A_r = 1.3$ (Reichardt 给出 $P_r = 0.769$)。但是必须指出:湍流 Prandtl 数沿边界层厚度方向变化的方式尚未完全确定,而且存在着与上述测量相矛盾的实验结果,正如在 J. Kestin 和 P. D. Richardson^[45,46] 的总结性文章中报道的那样。

H. Ludwig^[54] 利用了传热和表面摩擦力之间的关系,将小电阻元嵌入壁面,并加热到大于气流的温度,通过测量其传热量来测量壁面上的切应力。

在第二十四章 c 中,将讨论自由射流中传热和动量交换之间的比拟。

b. 速度分布与温度分布间的关系¹⁾

1. 平板上的传热 第十二章中已说明,在绕零攻角平板的层流中,如果摩擦热忽略不计,且 Prandtl 数等于 1,则速度剖面和温度剖面是相同的。就湍流而论,如果 $P_r = 1$ 和 $P = 1$,也可以断言这两个剖面是相同的。这在物理上意味着假设的引起动量交换和热交换的机制是相同的。因为速度剖面和温度剖面相同,所以可以写出

$$q(x) = \frac{k}{\mu} \frac{T_w - T_\infty}{U_\infty} \tau_0(x). \quad (23.15)$$

上述方程可以容易地重新组合成下述形式

$$N_x = \frac{1}{2} R_x c_f (\text{Reynolds}, P = P_r = 1), \quad (23.16)$$

这就是早先所说的 Reynolds 比拟。由此看出,在第十二章中对零攻角平板层流所导出的 Nusselt 数和表面摩擦系数之间的正比关系(参阅式 (12.56b)) 在湍流的情形下仍然成立。像在层流中的情形一样,只要现在用温度差 $T_w - T_\infty$ 来构成 Nusselt 数,比拟式(23.16)在出现可压缩性时仍成立²⁾。

正如以前所指出的,研究湍流边界层和湍流传热的主要困难在于湍流系数或湍流交换系数 A_r 和 A_q 与粘性系数 μ 和导热系数 k 不同,它们并不是流体本身的性质,而是取决于边界层内离开壁面的距离。在离开壁面足够远的地方, A_r 和 A_q 的值要比分

1) 第二十一章 a5 中已经指出了有关可压缩流中有抽吸和引射的湍流边界层的参考文献。

2) 在应用中,通常用称为 Stanton 数的

$$S = \frac{\alpha}{\rho c_p U_\infty} = \frac{N_x}{R_x P}$$

来代替 Nusselt 数。如果这样,则 Reynolds 比拟式(23.16)变为

$$S = \frac{1}{2} c_f$$

其余的关系式很容易变换到用 S 来代替 N_x 。

子系数 μ 和 k 的值大上许多倍,事实上它们的值是如此之大,以致在大多数情况下,后者相对于前者可以忽略不计。与此相反,在紧靠壁面的领域中,即在层流次层中,因为不再可能有湍流脉动和由此引起的湍流混合,因此湍流系数为零。但是,气流和壁面之间的传热率恰恰依赖于层流次层的现象¹⁾,也就是依赖于分子系数 μ 和 k 。幸运的是,尽管存在层流次层,比拟式(23.16)在整个区域内仍然有效,因为正如第十二章 g 中所指出的,当 $P = 1$ 时,层流次层中的速度分布和温度分布仍旧相同。湍流边界层中 $P_t = 1$ 的假设通常导出了有用的结果,但是,层流次层中的 Prandtl 数可以相当大的偏离于 1,例如液体的情形就是这样(表 12.1)。在这种情况下,比拟式(23.16)就不适用了。许多作者已系统地提出了将 Reynolds 比拟推广到 $P \approx 1$ 时的形式,这些作者中有 L. Prandtl^[70], G. I. Taylor^[96], Th. von Kármán^[44] 和 R. G. Deissler^[20,21,22,23]。

L. Prandtl 假设 $P_t = 1$,并将边界层分成两个区域:湍流系数为零的层流次层和分子系数 μ 和 k 可以忽略的湍流外边界层。在上述假设下,公式(19.1)和(23.14)在层流次层中将给出

$$\frac{q}{\tau} = - \frac{k}{\mu} \frac{dT}{du},$$

而在湍流层中给出

$$\frac{q}{\tau} = - c_p \frac{dT}{du}.$$

请记住,在壁面上有 $u = 0$,假设壁温为常数并等于 T_w ,分别将层流次层外缘上的速度和温度记作 u_1 和 T_1 ,将来流中的速度和温度记作 U_∞ 和 T_∞ 。Prandtl 还引入下述的假定,即在整個边界层宽度上比值 q/τ 保持不变²⁾。于是,对整个层流次层厚度积分,得出

1) 关于层流次层,见第十八章 d 中脚注。——译者注

2) 这个条件严格地为等温平板所满足,因为如果 $P = 1$,则 $u/U_\infty = (T - T_w)/(T_\infty - T_w)$,见式(13.13)。

$$\frac{q}{\tau} = - \frac{k}{\mu} \frac{T_i - T_w}{u_i} = - \frac{k}{\mu U_\infty} \frac{T_i - T_w}{(u_i/U_\infty)} \quad (23.17)$$

类似地,对整个湍流层厚度积分,则得出

$$\frac{q}{\tau} = - c_p \frac{T_i - T_w}{u_i - U_\infty}$$

令两式的右边相等,我们得到

$$P(T_w - T_\infty) = - \frac{U_\infty}{u_i} \left[1 + \frac{u_i}{U_\infty} (P - 1) \right] (T_i - T_w)$$

因此,局部传热系数为

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_\infty} = - \frac{P}{1 + (u_i/U_\infty)(P - 1)} \cdot \frac{(u_i/U_\infty)q}{T_i - T_w}$$

将式(23.17)代入上式,我们得到

$$\alpha = \frac{1}{1 + (u_i/U_\infty)(P - 1)} \cdot \frac{c_p \tau}{T_i - T_w}$$

我们将这个结果用 Nusselt 数来表示 由此导出 Reynolds 比拟的推广形式为

$$N_x = \frac{\frac{1}{2} c_f' R_x P}{1 + (u_i/U_\infty)(P - 1)} \quad (\text{Prandtl-Taylor, } P_f = 1), \quad (23.18)$$

L. Prandtl 和 G. I. Taylor 各自独立地导出了上式. 为了将上述推广的比拟式应用到特定的情形中去,还必须对层流外层外缘的平均速度与来流速度之比作合适的假设¹⁾. 在 $P = 1$ 的特殊情

1) 在管道中湍流的情形下,根据第二十章中所指出的式 (20.15*), 给出层流外层外缘上的速度 u_i 与管轴上的速度 U 之比为

$$u_i/U = 5\sqrt{\tau/\rho U^2} = 5\sqrt{\frac{1}{2}c_f'}$$

按照这种近似, Prandtl 比拟式变为

$$N_x = \frac{\frac{1}{2} R_x P c_f'}{1 + 5\sqrt{\frac{1}{2}c_f'}(P - 1)}$$

用 c_f' 来表示平均流速 \bar{u} , 我们将有

$$\frac{u_i}{\bar{u}} = 5\sqrt{\frac{1}{2}c_f'}$$

形下, Prandtl-Taylor 比拟式 (23.18) 化为 Reynolds 比拟式 (23.16)。

在推导 Prandtl-Taylor 比拟式(23.18)中,我们假设了边界层可以明确地分成湍流层和层流次层。实际上,两者之间的连接是逐渐过渡的,从而可以识别出中间层或过渡层的存在,其中分子交换系数和湍流交换系数的大小是相当的。Th von Kármán^[44] 将边界层细分为三个区域,对于传热系数和表面摩擦力系数之间的关系推导出一个类似的关系式,其形式为

$$N_x = \frac{\frac{1}{2} R_x P c_f}{1 + 5 \sqrt{\frac{1}{2} c_f} \left\{ (P - 1) + \ln \left[1 + \frac{5}{6} (P - 1) \right] \right\}}$$

(von Kármán, $P_f = 1$).

(23.19)

在 $P = 1$ 的特殊情形下, von Kármán 比拟式(23.19)也还原为 Reynolds 比拟式(23.16)。在平板的情形下,图 23.3 画出了三个 Prandtl 数($P=10, 1$ 和 0.01)所对应的局部 Nusselt 数 N_x 与 Reynolds 数 R_x 之间的关系曲线。曲线(b)和(c)分别是根据比拟式 (23.18)和(23.19)画出的,其中 $P_f = 1$ 。

湍流中传热率和表面摩擦力之间的比拟关系有着极其重要的实际意义,因为它们不仅可以用于绕平板的流动,而且可以用于任何湍流的情形,因此具有十分普遍的应用价值,这已为大量的实验测量所证实。

上述这些比拟关系式用于计算平行气流中细长体的传热时,即在物体外的压力梯度不太大的情况下,已被证明是有效的。还可以指出:虽然上述比拟都与 Mach 数无关,但是在可压缩流动中也有效。当把上述各种形式的 Reynolds 比拟式用于圆管中的内流时,它们仍旧近似地成立。但是,必须在 Nusselt 数和 Reynolds 数的表示式中用圆管的直径 D 来取代沿流向的长度 x , 并分别用圆管中流体的平均速度和平均温度来代替外流的速度和温

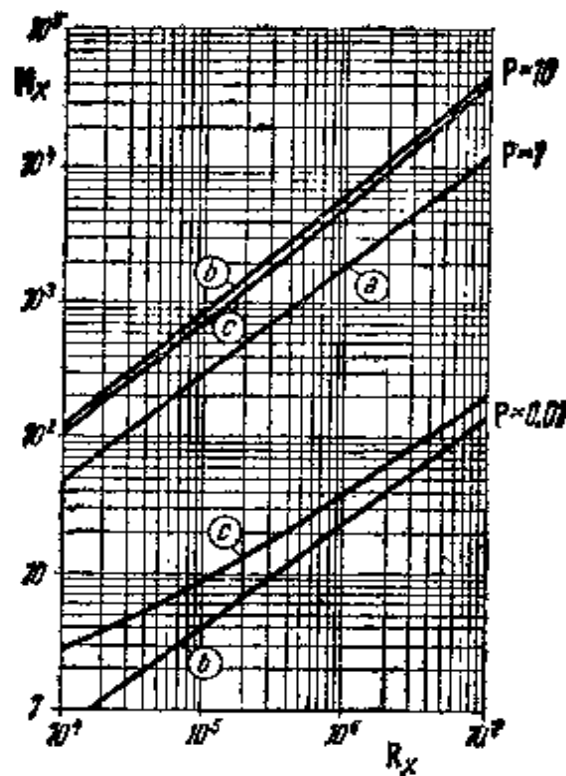


图23.3. 在平板湍流传热的情形下, 不同 Prandtl 数时 Nusselt 数随 Reynolds 数的变化 (Reynolds 比拟)
 (a) Reynolds, 比拟式(23.13);
 (b) L. Prandtl 和 G. I. Taylor, 比拟式(23.18);
 (c) Th von Kármán, 比拟式(23.19).
 其中假定 $P_t = 1$,
 $c_f = 0.0592 R_x^{-0.2}$, 公式(21.12)

$$u_f/U_\infty = 5 \sqrt{\frac{1}{2} c_f}$$

度.

在前面所有的推导中, 我们均作了湍流 Prandtl 数 $P_t = 1$ 的假设, 换句话说, 已经假设了湍流动量交换系数和湍流热能交换系数相等. 但是从实验测量中知道, 这个比值不为1. H. Reichardt^[73] 广泛地研究了传热中 $P_t \neq 1$ 的情形. 根据这一工作, Nusselt 数用下述关系式来表示, 即

$$N_x = \frac{\frac{1}{2} c_f R_x P}{P_t + \sqrt{\frac{1}{2} c_f \{ (P - P_t) a + A \}}} \quad (\text{Reichardt}).$$

(23.20)

上式中的常数 a 是修正通过层流次层的传热量的，取决于两个 Prandtl 数之比 P/P_1 ，其关系如下：

$$a = \frac{v_*}{\nu} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\left(1 + \frac{A_r}{\mu}\right) \left[1 + \left(\frac{P}{P_1}\right) \left(\frac{A_r}{\mu}\right)\right]} \quad (23.21)$$

H. Reichardt 在假设 A_r 及速度从壁面到完全发展的湍流区光滑地变化下，计算了这个积分。表 23.1 列出了其数值结果。比拟式(23.20)中的量 A 是湍流 Prandtl 数 P_1 的函数，而且 $\sqrt{c_f}/2$ 的变化对其只有轻微的影响。但是一般说来，比拟式(23.20)对 A 是不敏感的。根据 J. C. Rotta^[81] 所进行的计算， A 可以近似地取为

$$A \approx 4(1 - P_1).$$

表23.1 计算传热系数的比拟式(23.20)和计算恢复因子的式(23.27)中的常数 a 和 b ，取自 H. Reichardt^[78] 和 J. C. Rotta^[81]

P/P_1	a	b
0.5	10.22	123.8
0.72	9.55	108.1
1.44	8.25	82.2
2.0	7.66	71.6
5.0	6.04	47.5
10	5.05	34.3
20	4.10	24.5
30	3.61	20.1
100	2.47	10.9
200	1.98	7.7
1000	1.17	3.4

在有任意变化的湍流 Prandtl 数 P_1 的条件下，E. R. von Driest^[20] 和 J. C. Rotta^[81] 研究了平板上湍流边界层中的温度分布。后一篇文献中指出：只有接近于壁面的湍流 Prandtl 数 P_1 的取值才决定了传热率和温度分布。所以， P_1 离开壁面的变化细节是不重要的。当剩下的 P_1 都取壁面上的值时， P_1 随着离开壁面距离的变化只通过 A 起作用。由此，合适的值似乎是 P_1

≈ 0.9 。J. R. Taylor^[50] 对于压力和温度沿壁面变化的边界层进行了这种计算。

2. 粗糙表面的传热 在第二十章 f 和第二十一章 c 中已经证明：湍流中粗糙表面上产生的表面摩擦力要比光滑表面上的大得多。传热系数也是如此。但是，传热系数增长的百分率通常却小于表面摩擦力增长的百分率。这是可以理解的。因为一部分湍流切应力通过作用在突起部分上的压力传到壁面上，但是在传热中，不存在这种类似的机制。粗糙圆管中的传热已进行了实验研究，其中尤其是 W. Nunner^[66] 及 D. F. Dipprey 和 R. H. Sabersky^[25] 的工作。后两位作者在不同的 Prandtl 数下作了测量。D. F. Dipprey 和 R. H. Sabersky^[25] 以及 P. R. Owen 和 W. R. Thomson^[67] 的理论研究是基于这样的假设，即粗糙度对交换机制的影响只局限于紧靠壁面附近的区域。从这个假设出发，可以导出一个具有比拟式(23.20)同样结构的关系式，差别只在于必须用 β 来代替 $(P - P_1)$ ，而 β 是 Prandtl 数 P 和粗糙度的函数。在 $P_1 = 1$ 的特殊情形下，我们得到

$$N_{\tau} = \frac{\frac{1}{2} c_f R_s P}{1 + \sqrt{\frac{1}{2} c_f} \beta(v_* k_s / \nu; P)}$$

(Dipprey, Sabersky, Owen, Thomson; $P_1 = 1$).

(23.22)

Dipprey 和 Sabersky 引用

$$\beta\left(\frac{v_* k_s}{\nu}; P\right) = 5.19 \left(\frac{v_* k_s}{\nu}\right)^{0.2} P^{0.44} - 8.5. \quad (23.23)$$

这个关系式是根据他们自己对砂粒粗糙度实验的结果，在 $v_* k_s / \nu > 70$ 的完全粗糙的范围内成立。图 23.4 中画出了整个粗糙度 Reynolds 数 $v_* k_s / \nu$ 区域上的函数 β 和实验结果。Owen 和 Thomson 拟合了各种来源的实验结果，包括参考文献[25]和[66]，然后得出

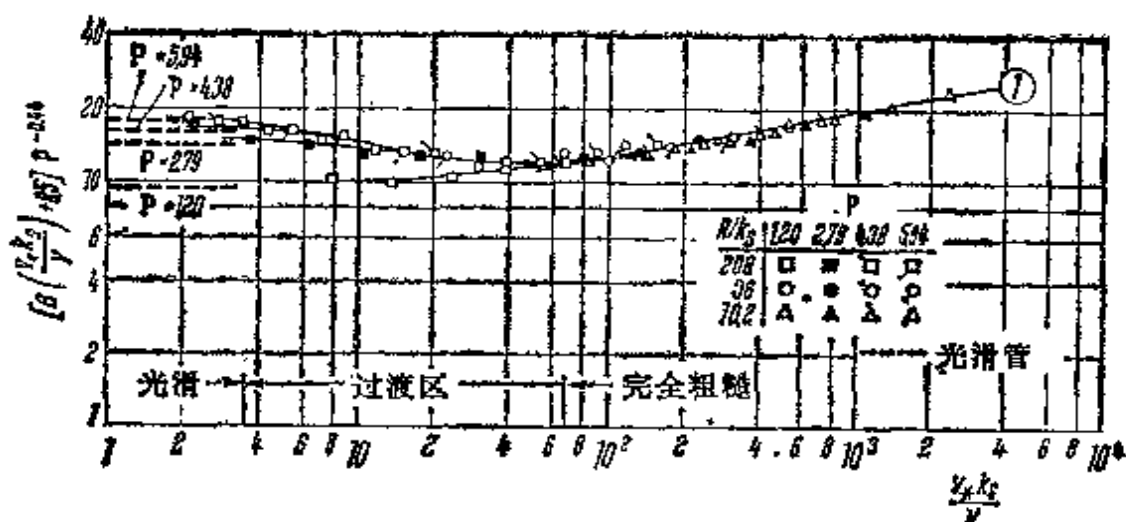


图23.4 在各种 Prandtl 数下,粗糙度函数 $(\beta + 8.5) P^{-0.45}$ 与砂粒粗糙度 $v_* k_s / \nu$ 的关系,根据 D. F. Dippyey 和 R. H. Sabersky^[27] 的测量。曲线(1)根据公式(23.23)

$$\beta \left(\frac{v_* k_s}{\nu}; P \right) = 0.52 \left(\frac{v_* k_s}{\nu} \right)^{0.45} P^{0.8} \quad (23.24)$$

D. B. Spalding^[86] 以及 J. Kestin 和其合作者^[36,45,46] 已经给出了湍流中非等温表面上传热率的计算步骤。W. C. Reynolds, W. M. Kays 和 S. J. Kline^[77] 在这种条件下进行了广泛的测量。

3. 可压缩流动中的温度分布 为了了解控制可压缩流动中温度分布的规律,读者可以首先参考第十三章 b 中提出的对层流边界层的有关讨论。当压力保持不变且 $P = P_1 = 1$ 时,温度分布满足式(13.12)¹⁾,而在有传热的一般情形下,则满足式(13.13)。这两个式子都是由摩擦热引起的。当 $P \approx P_1 \approx 1$ 时,应用式(13.19)可以计算(绝热)壁面上的恢复温度,即

$$T_s = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \quad (23.25)$$

湍流中恢复系数 r 要比层流中的略大,实验表明,平均说来,其值在 0.875 到 0.89 之间(见图 17.31)。图23.5 复制了 L. M. Mack^[56]

1) 指绝热壁。——中译者

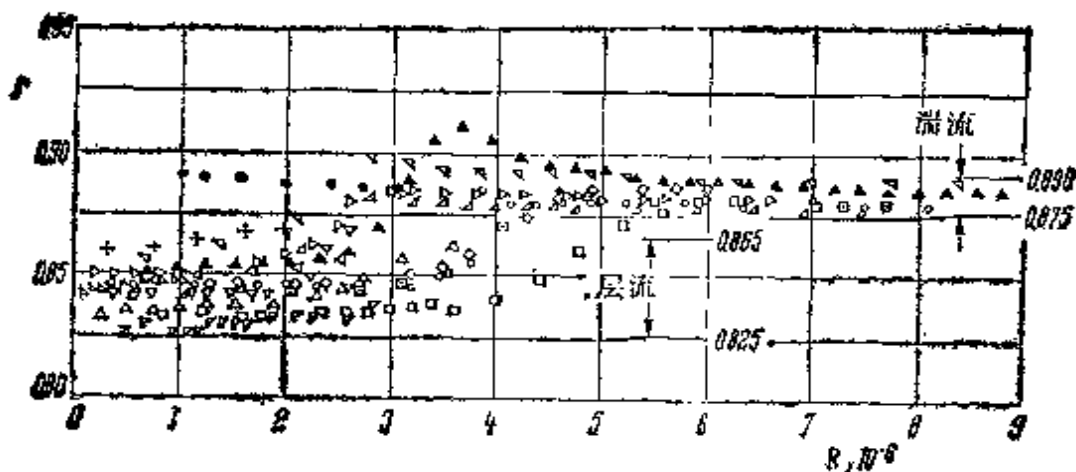


图23.5 在 Mach 数 $M_\infty = 1.2$ 至 $M_\infty = 6.0$ 时，圆锥上测量的恢复系数与 Reynolds 数的关系，引自 L.M. Mack^[24]

	风洞	M_∞	圆锥类型		风洞	M_∞	圆锥类型
●	Ames 1×3ft No.1	1.97	10°空心;钢	▷	Aberdeen	2.18	10°木
□	Lewis 8×6ft	1.98	10°空心;钢	×	GALCIT 5×5in	6.0	20°陶瓷
△	Lewis 18×18in	1.94	10°空心;钢	○	Ames 1×3ft No.1	2.0	20°空心;钢
▽	Ames 6×6ft	1.9	10°空心;钢	▲	JPL 18×20in	4.50	5°玻璃纤维
△	Ames 10×14in	4.48	10°空心;钢	◁	JPL 18×20in	1.63	13°有机玻璃
▽	Ames 2×2ft	1.21	10°空心;钢	+	JPL 18×20in	4.50	13°有机玻璃
△	Lewis 2×2ft	3.93	10°空心;钢	◇	JPL 12×12in	1.63	13°有机玻璃
▽	Ames 1×3ft No.2	3.00	10°空心;钢	⊗	JPL 12×12in	2.45	13°有机玻璃

在不同的 Mach 数和不同的 Reynolds 数下对圆锥测得的恢复系数 r 的比较。为了估计 Prandtl 数的影响，许多作者引用了公式

$$r = \sqrt[3]{P}, \quad (23.26)$$

由此得出当 $P = 0.72$ 时 $r = 0.896$ 。类似于用来计算传热系数的方法，也可以从理论上得出这一估计。为此目的，必须从能量方程 (23.11c) 出发，还必须和式 (23.14) 中所包含的假设相一致，即计及分子交换机制和湍流交换机制两者的影响。使用这种方法，J. C. Rotta^[25] 得到了下式

$$r = P_i + \frac{1}{2} c_i (P - P_i) b + B \sqrt{\frac{1}{2} c_i}. \quad (23.27)$$

b 是比值 $\mathbf{P}/\bar{\mathbf{P}}$ 的函数, 像比拟式(23.20)中的 a 一样, b 反映了发生在层流次层中的过程。 b 由下述积分给出:

$$b = \frac{2}{\nu} \int_0^{\infty} \frac{udy}{\left(1 + \frac{A_r}{\mu}\right) \left[1 + \left(\frac{\mathbf{P}}{\bar{\mathbf{P}}}\right) \left(\frac{A_r}{\mu}\right)\right]} \quad (23.28)$$

表 23.1 中已列出了 b 的数值。 因子 B 依赖于 \mathbf{P}_r , 也略微依赖于 $\sqrt{c_f/2}$ 。 根据 Rotta 的意见, 我们可以取

$$B = 7(1 - \mathbf{P}_r).$$

当湍流 Prandtl 数在整个边界层厚度上变化时, 必须用它在壁面上的值代入式(23.24)。 当 Prandtl 数 \mathbf{P} 以及湍流 Prandtl 数 \mathbf{P}_r 不等于 1 时, 值得注意的是: 在第十三章对层流边界层给出的式(13.12)通常是可压缩湍流边界层中温度分布的一个合用的近似。 B. Schultz-Jander^[95] 给出了可压缩湍流边界层中计算温度分布的一个方法。

c. Mach 数的影响: 摩擦定律

到目前为止, 不可压缩流动中对湍流边界层的计算还没有发展到足以摆脱半经验理论的程度。 因此, 对于同样的结论也适用于可压缩湍流边界层的计算是不足为奇的。 在不可压缩湍流边界层的情形下, 出发点是前几章所讨论的假设, 即 Prandtl 混合长度假设, von Kármán 相似律或 Prandtl 普适速度分布律。 大批现代论文的作者通过将些假设变换或修改成适用于可压缩的情形, 力图建立起可压缩湍流边界层的半经验理论, 这就需要引入附加的特殊假设。 在缺乏对可压缩湍流机制详细研究的情形下, 湍流的半经验理论从不可压缩情形到可压缩情形的转变就有很大的任意性。

从实用的观点来看, 一方面存在着影响流动的两个附加参数, 即来流 Mach 数 \mathbf{M}_∞ 和壁面温度 T_w , 另一方面, 现有的实验结果并不是完全没有矛盾的, 这就增加了困难。 我们从处理这个问题的众多方案中选出三类方法, 因为它们用得特别多。 这三类方

法是:

- (1) 对于气体的密度和粘性系数引入一个参考温度;
- (2) 应用 Prandtl 混合长度假设或 von Kármán 相似性假设;
- (3) 坐标变换。

除此之外,这方面的文献还有一些不能归入上述三个方面的方法。在 D.R. Chapman 和 R.H. Kester^[11] 作出的比较中,当用不同的方法计算表面摩擦力时(参考文献[30]),立即看出各种结果有很大的不同。D. B. Spalding 和 S. W. Chi^[29] 对二十种不同的计算方案和已有的实验结果之间作出了广泛的比较。

1. 零攻角平板 第(1)类方法的指导思想是假设在某个合适的参考温度 T^* 下取密度 ρ 和粘性系数 μ 的值,则不可压缩流中的规律在可压缩流中仍然有效。Th von Kármán^[43] 第一个发现这种可能性,并选取壁温为其参考温度。从不可压缩流中零攻角平板的摩擦力定律出发,即从公式(21.17)出发, von Kármán 得到下述可压缩流情形的表面摩擦力系数公式:

$$\frac{0.242}{\sqrt{c_f}} \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right\}^{-1/2} = \log(R_{1c_f}) - \frac{1}{2} \log \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right\}, \quad (23.29)$$

其中 $M_\infty = U_\infty/c_\infty$ 是来流 Mach 数。上述公式只对绝热壁成立,并假设了粘性系数函数的形式为 $\mu/\mu_0 = \sqrt{T/T_0}$ 。通过在边界层中出现的最高温度和最低温度之间选取参考温度的值 T^* ,已经作出了各种努力来改进这个方法。E.R.G. Eckert^[29,30] 建议参考温度取作

$$T^* = T_0 + 0.5(T_w - T_1) + 0.22(T_e - T_1), \quad (23.30)$$

其中 T_1 表示边界层外缘的温度, T_w 是壁面上的表面温度,而 T_e 代表(绝热壁)恢复温度。Eckert 的公式包括了有传热的情形,引入参考温度是计及 Mach 数和传热对表面摩擦力影响的最简单的方法,并可以得出它在工程应用中多半是适用的结果。由于这个缘故, M.H. Bertran^[2] 在很广的 Mach 数和温度比的范围

内完成了计算表面摩擦力系数的庞大的计划。

E. R. van Driest^[27] 提出了应用 Prandtl 混合长度假设的思想。象式(19.22)给出的那样,他规定了 $l = \lambda y$, 通过允许密度变化,由此引起边界层厚度的变化来反映可压缩性效应。他得出平板上湍流表面摩擦力系数的显式公式,包括没有传热和有传热的两种情形,并计及 Reynolds 数和 Mach 数的影响。对于绝热壁的情形,总表面摩擦力系数公式的形式为

$$\frac{0.242}{\sqrt{c_f}} (1 - \lambda^2)^{1/2} \frac{\arcsin \lambda}{\lambda} = \log(R_\tau c_f) + \frac{1 + 2\omega}{2} \log(1 - \lambda^2), \quad (23.31)$$

其中

$$1 - \lambda^2 = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}, \quad (23.32)$$

$M_\infty = U_\infty/c_\infty$ 表示来流 Mach 数,符号 ω 是粘性律 $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^\omega$ (式(13.4))中的指数。式(23.31)与式(23.29)的不同之处在于左边多一个因子 $(\arcsin \lambda)/\lambda$ 和右边出现粘性律的指数 ω 。当 $M_\infty \rightarrow 0$ 时,式(23.31)变成 von Kármán 的不可压缩流中的阻力公式(21.17)。图23.6 给出式(23.31)的曲线及其与实验结果的比较。在所有的情形下,理论和实验之间的一致性程度都不能令人满意。但是在这方面必须指出:高 Mach 数时的测量结果是有点不可靠的。R. E. Wilson^[102] 进行了类似的计算,但是是以 von Kármán 相似性假设(公式(19.19))为基础的。他只限于绝热壁的情形,导出的结果十分类似于式(23.31)。图 23.7 给出了另外的一些实验结果,其中画出了可压缩流中表面摩擦力系数与不可压缩流中表面摩擦力系数之比对 Mach 数的曲线,包括了一个很广的 Mach 数的范围。该图中有两条理论曲线:第一条是 R. E. Wilson^[102] 在假设绝热壁的前题下得出的;第二条是 E. R. van Driest^[27] 在考虑有传热的影响下导出的。实验是几个作者^[7,14,38,53,87] 作出的,并与理论吻合得很好。图23.8 中包含有传热对表面摩擦力系数影

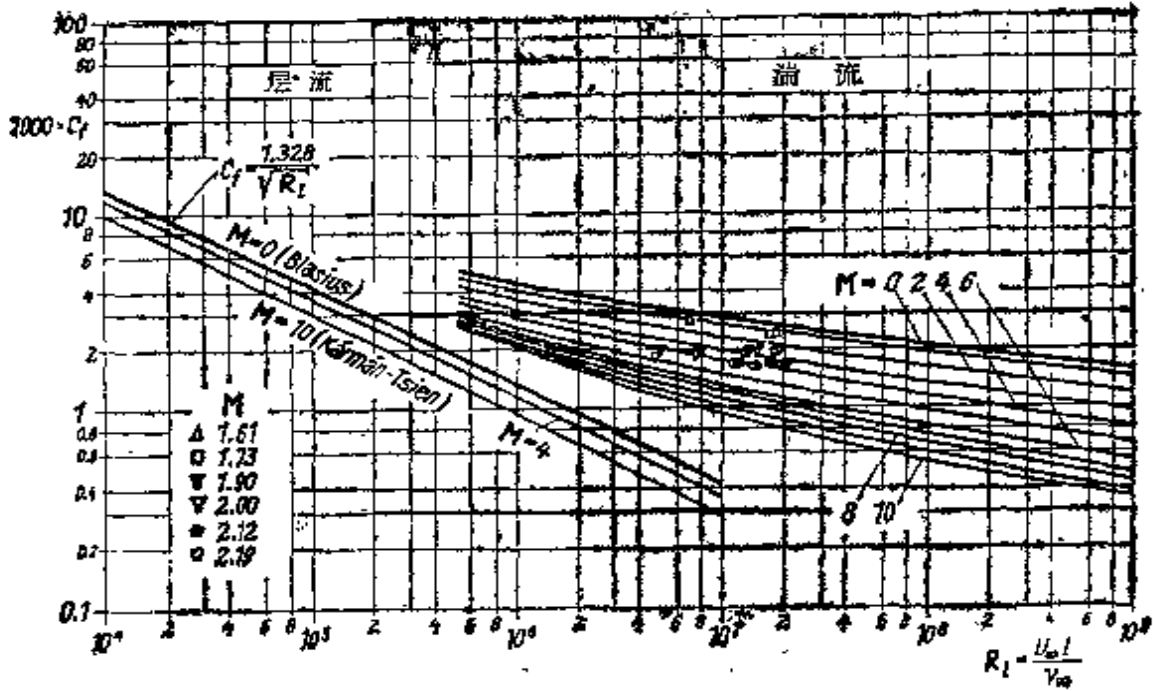


图 23.6 零攻角绝热平板上层流和湍流边界层中的总表面摩擦系数。湍流的理论曲线根据式(23.31),引自 E.R. van Driest^[27];
 $\gamma = 1.4, \omega = 0.76, P = 1$

响的一些结果,它们也是基于 van Driest^[27] 的计算。图中曲线表明:绝热壁上的表面摩擦系数略小于有热流从流体流向壁面情形的表面摩擦系数。

坐标变换: 第十三章 d 中所叙述的适用于层流的坐标变换,在形式上也可以应用到可压缩湍流边界层的微分方程中去。这时 Reynolds 应力 τ'_{xy} 变换成

$$\tilde{\tau}'_{xy} = \frac{1}{b} \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2 \frac{\rho_0}{\rho_1} \tau'_{xy}, \quad (23.33)$$

利用这个变换式,动量方程 (23.8b) 获得如下形式:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}} (1 + S) \\ + \nu_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\tau}'_{xy}}{\partial \tilde{y}} \end{aligned} \quad (23.34)$$

这里所用的符号与式(13.24)至(13.41)中定义的相同。根据在数学上可以将可压缩流的方程组变换成不可压缩流方程组形式的可

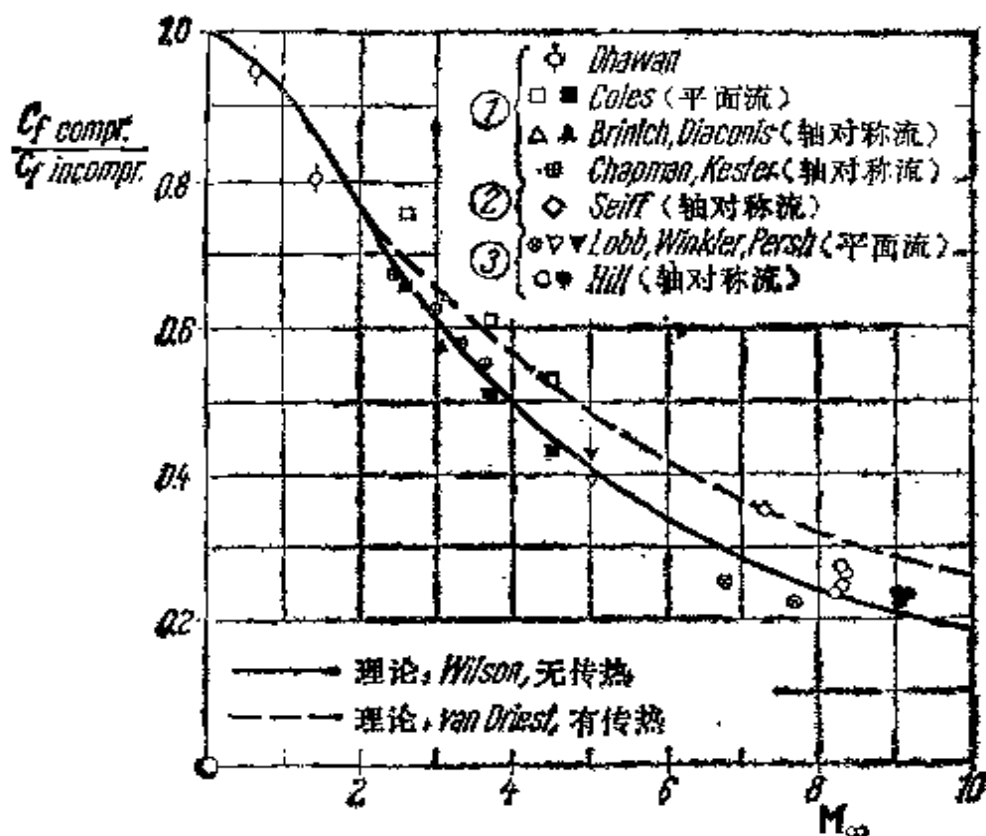


图 23.7 零攻角平板上湍流边界层中表面摩擦力系数随 Mach 数的变化；理论与实验之间的比较；引自文献[38]； $R_x \approx 10^7$

——根据 Wilson^[182] 的理论,无压力梯度的绝热壁;比值 T_w/T_∞ 在1.8到21.0之间变化,分别对应于 $M_\infty = 2$ 和 $M_\infty = 10$ ----根据 van Driest^[27] 的理论,有传热;无压力梯度

实验测量:

- (1) 绝热壁,无压力梯度;
- (2) 有传热,无压力梯度;
- (3) 有传热, $T_w/T_\infty = 8.0$, 顺压梯度

能性,许多作者(例如 B.A. Mager^[57], D. Coles^[15], L. Crocco^[16], D.A. Spence^[91,92]) 提出一个物理假设,即变换后坐标平面上的速度剖面应该与不可压缩流中的速度剖面有相同的形式。因此,用变换后的参数代入时,摩擦力定律和其他关系式仍旧成立。这个结论对于层流当然是有效的,但是对于湍流就未必成立,因为这种坐标变换不能用于描述脉动的方程组,否则将与所有基于 Boussinesq 假设(体现在式(19.1)中)的理论发生矛盾,当然也与利用 Prandtl 混合长度假设或 von Kármán 相似性假设的理论发生矛盾。如果我们接受物理上似乎有理的假设,即式(19.2)所定义的湍流运动

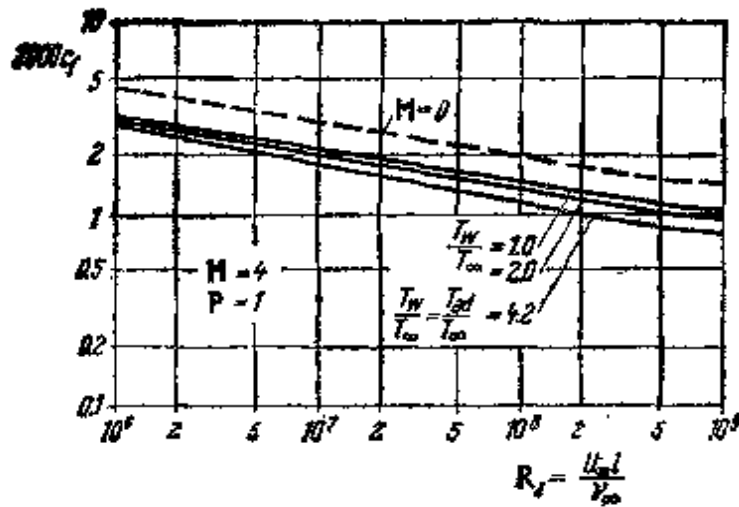


图 23.8 当温度比 T_w/T_∞ 不相同, 有传热的零攻角平板上湍流表面摩擦系数随 Reynolds 数的变化, 引自 E.R. van Driest^[217]

$\frac{T_w}{T_\infty} = \frac{T_{w0}}{T_{\infty0}} = 4.2$ 的曲线对应于无传热的情形, $M = 4$, $P = 1$

粘性系数 ϵ_r 与密度无关, 那么就会面临变换到不可压缩的形式是不可能的。但是, 变换到

$$\tilde{\epsilon}_r = \rho_1 \tilde{\epsilon} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \quad (23.35)$$

仍然是可以实现的。在这种情形下, 新的湍流运动粘性系数 $\tilde{\epsilon}_r$ 与原有的湍流运动粘性系数 $\tilde{\epsilon}$ 之间通过式

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{b} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 B_r$$

联系起来。现在大家都知道, 当 Mach 数很大时, 密度比 ρ/ρ_1 随着离开壁面的距离 y 有很大的变化。这就迫使我们在下述两个结论中接受一个: 要么我们假设速度剖面和不可压缩的情形相同, 则发现 $\tilde{\epsilon}$ 的分布改变了; 要么我们接受 $\tilde{\epsilon}$ 保持不变, 则不得不修正速度剖面。可以在上面两种方案的基础上, 说明 Mach 数对原来坐标系中速度剖面的影响, 但是得出的结论是绝然相反的, 当把不可压缩情形下得到的规律移植到可压缩的情形中去时, 上述事实清楚地说明了整个问题的复杂性。

进一步的细节: Mach 数对速度剖面的影响是通过壁面的温

升来实现的。因为可以认为压力 p 与 y 无关，所以边界层中密度分布由下式给出

$$\frac{\rho}{\rho_{\infty}} = \frac{T_{\infty}}{T} \quad (23.36)$$

随着绝热壁外面 Mach 数的增加，在 y 的小距离内，可以看到密度一定有很显著地减小，由此必然引起边界层厚度很大的增加。另一方面，Mach 数的增加使得粘性系数增加以及表面摩擦力系数减小，由此，又引起层流次层急剧的增长。图 23.9 给出了可压缩

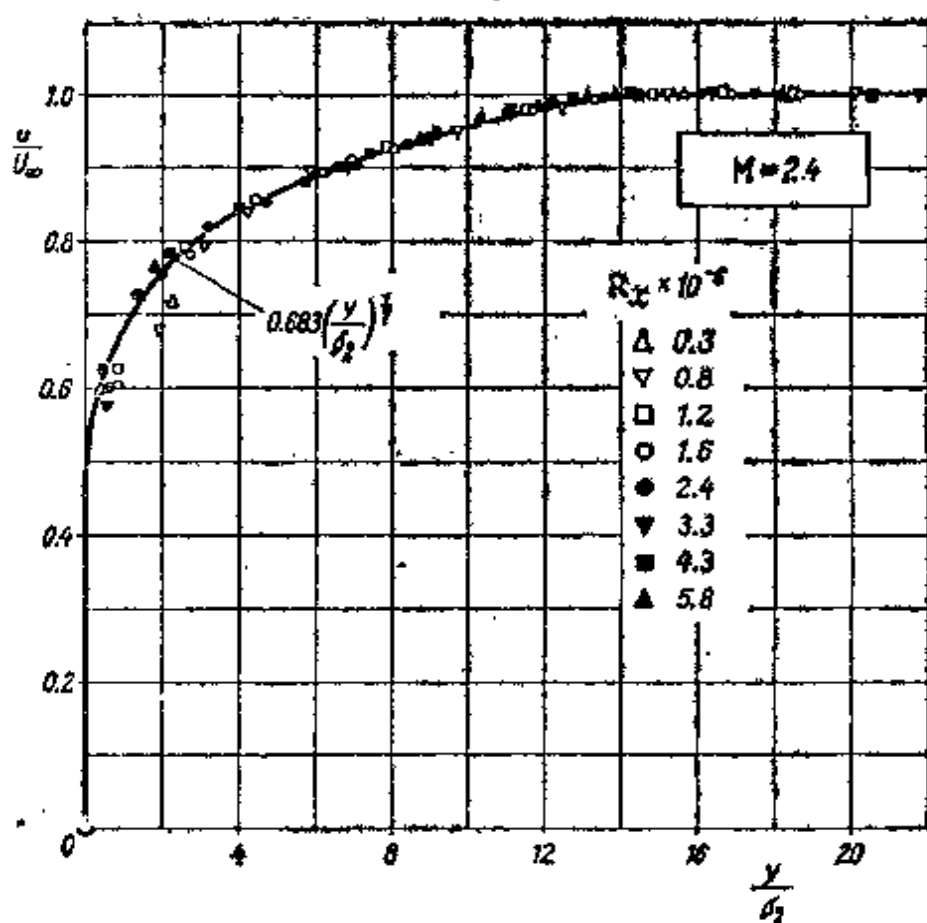


图23.9 超声速零攻角平板上湍流边界层中测量的速度分布，引自 R.M. O'Donnell^[26]

$M_{\infty} = 2.4$; δ_1 ——式(13.75)定义的动量厚度; $T_w = T_s$

不可压缩理论: $\frac{u}{U_{\infty}} = 0.716 \left(\frac{u}{\delta_1} \right)^{1/2}$

可压缩理论: $\frac{u}{U_{\infty}} = 0.683 \left(\frac{u}{\delta_1} \right)^{1/2}$

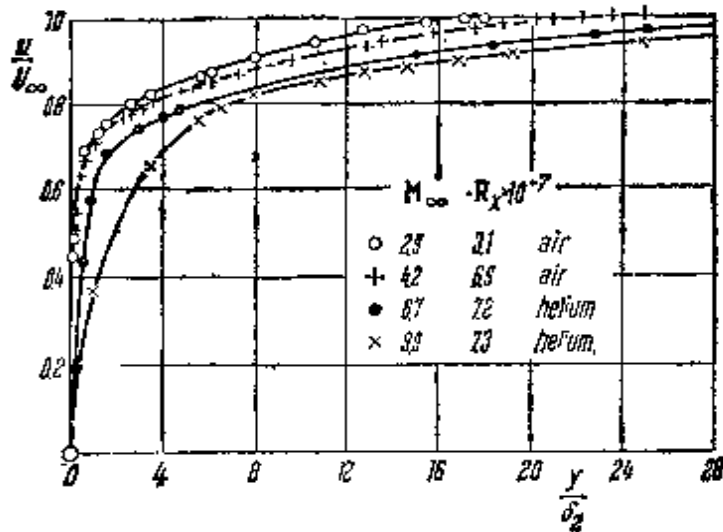
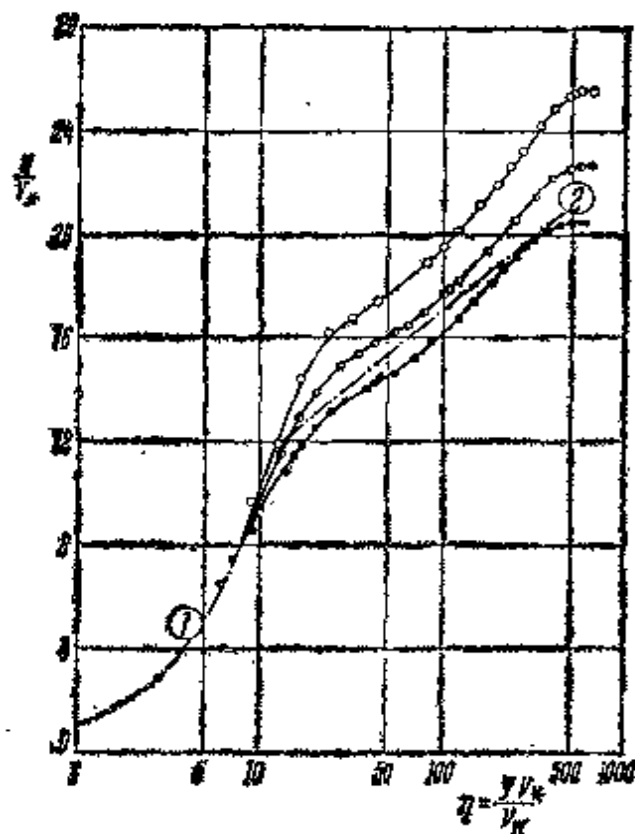


图23.10 在各种 Mach 数下,超声速流平板湍流边界层的速度分布,根据 F. W. Matting, D.R. Chapman, J.R. Nyholm 和 A. G. Thomas^[53] 的测量 $T_w = T_s$.

湍流边界层中速度剖面的例子,其中画出了 R.M. Donnell^[26] 对 $M_\infty = 2.4$ 测量的 u/U_∞ 随 y/δ_2 变化的曲线. 这里的 δ_2 代表由式(13.75)所定义的动量厚度.

在所采用的坐标系中,不同 Reynolds 数的实验点很好地落在一条曲线上. 图上画出的理论曲线对相应的不可压缩流曲线的偏离远小于层流的情形,见图13.10. 不出所料,边界层厚度随着 Mach 数的增大而增厚,这在图23.10中是很明显的,图中给出了直到 $M_\infty = 9.9$ 的速度剖面. 必须指出,当 Mach 数增加时,由于沿壁面方向密度减小,所以由式(13.75)给出的动量厚度比起边界层厚度 δ 来更小.

图 23.11 中画出了速度比 u/v_* 相对于 $\eta = yv_*/\nu_w$ 的对数坐标曲线. 我们在图 20.4 中已经遇到过这种曲线,在那里密度 ρ 和运动粘性系数 ν 的值是用壁温来确定的. 应该指出: 在较高的 Mach 数时,速度分布仍保持不可压缩流中熟知的特征形状,但是出现了定量上的偏离. 这是由图中 R. K. Lobb, E. M. Winkler 和 J. Persh^[53] 测量的实验结果中得出的. 在有传热时,明显地存在着对层流次层有很大的影响,而在充分发展的湍流区域中,曲线几乎是平行的. R. G. Deissler^[21,23] 和 J. C. Rotta^[78] 发表了将



	M_∞	$\frac{T_c - T_w}{T_\infty}$	$R_2 \times 10^{-4}$	M_r	β_a
●	5.75	0.108	1.16	0.117	0.0074
○	5.79	0.238	1.24	0.114	0.0162
○	5.82	0.379	1.14	0.116	0.0273

图 23.11 在有传热的管道内的超声速流中，管壁上湍流边界层的普适的速度分布律，根据 R. K. Lobb, E. M. Winkler 和 J. Perah⁽²³⁾ 的测量

由壁温决定的性质：

$$v_* = \sqrt{\tau_w / \rho_w}; \quad \eta = y v_* / \nu_w$$

曲线(1)和(2)：不可压缩流中理论上的普适速度分布律

曲线(1)：层流次层， $u/v_* = \eta$

曲线(2)：普适的对数律

$$u/v_* = 5.5 + 5.75 \ln \eta$$

适的速度分布律合理地推广到包括可压缩性影响的理论研究。根据这些研究，在壁面附近的速度分布受到两个参数的影响，即

Mach 数 M_r 和热通量数 β_q ，它们分别由下面两个公式决定：

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{v_*}{c_w} = M_\infty \sqrt{\frac{1}{2} c_f} , \\ \beta_q &= \frac{q_w}{\rho_w c_{pw} T_w v_*} = \frac{S}{\sqrt{\frac{1}{2} c_f}} \frac{T_\infty - T_w}{\sqrt{T_w T_\infty}} , \end{aligned} \right\} \quad (23.37)$$

其中 c_w 表示壁面上的声速， S 是 Stanton 数，而 c_f 是局部的表面摩擦力系数。J. C. Rotta^[78] 在一定的简化假设下进行了计算，得到了定性上正确的结果，但是， β_q 对层流次层的影响表明：实验中所测出的影响要比计算中所反映出来的更大。H. U. Meier^[69, 41, 42] 所进行的测量给出了相应的温度分布的数据。这些结果的计算表明：湍流 Prandtl 数通过层流次层将增加，并达到大于 1 的值，这意味着，指向壁面的传热系数 A_q 要比相应的湍流动量交换系数 A_r 衰减得更快。根据 H. U. Meier 和 J. C. Rotta^[63] 的工作，可以通过将 Prandtl 混合长度假说（第十九章）移植到传热中去，从而在理论上对这种情况加以描述。由此，式(23.14) 变换成

$$q_i = -c_p \rho l_q \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy} .$$

传热混合长度 l_q 的大小和式(19.7) 中动量交换的混合长度 l 不同。与 E. R. van Driest 的公式 (20.15b) 相类似，我们假设在壁面附近的领域中可以令

$$l_q = \kappa_q y [1 - \exp(-y \sqrt{\rho \tau_w / \mu A_1})] . \quad (23.37a)$$

无量纲常数 κ_q 和 A_1 的值与式(20.15b) 中 κ 和 A 的值不同。在式(23.12) 中定义的湍流 Prandtl 数变为

$$P_t = (l/l_q)^2 .$$

H. U. Meier^[64] 计算了 P_t 在边界层宽度上的变化。图 23.12 使得我们可以得出如下的结论：所测得的总温分布非常好地再现了计算结果，这些计算结果是用可压缩边界层中 J. C. Rotta^[78] 的壁面

分布律得到的。图中给出总温比 T_0/T_∞ 随 Mach 数比 M/M_∞ 变化的函数关系, 其中

$$T_0 = T + \bar{u}^2/2c_p$$

当传热率很小($q_w \approx 0$)时, 温度由壁面向外增加并达到一个最大值, 然后又减小到一个最小值, 再后就一直增加。

当壁面粗糙时, Mach 数对表面摩擦力的影响则更大。按照 H.W. Liepmann 和 F.E. Goddard^[37,52] 的工作, 在完全粗糙的区域中, 比值 $c_{f, \text{compr}}/c_{f, \text{inac}}$ 将正比于密度比 ρ_w/ρ_∞ , 因此

$$\frac{c_{f, \text{compr}}}{c_{f, \text{inac}}} = \frac{1}{1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2} \quad (23.38)$$

其中 r 为恢复因子。

2. 变压力 在实际应用中, 常常需要计算可压缩流中有变压

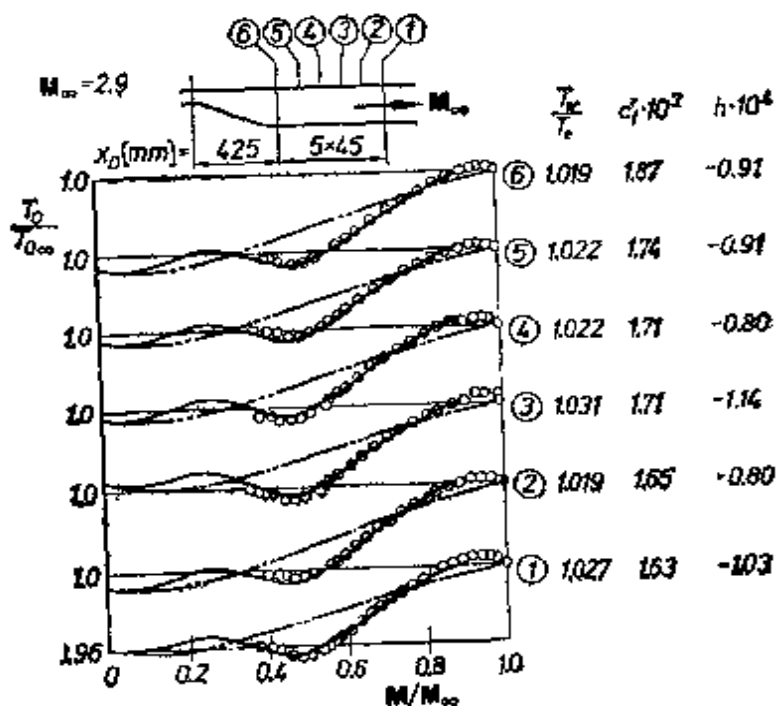


图 23.12 在超声速和壁面上热通量很小时, 平板湍流边界层中的总温 T_0 , 取自 H.U. Meier 等人^[62] 的测量, Mach 数 $M_\infty = 2.9$; Reynolds 数 $R/\text{cm} = 0.8 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$, 根据 H.U. Meier^[60] 的测量结果

---根据公式 (23.37a) 的理论, 其中 $(\kappa/\kappa_0)^2 = 0.9$; $A/A_1 = 1.3$

无量纲传热系数 $h = q_w/c_p T_\infty \rho_w U$

局部表面摩擦力系数 $c_f = \tau_w/(1/2)\rho_w U^2$

力的湍流边界层。这对超声速风洞中收缩-扩张喷管的设计尤为突出，因为我们必须非常精确地知道其中边界层的位移效应。像不可压缩的情形一样，熟知的近似方法大都基于动量积分方程，在某些情形下，也采用能量积分方程。对于绝热壁，已经给出上述两种积分方程，即方程(13.80)和(13.87)。就湍流边界层而言，它们可以写成：

动量积分方程

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} (2 + H_{12} - M^2) = \frac{\tau_0}{\rho_1 U^2}, \quad (23.39)$$

能量积分方程(动能)

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} \left(3 + \frac{2\delta_H}{\delta_3} - M^2 \right) \\ = \frac{2}{\rho_1 U^3} \int_0^{\delta_3} \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (23.40)$$

这两个方程对于 $P = 1$ 的情形均适用，并不局限于绝热壁。其中 δ_3 表示能量厚度，见公式(13.76)， δ_H 代表焓厚度，见公式(13.77)，而 $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ 。

包括 G. W. Englert^[51]，E. Reshotko 和 M. Tucker^[75]，N. B. Cohen^[121] 和 D. A. Spence^[92] 在内的许多作者，都对动量积分方程(23.39)应用 Tillingworth-Stewartson 变换，将其简化成不可压缩的形式。A. Walz^[100] 将这两个方程(23.39)和(23.40)简化成对数值计算非常方便的形式，并且给出了所求的普适函数的一套数值表。

对于二维和轴对称流动，J. C. Rotta^[84] 给出了一个类似于计算亚声速和超声速流中旋成体^[105]的方法。一直到 Mach 数 $M_\infty = 2$ ，计算和测量之间令人满意地一致。在 $M_\infty = 2.4$ 和 2.8 所出现的偏差可以部分地解释如下：与密度变化相联系的流线的弯曲对边界层发展产生了很大的意想不到的影响，但是，在计算中没有计及这种影响。J. C. Rotta^[82] 研究了流线弯曲的这种效应的原因，P. Bradshaw^[4] 也对这个问题作出了贡献。已采用有限差分

方法来处理可压缩气流中的湍流边界层。T. Cebeci 和 A.M.O. Smith^[9] 在混合长度理论上发展了一种方法(见第十九章 c), 并且已推广到对三维边界层问题也适用^[10]。由 P. Bradshaw 提出的使用动能方程的方法(见第十九章 f)也已推广到可压缩流动^[6]中。P. Bradshaw^[9] 得出这样的结论: 体积膨胀对边界层的湍流结构有深刻的影响。如果在方程(19.42)中引入附加项, 可以大大缩小测量和计算之间的差异。P.D. Smith^[9d] 提出了三维可压缩边界层的积分方法; J. Cousteix^[9a] 在这方面也提出了建议; 也可参阅 D. Arnal 等人^[1a] 和 J. Cousteix 等人^[9b] 的工作。

第二十四章 自由湍流,射流和尾迹

a. 引言

前几章讨论了沿固壁的湍流,现在打算用几个所谓自由湍流的例子来继续研究湍流。如果湍流不受固壁的限制,就称为**自由湍流**。我们将区分三种类型的自由湍流:自由射流边界、自由射流和尾迹(图 24.1)。

射流边界发生在速度大小不同但方向相同的两股流动之间。这样的速度间断面是不稳定的,在两股流动会合点的下游将出现一个湍流混合区。这个混合区的宽度沿下游方向不断地增大(图 24.1a)。

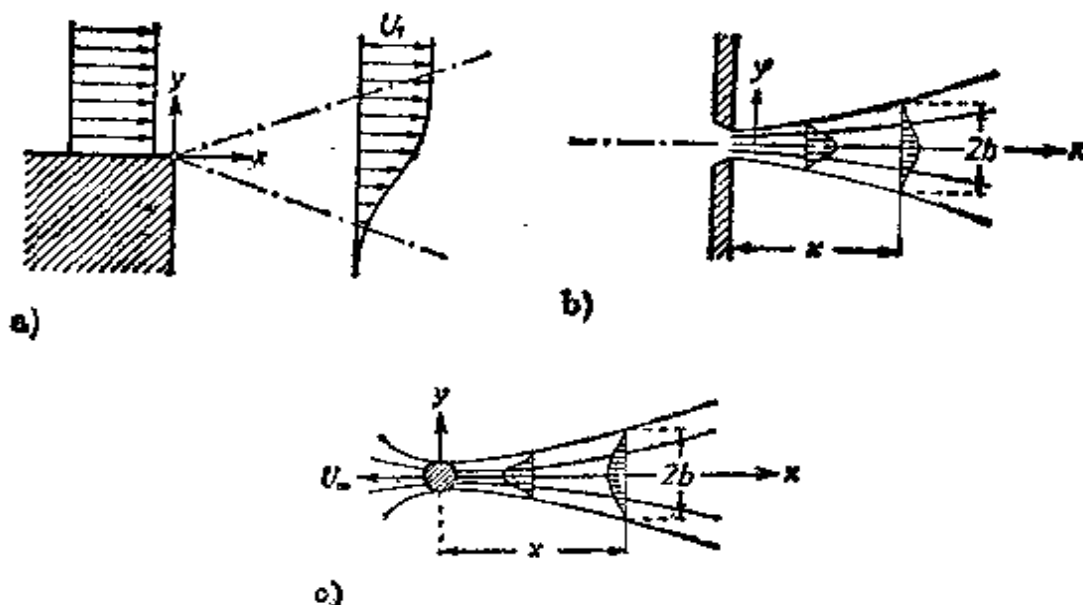


图24.1 自由湍流的例子: (a)射流边界; (b)自由射流; (c)尾迹

自由射流是流体从喷嘴或孔口喷出时形成的(图 24.1(b)).除去流动速度很小的情形之外,可以发现射流离开出口一小段距离后就完全变成了湍流。正由于是湍流,排出的射流将与周围静止的流体局部地混合。射流带走周围的流体质点,以致其质量流量

沿下游方向不断增加。同时,射流不断扩展,其速度不断下降,但是总动量仍保持不变。S. I. Pai (柏实义)^[26] 给出了自由射流问题的全面论述。这方面也可参阅 G. N. Abramovich 的书^[4]。

尾迹是在静止流体中运动的固体之后(图 24.1c) 或在被绕流的固体之后形成的,尾迹中的速度要小于主流的速度,这个速度损失相当于由作用在物体上阻力引起的动量损失。尾迹的宽度随其离开物体的距离增加而增加,而尾迹中的速度与外流速度之差则越来越小。

在定性上,这些流动很象层流情形中类似的流动(第九章和第十一章),但是,由于湍流摩擦很大,所以在定量上存在着很大差别。自由湍流比沿壁面的湍流更适合于用数学处理,因为在所考虑的整个区域内,湍流摩擦都远大于层流摩擦。因此在有关自由湍流的问题中,可以完全忽略层流摩擦,而在沿固壁的湍流中却不是这样。对比之下,不难回想起,沿固壁湍流在紧靠固壁的领域中(即层流次层)总是必须计及层流摩擦的,由此引起了数学上的很大困难。

此外,注意到自由湍流中的问题具有**边界层性质**,即求解区域的横向宽度与主流方向的长度相比是小量,且横向梯度很大。因此,可以用边界层方程来研究这类问题。在二维不可压缩流动的情形下,这些方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (24.2)$$

其中 τ 是湍流切应力。压力项已从运动方程中去掉,因为在所考虑的问题中,至少在首次近似中,都可假设压力不变。在尾迹情形下,这一假设只有在离开物体的一定距离以外才成立。

为了能够积分方程(24.1)和(24.2),必须把湍流切应力用主流的参数表示出来。目前还只能借助于半经验的假设来求得这种关系,这在第十九章中已讨论过。这方面可利用 Prandtl 混合长度

理论的公式(19.7)

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (24.3)$$

或其推广形式

$$\tau_t = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2}, \quad (24.4)$$

其中混合长度 l 和 l_1 应看成是纯粹的位置函数¹⁾。它们必须根据每种具体情况作适当的处理。还可以应用公式(19.10)的 Prandtl 假设,即

$$\tau_t = \rho s_r \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \kappa_1 b (u_{\max} - u_{\min}) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (24.5)$$

其中 b 是混合区宽度, κ_1 是经验常数,而

$$s_r = \kappa_1 b (u_{\max} - u_{\min}) \quad (24.5a)$$

是有效运动粘性系数,假设它在整个宽度上不变,因而与 y 无关。此外,还可以应用 van Kármán 假设的公式(19.19)和由 G. I. Taylor 导出的公式(19.15a)。

分别应用假设(24.3), (24.4)和(24.5),可以发现彼此的结果只有很小的差别。用公式(24.5)得出的结果与实验吻合得最好,而且所得到的方程更容易求解,因此我们倾向于采用这一假设。但是,若干例子将用假设(24.3)和(24.4)来讨论,这是为了说明用不同假设下所得到的结果之间的差别。而且,混合长度公式(24.3)在管流理论中已用得非常成功,因此,检验一下它在目前这类流动中的适用性也是很有意义的。不难回想起,从它已导出了普适的速度分布的对数律。

b. 对宽度增长和速度下降的估计

在对几种具体的情形积分方程(24.1)和(24.2)之前,我们先来作出量级估计。采用这种方法,对于混合区随着距离 x 增加时,其

1) 因为推广形式极少应用,所以在第十九章中没有讨论。

宽度的增长规律和速度剖面“高度”的减小规律，就能获得具体的概念。下面的论述是基于 Prandtl^[27] 首先给出的方法。

在处理湍流射流和湍流尾迹时，通常假设混合长度 l 正比于射流的宽度 b ，因为这样做能够得出有用的结果。因此令

$$\frac{l}{b} = \beta = \text{常数}. \quad (24.6)$$

此外，下面这个规律经受了时间的考验：即混合区宽度 b 随时间的增长率与横向速度 v' 成正比：

$$\frac{Db}{Dt} \sim v'.$$

按照惯例，这里的 D/Dt 表示随体导数，对于定常流动，有 $D/Dt = u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ 。根据以前的量级估计，见式(19.6)，有 $v' \sim l\partial u/\partial y$ ，于是

$$\frac{Db}{Dt} \sim l \frac{\partial u}{\partial y}.$$

此外，可以假设 $\partial u/\partial y$ 在射流半宽度上的平均值近似地正比于 u_{\max}/b 。因此

$$\frac{Db}{Dt} = \text{常数} \times \frac{l}{b} u_{\max} = \text{常数} \times \beta u_{\max}. \quad (24.7)$$

射流边界：利用上述关系，现在来估计自由射流边界混合区的宽度随距离 x 增加的增长率。对于射流边界，有

$$\frac{Db}{Dt} \sim u_{\max} \frac{db}{dx}. \quad (24.8)$$

比较式(24.8)和(24.7)，我们得出

$$\frac{db}{dx} = \text{常数} \times \frac{l}{b} = \text{常数},$$

或

$$b = \text{常数} \times x.$$

这表明自由射流边界混合区的宽度正比于离开两股射流会合点的距离。通过适当地选取坐标系的原点可以消去积分常数，但是严

格地说,积分常数一定出现在上述方程中。

二维和圆形射流: 式(24.8)在二维和圆形射流中仍然成立,此时 u_{\max} 表示射流中心线上的速度。于是在这种情形下,我们也有

$$b = \text{常数} \times x. \quad (24.9)$$

u_{\max} 和 x 之间的关系可以从动量方程中导出。因为压力保持不变,故 x 方向的动量在整个横截面上的积分必然保持不变,并与 x 无关,即

$$J = \rho \int u^2 dA = \text{常数}.$$

在二维射流的情形下,有 $J = \text{常数} \times \rho u_{\max}^2 b$, 其中 J 代表单位长度上的动量,因此 $u_{\max} = \text{常数} \times b^{-1/2} \sqrt{J/\rho}$ 。考虑到式(24.9),还有

$$u_{\max} = \text{常数} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{J}{\rho}} \quad (\text{二维射流}). \quad (24.10)$$

在圆形射流的情形下,动量为

$$J = \text{常数} \times \rho u_{\max}^2 b^2.$$

因此

$$u_{\max} = \text{常数} \times \frac{1}{b} \sqrt{\frac{J}{\rho}}.$$

同样根据式(24.9),现在有

$$u_{\max} = \text{常数} \times \frac{1}{x} \sqrt{\frac{J}{\rho}} \quad (\text{圆形射流}). \quad (24.11)$$

二维和圆形尾迹: 现在应将方程(24.8)改为

$$\frac{Db}{Dt} = U_{\infty} \frac{db}{dx},$$

而方程(24.7)改为

$$\frac{Db}{Dt} = \text{常数} \times \frac{1}{b} u_1 = \text{常数} \times \beta u_1,$$

其中 $u_1 = U_{\infty} - u$ 。由于上述两个表达式相等,即得

$$U_{\infty} \frac{db}{dx} \sim \frac{i}{b} u_1 = \beta u_1,$$

或

$$\frac{db}{dx} \sim \beta \frac{u_1}{U_{\infty}} \text{ (二维和圆形尾迹)}. \quad (24.12)$$

尾流问题中的动量计算与射流的情形不同，因为这里存在一个动量和物体上阻力之间的直接关系。正如已经指出的那样，动量积分公式(9.26)为

$$D = J = \rho \int u(U_{\infty} - u) dA,$$

只要控制面取在物体后足够远的地方，即其静压已回复到未扰动的来流中值。在物体后足够远处，由于 $u_1 = U_{\infty} - u$ 远小于 U_{∞} ，于是可设 $u(U_{\infty} - u) = (U_{\infty} - u_1)u_1 \approx U_{\infty}u_1$ 。因此对于二维和圆形尾流来说，

$$J = D \approx \rho U_{\infty} \int u_1 dA. \quad (24.13)$$

二维尾迹：设圆柱体的高度为 h ，直径为 d ，于是它的阻力为 $D = \frac{1}{2} c_D \rho U_{\infty}^2 h d$ ，式(24.13)的动量 $J \sim \rho U_{\infty} u_1 h b$ 。根据式(24.13)，两者相等，得

$$\frac{u_1}{U_{\infty}} \sim \frac{c_D d}{2b}. \quad (24.14)$$

代入宽度增长率的关系式(24.12)，得

$$2b \frac{db}{dx} \sim \beta c_D d,$$

或

$$b \sim (\beta x c_D d)^{1/2} \text{ (二维尾迹)}. \quad (24.15)$$

将此值代入式(24.14)，可以求出速度曲线的“亏损”沿下游方向减少的规律为

$$\frac{u_1}{U_{\infty}} \sim \left(\frac{c_D d}{\beta x} \right)^{1/2} \text{ (二维尾流)}. \quad (24.16)$$

换句话说，二维尾流宽度的增长正比于 \sqrt{x} ，速度的减小正比于 $1/\sqrt{x}$ 。

圆形尾流：以 A 表示物体的迎风面积，可以将物体上的阻力写成 $D = \frac{1}{2} c_D A \rho U_\infty^2$ ，动量公式(24.13)变为 $J \sim \rho U_\infty u_1 b^2$ 。 D 和 J 相等，我们得到

$$\frac{u_1}{U_\infty} \sim \frac{c_D A}{b^2} \quad (24.17)$$

将此值代入方程(24.12)，求出其宽度的增长为

$$b^2 \frac{db}{dx} \sim \beta c_D A,$$

或

$$b \sim (\beta c_D A x)^{1/3} \quad (\text{圆形尾流}). \quad (24.18)$$

将式(24.18)代入(24.17)，求出速度剖面亏损的减小的表达式为

$$\frac{u_1}{U_\infty} \sim \left(\frac{c_D d}{\beta^2 x^2} \right)^{1/3} \quad (\text{圆形尾迹}). \quad (24.19)$$

因此，关于圆形尾迹，我们求得尾迹宽度的增长正比于 $x^{1/3}$ ，速度减小正比于 $x^{-2/3}$ 。

表 24.1 中总结了关于宽度和中心线上速度的幂律关系。为了

表 24.1 自由湍流问题中宽度增长和中心线上速度减小与距离 x 的幂律关系

	层 流		湍 流	
	宽度 b	中心线上速度 u_{\max} 或 u_1	宽度 b	中心线上速度 u_{\max} 或 u_1
自由射流边界	$x^{1/2}$	x^0	x	x^0
二维射流	$x^{2/3}$	$x^{-1/3}$	x	$x^{-1/3}$
圆形射流	x	x^{-1}	x	x^{-1}
二维尾迹	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$	$x^{1/3}$	$x^{-1/3}$
圆形尾迹	$x^{1/3}$	x^{-1}	$x^{1/3}$	$x^{-2/3}$

完整起见,表中也列出了相应的层流情形,这些已在第九章和第十一章中讨论过。

c. 例 子

关于自由湍流问题的基本特性,前面的量级估计本身就给出了一个明确的概念。现在,我们将进一步针对几个具体例子作更详细的讨论,即从运动方程组出发,导出完整的速度分布函数。为了达到这一目的,需要引用式(24.3)至(24.5)中的一个假设。这里选来讨论的例子都有下述的共同特性:它们中的速度剖面都是彼此相似的,即在各不同的距离 x 上,只要适当地选取速度和宽度的尺度因子,速度剖面就可以完全重合。

1. 速度间断的平滑化 作为第一个例子,我们来研究速度间断的平滑化过程,这个问题首先是由 Prandtl^[27] 作出处理的。当 $t = 0$ 时,两股流动分别以不同的速度 U_1 和 U_2 运动,它们的分界面在 $y = 0$ 处(图24.2)。以前曾指出过,这种两边速度突变的间断面是不稳定的,湍流混合过程将使这一过渡平滑化,变为连续过渡。从速度 U_1 到速度 U_2 连续过渡区的宽度随时间的推移而增长。现在考虑一个非定常平行流中的问题,其中

$$u = u(y, t); \quad v = 0. \quad (24.20)$$

方程(24.1)中的对流项恒为零。利用 Prandtl 混合长度理论的公式(24.3),可以将方程(24.1)改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (24.21)$$

混合区的宽度 b 随时间的增加而增长,所以 $b = b(t)$ 。和以前一样,假设混合长度正比于 b , 于是 $l = \beta b$ 。假设速度剖面相似,可令

$$u \sim f(\eta),$$

其中 $\eta = y/b, b \sim t^p$ 。宽度表达式中的指数 p 可由下述条件确定:在方程(24.21)中,加速度项和摩擦项对时间 t 的幂律中指数必须相同。于是 $\partial u / \partial t$ 正比于 t^{-1} , 而右边项正比于 $t^{2p-3p} =$

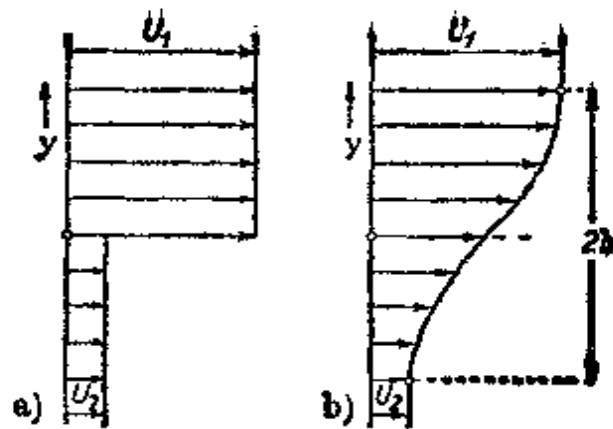


图 24.2 速度间断的平滑化, 根据 Prandtl^[27]. (a) 起始图 ($t = 0$); (b) 后来某瞬时的图

t^{-p} , 所以 $p = 1$.

由此, 对目前这一问题就有如下的假定:

$$b = Bt; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{y}{Bt}$$

速度 u 最好取下列形式

$$u = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)f(\eta), \quad (24.22)$$

或

$$u = U_m + Af(\eta),$$

其中 $U_m = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$, $A = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)$. 为保证混合区边

缘 ($y = \pm b$) 上速度分别为 U_1 和 U_2 , 必须令 $\eta = \pm 1$ 时 $f = \pm 1$. 将速度表达式(24.22)代入方程(24.21), 就得到下述 $f(\eta)$ 的微分方程:

$$\eta f' + \frac{\beta^2 A}{B} f' f'' = 0.$$

这个方程有一个解 $f' = 0$, 即 $f = \text{常数}$, 它代表一个常速度的平凡解。但是, 如果 f' 不为零, 则可以将它从上式中消去, 由此得

$$\eta + \frac{\beta^2 A}{B} f'' = 0.$$

积分后得

$$f(\eta) = c_0 \eta^3 + c_1 \eta,$$

其中 $c_0 = -B/(6\beta^2 A)$ 。这个解满足 $f(0) = 0$ 的条件,所以,常数 c_0 和 c_1 可由下述条件确定: 在 $y = b$ 处即 $\eta = 1$ 处, $f(\eta) = 1$, $f'(\eta) = 0$, 得出

$$c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{3}{2}.$$

将这些值代入式(24.22),得解的最后形式为

$$u(y, t) = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \times \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right], \quad (24.23)$$

其中

$$b = \frac{3}{2} \beta^2 (U_1 - U_2) t. \quad (24.24)$$

图 24.2 中画出了由式(24.23)给出的曲线。这里有一个显著的特点: 混合区的速度并不是渐近地过渡到两个自由流的速度上的, 过渡发生在有限的距离 $y = b$ 处, 这里有不连续的 $\partial^2 u / \partial y^2$ 。这是对湍流切应力采用 Prandtl 假设(24.3)的解的普遍性质, 也就是为什么说上述假设在审美上不足的原因。改进后的假设(24.4)或(24.5)就没有这一缺点。

出现在上述解中的 $\beta = l/b$ 是唯一的经验常数, 它只能完全由实验数据来确定。

2. 自由射流边界 自由射流边界的条件与前面例子中的条件有着密切的关系。参考图 24.1, 我们将考虑更为普遍的情形: 设在 $x = 0$ 处有常速度分别为 U_1 和 U_2 的两层流动会合, 并假设 $U_1 > U_2$ 。在流动会合点的下游, 将形成一混合区, 其宽度的增长正比于 x (图 24.1 (a))。W. Tollmein^[52] 给出了这个问题的第一个解, 对于湍流切应力, 他应用 Prandtl 混合长度的假设

(24.3). 这里将回顾由 H. Goertler^[18] 得出的数学上更为简单的解, 其中采用了 Prandtl 假设(24.5). 因为有效运动粘性系数不依赖于 y , 所以方程(24.1)和公式(24.5)给出

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (24.25)$$

令 $b = cx$, 我们得到适用于目前情形的有效运动粘性系数的表达式, 即式 (24.5a) 的表达式为

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1 cx(U_1 - U_2). \quad (24.26)$$

由于速度剖面的相似性, u 和 v 都是 y/x 的函数. 令 $\xi = \sigma y/x$, 为了积分连续性方程, 可以采用流函数 $\psi = xUF(\xi)$, 其中 $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$. 于是 $u = U\sigma F'(\xi)$, 并且由方程 (24.25) 得出

$F(\xi)$ 的微分方程如下:

$$F''' + 2\sigma^2 FF'' = 0, \quad (24.27)$$

其中 $\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 c \lambda)^{-1/2}$, $\lambda = (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2)$. 其边界条件

为: 在 $\xi = \pm\infty$ 处, $F'(\xi) = 1 \pm \lambda$. 微分方程 (24.27) 与零攻角平板边界层的 Blasius 方程(7.28) 相同, 但现在的边界条件是不同的. H. Goertler 假设了一个幂级数的展开式

$$\sigma F(\xi) = F_0(\xi) + \lambda F_1(\xi) + \lambda^2 F_2(\xi) + \dots, \quad (24.28)$$

其中 $F_0 = \xi$, 从而求得了方程(24.27)的解. 将式(24.28)代入方程(24.27), 并按 λ 的升幂排列, 则得出一组微分方程, 它们可以用递推法来求解. 这组微分方程中的第一个方程为

$$F_1''' + 2\xi F_1'' = 0, \quad (24.29)$$

其边界条件为: 在 $\xi = \pm\infty$ 处, $F_1'(\xi) = \pm 1$. 方程 (24.29) 的解由误差函数给出

$$F_1'(\xi) = \operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-z^2} dz.$$

在式(24.28)中, 级数的以后各项贡献不大, 因此解为

$$u = \frac{U_1 + U_2}{2} \left\{ 1 + \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \operatorname{erf} \xi \right\}, \quad (24.30)$$

其中

$$\xi = \sigma \frac{y}{x}. \quad (24.30a)$$

图 24.3 中将理论解与 $U_2 = 0$ 的 H. Reichardt^[29] 的测量结果作了比较,可以看出它们吻合得相当好。参量 σ 是唯一的经验常数,是由实验结果来调整的。根据 H. Reichardt 的实验,在 $(u/U_1)^2 = 0.1$ (对应于 $\xi = -0.345$) 到 $(u/U_1)^2 = 0.9$ (对应于 $\xi = 0.975$) 之间测得的混合区宽度为 $b_{0.1} = 0.098x$, 由此得 $\sigma = 13.5$, 有效运动粘性系数为 $\nu = 0.014b_{0.1} \times U_1$ 。

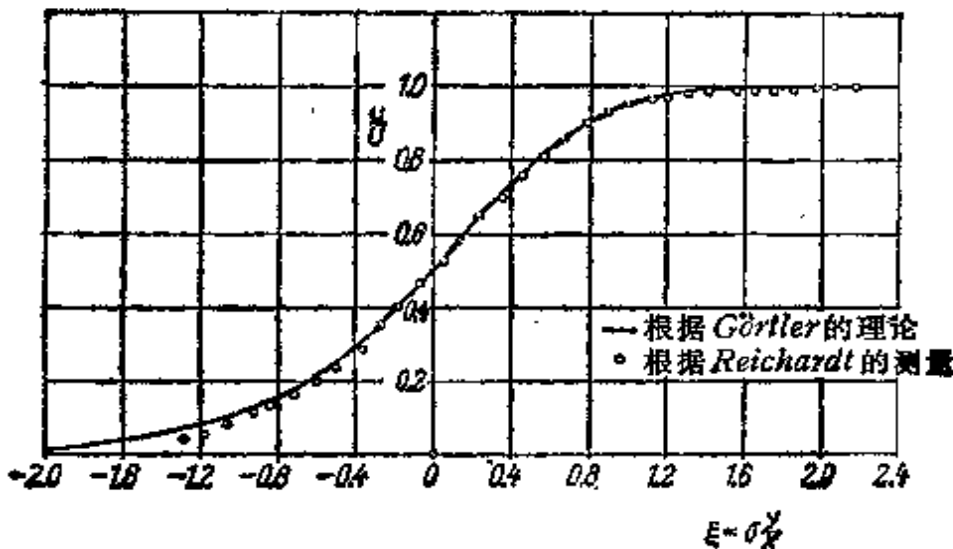


图 24.3 射流混合区中的速度分布, $\sigma = 13.5$

钝体: M. Tanner^[49] 详细地探讨了出现在钝体后面尾迹中的湍流混合过程,其结果如图 24.4 所示。在二维钝体后面的每一棱边处或围绕圆柱体后面环形的尖缘处形成图中那样的混合区。混合区横向的速度分布与图 24.3 的形状相同,可以用式(24.30)来表示。相似性参数 σ 强烈地依赖于二维的尖楔角或轴对称的锥顶角 ϕ 。图 24.4 中画出了这种关系。相似性参数 σ 随二维楔角 ϕ 的增加而明显减小。当 $\phi = 180^\circ$ (平板与来流方向成直角)时,其 σ

的值仅仅是 $\phi = 0$ (自由射流)时的一半。这表明,在垂直于来流的平板后面的尾迹中,混合区的扩张差不多是自由射流中的两倍。但是,只有在尾迹中安置有平直的导流板,防止 Kármán 涡街形成的情形下,这个结论才成立。

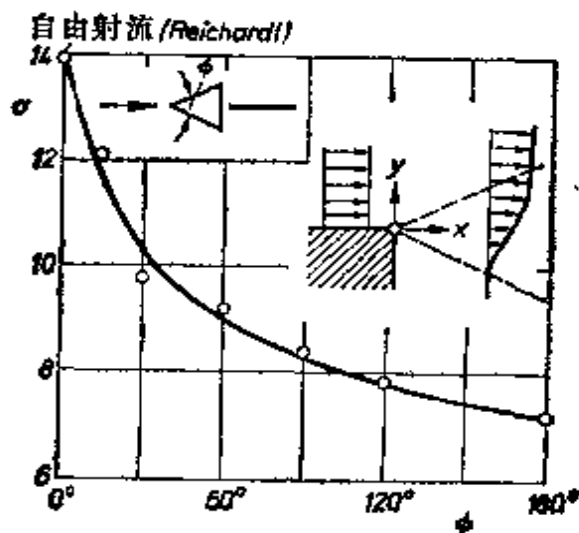


图 24.4 近于短楔形物体后面尾迹中湍流混合区,式(24.30a)中相似性参数 σ 与楔角 ϕ 的函数关系根据 M. Tanner^[49]。

W. Szablewski^[46,47,48] 将上述的以及本章 C1 中的计算方法推广到密度相差很大但速度相差很小的两层流动的情形中,结果表明:这种密度的差别对混合区的宽度只有很轻微的影响,但是,随着密度差的增加,混合区将向低密度射流方向移动。上述结论也可以用于化学浓度不同的两层射流 P. B. Gooderum, P. G. Wood 和 H. J. Brevoort^[17] 在超声速射流自由边界的条件下作了实验研究,结果表明:其混合区比不可压缩流动中的情形略窄,湍流度也略低。

3. 单个物体后的二维尾迹 H. Schlichting^[35] 在 Goettingen 大学的学位论文中,第一个研究了二维尾迹。这一研究基于 Prandtl 混合长度的假设(24.3)。后来, H. Reichardt^[29] 和 H. Goertler^[13] 利用 Prandtl 混合长度的假设(24.5)给出了同一问题的解。为了说明这两种结果之间没有多大的差别,现在对这两种解法作一简短的叙述。

在尾迹的情形下，速度剖面只在离开物体很远的下游才是相似的，在较近的距离上并不相似。现在，我们将自己限制在只考虑远距离 x 的问题，所以速度差

$$u_1 = U_\infty - u \quad (24.31)$$

相对于来流速度 U_∞ 来说是小量。在远距离处，尾迹中静压等于来流中的静压。因此，将动量定理用到包围物体的控制面上（设该物体是高度为 h 的柱体）给出

$$D = h\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u(U_\infty - u)dy = h\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1(U_\infty - u_1)dy.$$

略去 u_1^2 项，我们得

$$D = h\rho U_\infty \int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1 dy.$$

代入 $D = \frac{1}{2} c_D d h \rho U_\infty^2$ ，其中 d 为柱体的厚度，于是得

$$\int_{y=-\infty}^{+\infty} u_1 dy = \frac{1}{2} c_D U_\infty d. \quad (24.32)$$

和本章 b 导出的一样，尾迹宽度的变化为 $b \sim x^{1/2}$ ，速度差的变化为 $u_1 \sim x^{-1/2}$ 。

根据式(24.3)的切应力假设：因为方程(24.1)中的 $\nu \partial u / \partial y$ 是小量，所以得出

$$-U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = 2l^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (24.33)$$

假设混合长度 l 在整个宽度上不变，且正比于宽度 b ，即有 $l = \beta b(x)$ 。根据速度剖面的相似性，引入 $\eta = y/b$ 作为自变量。为了与尾迹宽度和速度剖面的凹陷深度的幂律相一致，我们假设

$$b = B(c_D dx)^{1/2}, \quad (24.34)$$

$$u_1 = U_\infty \left(\frac{x}{c_D d} \right)^{-1/2} f(\eta). \quad (24.35)$$

将其代入方程(24.33)，得出关于 $f(\eta)$ 的微分方程：

$$\frac{1}{2} (f + \eta f') = \frac{2\beta^2}{B} f f',$$

其边界条件为 $y = b$ 处 $u_1 = 0$ 和 $\partial u_1 / \partial y = 0$, 即在 $\eta = 1$ 时, $f = \dot{f} = 0$. 积分一次, 我们得

$$\frac{1}{2} \eta \dot{f} = \frac{\beta^2}{B} f^2,$$

根据边界条件, 已定出上式的积分常数为零, 继续积分, 则得

$$f = \frac{1}{9} \frac{B}{2\beta^2} (1 - \eta^{3/2})^2.$$

现在只剩下利用动量积分来定出积分常数 B , 由此得出 $B = \sqrt{10} \beta^3$, 解的最后形式为

$$b = \sqrt{10} \beta (x c_D d)^{1/2}, \quad (24.36)$$

$$\frac{u_1}{U_\infty} = \frac{\sqrt{10}}{18\beta^2} \left(\frac{x}{c_D d} \right)^{-1/2} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{3/2} \right\}^2. \quad (24.37)$$

应该指出: 总宽度是有限的. 在以前关于速度间断平滑化的解中, 由于采用了同样的切应力假设, 所以也有同样的性质. 在混合区边缘 $y = b$ 处, 速度剖面的曲率也是不连续的. 而在混合区中心 $y = 0$ 处, 甚至出现二阶导数 $\partial^2 u / \partial y^2$ 为无穷大, 使速度曲线在此显示出尖锐的弯折.

图24.5中已将这种理论计算的结果(式(24.37))与 Schlichting^[35]的测量结果作了比较. 实验结果是在圆柱体后面的尾迹中测量的, 理论曲线标以记号(1). 可以看出, 两者吻合得非常好, 式(24.36)和式(24.37)中唯一的待定常数 β 也必须在实验测量数据的基础上来确定. 可以从图24.6中的尾迹宽度随物体后距离 x 变化的曲线定出 β 值. 实验数据取自 H. Reichardt^[29] 和 H. Schlichting^[35] 对不同直径 d 的圆柱体后尾迹的测量. 由此得出

$b_{1/2} = \frac{1}{4} (x c_D d)^{1/2}$, 其中 $b_{1/2}$ 表示在速度剖面凹陷深度二分之一

处混合区的半宽度. 因为 $b_{1/2} = 0.441b$, 所以有

1) 注意: $\int_{-1}^{+1} (1 - \eta^{3/2})^2 d\eta = \frac{9}{10}$.

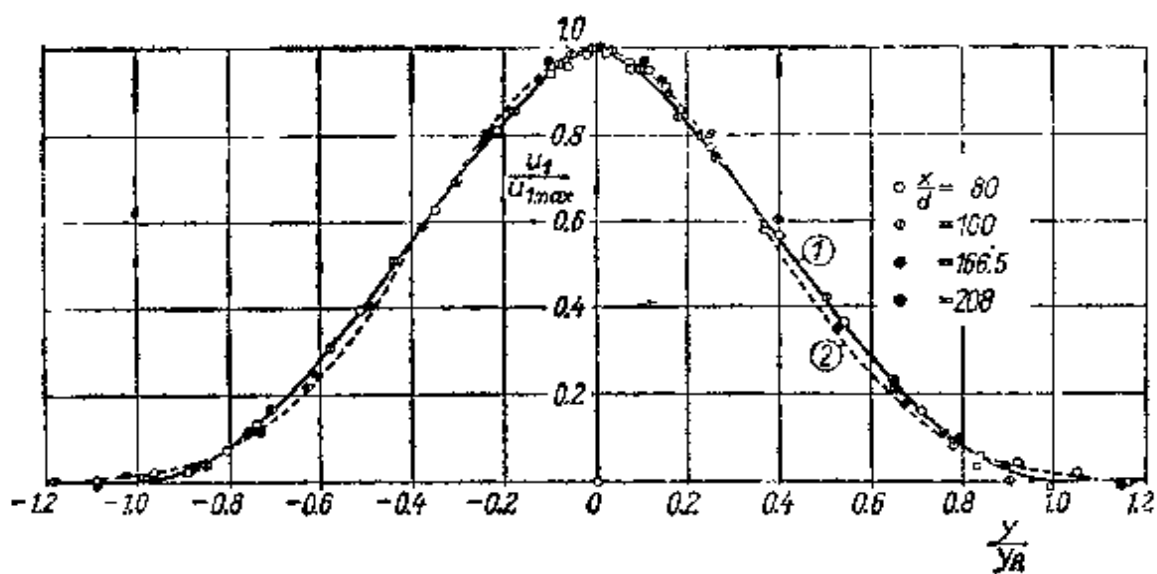


图 24.5 圆柱体后二维尾迹中的速度分布，理论和实验的比较，实验值取自 Schlichting¹³⁵³，曲线(1)对应于式(24.37)；曲线(2)对应于式(24.39)

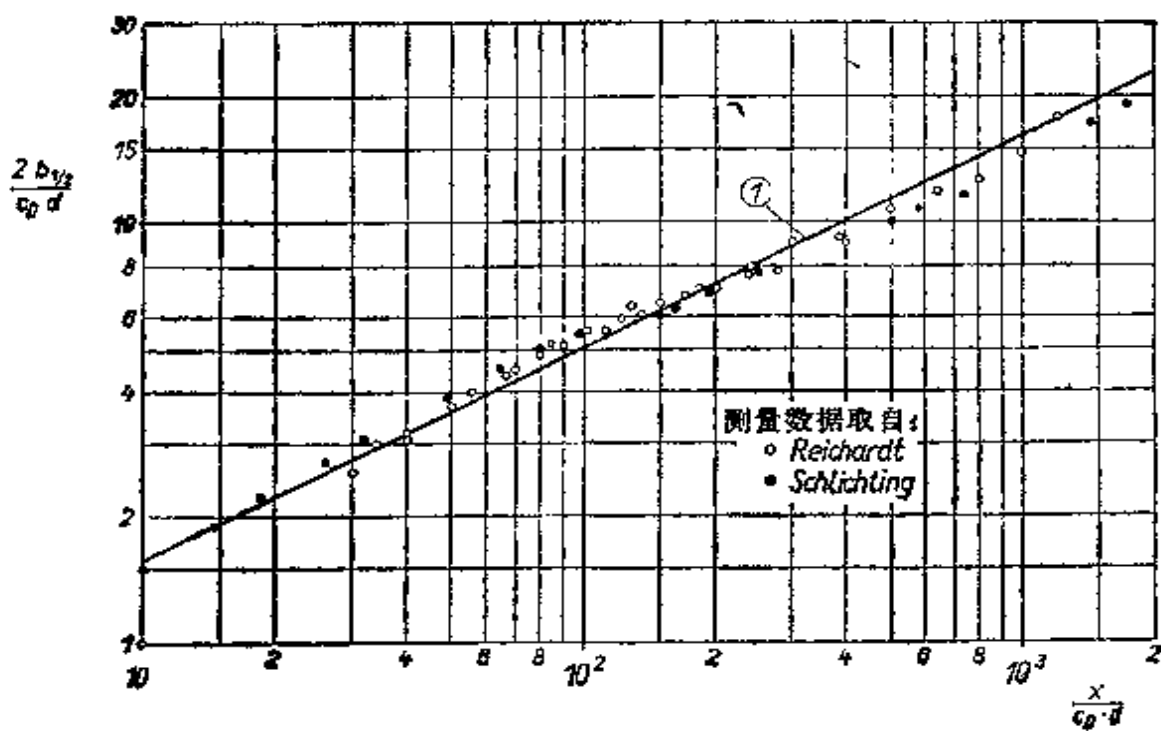


图 24.6 二维尾迹，圆柱体后尾迹宽度的增长，

曲线(1): $b_{1/2} = \frac{1}{4} (x c_D d)^{1/2}$

$$0.441 \sqrt{10} \beta = \frac{1}{4},$$

于是 $\beta = \frac{l}{b} = 0.18.$

上述解是在距离 x 很大时的近似解, 实验测量表明, 它在 $x/c_D d > 50$ 时成立. 在距离较小的情形下, 可以计算速度的附加项, 这些项分别正比于 x^{-1} 和 $x^{-3/2}$.

根据式(24.5)的切应力假设: 由方程(24.1)和(24.5)得出

$$U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_r \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (24.38)$$

在这里, 有效运动粘性系数为 $\varepsilon_r = \varepsilon_1 u_{1\max} b$, 因此是常数, 例如记作 ε_0 . 所以, u_1 的微分方程与层流尾迹中的方程(9.30)相同. 只不过必须用 ε_0 来替换层流运动粘性系数 ν . 于是, 就可以简单地直接应用第九章中已求得的解. 记 $\eta = y \sqrt{U_\infty / \varepsilon_0 x}$, 由式(9.31)和(9.34)得出

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right).$$

从动量积分定出常数 C 为

$$C = \frac{c_D}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty d}{\varepsilon_0}},$$

最后得

$$\frac{u_1}{U_\infty} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty c_D d}{\varepsilon_0}} \left(\frac{x}{c_D d} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \eta^2\right). \quad (24.39)$$

半深度处半宽度的值为 $b_{1/2} = 1.675 \sqrt{\varepsilon_0 / (U_\infty c_D d)} (x c_D d)^{1/2}$. 与前面 $b_{1/2}$ 的测量值比较, 可以求得经验参数 ε_0 的值为

$$\frac{\varepsilon_0}{U_\infty c_D d} = 0.0222.$$

考虑到 $U_{\infty} c_{Dd} = 2.11 \times 2b_{1/2} u_{1m}$, 则

$$\varepsilon_0 = 0.047 \times 2b_{1/2} u_{1m}.$$

这个解表明: 尾迹中的速度分布可以用 Gauss 函数来表示. 由式(24.39)得到的另一个解给出图24.5中的曲线(2). 这个解与式(24.37)的解之间相差甚微.

W. Tollmien^[53] 基于 von Kármán 的假设(19.19)求解了同一问题. 已证明在速度剖面曲线拐点(其 $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$) 的附近, 必须作些另外的假设. A.A. Townsend^[54] 对柱体的尾迹作了广泛的实验, 用以研究 Reynolds 数在 8000 附近的湍流脉动. 实验表明, 在距离约为 160 到 180 倍直径的地方, 湍流的微观结构尚未充分发展. 而且从流动中记录的波形图证明: 流动只在中心附近才是完全的湍流, 而在靠近尾迹外边界处, 流动是在层流与湍流之间摆动. 第二章中已经描述过在很大的 Reynolds 数下对圆柱体尾迹的测量, 也可参阅 H. Pfeil 的文章^[26b].

L.M. Swain 小姐^[44]完成了对圆形尾迹的研究, 她的计算基于假设(24.3), 得到了与二维情形中式(24.37)相同的速度表达式, 但是所得到的宽度变化的幂律以及中心线上速度变化的幂律却是不同的, 即 $b \sim x^{1/3}$, $u_{1\max} \sim x^{-2/3}$, 已列于表 4.1 中.

直到最近, 人们还公认在离开物体后面足够远的地方, 尾迹中的速度分布与物体的形状无关, 因而具有一种普适的形式. H. Reichardt 和 R. Ermchaus^[55] 作了一系列的实验来检验这种说法, 并用旋成体后面的尾迹来对照, 结果表明: 在各种不同情形下, 物体后不同距离上的速度剖面都是相似的, 然而, 非流线体(平板, 直径/高度=1的圆锥)后面的速度剖面要比细长体(例如直径/高度=1/4至1/6的锥体)后面的更加趋于饱满. 这种差别在二维尾迹中并没有观察到.

4. 一排障碍物后的尾迹 在一排物体或栅格(例如由大量等间距 λ 的圆柱体所组成的, 见图 24.7) 后的尾迹与单个物体后的尾迹有密切的联系. R. Gram Olsson^[19] 对这种情形从理论上和实验上都作了研究. 在离这排物体的一定距离处, 单个物体形成

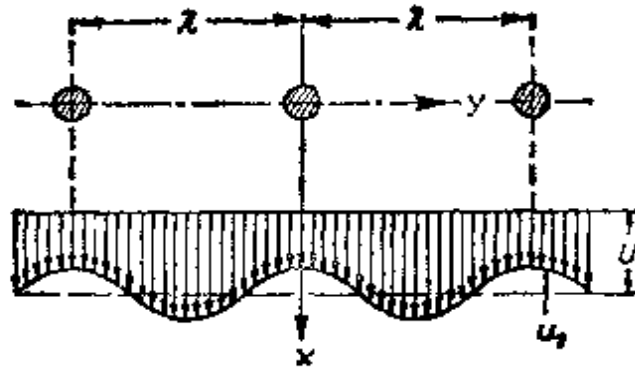


图 24.7 一排柱体后面的流动图象,示意图

的尾迹宽度等于其间距,即 $b = \lambda$, 其速度差 $u_1 = U_\infty - u$ 相对于 U_∞ 是小量,于是方程(24.1)可以简化为

$$-U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (24.40)$$

若采用更普遍的混合长度的假设(24.4),则目前这个问题的计算就非常简单了. 第一步是确定 u_1 随 x 增加而减小的幂函数中的指数. 设 $u_1 \sim x^p f(y)$, 则 $\partial u_1 / \partial x \sim x^{p-1}$. 由于正比于尾迹宽度的混合长度为常数,所以方程(24.40)的右边正比于 $\partial \tau / \partial y \sim (\partial u / \partial y) \cdot (\partial^2 u / \partial y^2) \sim x^{2p}$. 于是 $p - 1 = 2p$, 得出 $p = -1$, 即速度差的减小正比于 x^{-1} .

在充分发展了的流动中,速度分布显然应该是 y 的周期函数,其周期为 λ . 因此假设

$$u_1 = U_\infty A \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-1} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right),$$

其中已取点 $y = 0$ 位于速度分布的一个凹陷中心处, A 还是一个待定的常数. 现在根据 $l = \text{常数}$ 的式(24.4)给出切应力 τ 的表达式,并假设 $l_1 = \lambda / 2\pi$, 看来这是容许的. 其结果是一个非常简单的表达式,其形式为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-2} U_\infty^2 A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right).$$

以此表达式代入方程(24.40),得 $A = (\lambda/l)^2 / 8\pi^2$, 因此最后的解

为

$$u_1 = \frac{U_\infty}{8\pi^3} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \frac{\lambda}{x} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right). \quad (24.41)$$

根据 R. Gran Olsson 所作的实验, 这个解在 $x/\lambda > 4$ 时成立.

在 $\lambda/d = 8$ 的一排圆柱形杆的后面, 混合长度的大小由下式给出:

$$\frac{l}{\lambda} = 0.103.$$

R. Gran Olsson 也用式(24.3)中的 τ (即 $l_1 = 0$) 研究了这种情形, 利用这个假设, 计算要麻烦得多 H. Goertler^[18] 借助于 τ 的假设(24.5)解了同一问题, 发现解与式(24.41)相同¹⁾. G. Cordes^[7] 导出了离一排圆柱形杆较近距离处的二级近似.

为了得到局部的均匀速度分布, 在风洞中经常采用柱体间隔很小的栅格. 但是常常有几股射流彼此合拢, 这种过程阻止了速度趋向于均匀. J. G. von Bohl^[5] 对这种现象作过更详细的研究, 用几排平行的多角形柱体进行了实验, 改变其稠度 (即横截面上所有柱体占有的面积与整个通道面积之比) 的值 $m = 0.308, 0.462$ 和 0.615 . 当 m 的值很小时, 各个射流彼此保持平行. 射流的合拢大致发生在 $m = 0.37$ 到 0.46 之间.

5. 二维射流 W. Tollmien 用 Prandtl 混合长度的假设(24.3)第一个计算了二维湍流射流. 但是本节将对一个更简单的解加以简短的讨论, 这是由 H. Reichardt^[29] 和 H. Goertler^[18] 基于 Prandtl 的第二个假设(24.4)给出的. E. Foerthmann^[11] 和 H. Reichardt^[29] 进行了速度分布的测量.

表 24.1 已给出这种射流宽度的增长率为 $b \sim x$, 中心线上速度的下降率为 $U \sim x^{-1/2}$. 方程(24.1)和式(24.5)导出微分方程

1) 根据 $s_r = K\lambda(u_{\max} - u_{\min})$, 我们有 $u = \frac{U_\infty}{8\pi^2 K} \frac{\lambda}{x} \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$, 或与式

(24.41)作比较, 得 $K = \pi (l/\lambda)^2 = 0.103^2 = 0.0333$. 因此有效运动粘性系数为 $s_r = 0.0333\lambda(u_{\max} - u_{\min})$.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (24.42)$$

此方程必须和连续方程结合起来求解。有效运动粘性系数由

$$\varepsilon_r = \kappa_1 b U$$

给出，其中 U 为中心线上的速度。用 U_s 和 b_s 分别表示离出口一个固定特征距离 s 处中心线上的速度和射流宽度，可以写出

$$U = U_s \left(\frac{x}{s} \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad b = b_s \frac{x}{s}.$$

于是

$$\varepsilon_r = \varepsilon_s \left(\frac{x}{s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{其中 } \varepsilon_s = \kappa_1 b_s U_s.$$

进一步令

$$\eta = \sigma \frac{y}{x},$$

其中 σ 是待定常数。利用流函数 ϕ 就可以积出连续方程，设 ϕ 的形式为

$$\phi = \sigma^{-1} U_s s^{1/2} x^{1/2} F(\eta).$$

于是

$$u = U_s \left(\frac{x}{s} \right)^{-\frac{1}{2}} F'; \quad v = \sigma^{-1} U_s s^{1/2} x^{-1/2} \left(\eta F' - \frac{1}{2} F \right).$$

将其代入方程(24.42)，得到 $F(\eta)$ 的如下微分方程：

$$\frac{1}{2} F'^2 + \frac{1}{2} F F'' + \frac{\varepsilon_s}{U_s s} \sigma^2 F''' = 0,$$

其边界条件：在 $\eta = 0$ 时， $F = 0$ ， $F' = 1$ ，以及在 $\eta = \infty$ 时， $F' = 0$ 。因为 ε_s 中包含着待定常数 κ_1 所以可令

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_s s}{\varepsilon_s}}. \quad (24.43)$$

这一代换简化了上述微分方程，现在可以积分两次，由此得到

$$F^2 + F' = 1. \quad (24.44)$$

这个方程与二维层流射流的方程(9.42)完全一样，其解为 $F =$

$\tanh \eta$, 所以速度为 $u = U(x/s)^{-1/2}(1 - \tanh^2 \eta)$. 特征速度可以用恒定的单位长度的动量 $J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy$ 来表示. 因此 $J = \frac{4}{3} \rho U^2 s / \sigma$. 记 $J/\rho = K$ (运动学动量), 得到解的最后形式为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{K\sigma}{x}} (1 - \tanh^2 \eta), \\ v &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{K}{x\sigma}} \{2\eta(1 - \tanh^2 \eta) - \tanh \eta\}. \end{aligned} \right\} (24.45)$$

唯一的经验常数 σ 的值由 H. Reichardt^[29] 用实验定出, 求得 $\sigma = 7.67$. 图 24.8 中给出了式(24.5)的理论曲线(2)与 E. Ferthmann 的实验结果之间的比较, 为了对比, 图中也画出了 W. Tollmien^[52] 基于 Prandtl 混合长度假设所得到的理论曲线(1). 由于第一条理论曲线(2)在其最大值附近较为饱满, 因而与实验结果吻合得更好一些.

根据所给的 σ 数值, 我们得到

$$\delta_r = \frac{1.125}{4\sigma} b_{1/2} U,$$

或 $\delta_r = 0.037 b_{1/2} U,$

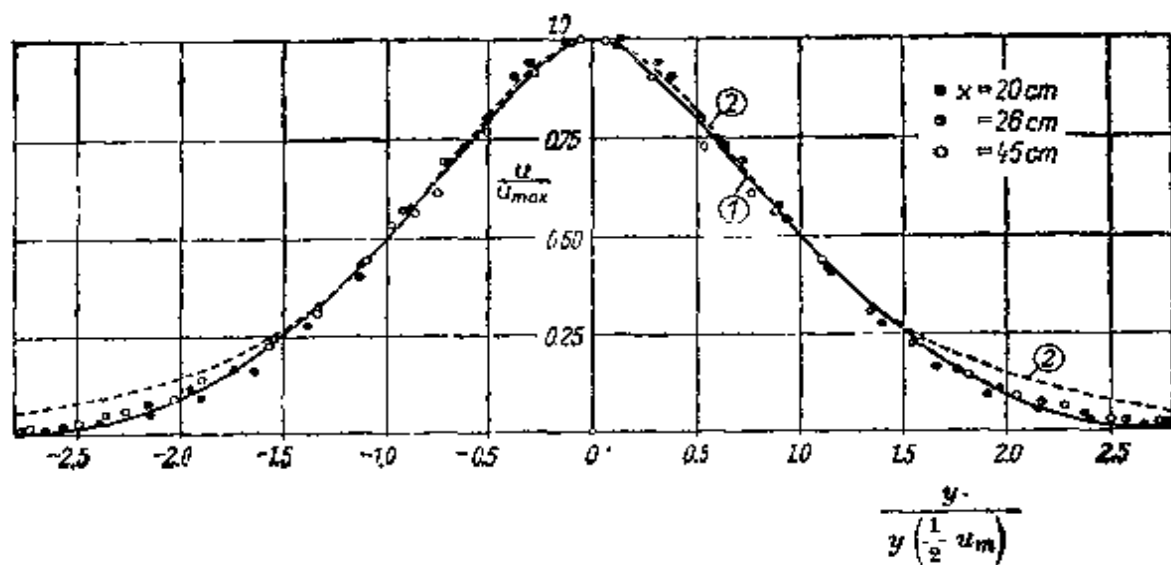


图 24.8 二维湍流射流的速度分布. 实验结果取自 Foerthmann^[11]. 理论曲线: 曲线(1)取自 Tollmien^[52]; 曲线(2)由式(24.45)给出

其中 $b_{1/2}$ 仍表示速度剖面凹陷深度一半处射流的半宽度。

S. Yamaguchi^[60] 研究了这个问题的推广, 即研究了二维射流与同方向外流之间所进行的湍流混合。这方面也可参阅 S. Mohammadian^[26a] 和 H. Pfeil 等人^[26a] 的工作。

6. 圆形射流 W. Zimm^[61], P. Ruden^[33], H. Reichardt^[29] 以及 W. Wuest^[59] 都给出了圆形射流的实验结果。在 Goettingen 空气动力学研究所出版的报告集中也有一些圆形射流的测量结果。

W. Tollmien^[53] 基于对 Prandtl 混合长度理论的研究, 给出了圆形射流最早的理论处理。在这种情形下, 象前面的问题一样, 式(24.5)给出的切应力假设使计算大为简化。根据表 24.1, 射流宽度正比于 x , 而其中心线上的速度 $U \sim x^{-1}$ 。因此, 有效运动粘性系数为

$$\epsilon_r = \kappa_1 b U \sim x^0 \Rightarrow \text{常数} = \epsilon_0,$$

即 ϵ_r 在整个射流区域内保持不变, 就像二维尾迹中的情形一样。因此, 关于速度分布的微分方程在形式上也和二维层流射流的相同, 只不过是将层流的运动粘性系数 ν 换成湍流的有效运动粘性系数 ϵ_0 而已。所以可以直接利用层流圆形射流的解, 即式(11.15)至式(11.17)。再次引进恒定的动量作为射流强度的度量¹⁾, 我们得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3}{8\pi} \frac{K}{\epsilon_0 x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \eta^2\right)^2}, \\ v &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4} \eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4} \eta^2\right)^2}, \\ \eta &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\epsilon_0} \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} (24.46)$$

现在, 经验常数等于 \sqrt{K}/ϵ_0 。根据 H. Reichardt 所完成的测量,

1) 这里有 $K = 2\pi \int_0^\infty u^2 y dy$ 。

给出射流宽度为 $b_{1/2} = 0.0848x$ 。由于 $u = \frac{1}{2} u_m$ 时 $\eta = 1.286$,

因此有 $b_{1/2} = 5.27 x \varepsilon_0 / \sqrt{K}$, 所以

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{K}} = 0.0161.$$

另一方面, 由于

$$\sqrt{K} = 1.59 b_{1/2} U,$$

所以

$$\varepsilon_0 = 0.0256 b_{1/2} U,$$

和以前一样, 其中 $b_{1/2}$ 表示射流速度剖面凹陷深度一半处的射流半宽度。

图24.9中图线包含着测量的速度分布点和式(24.46)给出的理论结果之间的比较, 理论结果为曲线(2)。画出曲线(1)是为了进一步与 W. Tollmien^[22] 的理论作比较。在这里, 混合长度理论也使得速度分布在其最大值附近稍微尖些, 而式(24.46)在整个宽度范围内都吻合得非常好。图 24.10 中画出了流线的形状。可以看

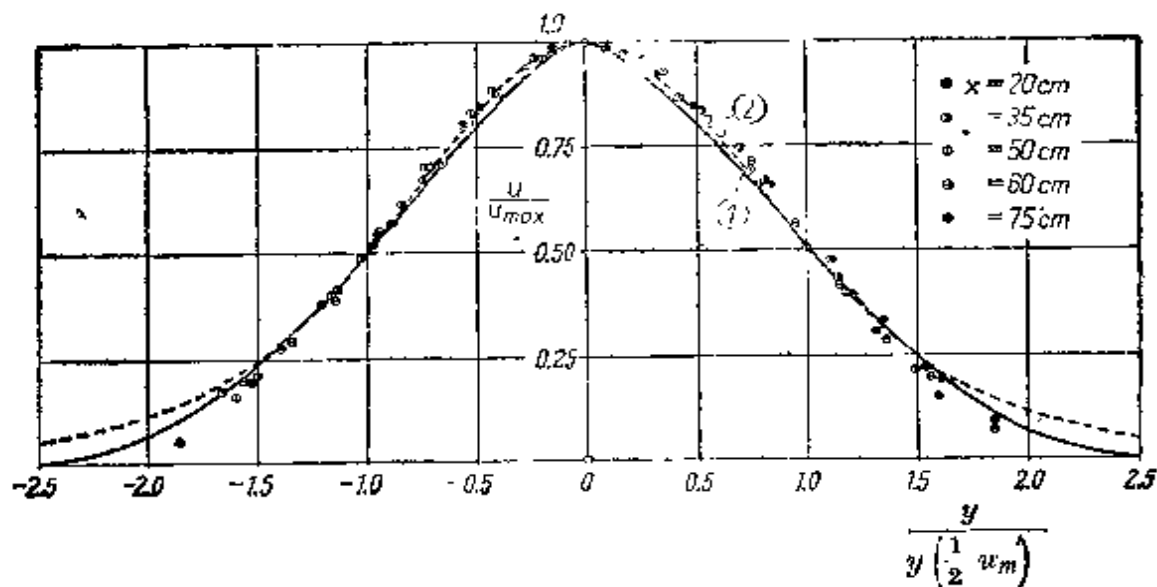


图24.9 圆形湍流射流的速度分布, 实验数据取自 Reichardt^[22] 理论, 曲线(1)为 Tollmien 的结果; 曲线(2)为式(24.46)的结果

出, 射流在边界处不断地吸入周围静止的流体, 所以射流所带走的

流体质量沿下游不断增加。在离出口 x 处带走的流体的体积流量可以从式(11.18)算出。将上面的 ε_0 值代入,我们得

$$Q = 0.404 \sqrt{Kx}. \quad (24.47)$$

在 L. Prandtl 以及 G. I. Taylor 关于湍流混合假设的基础上, L. Howarth^[21] 也对二维和圆形射流的速度分布和温度分布作了计算。关于从圆形喷嘴喷出的射流与大口径管道中流体混合的机制, K. Viktorin^[55] 从实验上作了研究, 该实验覆盖了管流速度与射流速度比值从 0 到 4 的范围。同自由射流与周围流体混合的情形对照起来, 可以发现, 沿流动方向的压力增加有点象在截面积突然增加的位置上所出现的现象, 有时称为 Carnot 损失。基于 Prandtl 混合长度假设的理论计算表明, 速度分布的特性像圆形尾迹中的一样(宽度 $\sim x^{-1/3}$, 中心线上速度 $\sim x^{-2/3}$)。

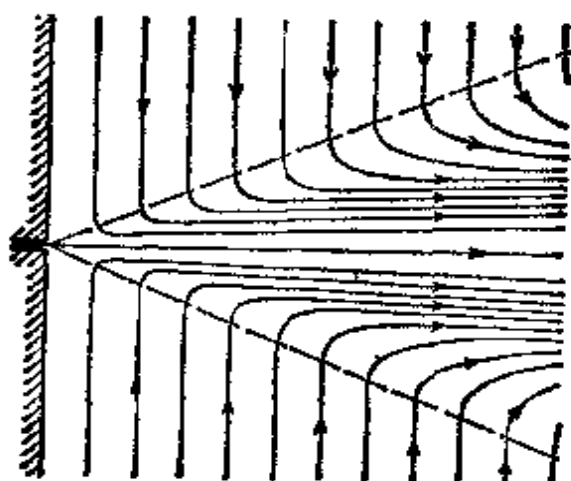


图 24.10 圆形湍流自由射流的流线形状

当有限宽度的射流进入均匀流时, 该均匀速度分布在喷嘴附近就转变成上述形状。A. M. Kuethe^[24] 以及 H. B. Squire 和 J. Trouncer^[36] 研究了这种情形, 湍流射流进入速度为 U_∞ 的平行流中, 它与单个物体后面尾迹的基本差别只是式(24.31)中 u_1 的符号是相反的, 即在射流中 $u > U_\infty$, 而在尾迹中 $u < U_\infty$ 。特别是在远离出口处, 我们有 $|u_1| \ll U_\infty$, 可以得出描述射流扩展的规律与表 24.1 中给出的二维或轴对称尾迹的情形相同。在这里,

H. Reichardt^[32] 基于实验发现总压的分布, 即超出动量的分布

$$\rho u_c^2 = \rho(u^2 - U_\infty^2),$$

除了在出口附近之外, 在整个射流宽度上近似地呈 Gauss 分布。于是可以将其表示成下述公式

$$\frac{u^2 - U_\infty^2}{u_m^2 - U_\infty^2} = \exp\{-(\ln 2)(y/b)^2\}.$$

宽度 b 的尺度是这样选取的, 以满足条件

$$\text{当 } y = b \text{ 时, } \frac{u^2 - U^2}{u_m^2 - U^2} = \frac{1}{2}.$$

J. F. Keffer 和 W. D. Baines 的文章[22]处理了湍流射流在受到与其垂直的外流影响下的情形。R. Wille 的文章[58]总结了自由射流的实验研究。

浮力射流: 对于排入无限的不同密度的环境大气中的动量射流和受迫羽流, 无论环境大气的密度是均匀的还是分层的, 其理论估算都依赖于浮力。虽然通常都保留了利用边界层假设的基本理论, 但是浮力对射流的扩散机制却有着极重要的影响。解决的途径是应用积分形式的质量、动量和能量的守恒定律, 再加上一个所谓的卷吸假设, 这样, 所得到的微分方程组就完备了。关于这个问题的文献非常之多^[1b, 20a, 24b]。然而, 有实验表明, 通常的边界层假设在浮力射流和卷流中可以放宽, 至少在远离喷口处是这样。在这方面, 还可以提到 W. Schneider 的文章 [36a]。

7. 二维沿壁面的射流: 若一个侧向宽度很大的流体射流从窄缝喷出, 其一边沿着壁面流动, 另一边与一大片静止流体混合时, 就形成了二维沿壁面的射流。因此, 其速度分布在壁面附近具有边界层的性质, 而在离开壁面较远处, 则具有自由射流的性质, 见图 24.11。在大多数的实际情形中, 流动是湍流的。1934 年, E. Foerthmann^[31] 对这种射流结构进行了最早的实验研究。后来, A. Sigalla^[37] 和 P. Barke^[3] 也进行了测量。E. Foerthmann 发现, 不计在窄缝附近的下游区域, 则速度剖面是自相似的, 可以写成式

$$u \sim x^{-1/2} f(y/x). \quad (24.48)$$

这就说明速度最大值的减小正比于 $x^{-1/2}$ ，速度剖面的宽度增长正比于 x ，其中 x 表示虚拟的离窄缝的距离。

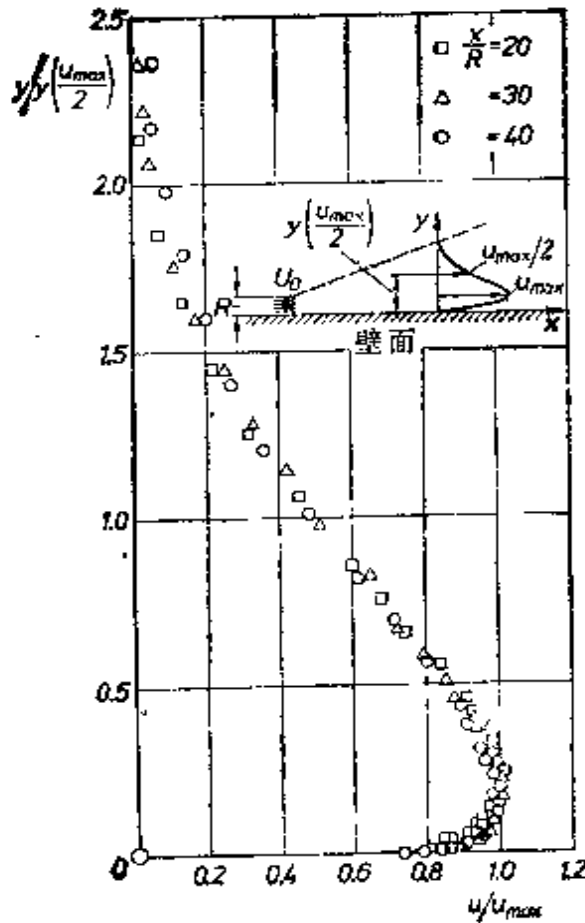


图 24.11 二维沿壁面射流的速度分布，实验结果取自 N. V. C. Swamy 等人的文章[44]，式(24.48)的相似律满足得很好。

计算了切应力分布后，E. Foerthmann 发现混合长度遵循的规律为

$$l = 0.068b, \quad (24.49)$$

其中 b 是沿壁面射流的宽度。

A. Sigalla^[37] 进行的测量证实了上述结论。实验定出局部切应力为

$$\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = 0.0565 \left(\frac{u_m \delta_1}{\nu} \right)^{-1/4}, \quad (24.48a)$$

其中 u_m 是沿壁面射流的最大速度， δ_1 是离开壁面的相应的距

离。

M. B. Glauert^[16] 最早试图用理论来描述沿壁面射流的情形。E. A. Eichelbrenner 等人^[13]大大地改进了前者的工作，半经验的理论首次在预测沿壁面射流的分离中获得成功。随后，J. S. Gartshore 和 B. G. Newman^[14] 在非常广泛的测量基础上建立了积分-动量方法。实验中包括带引射的沿壁面的射流，计算可以定出防止沿壁面射流分离的动量系数数值。读者还可以在 P. Bradshaw 和 M. T. Gee^[4] 以及 V. Kruka 和 S. Eskinazi^[23] 等人的文章中找到进一步的实验结果。F. Thomas 的报导^[51]叙述了一边以壁面为界而另一边有外流的二维湍流射流混合的实验。

沿很凸的曲壁的射流表现出著名的 **Coanda 效应**，即射流沿流动方向附着在很大一段的壁面上。J. Gersten^[15] 在理论上和实验上对平面射流绕圆柱体周线的流动所建立的图象进行了研究。F. A. Dvorak^[16] 计算了高度凸起的曲壁上的湍流边界层，特别注意了流过曲壁的沿壁面的射流。沿壁面的射流用于实施边界层控制和薄膜冷却中。这方面也可参阅 B. G. Newman^[25a]，A. Metral^[24c, 24d] 和 D. W. Young^[60a] 等人的工作。

对于两个侧向尺度比有限的**三维沿壁面的射流**，最近已由 P. M. Sforza 和 G. Herbst^[42]，B. G. Newman 等^[25]，N. V. C. Swamy 和 B. L. Gowda^[43] 以及 N. V. C. Swamy 和 P. Bandyopadhyay^[44] 给出了实验研究。这些实验显示出射流沿展向迅速扩展，存在一个与垂直于壁面方向上射流宽度的增长极不相同的虚拟原点。

d. 自由湍流中的温度扩散

湍流混合过程引起流体特性沿垂直于主流方向的输运。混合运动一方面使**动量**从主流中流出，另一方面使流体中的悬浮颗粒（飘浮的尘埃颗粒，化学添加剂）流向主流，而且还有传热，即温度场的扩散。对湍流中某个特性的输运强度，通常用一个相应的系数

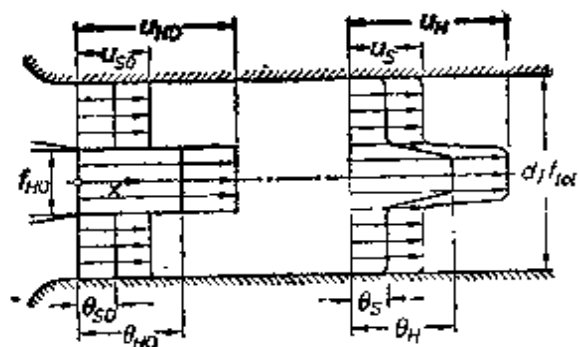
来描写。记动量的输运系数为 A_r ，传热输运系数为 A_q ，可以将它们定义为

$$\tau = A_r \frac{du}{dy} ; \quad q = c_p A_q \frac{dT}{dy},$$

(见第二十三章 a)，其中 u 和 $c_p T$ 分别表示单位质量的动量和单位质量的热量， τ 和 q 分别表示动量通量和热量通量(=单位时间流过单位面积的热量)。在这里， u 和 T 都是对时间的平均值。由于动量输运和传热的机制不同，所以一般说来， A_r 和 A_q 的值也不同。但是，根据 Prandtl 混合长度理论，自由湍流中的动量输运机制和传热机制相同，也就是说将 A_r 和 A_q 假设成是彼此相等的。A. Faga 和 W. M. Falkner^[50] 对一排加热杆后尾迹的测量表明：温度剖面比速度剖面更宽，作为近似，我们可以假设 $A_q = 2A_r$ 。这个结论和第十九章 c 讨论过的 G. I. Taylor 的理论相一致，根据该理论，湍流混合运动引起的是涡量交换，而不是动量的交换。对于自由湍流中温度的扩散问题，H. Reichardt^[50] 也作了理论上和实验上的探讨。该理论工作与上节讨论的内容密切相关。首先用与以前对于速度(动量)分布相同的做法，从实验结果导出速度分布的经验关系式，避免了对湍流作假设。基于这种讨论(这里不再重复)，Reichardt 成功地导出了温度分布和速度分布之间的一个重要关系，给出

$$\frac{T}{T_{\max}} = \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^{A_r/A_q}. \quad (24.50)$$

其中下标 max 指最大值， u 和 T 的尺度必须选得使 $u = 0$ 和 $T = 0$ 的点重合。Reichardt 对二维射流(图24.13)和对二维尾迹的实验结果表明，它们与公式 $T/T_{\max} = (u/u_{\max})^{1/2}$ 吻合得很好，这个公式隐含着 $A_q/A_r = 2$ ，正好与 G. I. Taylor 的理论^[50] 吻合。S. Corrsin 和 M. S. Uberoi^[8] 以及 J. O. Hinze 和 B. G. van der Hegge Zijnen^[20] 已对一个加热的圆形湍流射流测量出温度分布。在已引用过的论文[19]中，R. Gran Olsson 也测量了平面排杆后的温度分布。



实验	U^*	F^*	Θ^*
●	1.36	0.40	1.12
○	2.34	0.40	1.09
○	3.65	0.40	1.10
▲	1.19	0.63	1.08
△	2.01	0.63	1.20

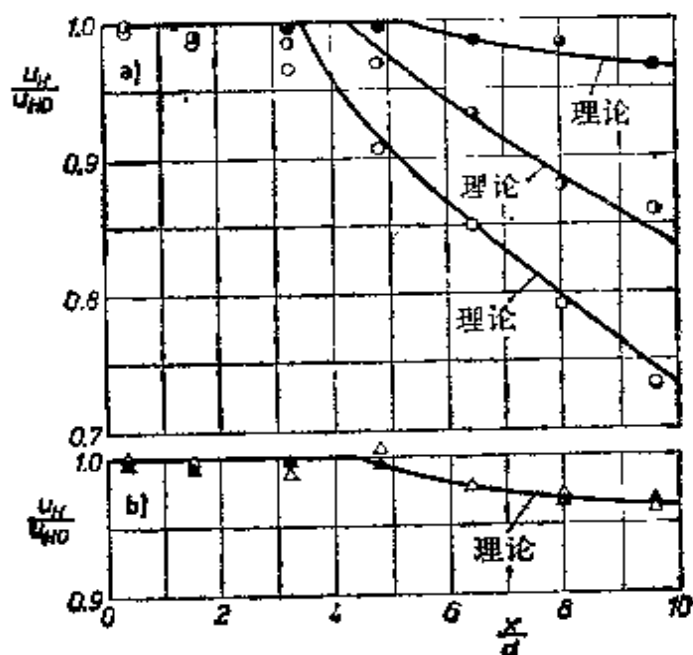


图24.12 管道中速度、温度不同的两共轴湍流射流的混合,取自 S. R. Ahmed^[12]. 沿管轴的速度变化。(a) 温度比 Θ^* 不变时各种速度比 $U^* = u_{H0}/u_{s0}$ 的情形;(b) 速度不变时各种温度比 $\Theta^* = \Theta_{H0}/\Theta_{s0}$ 的情形. $F^* = f_{H0}/f_{s0}$ 表示内射流与整个射流的面积比.

以不同速度和不同温度喷入管道的共轴湍流射流的混合. 关于以不同速度和不同温度喷入管道的共轴湍流射流的混合, S. R. Ahmed^[12] 已在不可压缩的情形下从理论上和实验上进行了研究(图24.12). 在上述实验中, 内射流的温度和速度稍大于外射流的温度和速度. 控制这种混合过程最重要的参数为两股射流的速度比 $U^* = u_{H0}/u_{s0}$, 其中 u_{H0} 和 u_{s0} 分别表示内、外射流在注入截面上的速度. 动量和温度的平衡取决于这个参数.

图 24.12 (a) 中的曲线代表 u_H/u_{H0} 沿管轴的变化, 这是 S. R. Ahmed^[12] 用速度比 u_{H0}/u_{s0} 从理论上确定的. 图24.12(b) 的

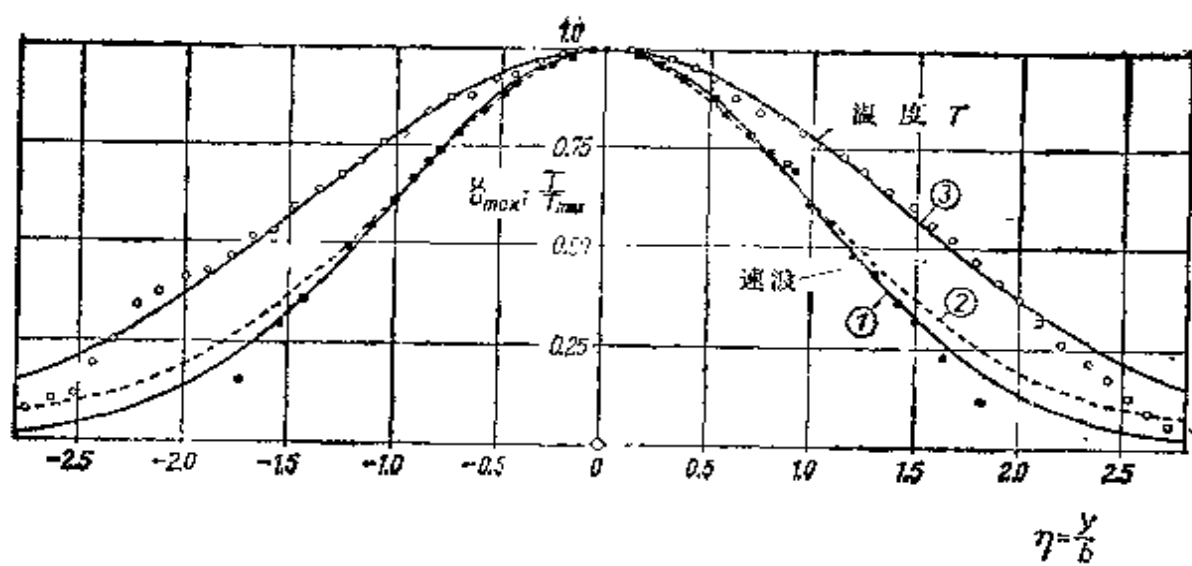


图24.13 二维射流中的温度分布和速度分布。实验结果取自 Reichardt^[359]

曲线 (1): $u/u_{\max} = \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right)$

曲线 (2): $u/u_{\max} = 1 - \tanh^2\eta$, 式(24.45)

曲线 (3): $T/T_{\max} = \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right) = (u/u_{\max})^{1/2}$, 式(24.50)

曲线是用温度比 $\Theta^* = \Theta_{Ho}/\Theta_{So}$ 画出的同一比值。为了比较，两个曲线图上都标有实验点。这里的 Θ_{Ho} 和 Θ_{So} 分别表示内、外射流在管道注入口的温度。理论和测量符合得很好。在整个测量范围内，温度比 Θ^* 对混合过程的影响是无足轻重的。

W. Schmidt^[36] 研究了自然对流，即由热浮力所引起的流动中的温度扩散。他考虑了如下两种情形：1. 放在水平底板上的线热源上方的二维流动；2. 点热源上方的轴对称流。在这两种情形下，速度和温度剖面宽度的增加均与离开底板的高度 x 成正比，在二维的情形下，速度沿高度方向不变，而温度的减小与 x^{-1} 成正比。在轴对称的情形下，速度正比于 $x^{-1/3}$ ，而温度正比于 $x^{-5/2}$ 。二维情形在理论上用 Prandtl 的混合长度理论（动量输运）以及 G. I. Taylor 的涡量输运理论处理过。轴对称情形则只用 Prandtl 的理论研究过，因为 G. I. Taylor 的理论在这里不适用。对轴对称情形所作的测量证实了这些理论计算。K. Wieghardt^[56] 对放在平板边界层中的点热源和线热源后的温度扩散进行了实验研

究。在点热源的情形下，发现沿侧向的热扩散远大于沿壁面法向的热扩散。该文章中有可以把实验结果转换到相似情形中去的公式。在这方面也可参考 B. Frost 的文章^[12]。D. W. Schmidt 和 W. J. Wagner^[13] 已测量了湍流尾迹中的温度脉动。

第二十五章 翼型阻力的确定

a. 概 况

运动流体对物体的总阻力由两部分组成：**表面摩擦力**（等于所有切应力沿物体表面的积分）和**型阻或压差阻力**（由法向力的合力产生），两者之和称为**总阻力或翼型阻力**。用前面几章的方法，能够以某种精度计算出表面摩擦力。型阻在无摩擦的亚声速流中并不存在，它是由于边界层的出现，从而改变了原来由理想流体给出的压力分布所引起的，但是，它的计算非常困难。所以，一般说来，总阻力的可靠数据必须由实验来测定。不过，近来已建立起对翼型阻力的估算方法。我们将在本章 d 中对这些方法作简要的讨论。

在许多情形下，由天平测定的总阻力缺乏足够的精度，例如在风洞中进行测量时，因为悬吊线的阻力比起要测量的力来太大。而在某些情形下，例如在自由飞行实验中，甚至要直接测量总阻力是不可能的。在这种情况下，第九章中描述过的方法，即从尾迹中的速度分布来确定型阻的方法（用梳状 Pitot 管的方法）是非常有用的，而且，这种方法往往是进行这类测量的唯一实用的方法。从原则上来说，这种方法只能用于二维和轴对称的情形。这里，我们只限于讨论二维情形。

第九章中导出的、用尾迹中速度分布确定阻力大小的公式 (9.27)，只在离开物体相当远的地方才成立。按照该公式，物体上总阻力¹⁾的表达式为：

$$D = b\rho \int_{y=-\infty}^{+\infty} u(U_{\infty} - u)dy. \quad (25.1)$$

这里的 b 表示柱体的长度， U_{∞} 是来流速度，而 $u(y)$ 表示尾迹中

1) 在第九章中，物体总阻力记作 $2D$ （考虑到平板的两侧），本章则记作 D 。

的速度分布。积分应该在离开物体足够远的地方进行，使得测量截面上的静压已等于未扰动来流的静压。在实际情形中，无论是在风洞中测量还是在自由飞行中测量，都需要在更为靠近物体的地方进行。因此，计及压力项的影响是必要的，对公式(25.1)必须修正。当测量在接近物体处进行时(例如在机翼的情形下，离开物体的距离小于弦长)，压力修正项具有相当大的数值，所以，得出该项比较精确的表达式是很重要的。A. Betz^[4] 第一个计算了该修正项，后来，B. M. Jones^[26] 对此也作了计算。目前，大多数测量结果是用 Jones 公式来计算的，因为这个公式比较简单。然而，我们也要讨论 Betz 公式，因为它的推导显示出某些非常重要的特性。

b. Betz 的实验方法

根据图 25.1，选取如图所示的包围物体的控制面。在物体前的入口截面 I 处，流动没有损失，其总压为 g_{∞} 。在物体后的截面 II 处，总压 $g_2 < g_{\infty}$ 。设想控制面的其余部分离开物体足够远，这部分控制面上的流动是未受扰动的。为了满足连续条件，截面 II 上的速度 u_2 一定在某些地方大于未受扰动的速度 U_{∞} 。对该控制面应用动量定理，给出长为 l 的柱体上的阻力表达式如下：

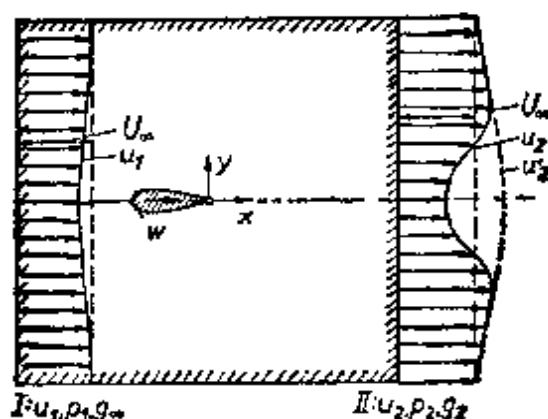


图 25.1 用 Betz^[4] 方法确定型阻

$$D = b \left\{ \int_{y=-\infty}^{+\infty} (p_1 + \rho u_1^2) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} (p_2 + \rho u_2^2) dy \right\}. \quad (25.2)$$

为了使这个公式适合于对实验结果进行计算, 需要将上述积分作变换, 变换成只需计算测量截面上的速度曲线, 即截面 II 上的速度亏损曲线。由于总压满足下述条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{在无穷远处: } g_{\infty} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2; \\ \text{在截面 I 上: } g_{\infty} = p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2; \\ \text{在截面 II 上: } g_2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2. \end{array} \right\} \quad (25.3)$$

因此, 公式(25.2)变成

$$D = b \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (g_{\infty} - g_2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1^2 - u_2^2) dy \right\}. \quad (25.4)$$

上式第一个积分已符合要求, 因为总压在亏损区以外处处等于 g_{∞} 。为了将上式第二个积分也变换成具有同样的性质, 我们在截面 II 上引入假想的流动 $u_2'(y)$, 在速度亏损区以外, u_2' 处处等于 u_2 , 而在速度亏损区内, u_2' 与 u_2 不同, 使得 u_2' 对应的总压等于 g_{∞} 。因此

$$g_{\infty} = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2'^2. \quad (25.5)$$

因为真实的流动 u_1, u_2 满足连续方程, 而假想的流动 u_1, u_2' 通过截面 II 的质量流量太大。实质上, 这等于在物体上安放一个源, 源的强度为

$$Q = b \int (u_2' - u_2) dy. \quad (25.6)$$

在速度为 U_{∞} 的无摩擦的平行流中, 源所受的推力

$$R = -\rho U_{\infty} Q. \quad (25.7)$$

现在将动量定理(25.4)用于假想的流动, 即假设流动在截面 I 上的速度为 u_1 , 在截面 II 上的速度为 u_2' 。因为 $g_2' = g_{\infty}$, 又因为合力等于式(25.7)中的 R , 所以得

$$-\rho U_{\infty} Q = b \frac{1}{2} \rho \int (u_1^2 - u_2^2) dy.$$

从式(25.4)减去上式,我们有

$$D + \rho U_{\infty} Q = b \left\{ (g_{\infty} - g_2) dy + \frac{1}{2} \rho \int (u_1^2 - u_2^2) dy \right\}. \quad (25.8)$$

鉴于式(25.6),现在有

$$D = b \left\{ (g_{\infty} - g_2) dy + \frac{1}{2} \rho \int (u_1^2 - u_2^2) dy - \rho U_{\infty} \int (u_1 - u_2) dy \right\}.$$

因为在尾迹以外 $u_1 = u_2$, 所以只需在尾迹中计算上式中的各个积分. 由于 $u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2)$, 可将上式变成

$$D = b \left\{ (g_{\infty} - g_2) dy + \frac{1}{2} \rho \int (u_1 - u_2)(u_1 + u_2 - 2U_{\infty}) dy \right\}. \quad (25.9)$$

为了定出阻力 D , 必须测量出物体后整个截面 Π 上的总压 g_2 和静压 p_2 . 因为在亏损区外 g_{∞} 就等于 g_2 , 因此, 我们也就得到了 g_{∞} . 而假想的速度 u_1 由式(25.5)定义, 所以通过式(25.5), 我们能够计算出 u_1 .

如果测量位置上的静压全都等于未扰动来流中的静压, 即当 $p_2 = p_{\infty}$ 时, 我们可以得出 $u_1 = U_{\infty}$, 同时式(25.9)变回到式(25.1).

将无量纲的阻力系数定义为

$$D = c_D b l q_{\infty}, \quad (25.9a)$$

其中 $q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2$ 表示来流的动压, $b \times l$ 是参考面积, 可以将式

(25.9)改写成

$$c_D = \int \frac{g_{\infty} - g_2}{q_{\infty}} d\left(\frac{y}{l}\right) + \int \left(\sqrt{\frac{g_{\infty} - p_2}{q_{\infty}}} \right)$$

$$- \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \left(\sqrt{\frac{g_\infty - p_2}{q_\infty}} + \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} - 2 \right) d \left(\frac{y}{l} \right). \quad (25.10)$$

这是对实验结果进行计算最方便的形式。

c. Jones 的实验方法

稍后, B. M. Jones^[79] 指出了一个类似的方法来确定型阻。Jones 的计算公式要比 A. Betz 的计算公式更简单一些。

进行测量的截面 II 位于物体后的不远处, 所以, 测量的静压仍旧和未扰动来流的静压有很大的差别。截面 I 位于物体后很远处, 使得 $p_1 = p_\infty$ 。将式(25.1)用在截面 I 上, 我们得到

$$D = b\rho \int u_1(U_\infty - u_1)dy_1. \quad (25.11)$$

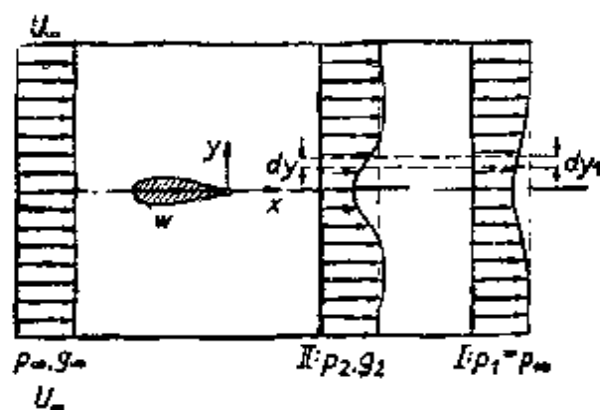


图25.2 用 B. M. Jones 方法确定型阻

为了只用截面 II 上的测量结果来确定 u_1 , 我们首先应用沿流管的连续方程

$$\rho u_1 dy_1 = \rho u_2 dy_2. \quad (25.12)$$

因此

$$D = b\rho \int u_2(U_\infty - u_1)dy. \quad (25.13)$$

其次, 按照 B. M. Jones^[26] 的做法, 假设流动从截面 II 到截面 I 的过程中没有损失, 即总压沿截面 I 和截面 II 之间的每条流线均保持不变:

$$g_2 = g_1. \quad (25.14)$$

引入总压

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 = g_{\infty};$$

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = g_1 = g_2;$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 = g_2,$$

则从式(25.13)看出

$$D = 2b \int \sqrt{g_2 - p_2} \left(\sqrt{g_{\infty} - p_{\infty}} - \sqrt{g_2 - p_{\infty}} \right) dy, \quad (25.15)$$

其中积分积过整个截面 II。既然是这样，则和前面的积分一样，被积函数只有在通过速度剖面受到扰动的部分才不为零。象式(25.9a)一样，引入无量纲的阻力系数，并考虑到 $g_{\infty} - p_{\infty} = q_{\infty}$ ，则得

$$c_D = 2 \int \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_{\infty}}} \left(1 - \sqrt{\frac{g_2 - p_{\infty}}{q_{\infty}}} \right) d\left(\frac{y}{l}\right), \quad (25.16)$$

当测量位置上的静压等于未受扰动的静压时 ($p_2 = p_{\infty}$)，Jones 的上述公式同样地回复到简单的式(25.1)。

A. D. Young^[75] 指出一个变换，可以简化 Jones 公式(25.16)中积分的计算。在最后的公式中，除去对整个速度剖面亏损区积分总压损失之外，还有一个附加的修正项。修正项取决于测量位置上速度剖面的形状，但是它可以一劳永逸地计算出来。G. I. Taylor^[67] 对这个方法作了重要的评价。

在飞行测量和风洞测量中^[6,12,16,29,38,39,61,62,68,70]，常常用上述两种实验方法来确定翼型的阻力，并得出十分满意的结果。H. Doetsch^[6] 证明，当翼型后的测量位置与翼型本身之间的距离小于百分之五的弦长时，Betz 公式和 Jones 公式都可采用。在这种情形下，Betz 公式中的修正项约为首项的百分之三十。当要确定

表面粗糙度对翼型阻力的影响，以及确定层流机翼上很小的阻力时，这两种方法特别适用。

A. D. Young^[71] 将 Jones 方法的适用范围扩展到可压缩流动。重复上述的推导步骤，我们应用可压缩流动的连续方程。因为

$$\rho_1 u_1 dy_1 = \rho_2 u_2 dy_2 \quad (25.17)$$

由此导出下述的阻力公式

$$D = b \int_{-y_m}^{+y_m} \rho_2 u_2 (U_\infty - u_2) dy_2 \quad (25.18)$$

这里也需要用截面 II 上所测量的量来表示 u_2 。在可压缩流动的情况下，沿流线从截面 II 到截面 I 时，有必要用等熵假设来取代 Jones 假设（即 $g_1 = g_2$ ）。于是有等熵关系

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \quad (25.19)$$

现在，如果用 g 来表示可压缩流动中用 Pitot 管测得的驻点压力，则得

$$g = p_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \frac{\rho}{2} w^2 + p \right) \quad (25.20)$$

同时可以证明，式(25.19)同样导出 $g_1 = g_2$ 的假设。速度 u_1 可以从可压缩的 Bernoulli 方程来确定，即

$$u_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{g_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (25.21)$$

为了解决这个问题，在原则上只需用平面 II 上测得的压力 g_2 和 p_2 来表示速度 u_2 。所以在平面 II 上测出总压和静压就足以定出物体的阻力。但是，可压缩 Bernoulli 方程中速度和压力之间复杂的关系，给出非常繁复的公式。由于这个缘故，A. D. Young 将速度 u_1 和 u_2 展开成级数形式

$$u^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g - p}{p} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} \left(\frac{g - p}{p} \right)^2 + \dots \right] \quad (25.22)$$

用这种方法，我们可以分离出不可压缩情形下 Jones 公式(25.15)中的项，而其余的项可以排列成 Mach 数的幂级数。于是

$$c_D = c_{D,i} + A_1 M_\infty^2 + A_2 M_\infty^4 + \dots \quad (25.23)$$

其中 $c_{D,i}$ 表示不可压缩情形的阻力系数，如式(25.16)给出的，而系数 A_1, A_2, \dots 代表某些积分，可以由截面 II 上的测量数据来计算。我们只考虑低 Mach 数的情形，所以只取展开式(25.23)中的前两项，则得

$$c_D = 2 \int_{y=-y_m}^{+y_m} \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \left(1 - \frac{g_2 - p_2}{q_\infty} \right) \left\{ 1 + \frac{M_\infty^2}{8} \left[3 \frac{p_2 - p_\infty}{q_\infty} + 3 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\gamma - 2 \frac{g_2 - p_2}{q_\infty} - (2\gamma - 1) \sqrt{\frac{g_2 - p_2}{q_\infty}} \right] \right\} d\left(\frac{y}{l}\right) \quad (25.24)$$

其中

$$q_\infty = g_\infty - p_\infty$$

依赖于 Mach 数的附加项，对阻力系数的贡献是负的。如果对尾迹中速度剖面亏损的形状作合适的假设，就可以一劳永逸地计算出这一附加项。A. D. Young 也做了这方面的工作。

d. 翼型阻力的计算

J. Pretsch^[40] 以及 H. B. Squire 和 A. D. Young^[64] 基于和上述实验方法相同的原理，已作出可以用于计算翼型阻力的一些方法。这些方法都利用了第二十二章中描述的边界层计算。但是，为了能够计算压差阻力，针对每种情况，还须采用一定的附加的经验关系式。这方面也可参阅 H. Goertler 的文章[19]。

现在来简要地叙述 H. B. Squire 和 A. D. Young 的计算方法，这个方法吸取了某些新得到的结果。我们从对式(25.1)进行变换出发，该式把物体的阻力和物体后尾迹中的速度剖面联系起来。根据式(8.31)引进动量厚度 $\delta_{2\infty}$ ，根据式(25.9a)引进阻力系数，我们就可以将式(25.1)改写成

$$c_D = 2 \frac{\delta_{2\infty}}{l}. \quad (25.25)$$

这里

$$\delta_{2\infty} = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

表示远离物体处尾迹的动量厚度。另一方面，第二十二章所叙述的方法使我们可以计算出物体后缘的动量厚度，将其记作 δ_{21} 。Squire 方法的实质在于将 $\delta_{2\infty}$ 和 δ_{21} 这两个量联系起来，用这种方法，在从边界层计算求得物体后缘的动量厚度以后，就可以根据公式(25.25)算出阻力。

边界层理论中的动量积分方程(22.7a)，在物体后的尾迹中也是成立的，唯一的不同在于切应力一定为零，因此得

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H + 2)\delta_2 \frac{U'}{U} = 0, \quad (25.26)$$

其中 $H = \delta_1/\delta_2$ ， $U' = dU/dx$ 。符号 x 现在表示离开物体后缘

1) 为了简单起见，现在将形状因子 δ_1/δ_2 记作 H ，不再象以前那样记作 H_{12} 。

沿尾迹中心线测量的距离。上述方程也可以写成下述形式

$$\frac{1}{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} = -(H+2) \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{U}{U_\infty} \right).$$

对 x 积分, 从物体后缘(下标为1)积到足够远的下游, 以便在该处有 $U = U_\infty$ 和 $p = p_\infty$, 我们得到

$$\begin{aligned} [\ln \delta_2]_{x_1}^{\infty} = & - \left[(H+2) \ln \frac{U}{U_\infty} \right]_{x_1}^{\infty} \\ & + \int_{x_1}^{\infty} \ln \frac{U}{U_\infty} \frac{dH}{dx} dx. \end{aligned}$$

在物体后很远处, 有 $H = 1$, 所以

$$\ln \frac{\delta_{21}}{\delta_{2\infty}} + (H_1 + 2) \ln \frac{U_1}{U_\infty} = \int_{H=1}^{H=H_1} \ln \frac{U}{U_\infty} dH.$$

这里 $H_1 = \delta_{11}/\delta_{21}$ 表示物体后缘形状因子 $H = \delta_1/\delta_2$ 的值, 它可以通过边界层的计算求出。如果 U_1/U_∞ 以及右边的积分值知道, 则这一等式给出了所要求的 $\delta_{2\infty}$ 和 δ_{21} 之间的关系。首先我们求得

$$\delta_{2\infty} = \delta_{21} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{H_1+2} \exp \left(\int_1^{H_1} \ln \frac{U_\infty}{U} dH \right). \quad (25.27)$$

为了能够计算出上述积分, 有必要知道由尾迹中静压求出的 U 和由尾迹中速度分布求出的形状因子 H 之间的关系。 $\ln(U_\infty/U)$ 的数值沿尾迹单调下降, 在物体后缘处的值为 $\ln(U_\infty/U_1)$, 一直减小到远处为零。同时, H 在物体后缘处的值为 H_1 , 一直减小到远处为1。H. B. Squie 建立了一个 $\ln(U_\infty/U)$ 和 H 之间的经验关系。根据实验

$$\frac{\ln(U_\infty/U)}{H-1} = \frac{\ln(U_\infty/U_1)}{H_1-1} = \text{常数},$$

所以

$$\int_1^{H_1} \ln \frac{U_\infty}{U} dH = \frac{H_1-1}{2} \ln \frac{U_\infty}{U_1}.$$

将上式代入式(25.27), 得到

$$\delta_{2\infty} = \delta_{2l} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{(H_1+5)/2},$$

或者根据近似值 $H_1 = 1.4$, 得

$$\delta_{2\infty} = \delta_{2l} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3.2}.$$

将这个值代入式(25.25), 我们得到总阻力系数表达式的形式为

$$c_{D_{tot}} = 2 \frac{\delta_{2l}}{l} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3.2}. \quad (25.28)$$

如果从边界层计算已知后缘的动量厚度, 另外还知道后缘的理想位势流速度 U_1 (例如, 可以从后缘静压的测量数据求出), 则由上述公式, 就可以计算出翼型的阻力系数. 按照 H. B. Helmbold^[22] 提出的方法, U_1/U_∞ 的确定也可如下进行: 先根据式(22.17), 采用 $n = 4$, 计算出后缘的动量厚度 δ_{2l}/l , 然后将其代入公式(25.28), 并在所得到的公式中, U_1/U_∞ 自乘+0.2 次方. 因为 U_1/U_∞ 本身与 1 相差不大, 所以这个因子可以近似地取为 1, 同时从公式(25.28)可以求出翼型一侧的阻力系数($R = U_\infty l/\nu$)为

$$c_{D_{tot}} = \frac{0.074}{R^{1/5}} \left\{ \int_{x,l}^1 \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3.5} dx \left(\frac{x}{l} \right) + C \right\}^{0.8}, \quad (25.29)^{1)}$$

其中

$$C = 61.6 R^{1/4} \left(\frac{\delta_{2l}}{l} \right)^{5/4} \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3.75}. \quad (25.30)$$

下标“ l ”指转捩点, 根据转捩点上的层流动量厚度和湍流动量厚度必须彼此相等的条件, 即 $\delta_{2l} = \delta_{2turb} = \delta_{2l,m}$, 可以确定出常数 C 的值. $\delta_{2l,m}$ 的值可以从式(10.37)求出. 对于 $U = U_\infty$ 的均匀位势流动, 公式(25.29)变成与零攻角平板中相应的公式(21.11), 此外, 对于充分发展的湍流, 则令 $C = 0$.

E. Truckenbrodt^[60] 用机翼截面的坐标取代了公式(25.29)中位势流动的速度分布, 显然, 由此获得了很大的简化.

1) L. Speidel^[63] 用为数众多的实际例子检验了这一简单公式的有效性.

H. B. Squire 和 A. D. Young^[64] 用另一种方法计算了许多例子。我们现在来叙述其中的几个例子，参阅图 25.3，图中概括了这些结果。翼型的厚度从 $d/l = 0$ (平板) 变到 $d/l = 0.25$ ，Reynolds 数 $R = U_\infty l / \nu$ 的范围从 10^6 到 10^8 ，可以发现，翼型阻力对(从层流过渡到湍流的)转捩点的位置很敏感。转捩点位置从 $x_t/l = 0$ 变到 $x_t/l = 0.4$ 。翼型阻力随翼型厚度的增加而增加，这一增加基本上是由型阻引起的。图 25.4 给出了型阻和翼型阻力之间的关系。J. Pretsch^[40] 就 Kármán-Trefftz 翼型进行了类似的计算。计算与实验之间的相符程度，明显地取决于所假设的转捩点的位置。可以从第十七章回忆起，转捩点位置主要取决于相应的位势流动的压力梯度。图 17.10 表明，如果 Reynolds 数很大，例如 $R \approx 10^7$ ，那么作为首次近似，可以假设转捩点与最小压力点重合。基于这一假设所得到的计算值显示出与测量值令人满意的一致。

A. D. Young^[72] 将上述方法首先推广到轴对称的情形。N. Scholz^[58] 提出的方法已经大大地发展了，对于二维的和轴对称的两种情形，都可以用于粗糙壁面(等价的砂粒粗糙度)。根据对翼

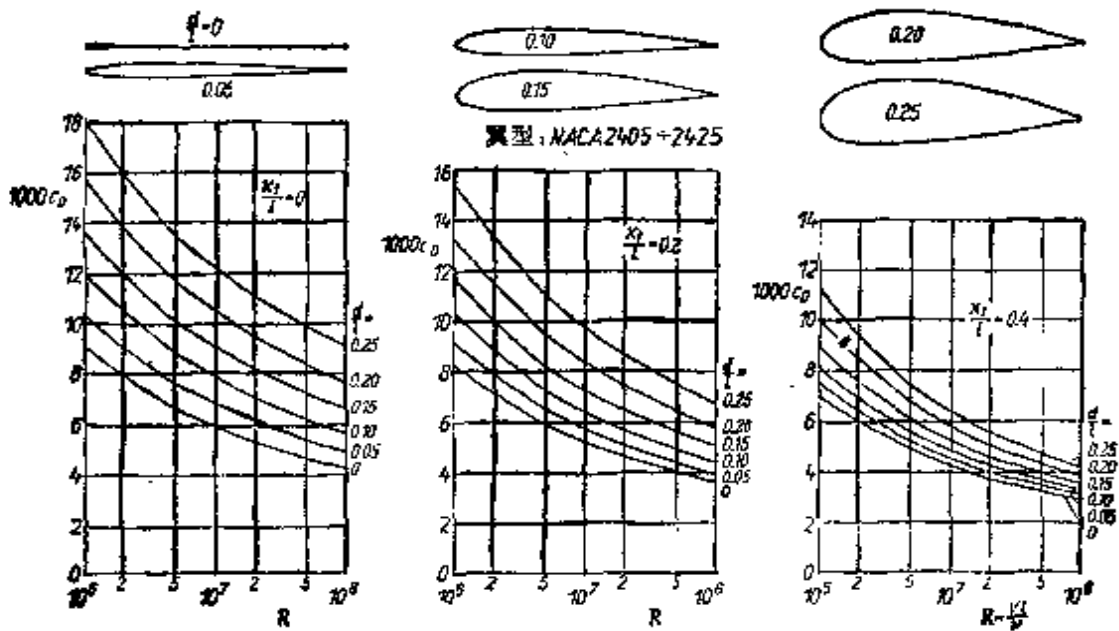


图 25.3 翼型阻力随 Reynolds 数的变化，根据 Squire 和 Young^[64] 的计算 x_t 表示转捩点的位置

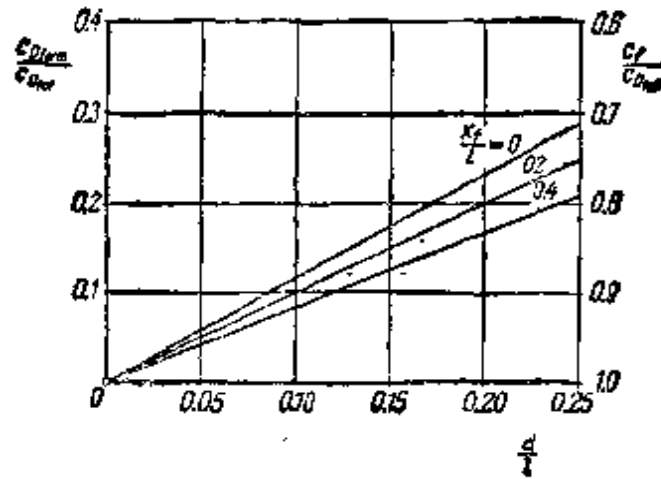


图 25.4 厚度比不同时,压差阻力 c_{Dform} 和表面摩擦阻力 c_f 之间的关系

型(二维情形)和旋成体的大量算例,证明能够导出厚度对翼型阻力影响的关系。图 25.5 中画出了这些关系曲线。差值 $\Delta c_f = c_f - c_{f0}$ 表示浸湿表面的表面摩擦力系数相对于零攻角平板表面摩擦力系数的增量。二维情形的曲线与图 25.3 中充分发展的湍流边界层($x_c/l = 0$)情形的结果非常一致。在这方面,还可以参阅 P. S. Granville 的文章^[18]。

这些计算给出了摩擦力对升力的影响。因为边界层引起外流流线的位移,修正了翼型上的压力分布,并使得压力分布的实验值低于位势理论给出的值。在失速攻角以下的攻角范围内, K. Kraemer 计算过这种升力损失。

A. D. Young 和 S. Kirkby^[76] 将上述用动量方程计算总阻力的方法推广到超声速流的情形。图 25.6 中的曲线给出了他们对不同厚度比的双凸翼型在零攻角时的一些计算结果。阻力系数 c_{Dtot} 计入压差阻力和表面摩擦力,以及理想流体超声速流动中波阻的贡献¹⁾。对于双凸翼型,根据线化理论,波阻由下式给出

$$c_{D_{wave}} = \frac{16}{3} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \frac{1}{(M^2 - 1)^{1/2}} \quad (25.31)$$

1) 这里,压差阻力代表由位移效应引起的阻力的变化。

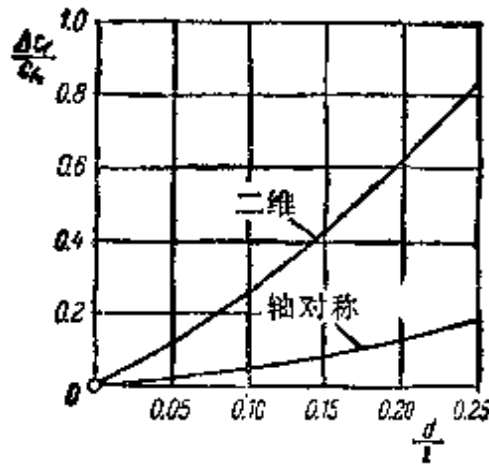


图 25.5 翼型阻力系数随相对厚度变化的增量, 根据 Scholz^[201] 的计算结果

$$\text{总阻力系数或翼型阻力系数 } c_{D_{tot}} = c_{D_{form}} + c_f$$

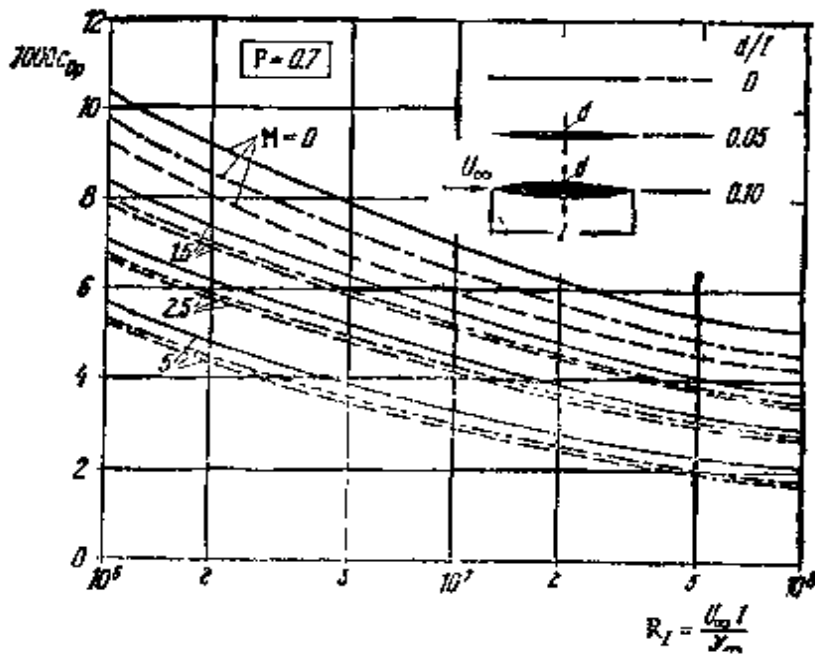


图 25.6 在超声速流动和有充分发展的湍流边界层的情形下, 双凸翼型的阻力系数, 取自 A.D. Young 和 S. Kirkby^[16,17], 无传热 Prandtl 数 $P = 0.7$. 由于波阻的贡献(式(25.31))必然加大了阻力系数

根据图25.6中画出的结果, 翼型厚度对阻力的影响很小, 特别是在超声速的范围内。Mach 数的影响则与零攻角平板情形中的量级大致相同。

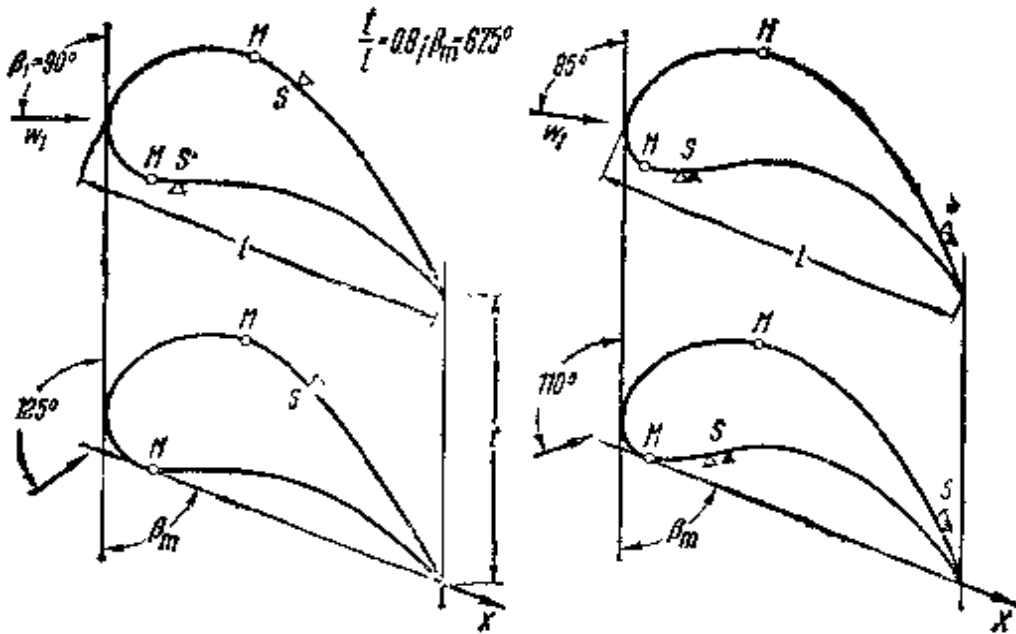
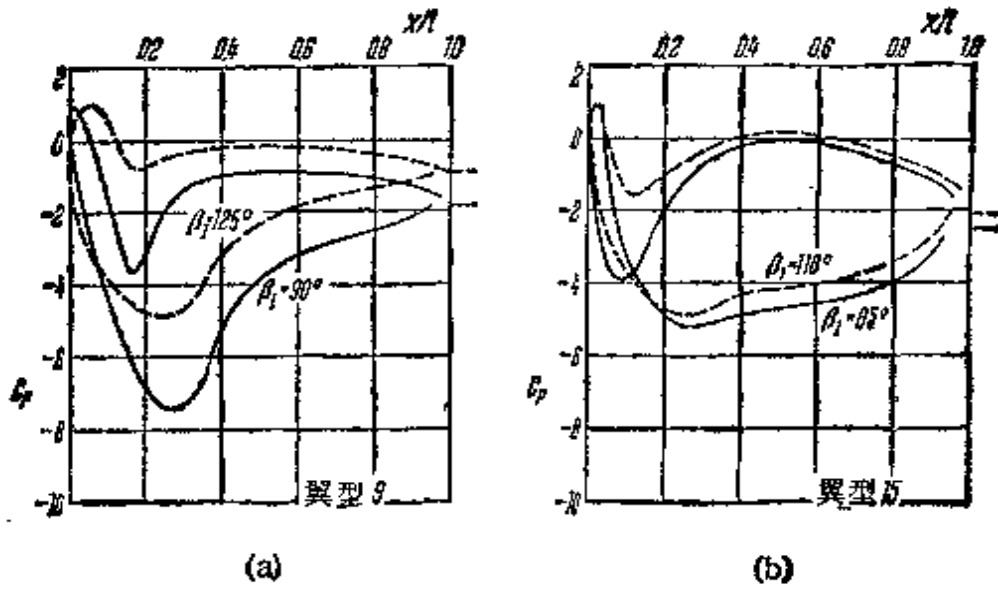
e. 流动通过叶栅的损失

1. 概述 本章d中阐明的对单个翼型阻力的数值计算方法,已由 H. Schlichting 和 N. Scholz^[46,49] 推广到计算一排翼型(叶栅)的阻力,因而可应用于通过叶轮的流动。当讨论轴流式涡轮或涡轮压缩机的各级时,通常将问题作如下简化:通过定叶轮和动叶轮取一共轴的圆柱截面,并把所得到的图象展开成一个平面,这样得到的翼型图象称为**二维叶栅**。叶栅中叶片的排列由规定的**稠度比¹⁾ t/l** 和**平均叶片安装角或叶片安装角 β_m** 来描写,见图 25.7。与绕单个翼型的流动大不相同,位势理论应用于绕叶栅流动的情形得出如下结论:一般说来,叶栅前后存在着压力差。当叶栅将压力转变成速度时(涡轮叶栅),压力沿下游方向减小。当叶栅作用相反时(压缩机叶栅),压力沿流动方向增加。这一压力改变和叶片形状决定了沿叶片周线的压力分布,所以也决定了边界层的结构。图25.7中画出了两种不同涡轮叶片上的压力分布和分离点的位置。在图 25.9(a)中翼型9的情形下,当入流角 $\beta_i = 90^\circ$ 时,分离点紧靠在最小压力点之后。不过,这种情形只在 Reynolds 数 $R = 10^5$ 时才出现,而在 $R = 10^6$ 时,上述情形中叶片的两侧都没有分离。就图 25.7b 中的翼型15而论,对于图中的两个入流角,压力面上的分离点都在最小压力点的下游,而且非常靠近,至于吸力面上的分离点,都在后缘附近。

为了计算各种不同入流角二维叶栅的损失,参考文献[46]说明了如何应用上节所述的方法。N. Scholz 和 L. Speidel^[60] 将这类计算系统化,并与实验结果作了比较。

紧靠叶栅出口平面后的速度分布显示出很大的亏损,这种亏损起源于各单独叶片上的边界层。湍流混合使这些速度的差别往下游逐渐消失(平滑化),由此引起附加的能量损失。**湍流混合损失**的总量可由动量定理来计算。当确定流动通过叶栅的总损失

1) 稠度比也称相对叶距。——中译者注



位势理论确定的沿叶片的压力分布

$$c_p = \frac{p - p_2}{\frac{1}{2} \rho w_1^2}$$

最小压力点 (M) 和分离点 (S) 的位置: \triangle 对应于 $R = 10^5$; \blacktriangle 对应于 $R = 10^6$

图25.7 对于两个不同的入流角, 涡轮叶栅叶片上的压力分布和湍流边界层分离点的位置, 取自 F. W. Riegels^[44]
叶片安装角 $\beta_m = 67.5^\circ$; 稠度比 $t/l = 0.8$

时, 除去各个叶片上边界层中的能量损失之外, 必须计及这种湍流混合的损失。因此, 叶栅损失的计算由下述三个部分组成: 1.

确定沿各个叶片周线的理想位势流动的压力分布；2. 计算每个叶片上的(层流或湍流)边界层；3. 确定叶栅后尾迹中的湍流混合损失。

与叶栅相关的总压损失，最好用叶栅前的来流总压和叶栅后远处“平滑化”了的实际流动总压之差 Δg 来说明。我们有

$$\Delta g = g_1 - g'_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho w_1^2 - \left(p'_2 + \frac{1}{2}\rho w'^2_2 \right), \quad (25.32)$$

其中 p'_2 和 w'_2 分别表示叶栅后远处真实(即受损失影响)流动的压力和速度,应该将它们与理想(无损失)流动中的 p_2 和 w_2 区分开来。因为速度的轴向分量 $w_{ax} = w_1 \sin \beta_1 = w_2 \sin \beta_2$ 确定了通过叶栅的流体质量,所以用它的动压头来无量纲化总损失是方便的。根据连续条件,这一动压头在叶栅前后应该是相同的。因此,我们引入下述损失系数:

$$\zeta_l = \frac{\Delta g}{\frac{1}{2}\rho w^2_{ax}}. \quad (25.33)^{10}$$

在 Braunschweig 工程大学^[60,49],学者们对叶栅进行了系统的研究,其中某些结果示于图 25.8 中,该图给出了实验测量的损失系数和计算的损失系数之间的比较。所有的叶片均采用 NACA 8410 翼型,可变参数为稠度比 t/l ($=0.5, 0.75, 1.0$ 和 1.25);叶片安装角为 $\beta_s = 30^\circ$ (涡轮叶栅)。图中画出了用偏转系数或偏转比给出的损失系数,损失系数是由式(25.33)定义的,偏转系数或偏转比为

$$\delta_d = \Delta w_d / w_{ax},$$

其中 Δw_d 表示由叶栅产生的速度的横向分量(即周向速度)。如果我们首先将注意力集中在极曲线的中间区域(附着边界层),随着稠度比的减小,我们发现损失系数急剧地增加。其原因在于:

1) 在蒸汽涡轮设计中,通常使用速度系数 ψ ,它定义为实际出口速度与无粘流动出口速度之比,即 $\psi = w'_2 / w_2$ 。所以,这两个系数满足关系式 $\zeta_l = (1 - \psi^2) / \sin^2 \beta_2$ 。

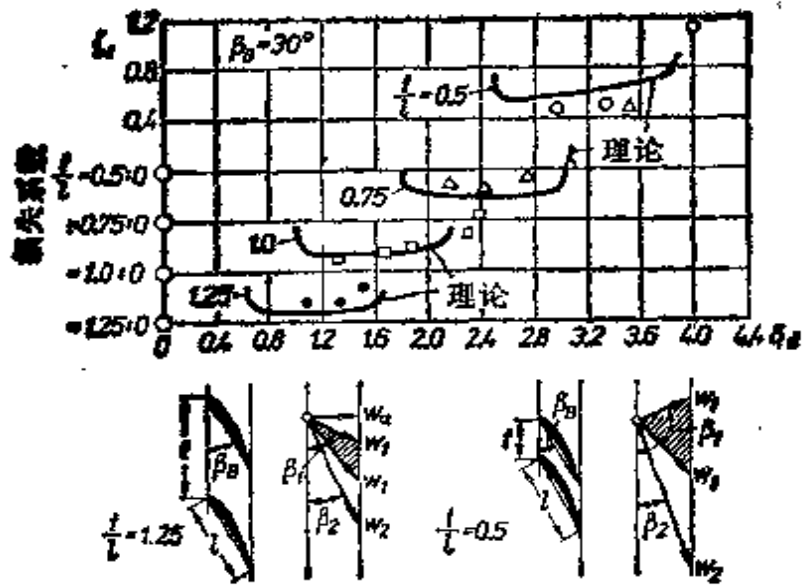


图 25.8 对于不同稠度比 t/l 的涡轮叶栅, 式(25.33)定义的损失系数 ζ 随梢转系数 $\sigma_2 = \Delta w_2 / w_{2z}$ 的变化, 根据文献[49], N. Scholz 和 L. Speidel^[40] 的测量结果和计算结果
叶片翼型: NACA8410
Reynolds 数 $R = \omega_2 l / \nu = 5 \times 10^5$

小间距的叶栅比起大间距的叶栅来, 周线单位长度上的叶片数目更多。作为首次近似, 损失系数正比于这一叶片数。在极曲线的左右两端, 我们观察到损失系数突然有很大的增加。这是由于流动的分离出现在叶片的压力面上(极曲线的左端)或吸力面上(极曲线的右端)。在后一种情形下, 流动角的增加超过了叶片允许的负荷。十分明显的是, 随着稠度比的减小, 极曲线向偏转角增加的方向移动。

在 Reynolds 数 $R = \omega_2 l / \nu = 5 \times 10^5$ 时, 已对上述情形作了实验测量和计算。计算基于沿所有叶片的边界层都是湍流的假设。在实验装置中, 通过在叶片前缘安放绊线使边界层转换成湍流。损失系数的计算值和测量值之间显得非常一致。参考文献[47, 63] 给出了另外的一些例子, 并对实验和理论之间作出了比较。

尾迹: 对于叶栅后湍流尾迹中的流动, R. Raj 和 B. Lakshminarayana^[42] 叙述了非常细致的实验研究。实验测量包括确定

尾迹中离开叶栅不同距离处的速度分布、湍流度和表观 Reynolds 应力。人们已经知道，由于叶栅使流动偏转，所以，在叶栅后的 $(3/4)l$ 距离内，尾迹是不对称的。在叶栅出口截面以后，速度沿下游的减小远慢于平板、圆柱体后或单个零攻角翼型后沿下流的减小。

喷气叶片： U. Stark^[64a] 已经研究了采用喷气叶片后压缩机叶栅偏转角的增量 $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ 。

2. Reynolds 数的影响 当需要应用模型实验的结果来设计全尺寸的叶栅时，由 Reynolds 数的改变所引起叶栅气动系数改变是很重要的。这种效应主要是影响损失系数，可以在大量的出版物中找到对这个问题的讨论^[5,41,65]。从物理的观点来看，Reynolds 数对二维叶栅损失系数的影响，类似于 Reynolds 数对单个翼型表面摩擦力系数的影响。因为在这两种情形下，这种效应均起源于边界层。如果沿叶栅叶片的压力分布没有引起重要的分离出现，那么，叶栅带来的损失主要来自边界层。于是，Reynolds 数对叶栅损失系数的影响，大致与对零攻角平板表面摩擦力系数的影响相同。对于层流，叶栅损失系数正比于 $R^{-1/2}$ ；对于湍流，叶栅损失系数正比于 $R^{-1/5}$ 。在上述两种情形中，Reynolds 数均以叶片的长度为参考长度。在不出现分离时，叶栅损失系数对 Reynolds 数的依赖关系可以用 K. Gersten^[15] 提供的方法来计算。图 25.9 中画出了这种结果。图中曲线说明了叶栅损失系数

$$\zeta_{12} = \frac{\Delta g}{\frac{1}{2}\rho w_2^2} \quad (25.34)$$

的变化，其中叶栅由厚的弯曲得很厉害的叶片组成。Reynolds 数的范围相当宽，从 $R = w_2 l / \nu = 4 \times 10^4$ 到 4×10^5 。这里的 Δg 表示总压的损失， w_2 是出口速度。为了与实验数据作比较，图上还画出了理论曲线，它是用参考文献[60]中方法计算的有分离的损失。就转捩点的位置而论，叶片压力面上的边界层直到后缘仍然是层流的，而吸力面在最小压力点上发生了转捩。图 25.9 表明，

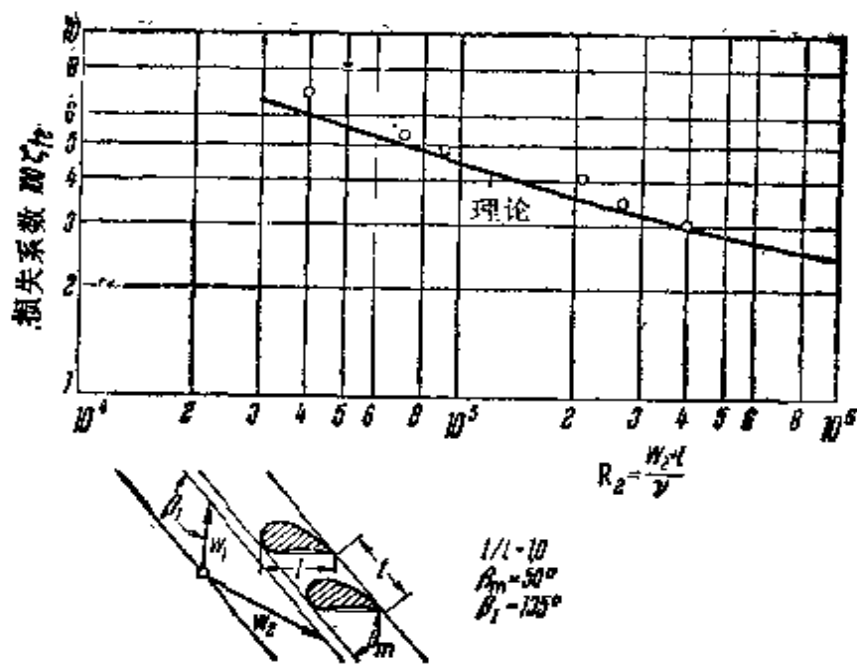


图 25.9 涡轮叶栅损失系数 (式(25.34))随 Reynolds 数 R_2 的变化,取自 K. Gersten^[12]

计算和实验之间极为一致。

转换点的位置对损失大小的影响很大。随着 Reynolds 数的增加,转换点向前移动,加长了边界层的湍流部分,由此引起损失的增加。正如人们在涡轮机中期望得到的那样,通过增加粗糙度^[13]或增加湍流度^[8],转换点将前移。在 Reynolds 数很低时,边界层可能在发生转换前出现分离,在一定的条件下,由此引起损失系数很大的增加。低 Reynolds 数时损失系数的这一很大的增加示于图 25.10(b) 中,这是涡轮叶栅的情形。在较大的 Reynolds 数 $R_2 = 5 \times 10^5$ 时,转换是自发的,并且损失小。在中等的 Reynolds 数 $R_2 = 1 \times 10^5$ 时,出现层流分离,随后又湍流再附。所以在边界层中形成一个所谓的分离泡,同时损失系数显著地增加。在很低的 Reynolds 数 $R_2 = 0.5 \times 10^5$ 时,发生层流分离,分离一直持续到叶片的后缘,损失再次大为增加。

图 25.10(a) 中画出了对应于三个 Reynolds 数的压力分布,再一次反映出边界层分离的细节。分离泡的大小强烈地依赖于 Reynolds 数和来流的湍流度。见参考文献 [8, 20, 28, 37, 43, 57, 60], 以及 R. Kiock 的文章^[30]。也可参阅 W. B. Roberts 的文

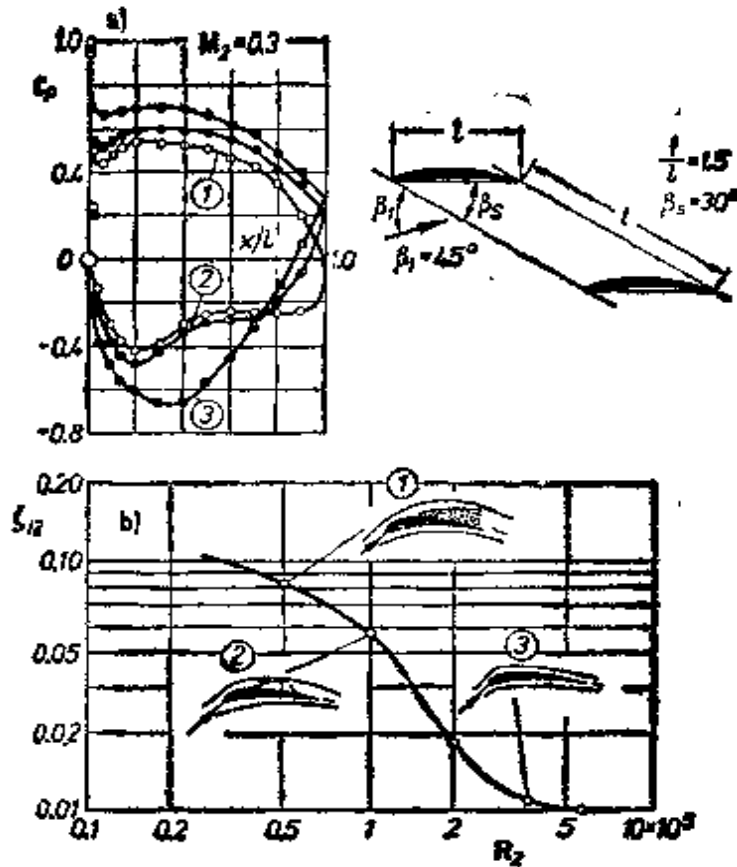


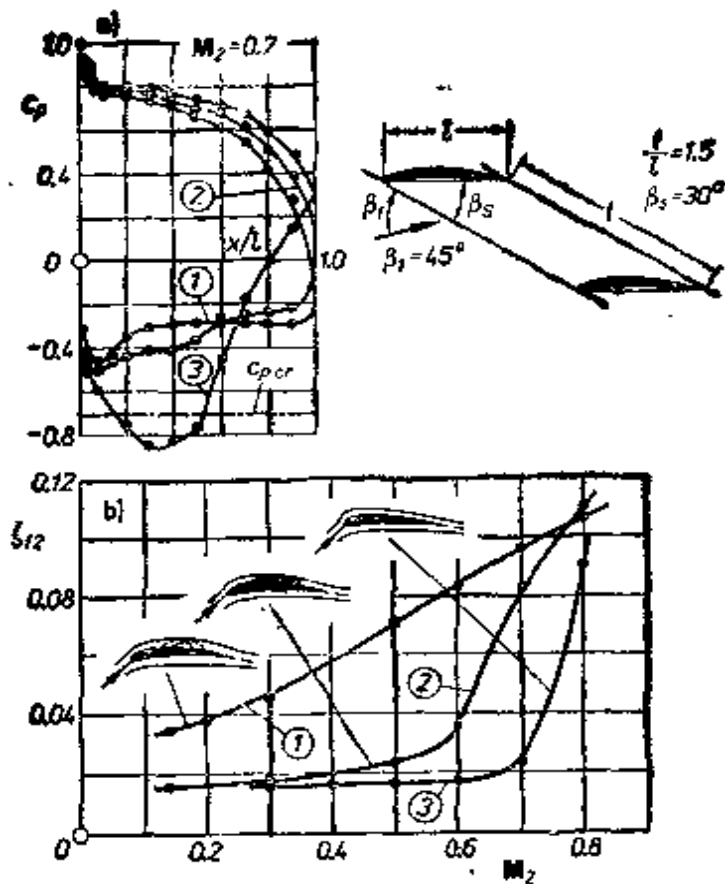
图25.10 涡轮叶栅气动力系数随 Reynolds 数的变化, 根据 H. Schlichting 和 A. Das^(52, 53) 的测量数据

(1) $R_2 = 0.5 \times 10^5$ (2) $R_2 = 1.0 \times 10^5$ (3) $R_2 = 4.0 \times 10^5$
 (a) $M_2 = 0.3$ 时, 不同 Reynolds 数下的压力分布 (b) 损失系数 ζ_{12} (式(25.34)) 随 Reynolds 数的变化

章^[43]。

在我们讨论 Reynolds 数影响的同时, 必须强调指出: 在一定的情况下, 表面粗糙度对损失能够产生很大的影响。粗糙度除了能促使转捩之外, 还可以直接增加损失。当突起物超过某个容许值时, 就出现这种情形, 见参考文献 [3, 56]。

3. Mach 数的影响 上述有关叶栅损失系数的结果适用于不可压缩流动 ($M < 0.3$)。至于可压缩的效应, 可以认为从 $M > 0.4$ 开始。可压缩效应的例子示于图 25.11(b) 中, 图中曲线是亚声速流中产生小偏转角的叶栅的损失系数。Mach 数 M_2 是自变量, 三条曲线对应于三个不同的 Reynolds 数。图 25.11 (a) 中 $M_2 = 0.7$ 的压力分布表明: 当 $R_2 = 4 \times 10^5$ 时, 随着 Mach 数的



(1) $R_2 = 1.0 \times 10^5$ (2) $R_2 = 2.0 \times 10^5$ (3) $R_2 = 4.0 \times 10^5$
 (a) $M_2 = 0.7$ 时, 不同 Reynolds 数下的压力分布 (b) Reynolds 数不同时, 损失系数 ζ_{12} (式 (25.34)) 随 Mach 数 M_2 的变化

图 25.11 涡轮叶栅气动系数随 Mach 数的变化, 根据 H. Schlichting 和 A. Das^[52, 53] 的实验测量

增加, 损失系数在此有急剧的增加。发生这一急剧增加的原因如下, 在流速超过当地声速(这时对应于 $c_{p, \text{crit}}$) 的区域中出现了激波。对于两个较低的 Reynolds 数, $R_2 = 1.0 \times 10^5$ 和 $R_2 = 2.0 \times 10^5$, 压力分布表明流动中出现分离。图 25.10 和图 25.11 中的结果表明: 在 Reynolds 数从 $R_2 = 10^4$ 到 10^5 的范围内, 除去 Reynolds 数本身对通过叶栅的流动有很大的影响之外, Mach 数对流动也发生了深刻的影响。上述实验测量是在 Brunswick^[54] 的高速叶栅风洞中完成的。该风洞的 Reynolds 数和 Mach 数能够独立地改变。

图 25.12 中的曲线说明, 在使流动产生大偏转角的叶栅中。

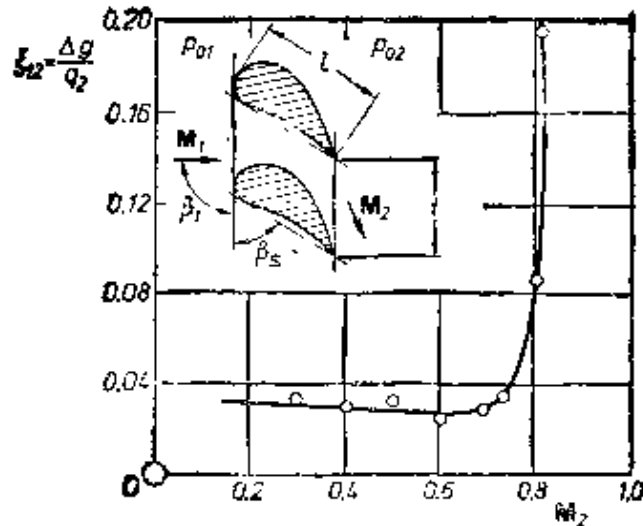


图 25.12 涡轮叶栅损失系数 ξ_{12} (式(25.34)) 随 Mach 数的变化,引自 O. Lawaczeck^[34]

$\Delta p = p_{01} - p_{02} =$ 总压损失

$q_2 = \frac{1}{2} \rho_2 w_2^2 =$ 动压

叶片安装角: $\beta_2 = 56^\circ$; 稠度比: $s/l = 0.81$; 进气角: $\beta_1 = 90^\circ$; Reynolds 数: $R_2 = 6 \times 10^5$

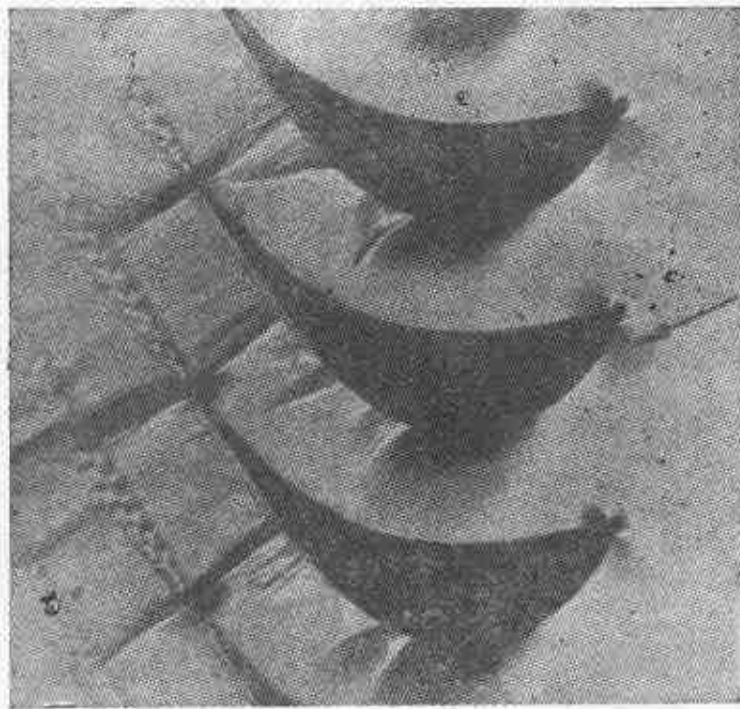


图 25.13 通过涡轮叶栅的跨声速流, O. Lawaczeck 和 H. J. Heinemann^[32] 用纹影方法拍得的照片. 曝光 20×10^{-9} 秒. 翼型吸力面上的强激波引起分离, 由此产生大的损失, 也可参阅图 25.12 $\beta_2 = 70^\circ$; $s/l = 0.5$; $\beta_1 = 65^\circ$; $\beta_2 = 36^\circ$; $M_1 = 0.40$; $M_2 = 0.85$; $R_2 = 8 \times 10^5$

Mach 数对损失系数的影响。该叶栅是按不可压缩流动设计的。直到 $M_2 = 0.7$ ，损失系数几乎保持不变，其值 $\zeta_{r2} \approx 0.03$ 。当 Mach 数进一步增加时，损失系数急剧地增加。从图 25.13 可以辨认出叶片的吸力面上存在着激波，因此，出现损失系数急剧增加的原因是很清楚的，因为激波引起了边界层的分离。

分别由 J. Bahr^[2] 和 H. Hebbel^[21] 提交给 Braunschweig 工程大学的两篇论文中，研究了 Mach 数和湍流度对叶栅损失系数的影响。关于这方面的研究，也可查阅参考文献[50]。

最近，由于加大功率密度的蒸汽涡轮的发展，导致低压级叶片的外部截面以跨声速状态运行，这就需要对跨声速涡轮叶片的特性进行系统的研究。这时来流 Mach 数小于 1 ($M_1 < 1$)，而出口 Mach 数大于 1 ($M_2 > 1$)，参阅参考文献[31]。参考文献[33, 34] 有对跨声速流动通过大偏转角叶栅的叙述。

H. Haas 和 H. Maghon^[20a] 结合蒸汽涡轮和燃气涡轮的现代发展，对叶栅绕流研究成果的实际应用，给出了综合的论述。

参 考 文 献

第十六章

- [1] Arnal, D., Julien, J. C., and Michel, R.: Analyse expérimentale et calcul de l'appartition et du développement de la transition de la couche limite. AGARD CP 224, 13-1 to 13-17 (1977).
- [1a] AGARD-CP-224: Laminar-turbulent transition. Papers presented at the Fluid Dynamics Panel Symposium at Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 2-4 May 1977 (1977).
- [1b] Barnes, H.T., and Coker, E.G.: The flow of water through pipes. Proc. Roy. Soc. London 74, 341-356 (1905).
- [2] Barry, M.D.J., and Ross, M.A.S.: The flat plate boundary layer. Part 2: The effect of increasing thickness on stability. JFM 43, 813-818 (1970).
- [3] Benny, D.J.: A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. JFM 10, 209-236 (1981).
- [4] Betchov, R., and Criminale, W.O.: Stability of parallel flows. Academic Press, 1967.
- [4a] Bouthier, M.: Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. I. Journal de Mécanique 11, 599-621 (1972). II. La couche limite de Blasius. Journal de Mécanique 12, 75-95 (1973).
- [5] Bergh, H.: A method for visualizing periodic boundary layer phenomena. IUTAM Symposium Boundary-layer research (H. Görtler, ed.). Berlin, 1958, 173-178.
- [6] Burgers, J.M.: The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. First Intern. Congress for Appl. Mech. 113, Delft, 1924.
- [7] Cheng, S.J.: On the stability of laminar boundary layer flow. Quart. Appl. Math. 11, 346-360 (1953).
- [8] Corner, D., Barry, M.D.J., and Ross, M.A.S.: Non-linear stability theory of the flat plate boundary layer. ABC CP No. 1296, (1974).
- [9] Couette, M.: Etudes sur le frottement des liquides. Ann. Chim. Phys. 21, 433-510 (1890).
- [10] Curle, N.: Hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow. Proc. Roy. Soc. London A 238, 489-501 (1957).
- [11] Clenshaw, C.W., and Elliott, D.: A numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation in the case of a laminar jet. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, 300-313 (1960).
- [11a] Davis, S.: The stability of periodic flows. Annual Review Fluid Mech. 8, 57-74 (1976).
- [12] Davie, A.: A simple numerical method for solving Orr-Sommerfeld problems. Quart. J. Mech. Appl. Math. 26, 401-411 (1973).
- [13] Dhawan, S., and Narasimha, R.: Some properties of boundary layer flow during transition from laminar to turbulent motion. JFM 3, 418-436 (1958).
- [14] Di Prima, R.C., Eckhaus, W., and Segel, L.A.: Non-linear wave number interactions in near critical two-dimensional flows. JFM 49, 705-744 (1971).
- [15] Doetsch, H.: Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner α_n -Werte. Jb. dt. Luftfahrtforschung 7, 64-67 (1940).
- [15a] Drazin, P.G., and Howard, L.N.: Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. Adv. Appl. Mech. 9, 1-89 (1966).
- [16] Dryden, H.L.: Boundary layer flow near flat plates. Proc. Fourth Intern. Congress for Appl. Mech. Cambridge, England, 1934, 175.
- [17] Dryden, H.L.: Airflow in the boundary layer near a plate. NACA Rep. 562 (1936).
- [18] Dryden, H.L.: Turbulence and the boundary layer. JAS 6, 85-100 and 101-105 (1939).
- [19] Dryden, H.L.: Some recent contributions to the study of transition and turbulent boundary layers (Papers presented at the Sixth Internat. Congress for Appl. Mech., Paris, Sept. 1946; NACA TN 1168 (1947); see also: Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. Advances Appl. Mech. New York 1, 2-40 (1948)).
- [20] Dryden, H.L.: Recent investigation of the problem of transition. ZFW 4, 89-95 (1956).
- [20a] Dryden, H.L.: Transition from laminar to turbulent flow. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion 6, 3-74, Princeton and Oxford, 1959.
- [21] Dryden, H.L.: Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. Adv. Appl. Mech. 1, 2-40 (1948).

- [22] Dubs, W.: Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenbild von Wasser und Nitrobenzol. Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem. *Holv. phys. Acta* 12, 169--228 (1939).
- [23] Eiffel, G.: Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. *Comptes Rendus* 155, 1597--1599 (1912).
- [24] Ekman, V.W.: On the change from steady to turbulent motion of liquids. *Ark. f. Mat. Astron. och Fys.* 6, No. 12 (1910).
- [25] Emmons, H.W., and Bryson, A.E.: The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Part I: *JAS* 18, 490--498 (1951); Part II: *Proc. First US National Congress Appl. Mech.* 859--868 (1952).
- [26] Fage, A.: Fluid motion transition from laminar to turbulent flow in a boundary layer. *Phys. Soc. Rep. on Progress in Physics* 6, 270 (1939).
- [27] Fage, A.: Experiments on the breakdown of laminar flow. *JAS* 7, 513--517 (1940).
- [28] Fage, A., and Preston, J.H.: Experiments on transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer. *Proc. Roy. Soc. London A* 178, 201--227 (1941).
- [28a] Fage, A.: Transition in the boundary layer caused by turbulence. *ARC RM* 1696 (1942).
- [28b] Fasel, H.: Investigation of the stability of boundary layers by a finite difference model of the Navier-Stokes equations. *JFM* 78, 355--383 (1976); see also: *Diss. Stuttgart* 1974.
- [29] Froude, W.: Experiments on the surface friction. *Brit. Ass. Rep.* 1872.
- [30] Gersting, J.M., and Jankowski, D.F.: Numerical methods for Orr-Sommerfeld problems. *Intern. J. Numerical Methods in Engineering* 4, 195--206 (1972).
- [31] Gaster, M.: On the effect of boundary layer growth on flow stability. *JFM* 65, 465--490 (1974).
- [32] Gaster, M.: A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *JFM* 14, 222--224 (1962).
- [33] Gaster, M.: The role of spatially growing waves in the theory of hydrodynamic stability. *Progress in Aero. Sciences* (D. Küchemann, ed.), 6, 251--270 (1965).
- [33a] Gaster, M., and Jordinson, R.: On the eigenvalues of the Orr-Sommerfeld equation. *JFM* 72, 121--133 (1975).
- [34] Grohne, D.: Ein Beitrag zur nicht-linearen Stabilitätstheorie von ebenen Laminarströmungen. *ZAMM* 52, 256--257 (1972).
- [35] Görtler, H., and Witting, H.: Theorie der sekundären Instabilität der laminaren Grenzschichten. *IUTAM Symposium, Boundary-layer Research* (H. Görtler, ed.) 110--126, Berlin, 1958.
- [36] Granville, P.S.: The calculations of viscous drag of bodies of revolution. Navy-Department, The David Taylor Model Basin, Report 849 (1953).
- [37] Greenspan, H.P., and Benny, D.J.: On shear-layer instability, breakdown and transition. *JFM* 15, 153--163 (1963).
- [38] Grohne, D.: Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. *ZAMM* 34, 344--357 (1954).
- [39] Hall, A.A., and Hsiop, C.S.: Experiments on the transition of the laminar boundary layer on a flat plate. *ARC RM* 1843 (1938).
- [39a] Habermann, R.: Nonlinear perturbations of the Orr-Sommerfeld equation asymptotic expansion of the logarithmic phase shift across the critical layer. *SIAM J. Math. Analysis* 7, 70--81 (1976).
- [40] Hamel, G.: Zum Turbulenzproblem. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 261--270 (1911).
- [41] van der Hegge Zijnes, B.G.: Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. *Thesis Delft* 1924.
- [42] Heisenberg, W.: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. *Ann. d. Phys.* 74, 677--627 (1924).
- [43] Hollingdale, S.: Stability and configuration of the wakes produced by solid bodies moving through fluids. *Phil. Mag.* VII 29, 209--257 (1940).
- [44] Holstein, H.: Über die äussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. *ZAMM* 30, 25--49 (1950).
- [45] Hopf, L.: *Ann. d. Phys.* 44, 1 (1914) and 59, 538 (1919); see also: Summary report by F. Noether, *ZAMM* 1, 125--138 (1921).
- [46] Howard, L.N.: Hydrodynamic stability of a jet. *J. Math. Phys.* 37, 283--298 (1959).
- [46a] Kachanov, S., Kozlov, V.V., and Levchenko, I.A.: *Uchenye zapiski TSAGI VI*, 5, 137--140 (1975).
- [46b] Ikeda, M.: Finite disturbances and growing vortices in a two-dimensional jet. *JFM* 80, 401--421 (1977).
- [47] Jordinson, R.: The flat plate boundary layer. Part I. Numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation. *JFM* 43, 801--811 (1970). See also: *Ph.D. Thesis Edinburgh Univ.* 1968.

- [48] Jordinson, R.: Spectrum of eigenvalues of the Orr-Sommerfeld equation for Blasius flow. *Phys. Fluids* 14, 2536-2537 (1971).
- [48a] Kaplan, R.E.: The stability of laminar incompressible boundary layers in the presence of compliant boundaries. Ph. D. Thesis, Massachusetts Inst. of Technology, Aero-Elastic and Structures Research Laboratory, ASRL TR 118-1 (1964).
- [48b] Loehrke, R.J., Morkovin, M.V., and Fejer, A.A.: Review. Transition in nonreversing oscillating boundary layers. *J. Fluids Eng. Trans. ASME Series 1*, 97, 534-549 (1975).
- [49] Klebanoff, P.S., and Tidstrom, K.D.: Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient. NASA TN D-195, (1959)
- [50] Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., and Sargent, L.M.: The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *JFM* 12, 1-34 (1962).
- [51] Kurtz, E.F., and Crandall, S.H.: Computer-aided analysis of hydrodynamic stability. *J. Math. Phys.* 44, 264-279 (1962).
- [52] Lewis, G.W.: Some modern methods of research in the problems of flight, The 1939 (27th) Wilbur Wright Memorial Lecture. *J. Roy. Aero. Soc. London* 43, 769-802 (1939).
- [53] Lee, L.H., and Reynolds, W.C.: On the approximate and numerical solution of Orr-Sommerfeld problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 20, 1-22 (1967).
- [54] Lin, C.C.: On the stability of two-dimensional parallel flows. *Quart. Appl. Math.* 3, 117-142 (July 1945); 3, 213-234 (Oct. 1945); 3, 277-301 (Jan. 1946).
- [55] Lin, C.C.: The theory of hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press, 1955.
- [56] Lin, C.C., and Benny, D.J.: On the instability of shear flows. *Proc. Symp. Appl. Math.* 13, Hydrodynamic Instability 1-24 (1962).
- [57] Lorentz, H.A.: Abhandlung über theoretische Physik I, 43-51, Leipzig, 1907; new version of earlier paper: *Akad. v. Wet. Amsterdam* 6, 28 (1897); see also: Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids, in Durand, W.F.: Aerodynamic theory III, 34-208 (1935).
- [57a] McCormick, M.E.: An analysis of the formation of turbulent patches in the transition boundary layer. *J. Appl. Mech.* 35, 216-219 (1968).
- [57b] Lessen, M.: see Chap. IX.
- [57c] Lessen, M., and Ko, S.H.: On the low Reynolds number stability characteristics of the laminar incompressible half jet. *Phys. of Fluids* 12, 404-407 (1969).
- [57d] Mack, L.M.: A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *JFM* 73, 497-520 (1976).
- [57e] Mack, L.M.: Transition prediction and linear stability theory. AGARD-CP-224, 1-1 to 1-22 (1977).
- [57f] Mattingly, G.E., and Criminale, W.O.: The stability of an incompressible two-dimensional wake. *JFM* 51, 233-272 (1972).
- [58] Michalke, A., and Schade, H.: Zur Stabilität von freien Grenzschichten. *Ing.-Arch.* 33, 1-23 (1963).
- [59] Michalke, A.: The instability of free shear layers. *Progress in Aerospace Sciences* (D. Küchemann, ed.) 12, 213-239 (1972).
- [60] Meseth, J.: Experimentelle Untersuchung der Übergangszonen zwischen laminaren und turbulenten Strömungsgebieten intermittierender Rohrströmung. *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen*, No. 58 (1974).
- [60a] Miller, J.A., and Fejer, A.A.: Transition phenomena in oscillating boundary layer flows. *JFM* 13, 438-449 (1964).
- [61] von Mises, R.: Kleine Schwingungen und Turbulenz. *Jahresber. Dt. Math. Verein.* 241-248 (1912).
- [61a] Morkovin, M.V.: On the many faces of transition, in: *Viscous drag reduction* (C.S. Wells, ed.). Plenum Press, New York, 1969, pp. 1-31; see also: Critical evaluation of transition from laminar to turbulent shear layer with emphasis on hypersonically travelling bodies. Air Force Flight Dynamics Lab., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, TR 68-149 (1969).
- [62] Osborne, M.R.: Numerical methods for hydrodynamic stability problems. *SIAM J. Appl. Math.* 15, 539-557 (1967).
- [62] Ombrewski, H.G., Morkovin, M.V., and Landahl, M.: A portfolio of stability characteristics of incompressible boundary layers. AGARDograph No. 134 (1969).
- [63a] Obremski, H.J., and Fejer, A.A.: Transition in oscillating boundary layer flows. *JFM* 29, 93-111 (1967).
- [64] Orr, W.M.F.: The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part I: A perfect liquid; Part II: A viscous liquid. *Proc. Roy. Irish Acad.* 27, 9-68 and 69-138 (1907).
- [64a] Pearson, J.R.A.: Instability of non-Newtonian flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 8, 163-181 (1976).

- [65] Persh, J.: A study of boundary-layer transition from laminar to turbulent flow. US Naval Ordnance Lab. Rep. 4339 (1956).
- [66] Prandtl, L.: Über den Luftwiderstand von Kugeln. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, 177-190 (1914); see also *Coll. Works II*, 597-608.
- [67] Prandtl, L.: Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. *ZAMM I*, 431-436 (1921) and *Phys. Z.* 23, 19-25 (1922); see also *Coll. Works II*, 687-696.
- [67a] Prandtl, L.: Über die Entstehung der Turbulenz. *ZAMM II*, 407-409 (1931).
- [68] Prandtl, L.: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. *Z. VDI* 77, 105-114 (1933); see also: *Coll. Works, II*, 105-114.
- [69] Pretsch, J.: Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. *Jb. dt. Luftfahrtforschung I*, 58-75 (1941).
- [70] Lord Rayleigh: On the stability of certain fluid motions. *Proc. Math. Soc. London II*, 57 (1880) and *IV*, 67 (1887); *Scientific Papers I*, 474-487 and *III*, 17; see also *Scientific Papers IV*, 203 (1895) and *VI*, 197 (1913).
- [70a] Reshotko, E.: Boundary layer stability and transition. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 8, 311-349 (1976).
- [71] Reynolds, O.: On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 174, 935-982 (1883); see also *Coll. Papers II*, 51.
- [72] Reynolds, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 186, 123-164 (1895); see also *Coll. Papers II*.
- [73] Rosenbrock, G.: Instabilität der Gleitschichten im schwach divergenten Kanal. *ZAMM* 17, 8-24 (1937). *Diss. Göttingen* 1937.
- [74] Ross, J. A., Barnes, F. H., Burns, J. G., and Ross, M. A. S.: The flat plate boundary layer. Part 3. Comparison of theory and experiment. *JFM* 43, 819-832 (1970).
- [75] Rotta, J.: Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. *Ing.-Arch.* 24, 258-281 (1956).
- [76] Schlichting, H.: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 182-208 (1933); see also *ZAMM* 13, 171-174 (1933).
- [77] Schlichting, H.: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, I*, 47-78 (1935).
- [78] Schlichting, H.: Über die Theorie der Turbulenzentstehung. *Summary Report, Forsch. Ing.-Wes.* 16, 35-78 (1950).
- [79] Schlichting, H.: Entstehung der Turbulenz. *Handbuch der Physik (S. Flügge, ed.)*, 8/1, 351-450, Springer-Verlag, 1959. See also: *Handbook of Fluid Dynamics (V. L. Streeter, ed.)*, McGraw-Hill, 1961.
- [80] Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. *Forsch. Ing.-Wes. Heft* 428 (1922), or *ZAMM* 2, 96-106 (1922), or *Physikal. Z.* 23, 14-19 (1922).
- [81] Schiller, L.: Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. *ZAMM* 14, 36-42 (1934).
- [82] Schubauer, G. B., and Skramstad, H. K.: Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1, 72. Reprint of confidential NACA Rep. dated April 1943 (later published as NACA War-time Rep. W-8) and *JAS* 14, 69-78 (1947); see also NACA Rep. 908.
- [83] Schubauer, G. B., and Klebanoff, P. S.: Contributions on the mechanics of boundary layer transition. NACA TN 3489 (1955) and NACA Rep. 1289 (1956); see also *Proc. Symposium on Boundary Layer Theory, NPL, England, 1955*.
- [84] Schubauer, G. B., and Klebanoff, P. S.: Mechanism of transition at subsonic speeds. *IUTAM Symposium, Boundary-layer Research (H. Görtler, ed.)*, 84-107, Berlin, 1958.
- [84a] Saric, W. S., and Nayfeh, A. E.: Nonparallel stability of boundary layer flows. *Phys. of Fluids* 18, 945-960 (1975).
- [85] Shen, S. F.: Calculated, amplified oscillations in plane Poiseuille and Blasius flows. *JAS* 21, 62-64 (1954).
- [85a] Shen, S. F.: Stability of laminar flows. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion* 4, 719-853, Princeton and Oxford, 1964.
- [85b] Shen, F. C. T., Chen, T. S., and Huang, L. M.: The effects of mainflow radial velocity on the stability of developing laminar pipe flow. *J. Appl. Mech., Trans. ASME Ser. E* 43, 209-212 (1976).
- [86] Sommerfeld, A.: Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. *Atti del 4. Congr. Internat. dei Mat. III*, 116-124, Roma, 1908.
- [87] Squire, H. B.: On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. London A* 142, 621-628 (1933).
- [88] Stewartson, K.: A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *JFM* 48, 529-545 (1971).

- [89] Stuart, J.T.: On the effects of the Reynolds stress on hydrodynamic stability. *ZAMM Sonderheft* 32-38 (1958).
- [90] Stuart, J.T.: Non-linear effects in hydrodynamic stability. *Proc. Xth Intern. Congress of Appl. Mech., Stress*, 63-97 (1960).
- [91] Stuart, J.T.: Hydrodynamic stability. in: *Laminar boundary layers* (L. Rosenhead, ed.), 482-579. Clarendon Press, Oxford, 1963; see also: *Appl. Mech. Rev.* 78, 523-581 (1965).
- [92] Tani, I.: Some aspects of boundary layer transition at subsonic speeds. *Advances in Aeronautical Sciences* (Th. v. Kármán, ed.), 3, 143-160, Pergamon Press, New York and London, 1962.
- [93] Tani, I.: Einige Bemerkungen über den laminar-turbulenten Umschlag in Grenzschichtströmungen. *ZAMM* 53, T 25-T 32 (1973).
- [94] Tani, I.: Low speed flows involving bubble separation. *Progress Aero. Sci.* 5, 70-103 (1964).
- [95] Tani, I.: Review of some experimental results on boundary layer transition. *Phys. of Fluids Suppl.* 10, 11-16 (1967).
- [96] Tani, I.: Boundary layer transition. *Annual Review of Fluid Mechanics* 1, 169-196 (1969).
- [96a] Tatsumi, A., and Katukani, T.: The stability of a two-dimensional laminar jet. *JFM* 4, 261-275 (1958).
- [97] Taylor, G.I.: Some recent developments on the study of turbulence. *Proc. of the Fifth Intern. Congress for Appl. Mech., New York*, 294 (1938); see also: *Statistical theory of turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layer. Proc. Roy. Soc. London A* 156, 307-317 (1936); see also: *Scientific Papers II*, 356-364.
- [98] Tietjens, O.: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. *Diss. Göttingen* 1922; *ZAMM* 5, 200-217 (1925).
- [99] Tollmien, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. I. *Mitt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* 21-44 (1929); Engl. transl. in *NACA TM* 609 (1931).
- [100] Tollmien, W.: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I*, 1, 79-114 (1935); Engl. transl. in *NACA TM* 792 (1936).
- [101] Tollmien, W.: Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. *ZAMM* 25/27, 33-50 and 70-83 (1947).
- [102] Tollmien, W., and Grohne, D.: The nature of transition. In: *Boundary Layer and Flow Control* (G.V. Lachmann, ed.), Vol. 2, 602-636, Pergamon Press, London, 1961.
- [103] Thomas, L.H.: The stability of plane Poiseuille flow. *The Physical Rev.* 86, 812 (1952).
- [104] Townsend, H.C.H.: Note on boundary layer transition. *ARC RM* 1873 (1939).
- [104a] Wazzan, A.R.: Spatial stability of Tollmien-Schlichting waves. *Progress in Aerospace Sciences* (D. Küchemann, ed.) 16, 99-127 (1975).
- [105] Wieselsberger, C.: Der Luftwiderstand von Kugeln. *ZFM* 5, 140-145 (1914).
- [106] Wazzan, A.R., Taghavi, H., and Keltner, G.: Effect of boundary layer growth on stability of incompressible flat plate boundary layer with pressure gradient. *Phys. of Fluids* 17, 1655-1670 (1974).
- [107] White, F.M.: *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1974.
- [108] Wygnanski, J., Sokolov, M., and Frieman, D.: On a turbulent "spot" in a laminar boundary layer. *JFM* 78, 785-819 (1976).

第十七章

- [1] Abbott, J.H., von Doenhoff, A.E., and Stivers, L.S.: *Summary of airfoil data*. *NACA Rep.* 824 (1954).
- [2] Althaus, D.: *Stuttgarter Profilkatalog*. Inst. Aerodynamik of Stuttgart Univ. (1972).
- [3] *ARC RM* 2499; Transition and drag measurements on the Boufton Paul sample of laminar flow wing construction. Part I: by J.H. Preston and N. Gregory; Part II: by K.W. Kimber; Part III: Joint Discussion.
- [3a] Beasley, J.A.: Calculation of the laminar boundary layer and prediction of transition on a sheared wing. *ARC RM* 3787 (1976); *RAE TR-73156* (1974).
- [4] Benjamin, T.B.: Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. *JFM* 9, 513-532 (1961).
- [5] Bénard, H.: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gen. Sci. Pure Appl.* 17, 1261-1271 and 1309-1328 (1900).
- [6] Bloom, M.: The effect of surface cooling on laminar boundary layer stability. *JAS* 18, 636-636 (1951).
- [7] Braslow, A.L., and Visconti, F.: Investigation of boundary layer Reynolds number for transition on an NACA 65(215)-114 airfoil in the Langley two-dimensional low-turbulence pressure tunnel. *NACA TN* 1704 (1948).

- [8] Brinich, P.F.: Boundary layer transition at Mach 3-12 with and without single roughness element. NACA TN 8267 (1954).
- [9] Busmann, K., and Münz, H.: Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 38-39 (1943).
- [10] Busmann, K., and Ulrich, K.: Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes. Preprint *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1943 in *Techn. Berichte* 10, 9 (1943).
- [11] Bloom, M.: The effect of surface cooling on laminar boundary layer stability. *JAS* 18, 636-638 (1951).
- [12] Brinich, P.F.: Boundary layer transition at Mach 3-12 with and without single roughness elements. NACA TN 3257 (1954).
- [13] Brinich, P.F., and Sands, N.: Effect of bluntness on transition for a cone and a hollow cylinder at Mach 3-1. NACA TN 3979 (1957).
- [14] Brown, W.B.: Exact solution of the stability equations for laminar boundary layers in compressible flow. *Boundary Layer and Flow Control* (G.V. Lachmann, ed.), Vol. 2, 1033-1048, Pergamon Press, New York, 1961.
- [15] Brooke-Benjamin, T.: Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *JFM* 2, 554-574 (1957).
- [16] Bippes, H.: Experimentelle Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlages an einer parallel angeströmten konkaven Wand. Diss. T. U. Berlin, 1972; Sitzungsber. Heidelberger Akademie der Wiss. Math. Naturw. Klasse, 1972, Springer, Berlin, pp. 103-180; see also: Bippes, H., and Görtler, H.: *Acta Mechanica* 14, 251-267 (1972).
- [17] Clauser, L.M., and Clauser, F.: The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer. NACA TN 613 (1937).
- [18] Corcos, G.M., and Saffars, J.R.: On the stability of fully developed flow in a pipe. *JFM* 6, 97-112 (1959).
- [19] Czarnecki, K.R., Robinson, R.B., and Hilton, Jr., J.H.: Investigation of distributed surface roughness on a body of revolution at a Mach number of 1-61. NACA TN 3230 (1954).
- [20] Czarnecki, K.R., and Sinclair, A.R.: An investigation of the effects of heat transfer on boundary-layer transition on a parabolic body of revolution (NACA RM 10) at a Mach number of 1-61. NACA Rep. 1240 (1955).
- [21] Cary, A.M. Jr.: Turbulent boundary layer heat transfer and transition measurements for cold-wall conditions at Mach 6. *AIAA J.* 6, 958-959 (1968).
- [22] Cebece, T., and Smith, A.M.O.: Investigation of heat transfer and of suction for tripping laminar boundary layers. *J. Aircraft* 5, 450 (1968).
- [22a] Cebece, T., and Keller, H.B.: Stability calculations for a rotating disk. AGARD-CP-224, 7-1 to 7-9 (1977).
- [23] Chapman, G.T.: Some effects of leading-edge sweep in boundary layer transition at supersonic speeds. NASA TN D-1076 (1961).
- [24] Cole, D.: Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. *JAS* 21, 433-448 (1954).
- [25] Czarnecki, K.R., and Sinclair, A.R.: An investigation of the effects of heat transfer on a parabolic body of revolution (NACA RM-10) at a Mach number of 1-61. NACA Rep. 1240 (1955).
- [26] Colak-Antic, P.: Hitzdraht-Messungen des laminar-turbulenten Umschlages bei freier Konvektion. *Jb. WGL* 1964, 171-178 (1965).
- [27] Colak-Antic, P.: Dreidimensionale Stabilitätsrechnungen des laminar-turbulenten Umschlages bei freier Konvektion längs einer vertikalen gehöhlten Platte. *Sitzungsberichte Heidelberger Akademie der Wiss. Jb. 1962/64*, 315-416, Heidelberg (1964).
- [28] Crowder, H.J., and Dutton, G.: Stability of Poiseuille flow in a pipe. *J. Comput. Phys.* 7, 12-31 (1971).
- [29] Cole, D.: Transition in circular Couette flow. *JFM* 21, 385-425 (1965).
- [29a] DiPrima, R.C., and Stuart, J.T.: Nonlocal effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders. *JFM* 54, 393-415 (1972).
- [29b] DiPrima, R.C., and Stuart, J.T.: The nonlinear calculation of Taylor-vortex flow between eccentric rotating cylinders. *JFM* 67, 85-111 (1975).
- [30] von Doenhoff, A.E.: Investigation of the boundary layer about a symmetrical airfoil in a wind tunnel of low turbulence. NACA Wartime Rep. L 507 (1940).
- [31] Doetsch, H.: Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_x -Werte. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 54-57 (1940).
- [32] van Driest, E.R.: Cooling required to stabilize the laminar boundary layer on a flat plate. *JAS* 18, 696-699 (1951).
- [33] van Driest, E.R.: Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. *JAS* 19, 801-812 (1952).
- [34] van Driest, E.R., and Boison, J.C.: Experiments on boundary layer transition at supersonic speeds. *JAS* 24, 885-899 (1957).

- [35] van Driest, E.R., and McCauley, W.D.: Boundary layer transition on a 10 degree cone at Mach number 2.81 as affected by extreme cooling. *JAS* 24, 780-781 (1957).
- [36] van Driest, E.R., and Blumer, C.B.: Boundary layer transition at supersonic speeds. Three-dimensional roughness effects (spheres). *JASS* 29, 909-916 (1962).
- [37] van Driest, E.R., and Blumer, C.B.: Boundary layer transition: Free-stream turbulence and pressure gradient effects. *AIAA J.* 1, 1303-1306 (1963).
- [38] Dryden, H.L.: Recent advances on the mechanics of boundary layer flow (R. v. Mises, and Th. v. Kármán, ed.). *Advances in Appl. Mech* 1, 1-40, New York (1948).
- [39] Dryden, H.L.: Review of published data on the effect of roughness on transition from laminar to turbulent flow. *JAS* 20, 477-482 (1953).
- [40] Dryden, H.L.: Effects of roughness and suction on transition from laminar to turbulent flow. *Publ. Scient. et Techn. de Ministère de l'Air Paris (SDJT)* 49-80 (1954).
- [41] Dryden, H.L.: Transition from laminar to turbulent flow at subsonic and supersonic speeds. *Proc. Conference on High-Speed Aeronautics*, New York, 1955, 41-74.
- [42] Dryden, H.L.: Recent investigations on the problem of transition. *ZFW* 4, 89-95 (1956).
- [43] Dunn, W.D., and Lin, C.C.: On the stability of the boundary layer in a compressible fluid. *JAS* 22, 455-477 (1955); see also *JAS* 29, 577 (1953) and 29, 491 (1952).
- [44] Dunning, R.W., and Ulmann, E.F.: Effects of sweep and angle of attack on boundary layer transition on wings at Mach number 4.04. *NACA TN* 3473 (1955).
- [45] Deam, R.E., and Murphy, J.S.: Flat plate boundary layer transition at hypersonic speeds. *AIAA Paper* 65-128 (1965).
- [46] Demetriades, A.: Hypersonic viscous flow over a slender cone. Part III. Laminar instability and transition. *AIAA Paper* 74-535 (1974).
- [47] Diaconis, N.S., Jack, J.R., and Wisniewski, R.J.: Boundary layer transition at Mach 3.12 by cooling and nose blunting. *NACA TN* 3928 (1957).
- [48] Dicristina, V.: Three-dimensional boundary-layer transition on a sharp 8° cone at Mach 10. *AIAA J.* 8, 852-856 (1970).
- [49] Dougherty, Jr., N.S., and Steinle, Jr., F.W.: Transition Reynolds number comparisons in several major transonic tunnels. *AIAA Paper* 74-627 (1974).
- [50] van Driest, E.R., and Blumer, C.B.: Boundary layer transition at supersonic speeds: Roughness effects with heat transfer. *AIAA J.* 6, 603-607 (1968).
- [51] van Driest, E.R., and McCauley, W.D.: The effect of controlled three-dimensional roughness on boundary layer transition at supersonic speeds. *JASS* 27, 261-271 (1960).
- [52] Dunn, D.W., and Lin, C.C.: On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *JAS* 22, 455-477 (1955).
- [53] Davey, A., and Drazin, P.G.: The stability of Poiseuille flow in a pipe. *JFM* 36, 209-218 (1969).
- [54] Ertel, H.: Thermodynamische Begründung des Richardsonschen Turbulenzkriteriums. *Meteorol. Z.* 56, 109 (1939).
- [55] Eckert, E.R.G., and Soehngen, E.: Interferometric studies on the stability and transition to turbulence of a free-convection boundary layer. *Proc. of the General Discussion on Heat Transfer*, Sept. 1951, publ. by Inst. Mech. Eng. London and ASME.
- [56] Everhart, P.E., and Hamilton, H.H.: Experimental investigation of boundary layer transition on a cooled 7.5° total-angle cone at Mach 10. *NASA TN D* 4188 (1967).
- [57] Eckert, E.R.G., Soehngen, E., and Schneider, P.J.: Studien zum Umschlag laminar-turbulent der freien Konvektionsströmung an einer senkrechten Platte. *Fifty Years of Boundary-layer Research* (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), 407-412, 1955.
- [58] Eppler, R.: Ergebnisse gemeinsamer Anwendung von Grenzschicht- und Profiltheorie. *ZFW* 3, 247-260 (1960).
- [59] Eppler, R.: Laminarprofile für Reynoldszahlen grösser als 4·10⁶. *Ing.-Arch.* 38, 232-240 (1969).
- [60] Fage, A., and Preston, J.H.: On transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer. *Proc. Roy. Soc. A* 178, 201-227 (1941).
- [61] Feindt, E.G.: Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. *Diss. Braunschweig* 1956; *Jb. 1956 Schiffbautechn. Gesellschaft* 50, 180-203 (1957).
- [62a] Frenkiel, F.N., Landahl, M.T., and Lumley, L.: Structure of turbulence and drag reduction. *IUTAM Symp.*, Washington, D.C., 7-12 June 1976. *The Physics of Fluids* 20, No. 10, Part II, p. S1-S292, 1977; also B.A. Thom in *Proc. Intern. Congress in Rheology*, North Holland, Amsterdam, Sect. II, p. 135.
- [63] Fischer, M.C.: Turbulent bursts and rings on a cone in helium at Ma = 7.6. *AIAA J.* 10, 1387-1389 (1972).
- [64] Fischer, M.C.: An experimental investigation of boundary layer transition on a 10° half-angle cone at Mach 6.9. *NASA D*-5766 (1970).

- [66] Fischer, M.C., and Weinstein, L.M.: Cone transitional boundary-layer structure. *AIAA J.* 10, 699-701 (1972).
- [66a] Garg, V.K., and Rouleau, W.T.: Linear spatial stability of pipe Poiseuille flow. *JFM* 54, 113-127 (1972).
- [67] Goldstein, S.: A note on roughness. *ARC RM* 1763 (1936).
- [68] Goldstein, S.: The stability of viscous fluids between rotating cylinders. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 33, 41-61 (1937).
- [69] Goldstein, S.: On the stability of superposed streams of fluids of different densities. *Proc. Roy. Soc. A* 132, 523 (1939).
- [70] Goldstein, S.: Low-drag and suction airfoils. 11th Wright Brothers Lecture). *JAS* 15, 189-215 (1948).
- [71] Görtler, H.: Über den Einfluss der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. *ZAMM* 20, 138-147 (1940).
- [72] Görtler, H.: Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. *Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Neue Folge* 2, No. 1 (1940); see also *ZAMM* 21, 250-252 (1941).
- [73] Görtler, H.: Dreidimensionale Instabilität der ebenen Staupunktströmung gegenüber wirbelartigen Störungen. *Fifty Years of Boundary-layer Research* (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), 303-314, Braunschweig, 1955.
- [74] Görtler, H.: Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten. *ZAMM* 35, 362/63 (1955).
- [75] Granville, P.S.: The calculation of viscous drag of bodies of revolution. *Navy Department, The David Taylor Model Basin, Rep. No. 849* (1953).
- [76] Gregory, N., and Walker, S.: The effect on transition of isolated surface excrescences in the boundary layer. *ARC RM* 13, 436 (1950).
- [77] Gregory, N., Stuart, J.T., and Walker, W.S.: On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 248, 155-199 (1955).
- [78] Gaster, M.: A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *JFM* 14, 222-224 (1962).
- [78a] Gaster, M.: On the flow along swept leading edges. *Aero. Quart.* 18, 185-184 (1967).
- [79] Gebhart, B.: Instability, transition and turbulence in buoyancy-induced flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* (M. Van Dyke, ed.) 5, 213-246 (1973).
- [80] Gebhart, B.: Natural convection flows and stability. *Advances in Heat Transfer* 9, 273-348 (1973).
- [81] Gebhart, B.: Natural convection flow, instability and transition. *Trans. ASME Ser. O* 91, 293-309 (1969).
- [82] Granville, P.S.: The prediction of transition from laminar to turbulent flow in boundary layers on bodies of revolution. *Rep. No. 3900 of the Naval Ship Research and Development Center, Bethesda, Maryland, 1974.*
- [83] Görtler, H., and Hassler, H.: Einige neue experimentelle Beobachtungen über das Auftreten von Längswirbeln in Staupunktströmungen. *Schiffstechnik* 20, 67-72 (1973).
- [84] Ginoux, J.J.: Instabilité de la couche limite sur ailes en fèche. *ZFW* 15, 302-305 (1967).
- [85] Hammerlin, G.: Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. *Disa, Freiburg 1954; J. Rat. Mech. Anal.* 4, 279-321; see also *ZAMM* 35, 366-367 (1955).
- [86] Hammerlin, G.: Zur Instabilitätstheorie der ebenen Staupunktströmung. *Fifty Years of Boundary-layer Research* (W. Tollmien and H. Görtler, ed.), 315-327 (1955).
- [87] Harrin, E.N.: A flight investigation of laminar and turbulent boundary layers passing through shock waves at full-scale Reynolds numbers. *NACA TN* 3056 (1953).
- [88] Hausmann, W.: *Flugwehr und Technik*, Zürich 4, 179 (1942).
- [89] Head, M.R.: The boundary layer with distributed suction. *ARC RM* 2783 (1955).
- [90] Hertel, H.: *Struktur, Form, Bewegung*. Series: Biologie und Technik. Krausskopf-Verlag, Mainz, 190-195, 1963.
- [91] Higgins, B.W., and Pappas, C.G.: An experimental investigation of the effect of surface heating on boundary layer transition on a flat plate in supersonic flow. *NACA TN* 2351 (1951).
- [92] Holstein, H.: Messungen zur Laminarhaltung der Reibungsschicht. *Lilienthal-Bericht* S 10 17-27 (1940).
- [93] Huang, L.M., and Chen, T.S.: Stability of developing pipe flow subjected to non-axisymmetrical disturbances. *JFM* 83, 183-193 (1974); see also *Phys. Fluids* 17, 245-247 (1974).
- [94] Van Ingen, J.L.: A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region. *Techn. Univ. Dep. of Aeronautics, Delft, Report V.T.H. 74* (1956).
- [95] Jack, J.R., and Diaconis, N.S.: Variation of boundary-layer transition with heat transfer on two bodies of revolution at a Mach number of 3.12. *NACA TN* 3562 (1955).

- [96] Jacobs, E.N., and Sherman, A.: Airfoil section characteristics as affected by variations of the Reynolds number. NACA TR 586 (1937).
- [97] Jeffreys, H.: The instability of a layer of fluid heated below. *Phil. Mag.* 2, 833-844 (1926); see also *Proc. Roy. Soc. A* 118, 195-208 (1928).
- [98] Jones, B.M.: Flight experiments on the boundary layer. Wright Brothers Lecture. *JAS* 5, 81-102 (1938); also *Aircraft Eng.* 10, 135-141 (1938).
- [99] Jones, B.M., and Head, M.R.: The reduction of drag by distributed suction. *Proc. Third Anglo-American Aero. Conference, Brighton* 199-220 (1951).
- [100] Jack, J.R., and Diaconis, N.S.: Variation of boundary layer transition with heat transfer on two bodies of revolution at a Mach number of 3.12. NACA TN 3562 (1956).
- [101] Jack, J.R., Wisniewski, E.J., and Diaconis, N.S.: Effects of extreme surface cooling on boundary layer transition. NACA TN 4994 (1967).
- [102] Jillic, D.W., and Hopkins, E.J.: Effects of Mach-number, leading-edge bluntness and sweep on boundary-layer transition on a flat plate. NASA TN D-1071 (1961).
- [102] Jones, W.P., and Launder, B.K.: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *J. Heat and Mass Transfer* 15, 301-314 (1972); see also *JFM* 56, 337-351 (1972).
- [104] Jaffe, N.A., Okamura, T.T., and Smith, A.M.O.: Determination of spatial amplification factors and their application to predicting transition. *AIAA J.* 8, 301-308 (1970).
- [105] Kay, J.M.: Boundary layer flow along a flat plate with uniform suction. ARC RM 2628 (1948).
- [106] Kirchgässner, K.: Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylorwirbeln für beliebige Spaltbreiten. *ZAMP* 12, 14-30 (1961).
- [107] Kirchgässner, K.: Einige Beispiele zur Stabilitätstheorie von Strömungen an konkaven und erwärmten Wänden. *Ing.-Arch.* 31, 115-124 (1962).
- [107a] Klebanoff, P.S., and Tidstrom, K.D.: Mechanism by which a two-dimensional roughness element induces boundary layer transition. *Phys. of Fluids* 15, 1173-1188 (1972).
- [107b] Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., and Sargent, J.: The three-dimensional nature of boundary layer instability. *JFM* 12, 1-34 (1962); see also *JAS* 22, 803-804 (1955).
- [108] Korkegi, R.H.: Transition studies and skin-friction measurements on an insulated flat plate at a Mach number of 5.8. *JAS* 23, 97-102 (1956).
- [109] Krämer, K.: Über die Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschichtumschlag. *ZFW* 9, 20-27 (1961).
- [110] Kramer, M.O.: Boundary layer stabilization by distributed damping. *J. Amer. Soc. Naval Eng.* 72, 25-33 (1960).
- [111] Krüger, H.: Über den Einfluss der Absaugung auf die Lage der Umschlagstelle an Tragflügelprofilen. *Ing.-Arch.* 19, 384-387 (1951).
- [112] Küchemann, D.: Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht. *ZAMM* 18, 207-222 (1938); Diss. Göttingen 1938; see also note by H. Görtler, *ZAMM* 23, 179-183 (1943).
- [113] Kuethe, A.M.: On the character of the instability of the laminar boundary layer near the nose of a blunt body. *JAS* 25, 333-339 (1958).
- [114] Kendall, J.M.: Supersonic boundary layer stability experiments. *Proc. Boundary Layer Transition Study Group Meeting (W.D. McCauley, ed.), II, Aerospace Corp., Cal., 1967.*
- [115] Kendall, J.M.: Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary-layer transition. *AIAA J.* 13, 290-299 (1975).
- [116] Koschmieder, E.L.: Taylor vortices between eccentric cylinders. *Phys. of Fluids* 19, 1-4 (1976).
- [117] Krogmann, P.: An experimental investigation of laminar and transitional heat transfer to a sharp slender cone at $Ma_\infty = 5$, including effects of angle of attack and circumferential heat transfer. Diss. Braunschweig 1976; *AIAA Paper* 74-628 (1974); see also *ZFW* 1, 101-115 (1977).
- [117a] Küchemann, D.: Störungsbewegung in einer Gasströmung mit Grenzschicht. Diss. Göttingen 1938. *ZAMM* 18, 207-222 (1938).
- [118] Kestin, J., and Wood, R.T.: On the stability of two-dimensional stagnation flow. *JFM* 44, 461-479 (1970).
- [119] Kaye, J., and Elgar, E.C.: Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with inner rotating cylinder. *Trans. ASME* 80, 753-766 (1958).
- [120] Landahl, M.T.: On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. *JFM* 13, 609-632 (1962).
- [121] Laufer, J., and Vrebalovich, Th.: Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on a flat plate. *JFM* 9, 257-299 (1960).
- [122] Lees, L., and Lin, C.C.: Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NACA TN 1115 (1946).

- [123] Lees, L.: The stability of the laminar boundary layer in a compressible flow. NACA TN 1360 (1947) and NACA Rep. 876 (1947).
- [124] Lees, L.: Comments on the "Effect of surface cooling on laminar boundary layer stability". JAS 18, 844 (1951).
- [125] Leite, R. J.: An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow. JFM 5, 81-96 (1959).
- [126] Lessen, M., and Gangwani, S. T.: Effect of wall small amplitude waviness on the stability of the laminar boundary layer. Phys. Fluids 19, 510-513 (1976).
- [126a] Lessen, M., and Singh, P. J.: The stability of axisymmetric free shear layers. JFM 60, 433-457 (1973).
- [126b] Lessen, M., Singh, P. J., and Paillet, F. L.: Stability of a trailing line vortex. Part I: Inviscid theory. JFM 65, 753-763 (1974).
- [126c] Lessen, M., and Paillet, F. L.: Stability of a trailing line vortex. Part II: Viscous theory. JFM 65, 769-779 (1974).
- [127] Liepmann, H. W.: Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. ARC RM 7802 (1943).
- [128] Liepmann, H. W.: Investigation of boundary layer transition on concave walls. NACA Wartime Rep. W-87 (1945).
- [129] Liepmann, H. W., and Fila, G. H.: Investigations of effect of surface temperature and single roughness elements on boundary layer transition. NACA TN 1196 (1947) and NACA Rep. 890 (1947).
- [130] Lindgren, E. R.: Liquid flow in tubes I, II and III. Archiv für Physik 15, 97 (1959); 15, 3 (1959) and 103 (1959).
- [131] Linke, W.: Über den Strömungswiderstand einer beheizten ebenen Platte. Luftfahrtforschung 19, 157-160 (1942).
- [132] Ludwig, H.: Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum. ZFW 8, 135-140 (1960).
- [133] Ludwig, H.: Ergänzung zu der Arbeit "Stabilität der Strömung in einem zylindrischen Ringraum". ZFW 9, 369-361 (1961).
- [134] Ludwig, H.: Experimentelle Nachprüfung der Stabilitätstheorien für reibungsfreie Strömungen mit schraubenlinienförmigen Stromlinien. ZFW 12, 304-309 (1964).
- [135] Laufer, J.: Factors affecting transition Reynolds numbers on models in supersonic wind tunnels. JAS, 21, 497-498 (1954).
- [136] Laufer, J.: Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels. JASS 28, 686-692 (1961).
- [137] Laufer, J.: Some statistical properties of the pressure field radiated by a turbulent boundary layer. Phys. Fluids 7, 1191-1197 (1964).
- [138] Laufer, J., and Marte, J. E.: Results and a critical discussion of transition-Reynolds-number measurements on insulated cones and flat plates in supersonic wind tunnels. Jet Propulsion Lab., Pasadena, Calif., Rep. 20-96 (1955).
- [139] Laufer, J., and Vrebalovich, T.: Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on a flat plate. JFM 9, 257-299 (1960).
- [140] Lees, L.: The stability of the laminar boundary layer in a compressible flow. NACA TN 1360 (1947) and NACA Rep. 876 (1947).
- [141] Lees, L., and Lin, C. C.: Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NACA TN 1115 (1946).
- [142] Lees, L., and Reshotko, E.: Stability of the compressible laminar boundary layer. JFM 12, 555-590 (1962).
- [143] Liepmann, H. W., and Fila, G.: Investigations of effect of surface temperature and single roughness elements on boundary-layer transition. NACA TN 1196 (1947) and NACA Rep. 890 (1947).
- [144] Lin, C. C.: The theory of hydrodynamic stability (Chap. 5). Cambridge University Press, 1965.
- [145] Linke, W.: Über den Strömungswiderstand einer beheizten ebenen Platte. Luftfahrtforschung 19, 157-160 (1942).
- [146] Lowell, R. L., and Reshotko, E.: Numerical study of the stability of a heated, water boundary layer. Div. Fluid, Thermal and Aero. Sci., Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, Rep. FTAS-TR 73-93 (1974).
- [147] Lloyd, J. R., and Sparrow, E. M.: On the instability of natural convection flow on inclined plates. JFM 42, 465-470 (1970).
- [148] Lessen, M., Sadler, S., and Liu, T. Y.: Stability of pipe Poiseuille flow. Phys. Fluids 11, 1404-1409 (1968).
- [149] Meksyn, D.: Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. Proc. Roy. Soc. A 203, 253-265 (1950).
- [150] Michel, R.: Etude de la transition sur les profils d'aile; établissement d'un critère de détermination du point de transition et calcul de la traînée de profil en incompressible. ONERA Rapport 1/1578 A (1951).

- [151] Mack, L.M.: Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer. *Methods in Computational Physics* (B. Alder, ed.) 4, 247-299, Academic Press, 1965.
- [152] Mack, L.M.: The stability of the compressible laminar boundary layer according to a direct numerical solution. *AGARDograph* 97, Part 1, 483-501 (1965).
- [153] Mack, L.M.: Boundary layer stability theory. Jet Propulsion Lab., Pasadena, Calif., Rep. 900-277 (1969).
- [154] Mack, L.M.: Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition. *AIAA J.* 13, 278-289 (1975).
- [155] Mack, L.M.: A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory. *Proc. Conf. on Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers*, NASA Sp-347 (1975).
- [156] Maddalon, D.V.: Effect of varying wall temperature and total temperature on transition Reynolds number at Mach 6-8. *AIAA J.* 7, 2355-2357 (1969).
- [157] Maddalon, D.V., and Henderson, T.A.: Hypersonic transition studies on a slender cone at small angles of attack. *AIAA J.* 6, 176-177 (1968).
- [158] Marvin, J.G., and Akin, C.M.: Combined effects of mass addition and nose bluntness on boundary-layer transition. *AIAA J.* 8, 857-863 (1970).
- [159] Mateer, G.G.: Effect of wall cooling and angle of attack on boundary-layer transition on sharp cones at $M_\infty = 7.4$. *NASA TN D-6908* (1972).
- [160] Morkovin, M.V.: Critical evaluation of transition from laminar to turbulent shear layers with emphasis on hypersonically traveling bodies. *Air Force Flight Dynamics Lab., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, TR 68-149* (1969).
- [161] Munson, B.R., and Joseph, D.D.: Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part I: Basic flow. *JFM* 49, 289-304 (1971).
- [162] Munson, B.R., and Joseph, D.D.: Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part II: Hydrodynamic stability. *JFM* 49, 305-318 (1971).
- [163] Munson, B.R., and Menguturk, M.: Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part III: Linear stability and experiments. *JFM* 69, 706-719 (1975).
- [164] Mackrodt, P.A.: Stabilität von Hagen-Poiseuille-Strömungen mit überlagerter starrer Rotation. *Mitt. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und AVA No. 65, Göttingen* (1971); see also *ZAMM* 53, T 111-T 112 (1973).
- [165] Mackrodt, P.A.: Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation. *JFM* 73, 153-164 (1976).
- [166] Michel, R.: Détermination du point de transition et calcul de la traînée des profils d'ailes en incompressible. *ONERA Publ. No. 58* (1952).
- [167] Nachtsheim, P.R.: Stability of the free convection boundary layer flow. *NACA TN D 2089* (1963).
- [168] Narasimha, R., and Sreenivasan, K.R.: Relaminarization in highly accelerated turbulent boundary layers. *JFM* 61, 417-447 (1973).
- [169] Pekeris, C.L.: Stability of the laminar flow through a straight pipe in infinitesimal disturbances which are symmetrical about the axis of the pipe. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington* 34, 285 (1948).
- [170] Piercy, N.A.V., and Richardson, E.G.: The variation of velocity amplitude close to the surface of a cylinder moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.* 6, 970-976 (1928).
- [171] Piercy, N.A.V., and Richardson, E.G.: The turbulence in front of a body moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.* 9, 1038-1041 (1930).
- [172] Potter, J.L., and Whitfield, J.D.: Effects of slight nose bluntness and roughness on boundary layer transition in supersonic flows. *JFM* 12, 501-535 (1962).
- [173] Prandtl, L.: Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. *Lectures on aerodynamics and related fields*, Aachen, 1929, 1-10; Berlin, 1930; see also *Coll. Works II*, 778-785.
- [174] Prandtl, L., and Reichardt, H.: Einfluss von Wärmeschichtung auf die Eigenschaften einer turbulenten Strömung. *Dt. Forschung No. 21*, 110-121 (1934); see also *Coll. Works II*, 846-854.
- [175] Prandtl, L.: Bericht über neuere Untersuchungen über das Verhalten der laminaren Reibungsschicht, insbesondere den laminar-turbulenten Umschlag. *Mitt. dt. Akad. Luftfahrtforschung* 2, 141 (1942).
- [176] Pretsch, J.: Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. *Luftfahrtforschung* 18, 341-344 (1941).
- [177] Pretsch, J.: Über die Stabilität der Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. *ZAMM* 21, 204-217 (1941).
- [178] Pretsch, J.: Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 58-75 (1941).
- [179] Pretsch, J.: Die Anfängung instabiler Strömungen in einer laminaren Reibungsschicht. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 54-71 (1942).
- [180] Pretsch, J.: Umschlagbeginn und Absaugung. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 1-7 (1942).

- [181] Pate, S.R.: Measurements and correlations of transition Reynolds numbers on sharp slender cones at high speeds. *AIAA J.* 9, 1082-1090 (1971).
- [182] Pate, S.R., and Groth, E.E.: Boundary-layer transition measurements on swept wings with supersonic leading edge. *AIAA J.* 4, 737-739 (1966).
- [183] Pate, S.R., and Schueler, C.J.: An investigation of radiated aerodynamic noise effects on boundary-layer transition in supersonic and hypersonic wind tunnels. *AIAA J.* 7, 450-457 (1969).
- [184] Potter, J.L.: Observations on the influence of ambient pressure on boundary-layer transition. *AIAA J.* 6, 1907-1911 (1968).
- [185] Potter, J.L., and Whitfield, J.D.: Effects of unit Reynolds number, nose bluntness and roughness on boundary layer transition. AGARD Rep. 256 (1960).
- [187] Potter, J.L., and Whitfield, J.D.: Boundary-layer transition under hypersonic conditions. AGARDograph 97, Part 3, 1-61 (1965).
- [188] Pedley, T.J.: On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe. *JFM* 35, 97-115 (1969).
- [189] Patel, V.C., and Head, M.R.: Reversion of turbulent to laminar flow. *JFM* 34, 371-392 (1968).
- [190] Lord Rayleigh: On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside. *Phil. Mag.* 32, 529 (1916) or *Scientific Papers* 6, 432-446.
- [191] Lord Rayleigh: On the dynamics of revolving fluids. *Proc. Roy. Soc. A* 93, 143-164 (1916); reprinted in *Scientific Papers*, 6, 447-453.
- [192] Richardson, L.F.: The supply of energy from and to atmospheric eddies. *Proc. Roy. Soc. A* 97, 354-373 (1926).
- [193] Riegels, F.: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. *Ing.-Arch.* 16, 373-376 (1948) and 17, 94-106 (1949).
- [194] Reshotko, E.: Stability theory as a guide to the evaluation of transition data. *AIAA J.* 7, 1086-1091 (1969).
- [194a] Reshotko, E.: Boundary layer stability and transition. *Annual Review of Fluid Mechanics* (M. Van Dyke, ed.) 8, 311-349 (1976).
- [194b] Reshotko, E.: Transition reversal and Tollmien-Schlichting instability. *Phys. of Fluids* 6, 335-342 (1963).
- [195] Richards, B.E., and Stollery, J.L.: Transition reversal on a flat plate at hypersonic speeds. AGARDograph 97, Part 1, 477-489 (1965).
- [196] Richards, B.E., and Stollery, J.L.: Further experiments on transition reversal at hypersonic speeds. *AIAA J.* 4, 2224-2226 (1966).
- [197] Sato, H., and Kuriki, K.: The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *JFM* 11, 321-352 (1961).
- [197a] Sarpkaya, T.: A note on the stability of developing laminar pipe flow subjected to axisymmetric and non-axisymmetric disturbances. *JFM* 68, 345-351 (1975).
- [197b] Sarpkaya, T.: Evolution of small disturbances in the laminar transition region of Hagen-Poiseuille flow. *Ann. Rep. Nat. Sci. Foundation. N U Hydro Rep. No. 027. TS* (1964).
- [197c] Salwen, H., and Grosch, C.E.: Stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross section. *JFM* 54, 93-112 (1972).
- [198] Schlichting, H.: Über die Stabilität der Couette-Strömung. *Ann. d. Phys.* 7, 905-936 (1932).
- [199] Schlichting, H.: Turbulenz der Wärmeschichtung. *ZAMM* 15, 313-338 (1935); see also *Proc. Fourth Int. Congr. Appl. Mech.* 245, Cambridge, 1935.
- [200] Schlichting, H., and Ulrich, A.: Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 8-35 (1942). Detailed presentation in Report of the Lilienthal-Gesellschaft S 10, 75-135 (1940).
- [201] Schlichting, H.: Die Beeinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Anblasen. *Jb. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung* 90-108 (1943/44).
- [202] Schiller, L.: *Handbuch der Experimental-Physik IV. Part 4, 1-207, Leipzig, 1932.*
- [203] Schubauer, G.B., and Skramstad, H.K.: Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1772 (1943); *JAS* 14, 69-78 (1947); see also NACA Rep. 909 (1947).
- [204] Schultz-Grunow, F., and Hein, H.: Beitrag zur Couette-Strömung. *ZFW* 4, 28-30 (1956).
- [204a] Schultz-Grunow, F., and Behbahani, D.: Boundary layer stability at longitudinally curved walls. *ZAMP* 24, 499-506 (1973) and *ZAMP* 26, 493-495 (1975).
- [204b] Schultz-Grunow, F.: Zur Stabilität der Couette-Strömung. *ZAMM* 39, 101-110 (1959).
- [204c] Schultz-Grunow, F.: The stability of Couette flow with respect to two-dimensional perturbations. In W. Fiszdon (ed.): *Fluid Dynamics Transaction 3*, 83-93, Warszawa, 1967.
- [204d] Schultz-Grunow, F.: Exakte Zugänge zu hydrodynamischen Problemen. 18. Ludwig Prandtl Memorial Lecture, *ZFW* 23, 175-183 (1975).
- [205] SEXT, Th.: Zur Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen und der Couette-Strömung. *Ann. Phys.* (4) 33, 335-348 (1927).

- [206] Sexl, Th., and Spielberg, K.: Zum Stabilitätsproblem der Poiseuille-Strömung. *Acta Phys. Austriaca* 12, 9-28 (1958).
- [207] Shapiro, N.M.: Effects of pressure gradient and heat transfer on the stability of the compressible laminar-boundary layers. *JAS* 23, 81-83 (1956).
- [208] Shen, S., and Persh, J.: The limiting wall temperature ratios required for complete stabilization of laminar boundary layers with blowing. *JAS* 23, 286-287 (1956).
- [209] Silverstein, A., and Becker, J.V.: Determination of boundary layer transition on three symmetrical airfoils in the NACA full-scale wind tunnel. *NACA TR* 637 (1938).
- [210] Smith, A.M.O.: On the growth of Taylor-Görtler vortices along highly concave walls. *Quart. Appl. Math.* 13, 233-262 (1955).
- [211] Smith, A.M.O.: Transition pressure gradient and stability theory. Paper presented at the IX. Intern. Congress of Appl. Mech. 4, 234-244, Brussels, 1957; see also *JASS* 26, 229-245 (1959).
- [212] Speidel, L.: Beeinflussung der laminaren Grenzschicht durch periodische Störungen der Zuströmung. *ZFW* 5, 270-275 (1957).
- [213] Stalder, J.R., Rubesin, M.W., and Tendeland, T.H.: A determination of the laminar-transitional- and turbulent-boundary-layer temperature-recovery factor on a flat plate in supersonic flow. *NACA TN* 2077 (1950).
- [214] Stendor, W.: Laminarprofil-Messungen des NACA, eine Auswertung zur Gewinnung allgemeiner Erkenntnisse über Laminarprofile. *Luftfahrttechnik* 2, 218-227 (1956).
- [215] Sternberg, J.: A free-flight investigation of the possibility of high Reynolds-number supersonic laminar boundary layers. *JAS* 19, 721-733 (1952).
- [216] Sternberg, J.: The transition from a turbulent to a laminar boundary layer. *Ballistic Research Laboratories Rep.* 906 (1954), Aberdeen Proving Ground, Maryland, USA.
- [217] Stuart, J.T.: On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field. *Proc. Roy. Soc. London A* 221, 189-206 (1954).
- [218] Stuart, J.T.: On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. *JFM* 4, 1-21 (1958).
- [219] Stuart, J.T.: On three-dimensional non-linear effects in the stability of parallel flows. *Advances in Aeronautical Sciences* (Th. v. Kármán, ed.) 3, 121-142. Pergamon Press, New York/London, 1962.
- [220] Stüper, J.: Der Einfluss eines Stolperdrahtes auf den Umschlag der Grenzschicht an einer ebenen Platte. *ZFW* 1, 30-34 (1956).
- [221] Sanator, R.J., De Carlo, J.F., and Torillo, D.J.: Hypersonic boundary layer transition data for a cold wall slender cone. *AIAA J.* 3, 758-760 (1965).
- [222] Schlichting, H.: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, 192-208 (1933).
- [223] Sheetz, N.W., Jr.: Boundary-layer transition on cones at hypersonic speeds. *Proc. Symposium on Viscous Drag Reduction* (S. G. Spangler and C. S. Wells, Jr., ed.), Plenum Press (1969).
- [223a] Sibulkin, M.: Transition from turbulent to laminar pipe flow. *Phys. of Fluids* 5, 280-284 (1962).
- [224] Steinbeck, P.C.: Effects of unit Reynolds number, nose bluntness, angle of attack, and roughness on transition on a 5° half-angle cone at Mach 8. *NASA TN D-4961* (1969).
- [225] Sternberg, J.: A free-flight investigation of the possibility of high Reynolds-number supersonic laminar boundary layers. *JAS* 19, 721-733 (1952).
- [226] Stetson, K.F., and Rushton, G.H.: Shock tunnel investigation of boundary layer transition at $M = 5.6$. *AIAA J.* 5, 899-900 (1967).
- [227] Strazisar, A., Prah, J.M., and Reshotko, E.: Experimental study of the stability of heated laminar boundary layers in water. Report FTAS/TR 75-113, Dept. of Fluid Thermal and Aero. Sci. Case Western Reserve Univ. (1975).
- [227a] Stuart, J.T.: Hydrodynamic stability. In: Rosenhead, L. (ed.): *Laminar boundary layers*, pp. 492-579. Clarendon Press, Oxford, 1963.
- [228] Sparrow, E.M., and Husar, R.B.: Longitudinal vortices in natural convection flow on inclined plates. *JFM* 37, 251-253 (1969).
- [229] Szewczyk, A.: Stability and transition of the free-convection layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 5, 903-914 (1962).
- [230] Sawatzki, O., and Zierep, J.: Das Stromfeld im Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, von denen die innere rotiert. *Acta Mechanica* 9, 13-25 (1970); see also *ZAMM* 50, 205-208 (1970) and *Eighth Symposium on Naval Research*, SRC-179, 275-287 (1970).
- [231] Sexl, Th.: Über dreidimensionale Störungen der Poiseuilleschen Strömung. *Ann. Phys.* 83, 835 (1927).
- [232] Sadeh, W.S., Sutera, S.P., and Maeder, P.F.: Analysis of vorticity amplification in the flow approaching a two-dimensional stagnation point. *ZAMP* 21, 699-716 (1970).
- [233] Sadeh, W.S., Sutera, S.P., and Maeder, P.F.: An investigation of vorticity amplification in stagnation flow. *ZAMP* 21, 717-742 (1970).

- [234] Tani, I. and Mituisi, S.: Contributions to the design of aerofoils suitable for high speeds. Aero. Res. Inst. Tokyo, Imp. Univ. Rep. 108 (1940).
- [235] Tani, I., Hama, R. and Mituisi, S.: On the permissible roughness in the laminar boundary layer. Aero. Res. Inst. Tokyo, Imp. Univ. Rep. 199 (1940).
- [236] Tani, I. and Hama, T.: Some experiments on the effects of a single roughness element on boundary layer transition. *JAS* 20, 289-290 (1953).
- [237] Tani, I., Juchi, M., and Yamamoto, K.: Further experiments on the effect of a single roughness element on boundary layer transition. Rep. Inst. Sci. Technol. Tokyo, Univ. 8 (Aug. 1954).
- [238] Tani, I.: Boundary layer transition. *Annual Review of Fluid Mech.* 1, 169-196 (1969).
- [238a] Tatsumi, T.: Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime. Part I: *J. Phys. Soc. Japan* 7, 489-495 (1952); Part II: *J. Phys. Soc. Japan* 7, 495-502 (1952).
- [238b] Tani, I. and Sato, H.: Boundary layer transition by roughness elements. *J. Phys. Soc. Japan* 11, 1284-1291 (1956); see also IX^e Congrès International de Mécanique Appliquée, Actes, IV, 86-93 (1957).
- [239] Taylor, G.I.: Internal waves and turbulence in a fluid of variable density. *Rapp. Proc. Verb. Cons. Internat. pour l'Exploration de la Mer. LXXVI* Copenhagen, 35-42 (1931).
- [240] Taylor, G.I.: Effects of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. *Proc. Roy. Soc. A* 132, 499-523 (1931).
- [241] Taylor, G.I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. A* 228, 289-343 (1923); see also *Proc. Roy. Soc. A* 151, 494-512 (1935) and 157, 548-564 and 565-578 (1936).
- [242] Theodoreson, T., and Garrick, J.: General potential theory of arbitrary wing section. *NACA TR* 452 (1933).
- [243] Ulrich, A.: Theoretische Untersuchungen über die Widerstandsersparnis durch Laminarhaltung mit Absaugung. *Schriften dt. Akad. d. Luftfahrtforschung* 8 B, No. 2 (1944).
- [244] Wendt, F.: Turbulente Strömung zwischen zwei rotierenden koaxialen Zylindern. *Diss. Göttingen* 1934. *Ing.-Arch.* 4, 577-595 (1933).
- [245] Wijker, H.: On the determination of the transition point from measurements of the static pressure along a surface. *Holl. Ber. A* 1210 (1951).
- [246] Wijker, H.: Survey of transition point measurements at the NLL, mainly for two-dimensional flow over a NACA 0018 profile. *Holl. Ber. A* 1269 (1951).
- [247] Wuest, W.: Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitz. *Ing.-Arch.* 21, 90-103 (1953).
- [248] Wuest, W.: Stabilitätsmindernde Einflüsse der Absaugungsgrenzschichten. *ZFW* 4, 81-84 (1956).
- [249] Wazzan, A.R., Okamura, T., and Smith, A.M.O.: The stability of water flow over heated and cooled flat plates. *J. Heat Transfer* 90, 109-114 (1968).
- [250] Wazzan, A.R., Okamura, T., and Smith, A.M.O.: The stability in incompressible flat plate laminar boundary layer in water with temperature dependent viscosity. *Proc. Sixth Southeastern Seminar on Thermal Sciences*, Raleigh, N. C., 184-202 (1970).
- [251] Wazzan, A.R., Okamura, T., and Smith, A.M.O.: The stability and transition of heated and cooled incompressible laminar boundary layers. *Proc. Fourth Int. Heat Transfer Conf.* (U. Grigull and E. Hahne, ed.), 2, FC 1-4, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1970.
- [252] Wazzan, A.R., Okamura, T., and Smith, A.M.O.: Stability of laminar boundary layers at separation. *Phys. of Fluids*, 10, 2540-2545 (1967).
- [253] Wilkins, M.E., and Tauber, M.E.: Boundary layer transition on ablating cones at speeds up to 7 km/sec. *AIAA J.* 4, 1344-1348 (1966).
- [254] Wiegardt, K.: *Theoretische Strömungslehre*. Teubner, Stuttgart, 1965.
- [255] Wortmann, F.X.: Experimentelle Untersuchungen laminarer Grenzschichten bei instabiler Schichtung. *Proc. Eleventh Int. Congress of Appl. Mech.* München 1964, 815-825 (1965).
- [256] Wortmann, F.X.: Längswirbel in instabilen laminaren Grenzschichten. *Der Ingenieur* 83, L 52-L 60 (1971).
- [257] Wortmann, F.X.: Visualization of transition. *JFM* 38, 473-480 (1969).
- [258] Wortmann, F.X.: The incompressible fluid motion downstream of two-dimensional Tollmien-Schlichting waves. *AGARD Conf. Proc.* 224, 12-1 to 12-8 (1977).
- [259] Zimmermann, G.: Wechselwirkungen zwischen turbulenten Wandgrenzschichten und flexiblen Wänden. *Bericht 10/1974 of the Max-Planck-Institut Göttingen*, 1974.

第十八章

- [1] Batchelor, G.K.: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge, 1953, reprint 1970.
- [1a] Blake, W.K.: Turbulent boundary layer wall pressure fluctuations on smooth and rough wall. *JFM* 44, 637-660 (1970).

- [2] Bradshaw, P.: *An introduction to turbulence and its measurement*. Pergamon Press, 1971.
- [3] Bowden, K.F., Frenkiel, F.N., and Tani, I. (ed.): *Boundary layers and turbulence*. Proc. IUGG/IUFAM Symp. Kyoto 1966, Phys. Fluids Suppl. (1967).
- [3a] Bull, M.K.: Wall pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary flow. *JFM* 28, 719-754 (1967).
- [4] Burgers, J.M.: A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Appl. Mech.* Vol. 1 (R. von Mises and Th. von Kármán, ed.), New York, 1948.
- [5] Charney, G., Comte-Bellot, G., and Mathieu, J.: Development of a turbulent boundary layer on a flat plate in an external turbulent flow. *AGARD Conf. Proc.* 93, 27.1-27.10 (1971).
- [6] Cooper, R.D., and Tulin, M.P.: Turbulence measurements with the hot-wire anemometer. *AGARDograph* No. 12 (1955).
- [7] Corrsin, S.: Turbulence, experimental methods. *Handb. Physik* (S. Flügge, ed.), Vol. VIII/2 Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963.
- [8] Dryden, H.L., and Kuethe, A.M.: Effect of turbulence in wind-tunnel measurements. *NACA Rep.* 342 (1929).
- [9] Dryden, H.L.: Reduction of turbulence in wind tunnels. *NACA Rep.* 392 (1931).
- [10] Dryden, H.L., Schubauer, G.B., Mock, W.C., and Skramstad, H.K.: Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres. *NACA Rep.* 581 (1937).
- [11] Dryden, H.L.: Turbulence investigations at the National Bureau of Standards. *Proc. Fifth Intern. Congress of Appl. Mech.*, p. 362 (1938).
- [12] Dryden, H.L.: Turbulence and the boundary layer. *JAS* 6, 85-100 (1939).
- [13] Dryden, H.L., and Schubauer, G.B.: The use of damping screens for the reduction of wind-tunnel turbulence. *JAS* 14, 221-228 (1947).
- [14] Dryden, H.L., and Abbott, J.H.: The design of low turbulence wind tunnels. *NACA TN* 1755 (1948).
- [15] Emmerling, R.: Die momentane Struktur des Wanddruckes einer turbulenten Strömung. *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt*, No. 56 (1973); see also: Emmerling, R., Meier, G.E.A., and Dinkelacker, A.: Investigation of the instantaneous structure of the wall pressure under a turbulent boundary layer flow. *AGARD Conf. Proc. No. 131 on Noise Mechanisms*, 24.1-24.12 (1974).
- [16] Favre, A.J., Gaviglio, J.J., and Dumas, R.J.: Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer. *JFM* 2, 313-342 (1957); Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer. *JFM* 3, 344-356 (1958).
- [17] Favre, A.J.: *La mécanique de la turbulence*. Edited by Centre National de la Recherche Scientifique, No. 108, Paris, 1962.
- [17a] Fiedler, H. (ed.): *Structure and mechanisms of turbulence*, Vol. I and II. *Proceedings*, Berlin, 1977. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 75 and 76, Springer Verlag, 1978.
- [18] Frenkiel, F.N.: *Turbulence in Geophysics*. Publ. by the American Geophysical Union, Washington, D. C., 1962.
- [18a] Friedlander, S.K., and Topper, L. (ed.): *Turbulence: Classic papers on statistical theory*. Interscience Publ., New York, 1961.
- [18b] Goering, H. (ed.): *Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz*. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [19] Green, J.E.: On the influence of free stream turbulence on a turbulent boundary layer, as it relates to wind tunnel. *AGARD Rep. No.* 602 (1973).
- [19a] Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Z. Phys.* 124, 628-657 (1948).
- [20] Hinze, J.O.: *Turbulence*. McGraw-Hill, New York, 2nd ed. 1975.
- [21] Hoerner, S.: Versuche mit Kugeln betreffend Kennzahl, Turbulenz und Oberflächenbeschaffenheit. *Luftfahrtforschung* 12, 42 (1934).
- [22] Huffmann, G.D., Zimmermann, D.R., and Bennett, W.A.: The effect of free stream turbulence level on turbulent boundary layer behaviour. *AGARDograph* 164, 89-115 (1972).
- [23] von Kármán, Th.: Progress in the statistical theory of turbulence. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington* 34, 530 (1948); see also *Coll. Works IV*, 362-371.
- [24] Klebanoff, P.S., and Diehl, Z.W.: Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient. *NACA Rep.* 1110 (1952).
- [25] Klebanoff, P.S.: Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA Rep.* 1247 (1955).
- [25a] Kim, H.T., Kline, S.J., and Reynolds, W.C.: The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *JFM* 50, 133-160 (1971).
- [26] Kline, S.J., Reynolds, W.C., Schaub, F.A., and Runstadler, P.W.: The structure of turbulent boundary layers. *JFM* 30, 741-773 (1967).

- [27] Kovasznay, L.S.G.: Turbulent measurements. Sec. F. of Physical Measurements in Gas-dynamics and Combustion. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. IX (W.R. Ladenburg, ed.), Princeton University Press, 1954, 213-285.
- [28] Kovasznay, L.S.G., Kibens, V., and Blackwelder, R.F.: Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. *JFM* 41, 283-325 (1970).
- [29] Kovasznay, L.S.G.: The turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mech.* 2, 95-112 (1970).
- [30] Laufer, J.: Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. NACA Rep. 1063 (1951).
- [31] Laufer, J.: New trends in experimental turbulence research. *Annual Review of Fluid Mech.* 7, 307-326 (1975).
- [32] Laufer, J.: The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA Rep. 1174 (1954).
- [33] Laurence, J.C.: Intensity, scale, and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. NACA Rep. 1292 (1956).
- [34] Leslie, D.C.: Developments in the theory of turbulence. Clarendon Press, Oxford, 1973.
- [35] Lin, C.C.: Statistical theories of turbulence. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion Vol. V, Sec. C, 193-253 (1959), Princeton.
- [36] Lin, C.C., and Reid, W.H.: Turbulent flow, theoretical aspects. *Handb. Physik* (S. Flügge, ed.) Vol. VIII/2, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963.
- [36a] Maréchal, J.: Etude expérimentale de la déformation plane d'une turbulence homogène. *J. Mécanique* 11, 263-294 (1972).
- [36b] Meier, H.U., and Kreplin, H.P.: The influence of turbulent velocity fluctuations and integral length scale of low speed windtunnel flow on the boundary layer development. AIAA 10th Aerodynamic Testing Conference, San Diego, Cal., April 1978. Conf. Proc. No. 783, 232-238 (1978).
- [37] Millikan, C.B., and Klein, A.L.: The effect of turbulence. *Aircraft Eng.* 169 (1933).
- [38] Motzfeld, H.: Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen. *ZAMM* 18, 362-366 (1938).
- [38a] Mulhearn, P.J.: On the structure of pressure fluctuations in turbulent shear flow. *JFM* 71, 801-813 (1975).
- [39] Nikuradse, J.: Kinematographische Aufnahme einer turbulenten Strömung. *ZAMM* 9, 495-496 (1929).
- [40] Platt, R.C.: Turbulence factors of NACA wind tunnel as determined by sphere tests. NACA Rep. 558 (1936).
- [41] Reichardt, H.: Messungen turbulenter Schwankungen. *Naturwissenschaften* 404 (1938); see also *ZAMM* 13, 177-180 (1933) and *ZAMM* 18, 358-361 (1939).
- [42] Rotta, J.C.: Turbulente Strömungen. B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.
- [43] Reynolds, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 186, A 123-164 (1895) and *Sci. Papers* 1, 355.
- [44] Ribner, H.S., and Tucker, M.: Spectrum of turbulence in a contracting stream. NACA Rep. 1113 (1953).
- [45] Rosenblatt, M., and van Atta, C. (ed.): Statistical models and turbulence. *Proc. Symp. Univ. California, San Diego (La Jolla)*, 1971. In: *Lecture Notes in Physics* 12, Springer-Verlag, 1972.
- [46] Rotta, J.C.: Turbulent boundary layers in incompressible flow. *Progress in Aeronautical Sciences* 2, 1-219 (A. Ferri, D. Küchemann and L.H.G. Sterne, ed.), Pergamon Press, Oxford, 1962.
- [47] Taylor, G.I.: The spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* 164, 476-490 (1938).
- [47a] Schlichting, H.: Neuere Untersuchungen über die Turbulenzentstehung. *Naturwissenschaften* 22, 376-381 (1934).
- [48] Schlichting, H.: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1*, 47-78 (1935).
- [49] Schubauer, G.B., and Dryden, H.L.: The effect of turbulence on the drag of flat plates. NACA Rep. 546 (1935).
- [50] Schubauer, G.B., and Klebanoff, P.S.: Investigation of separation of the turbulent boundary layer. NACA Rep. 1030 (1951).
- [51] Simmons, L.F.G., and Salter, C.: An experimental determination of the spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* 165, 73-89 (1938).
- [52] Taylor, G.I.: Statistical theory of turbulence. Parts 1-4. *Proc. Roy. Soc. London A* 151, 421-478 (1936).
- [53] Taylor, G.I.: Statistical theory of turbulence. Part 5, Effect of turbulence on boundary layer. Theoretical discussion of relationship between scale of turbulence and critical resistance of spheres. *Proc. Roy. Soc. London A* 151, 307-317 (1936); see also *JAS* 4, 311-315 (1937).
- [54] Taylor, G.I.: Correlation measurements in turbulent flow through a pipe. *Proc. Roy. Soc. A* 167, 537-546 (1936).

- [55] Taylor, G.I.: The spectrum of turbulence. Proc. Roy. Soc. London A 184, 476—490 (1938).
- [56] Tennekes, H., and Lumley, J.L.: A first course in turbulence. The MIT Press, 1972.
- [57] Tollmien, W.: Turbulente Strömungen. Handb. der Experimentalphysik, Vol. 4, Part I, 291—339 (1931).
- [58] Tollmien, W.: Über die Korrelation der Geschwindigkeitskomponenten in periodisch schwankenden Wirbelverteilungen. ZAMM 15, 98—100 (1935).
- [59] Tollmien, W., and Schäfer, M.: Zur Theorie der Windkanalturbulenz. ZAMM 21, 1—17 (1941).
- [60] Tollmien, W.: Fortschritte der Turbulenzforschung. Zusammenfassender Bericht. ZAMM 33, 200—211 (1953).
- [61] Tollmien, W.: Abnahme der Windkanalturbulenz nach dem Heisenbergschen Austauschansatz als Anfangswertproblem. Wiss. Z. T. H. Dresden 2, 443—448 (1952/53).
- [62] Townsend, A.A.: The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press 2nd ed. 1976.
- [63] Thomas, R.M.: Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake. JFM 57, 549—582 (1973).
- [64] von Weizsäcker, C.F.: Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldsschen Zahlen. Z. Phys. 124, 614—627 (1948).
- [65] Wieghardt, K.: Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt. ZAMM 20, 58—59 (1940).
- [66] Willmarth, W.W.: Pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers. Annual Review of Fluid Mech. 7, 13—38 (1975).
- [67] Willmarth, W.W.: Structure of turbulence in boundary layers. Advances in Appl. Mech. Academic Press, New York, 15, 159—254 (1975).

第十九章

- [1] Batchelor, G.K.: Energy decay and self-preserving correlation functions in isotopic turbulence. Quart. Appl. Math. 6, 97—118 (1948).
- [2] Batchelor, G.K., and Townsend, A.A.: The nature of turbulent motion at large wave numbers. Proc. Roy. Soc. London A 199, 238—255 (1949).
- [3] Batchelor, G.K.: The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 1953.
- [4] Betz, A.: Die von Kármánsche Ähnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischer Auffassung. ZAMM 11, 397 (1931).
- [5] Beckwith, I.E., and Bushnell, D.M.: Detailed description and results of a method for computing mean and fluctuating quantities in turbulent boundary layers. NASA TN D-4815 (1968).
- [6] Bjorgum, O.: On the steady turbulent-flow along an infinitely long smooth and plane wall. Universitet i Bergen, Arbok, Naturvitenskapelig rekke No. 7, (1951).
- [7] Boussinesq, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes. Mém. prés. Acad. Sci. XXIII, 46, Paris (1877).
- [8] Boussinesq, J.: Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section (travaux de conduites et canaux découverts), quand cet écoulement s'est régularisé en un régime uniforme, c'est-à-dire, moyennement pareil à travers toutes les sections normales du lit. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences CXXVII, p. 1290—1296 (1896).
- [9] Hamel, G.: Streifenmethode und Ähnlichkeitsbetrachtungen zur turbulenten Bewegung. Abhandl. preuss. Akad. Wiss., Math. Naturwiss. Klasse, Nr. 8 (1943).
- [9a] Bradshaw, P.: The understanding and prediction of turbulent flow. Aeronautical J. 76, 403—418 (1972).
- [9b] Bradshaw, P.: An improved Van Driest skin friction formula for compressible turbulent boundary layers. AIAA J. 15, 212—214 (1975).
- [10] Bradshaw, P., Ferriss, D.H., and Atwell, N.F.: Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. JFM 28, 593—616 (1967).
- [11] Bradshaw, P.: Effects of streamline curvature on turbulent flow. AGARDograph No. 169 (1973).
- [11a] Celici, T., and Smith, A.M.O.: A finite-difference solution of the incompressible turbulent boundary layer equations by an eddy-viscosity concept. In: Kilne, S.J., Morkovin, M.V., Sevran, G., and Cockrell, D.J. (eds.): Computation of turbulent boundary layers. Vol. 1: Methods, prediction, and flow structure, 346—355 (1973).
- [12] Van Driest, E.R.: On turbulent flow near a wall. JAS 23, 1007—1011 (1956).
- [12a] Eckelmann, H.: Experimentelle Untersuchungen in einer turbulenten Kanalströmung mit starken viskosen Wandschichten. Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch. u. Aerodyn. Versuchsanstalt No. 48 (1970).

- [12b] Eckelmann, H., Wallace, J.M., and Brodkey, R.: The wall region in turbulent shear flow. *JFM* 54, 39-48 (1972).
- [12c] Eckelmann, H.: The structure of viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow. *JFM* 65, 439-459 (1974).
- [13] Glushko, G.S.: Turbulent boundary layer on a flat plate in an incompressible fluid. *Izv. Ak. Nauk. SSSR, Ser. Mekh. No. 4*, 13-23 (1965). Engl. transl. in *NASA TTF* 10, 080.
- [13a] Galbraith, R.A.M., and Head, M.R.: Eddy viscosity and mixing length from measured boundary layer developments. *Aero. Quart.* 26, 133-154 (1975).
- [14] Glushko, G.S.: Differential equation for turbulence scale and prediction of turbulent boundary layer on a flat plate. In: *Turbulentnye techeniya* (M.D. Millionschikov, ed.). Moscow, Nauka, 1970 [in Russian].
- [15] Glushko, G.S.: Transition in the turbulent flow regime in a boundary layer on a flat plate for different turbulence scales of free stream. *Izv. Ak. Nauk. SSSR, Mekh. Zhidkosti i gaza*, No. 3, 68-70 (1972).
- [16] Jevlev, V.M.: Turbulent motion of high temperature continuous media. Moscow, Nauka, 1975 [in Russian].
- [17] von Kármán, Th.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, 58 (1930) and *Proc. 3rd. Intern. Congress Appl. Mech., Stockholm, Part I*, 85 (1930); *NACA TM* 611 (1931); also *Coll. Works II*, 337-346.
- [18] von Kármán, Th.: Progress in the statistical theory of turbulence. *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington*, 34, 530-539 (1948); also *Coll. Works IV*, 365-371.
- [19] Kolmogorov, A.N.: Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izv. Ak. Nauk. SSSR. Seria fizicheskaya IV* (1942), No. 1-2, pp. 56-58 [in Russian].
- [20] Launder, B.E., and Spalding, D.B.: *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, London, 1972.
- [20a] Lin, C.C., and Shen, S.F.: Studies of von Kármán's similarity theory and its extension to compressible flow. *NACA TN* 2542 (1951).
- [20b] Mellor, G.L., and Herring, H.J.: A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA J.* 11, 590-599 (1973).
- [21] Prandtl, L.: Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM* 5, 136-139 (1925) and *Proc. 2nd. Intern. Congr. Appl. Mech., Zürich 1926*, 62-75; also *Coll. Works II*, 736-751.
- [22] Prandtl, L.: Über ein neues Formelsystem der ausgebildeten Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* 6-19 (1945); also *Coll. Works II*, 874-888.
- [23] Prandtl, L.: Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz. *ZAMM* 22, 241-243 (1942); also *Coll. Works II*, 869-873.
- [24] Reichardt, H.: *Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz*. VDI-Forschungsheft 414, 1st ed., Berlin, 1942; 2nd ed., Berlin, 1951.
- [25] Reichardt, H.: Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couette-Strömung. *ZAMM-Sonderheft* 36, 26-29 (1956); see also Rep. No. 9 of the Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung, Göttingen (1954).
- [26] Reichardt, H.: *Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couette-Strömung*. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung and Aerodyn. Versuchsanstalt, Göttingen, Rep. No. 22 (1959).
- [26a] Reynolds, W.C.: Computation of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech. (M. van Dyke, ed.)* 8, 183-208 (1976).
- [27] Rotta, J.C.: Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Scherströmungsfelder. *ZAMM* 50, T 204-T 205 (1970).
- [28] Rotta, J.C.: Recent attempts to develop a generally applicable calculation method for turbulent shear flow layers. *AGARD CP* No. 93 (1972).
- [29] Rotta, J.C.: *Turbulente Strömungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.
- [30] Rotta, J.C.: Turbulent shear layer prediction on the basis of the transport equations for the Reynolds stresses. *Proc. 13th Int. Congr. Theor. Appl. Mech. Moscow 1972*. Springer Verlag, 1973, pp. 295-306.
- [31] Schmidt, W.: *Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen*. Hamburg, 1928.
- [31a] Szeri, A.A., Yates, G.C., and Hsi, S.M.: Flow development in a parallel plate channel. *J. Lubrication Technology, Trans. ASME Ser. F* 98, 145-156 (1976).
- [32] Taylor, G.I.: The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Appendix by A. Fage and V.M. Faulkner. *Proc. Roy. Soc. London A* 135, 685-705 (1932); see also *Phil. Trans. A* 215, 1-26 (1915).
- [32a] Vollmers, H., and Rotta, J.C.: Similar solutions of the mean velocity, turbulent energy and length scale equation. *AIAA J.* 15, 714-720 (1977); see also: Ähnliche Lösungen der Differentialgleichungen für gemittelte Geschwindigkeiten, Turbulenzenergie und Turbulenzlänge. *DLR-FB* 76-24 (1976).
- [33] von Weizsäcker, C.F.: Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldsschen Zahlen. *Z. Phys.* 124, 614-627 (1948).

第二十章

- [1] Ackeret, J.: Grenzschichten in geraden und gekrümmten Diffusoren. IUTAM-Symposium Freiburg/Br. 1957 (H. Görtler, ed.), Berlin, 1958, 22—37.
- [1a] Ackeret, J.: Aspects of internal flow. Fluid mechanics of internal flow (G. Sovran, ed.), Elsevier Publishing Company, Amsterdam/London/New York, 1967, 1—24.
- [2] Adler, M.: Strömung in gekrümmten Rohren. ZAMM 14, 257—275 (1934).
- [3] Bauer, B., and Galavics, F.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Rohrreibung von Heizwasserleitungen. Mitt. d. Fernheizkraftwerkes d. ETH Zürich 1936; see also: F. Galavics: Schweizer Archiv 5, 12, 337 (1939).
- [4] Becker, E.: Beitrag zur Berechnung von Sekundärströmungen. ZAMM 36, special issue, 3—8 (1956); see also: Mitt. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung 13 (1956).
- [4a] Berman, N.S.: Drag reduction by polymers. Ann. Rev. Fluid Mech. (M. van Dyke, ed.) 10, 47—64 (1978).
- [5] Blasius, H.: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschg. Arb. Ing.-Wes. No. 134, Berlin (1913).
- [5a] Clauser, F.H.: The turbulent boundary layer. Adv. Appl. Mech. 4, 1—51 (1956). Academic Press, New York.
- [5b] Collins, W.M., and Dennis, S.C.R.: The steady motion of a viscous fluid in a curved tube. Quart. J. Mech. Appl. Math. 23, 133—156 (1975).
- [6] Colebrook, C.F.: Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. J. Institution Civil Engineers, 1939; see also: Engineering hydraulics (H. Rouse, ed.), Chap. VI, Steady flow in pipes and conduits, by V.L. Streeter. New York, 1950.
- [7] Cookrell, D.J., and Markladd, E.: A review of incompressible diffuser flow. Aircraft Eng. 35, 286—292 (1953).
- [8] Cuming, H.G.: The secondary flow in curved pipes. ARC RM 2880 (1955).
- [9] Darcy, H.: Recherches expérimentales relatives aux mouvements de l'eau dans tuyaux. Mem. Prés. à l'Académie des Sciences de l'Institut de France 15, 141 (1858).
- [10] Dean, W.R.: The streamline motion of a fluid in a curved pipe. Phil. Mag. (7) 4, 208 (1927) and 5, 673 (1928).
- [11] Detra, R.W.: The secondary flow in curved pipes. Inst. Aerodyn. ETH Zürich Rep. No. 90 (1953).
- [12] Van Driest, E.R.: On turbulent flow near a wall. JAS 23, 1007—1011 (1956).
- [13] Eckert, E.R.G., and Irvine, T.F.: Flow in corners with non-circular cross-sections. Trans. ASME 708—718 (1956); see also JAS 22, 65—66 (1955).
- [14] Eckert, E.R.G., and Irvine, T.F.: Incompressible friction factor, transition and hydrodynamic entrance-length studies of ducts with triangular and rectangular cross sections. Paper presented at Fifth Midwestern Conf. on Fluid Mech. 1957.
- [16] Fox, R.W., and Kline, S.J.: Flow regimes in curved subsonic diffusers. J. Basic Eng., Trans. ASME 84, Series D, 303—312 (1962).
- [15a] Frenkiel, F.N., Landahl, M.T., and Lumley, J.L. (ed.): Structure of turbulence and drag reduction. IUTAM Symposium, Washington D. C., 7—12 June 1976, The Physics of Fluids, 20, No. 10, Part II, S 1—S 292 (1977); see also B.A. Tom in Proc. Intern. Congr. Rheology, North-Holland, Amsterdam, 1949, Sec. II, 136.
- [16] Frisch, W.: Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. ZAMM 8, 199—216 (1928).
- [17] Fromm, K.: Strömungswiderstand in rauhen Rohren. ZAMM 3, 339—358 (1923).
- [18] Frössel, W.: Strömung in glatten, geraden Rohren mit Über- und Unterschallgeschwindigkeit. Forschg. Ing.-Wes. 7, 75—84 (1936).
- [19] Goldstein, S.: A note on roughness. ARC RM 1763 (1963).
- [20] Goldstein, S.: The similarity theory of turbulence, and flow between planes and through pipes. Proc. Roy. Soc. A 159, 473—496 (1937).
- [21] Haase, D.: Strömung in einem 90°-Knie. Ing.-Arch. 22, 282—292 (1954).
- [22] For additional references see: H.W. Hahnemann: Der Strömungswiderstand in Rohrleitungen und Leitungselementen. Forschg. Ing.-Wes. 16, 113—119 (1950).
- [23] Hawthorne, W.R.: Secondary circulation in fluid flow, Proc. Roy. Soc. London A 206, 374 (1951).
- [24] Hermann, R.: Experimentelle Untersuchungen zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und grossen Anlaufängen. Diss. Leipzig; Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.
- [25] Hopf, L.: Die Messung der hydraulischen Rauigkeit. ZAMM 3, 329—339 (1923).
- [26] Hübner, E.: Über den Druckverlust in Rohren mit Einbauten. Forschg. Ing.-Wes. 10, 1—10 (1953).

- [26a] Ito, H.: Laminar flow in curved pipes. *ZAMM* 49, 653-663 (1969).
- [27] Ito, H.: On the pressure loss of turbulent flow through curved pipes. *Mem. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., Sendai, Japan*, 7, 63-76 (1952).
- [28] Ito, H.: Friction factors for turbulent flow in curved pipes. *Trans. ASME, Series D, 81 (J. Basic Eng.)*, 123-134 (1959); in more detail: *Mem. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., Sendai, Japan*, 14, 137-172 (1958/59).
- [29] Ito, H.: Pressure losses in smooth pipe bends. *Trans. ASME, Series D, 82 (J. Basic Eng.)*, 131-143 (1960).
- [30] Ito, H., and Nanbu, K.: Flow in rotating straight pipes of circular cross section. *Trans. ASME, Series D, 93 (J. Basic Eng.)*, 383-394 (1971).
- [31] Jakob, M., and Erk, S.: Der Druckabfall in glatten Röhren und die Durchflussdiffer von Normaldüsen. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 267*, Berlin (1924).
- [32] von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM* 1, 233-262 (1921); see also *Coll. Works II*, 70-97.
- [33] Kirsten, H.: Experimentelle Untersuchungen der Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Rohrströmung. *Diss. Leipzig* 1927.
- [33a] Kleinstein, G.: Generalized law of the wall and eddy-viscosity model for wall boundary layer. *AIAA J.* 5, 1402-1407 (1967).
- [34] Kline, S. J., Abbott, D. E., and Fox, R. W.: Optimum design of straight-walled diffusers. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, 81*, 305-320 (1959).
- [35] Koch, R., and Feind, K.: Druckverlust und Wärmeübergang in Ringspalten. *Chemie-Ing.-Techn.* 30, 577-584 (1958).
- [36] Landahl, M. T.: Drag reduction by polymer addition. In: *Proc. 13th Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Moscow, Aug. 1972 (E. Becker and G. K. Mikhailov, ed.)*, Springer-Verlag, 177-199 (1973).
- [37] Lumley, J. L.: Drag reduction by additives. *Annual Review of Fluid Mech.* 1, 367-384 (1969).
- [37a] Lumley, J. L.: Drag reduction in turbulent flow by polymer additives. *J. Polym. Sci. Macromol. Rev.* 7, 263-290 (1978).
- [38] Meyer, E.: Einfluss der Querschnittsverformung auf die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei turbulenten Geschwindigkeitsverteilungen in Röhren. *VDI-Forschungsheft* 389 (1938).
- [39] Möbius, H.: Experimentelle Untersuchungen des Widerstandes und der Geschwindigkeitsverteilung in Röhren mit regelmässig angeordneten Rauigkeiten bei turbulenter Strömung. *Phys. Z.* 41, 202-225 (1940).
- [40] Moody, L. F.: Friction factors for pipe flow. *Trans. ASME* 66, 671-684 (1944).
- [41] Moore, C. A., Jr., and Kline, S. J.: Some effects of vanes and of turbulence in two-dimensional wide-angle subsonic diffusers. *NACA TN* 4080 (1958).
- [42] Naumann, A.: Druckverlust in Röhren nichtkreisförmigen Querschnittes bei hohen Geschwindigkeiten. *ZAMM* 36, special issue, 25 (1956); see also *Allg. Wärmetechnik* 7, 32-41 (1956).
- [43] Nikuradse, J.: Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. *Diss. Göttingen* 1926; *VDI-Forschungsheft* 281 (1926).
- [44] Nikuradse, J.: Turbulente Strömung in nichtkreisförmigen Röhren. *Ing.-Arch.* 1, 306-332 (1930).
- [45] Nikuradse, J.: Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 356* (1932).
- [46] Nikuradse, J.: Strömungsgesetze in rauen Röhren. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 361* (1933).
- [47] Nippert, H.: Über den Strömungswiderstand in gekrümmten Kanälen. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 320* (1929).
- [48] Nusselt, W.: Wärmeübergang in Rohrleitungen. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 89*, Berlin (1910).
- [49] Ombeck, H.: Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. *Forsch. Arb. Ing.-Wes. No. 158/159*, Berlin (1914).
- [50] Oswatitsch, K.: Grundlagen der Gasdynamik. *Wien*, 1976; also: *Gasdynamica. Engl. transl.* by G. Kuerti, Academic Press, 1956.
- [50a] Paterson, R. W., and Abernathy, F. H.: Turbulent flow drag reduction and degradation with dilute polymer solutions. *JFM* 43, 689-710 (1970).
- [51] Prandtl, L.: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. *Ergebnisse AVA Göttingen, 1st Series*, 138 (1921); see also *Coll. Works II*, 620-626.
- [52] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In: *W. F. Durand: Aerodynamic Theory, III*, 142 (1935); see also summary by L. Prandtl: *Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI* 77, 105-114 (1933); see also *Coll. Works II*, 819-845.
- [53] Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre. 3rd ed., 159, Braunschweig, 1949. Also: *Essentials of fluid dynamics. Engl. transl.* by W. M. Deans, Blackie, 1962.

- [54] Reichardt, H.: Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. *ZAMM* 20, 297–328 (1940).
- [55] Reichardt, H.: Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. *ZAMM* 31, 208–219 (1951).
- [56] Richter, H.: Der Druckabfall in gekrümmten glatten Rohrleitungen. *Forschg. Arb. Ing.-Wes.* No. 338 (1930).
- [57] Rotta, J.C.: Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen. *Ing.-Arch.* 18, 277–280 (1950).
- [58] Rotta, J.C.: Control of turbulent boundary layers by uniform injection and suction of fluid. *Jb. DGLR*, 91–104 (1970).
- [59] Saph, V., and Schoder, E.K.: An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes. *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.* 51, 944 (1903).
- [60] Schiller, L.: Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts- und Rauigkeitsgrades. *ZAMM* 3, 2–13 (1923).
- [61] Schiller, L.: Rohr widerstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. *Lectures on aerodynamics and related fields*, 69, Berlin, 1930.
- [62] Schiller, L.: Strömung in Rohren. *Handb. Exper. Physik*, IV, Part 4, 1–210, Leipzig, 1931.
- [63] Schlichting, H.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem. *Ing.-Arch.* 7, 1–34 (1936). Engl. transl. in *Proc. Soc. Mech. Eng. USA* (1936); see also: *Werft, Reederei, Hafen* 99 (1936), and *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 418 (1936).
- [64] Schlichting, H., and Gersten, K.: Berechnung der Strömung in rotationsymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie. *ZFW* 9, 135–140 (1961).
- [65] Scholz, N.: Strömungsvorgänge in Grenzschichten. *VDI-Ber.* 6, 7–12 (1955).
- [66] Schultz-Grunow, F.: Pulsierender Durchfluss durch Rohre. *Forschg. Ing.-Wes.* 11, 170–187 (1940).
- [67] Schultz-Grunow, F.: Durchflussmessverfahren für pulsierende Strömungen. *Forschg. Ing.-Wes.* 12, 117–126 (1941).
- [68] Seiferth, R., and Krüger, W.: Überraschend hohe Reibungsziffer einer Fernwasserleitung. *Z. VDI* 92, 189 (1950).
- [68a] Spalding, D.B.: A single formula for the "law of the wall". *J. Appl. Mech.* 28, 455–458 (1961).
- [68b] Sobey, J.S.: Inviscid secondary motions in a tube of slowly varying ellipticity. *JFM* 73, 621–639 (1976).
- [69] Sprenger, H.: Messungen an Diffusoren. *VDI-Ber.* 3, 10–110 (1955); see also *ZAMP* 7, 372–374 (1956).
- [70] Sprenger, H.: Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren. *Mitt. Inst. Aerodyn. ETH Zürich* No. 27 (1959).
- [71] Stanton, T.E.: The mechanical viscosity of fluids. *Proc. Roy. Soc. London A* 85, 366 (1911).
- [72] Stanton, T.E., and Pannell, J.R.: Similarity of motion in relation of the surface friction of fluids. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 214, 199 (1914); see also *Proc. Roy. Soc. London A* 91, 46 (1915).
- [73] Streeter, V.L.: Frictional resistance in artificially roughened pipes. *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 51, 163–186 (1935).
- [74] Szablewski, W.: Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese. *ZAMM* 31, 131–142 (1951).
- [75] Szablewski, W.: Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. *Ing.-Arch.* 21, 323–330 (1953).
- [76] Taylor, G.I.: Flow in pipes and between parallel planes. *Proc. Roy. Soc. London A* 159, 496–506 (1937).
- [76a] Toms, B.A.: Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers. *Proc. 1st Int. Congr. Rheol.* 2, 135–141 (1948), Amsterdam, North Holland.
- [77] Virk, P.S.: An elastic sublayer model for drag reduction by dilute solutions of linear macromolecules. *JFM* 45, 417–440 (1971).
- [78] Virk, P.S.: Drag reduction in rough pipes. *JFM* 45, 225–246 (1971).
- [79] Virk, P.S., Mickley, H.S., and Smith, K.A.: The ultimate asymptote and mean flow structure in Toms's phenomenon. *J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E*, 37, 488–493 (1970).
- [80] White, C.M.: Streamline flow through curved pipes. *Proc. Roy. Soc. London A* 123, 645–663 (1929).
- [81] White, C.M.: Fluid friction and its relation to heat transfer. *Trans. Inst. Chem. Eng.* 10, 66 (1932).
- [82] Wiederhold, W.: Über den Einfluss von Rohrablagerungen auf den hydraulischen Druckabfall. *Gas- u. Wasserfach* 99, 634 (1949).
- [82a] Wieghardt, K.: Turbulente Grenzschichten. *Göttinger Monographie, Part B* 5 (1946).
- [83] Winternitz, F.A.L., and Ramsay, W.J.: Effects of inlet boundary layer on pressure recovery energy conversion and losses in conical diffusers. *J. Roy. Aero. Soc.* 61, 116–124 (1957).

第二十一章

- [1] Ackeret, J.: *Schweiz. Bauzeitung* 108, 25 (1936).
- [1a] Antonia, R.A., and Wood, D.H.: Calculation of a turbulent boundary layer downstream of a small step change in surface roughness. *Aero. Quart.* 20, 202-210 (1975).
- [2] Bammert, K., and Fiedler, K.: Der Reibungsverlust von rauhen Turbinenschaufeln. *Brennstoff-Wärme-Kraft* 18, 430-436 (1966).
- [2a] Banner, M.L., and Melville, W.K.: On the separation of air flow over water waves. *JFM* 77, 825-842 (1976).
- [3] Bammert, K., and Fiedler, K.: Hinterkanten- und Reibungsverlust in Turbinenschaufelgittern. *Forsch. Ing.-Wes.* 32, 133-141 (1966).
- [4] Blenk, H., and Triznes, H.: *Strömungstechnische Beiträge zum Windschutz. Grundlagen der Landtechnik.* VDI-Verlag, No. 8, 1966.
- [5] Bradshaw, P., and Gregory, N.: The determination of local turbulent skin friction from observations in the viscous sub-layer. *ARC RM* 3202 (1961).
- [6] Burgers, J.M.: The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. *Proc. First Intern. Congress Appl. Mech.* 121, Deift (1924).
- [6a] Caly, R.: *Der Wärmeübergang an einer im geschlossenen Gehäuse rotierenden Scheibe.* Thesis Aachen 1966.
- [7] Chapman, D.R., and Kester, R.H.: Measurements of turbulent skin friction in cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. *JAS* 20, 441-448 (1953).
- [8] Coles, D.: The problem of the turbulent boundary layer. *ZAMP* 5, 181-202 (1954).
- [8a] Coles, D.: The law of the wake in the turbulent boundary layer. *JFM* 1, 191-226 (1956).
- [8b] Daily, J., and Nece, R.: Chamber dimension effects on induced flow and friction resistance of enclosed rotating disks. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 82, 217-232 (1960).
- [9] Doetsch, H.: Einige Versuche über den Einfluss von Oberflächenstörungen auf die Profileigenschaften, insbesondere auf den Profilwiderstand im Schnellflug. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 88-97 (1939).
- [10] Van Driest, E.R.: On turbulent flow near a wall. *JAS* 23, 1007-1011 (1956).
- [11] Dutton, R.A.: The accuracy of measurement of turbulent skin friction by means of surface Pitot tubes and the distribution of skin friction on a flat plate. *ARC RM* 3058 (1957).
- [12] Eichelbrenner, E.: La couche-limite turbulente à l'intérieur d'un dièdre. *Rech. Aéro. Paris* No. 83, 3-8 (1961).
- [13] Elder, J.W.: The flow past a flat plate of finite width. *JFM* 9, 133-153 (1960).
- [14] Fage, A., and Warsap, J.H.: The effects of turbulence and surface roughness on the drag of circular cylinders. *ARC RM* 1283 (1930).
- [15] Falkner, V.M.: The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer. *Aircraft Engineering* 15 (1943).
- [16] Favre, A., Dumas, R., and Verollet, E.: Couche limite sur paroi plane poreuse avec aspiration. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, No. 377 (1961).
- [17] Feindt, E.G.: Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. *Diss. Braunschweig* 1956. *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 50, 180-203 (1957).
- [17a] Forster, V.T.: Performance loss of modern stream-turbine plant due to surface roughness. *The Inst. of Mech. Eng., Preprint*, London, 1967.
- [18] Gadd, G.E.: A note on the theory of the Stanton tube. *ARC RM* 3147 (1960).
- [19] Gebers, F.: Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Wasserwiderstandes gegen bewegte Körper. *Schiffbau* 9, 435-452 and 475-485 (1908); also: Das Ähnlichkeitsgesetz für den Flächenwiderstand in Wasser geradlinig fortbewegter polierter Platten. *Schiffbau* 22, 687-930 (1920/21), continuations.
- [20] Gersten, K.: Die Grenzschichtströmung in einer rechtwinkligen Ecke. *ZAMM* 39, 428-429 (1959); see also: Corner interference effects. *AGARD Rep.* 299 (1959).
- [21] Goldstein, S.: On the resistance to the rotation of a disk immersed in a fluid. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 31, Part 2, 232 (1935).
- [22] Granville, P.S.: The torque and turbulent boundary layer of rotating disks with smooth and rough surfaces, and in drag-reduction polymer solutions. *J. Ship Research* 17, 181-195 (1973).
- [23] Hama, F.R.: Boundary layer characteristics for smooth and rough surfaces. *Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers* 62, 333-358 (1954).
- [23a] Hansen, M.: Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. *ZAMM* 3, 185-199 (1928); *NACA TM* 595 (1939).
- [24] Hood, M.J.: The effects of some common surface irregularities on wing drag. *NACA TN* 695 (1939).

- [25] Jacobs, E.N.: Airfoil section characteristics as affected by protuberances. NACA Rep. 446 (1932).
- [26] Jacobs, W.: Strömung hinter einem einzelnen Rauigkeitselement. Diss. Göttingen 1938, Part I, Ing.-Arch. 9, 343-355 (1938).
- [27] Jacobs, W.: Umformung eines turbulenten Geschwindigkeitsprofils. Diss. Göttingen 1938, Part II, ZAMM 19, 87-100 (1939).
- [28] Jeromin, L.O.F.: The status of research in turbulent boundary layers with fluid injection. Progress in Aero. Sciences 10, 65-190 (1970).
- [29] von Kármán, Th.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Proc. Third Intern. Congr. of Appl. Mech. 85, Stockholm 1931, and Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebes, Hamburg, 1932; see also: JAS 1, 1 (1932); NACA TM 611 (1931); see also Coll. Works II, 322-346.
- [30] von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233-252 (1921); NACA TM 1092 (1946); see also Coll. Works II, 70-97.
- [31] Kempf, G.: Neue Ergebnisse der Widerstandsforschung. Werft, Reederei, Hafen 10, 234 und 247 (1929).
- [32] Kempf, H.: Über den Einfluss der Rauigkeit auf den Widerstand von Schiffen. Jb. Schiffbautechn. Ges. 38, 159 and 233 (1937); and: The effect of roughness on the resistance of ships. Engineering, London 143, 417 (1937); see also: Trans. Inst. Nav. Architects 79, 109 and 137 (1937).
- [33] Landweber, L.: Der Reibungswiderstand der längsangeströmten ebenen Platte. Jb. Schiffbautechn. Ges. 46, 137-150 (1952).
- [34] Liepmann, H.W., and Fils, G.H.: Investigations of effects of surface temperature and single roughness elements on boundary layer transition. NACA Rep. 890 (1947).
- [34a] Millsaps, K., and Pohlhausen, K.: Heat transfer by laminar flow from a rotating plate. JAS 19, 120-126 (1952).
- [35] Mottard, E.J., and Lopusser, J.D.: Average skin friction drag coefficient from tank tests of a parabolic body of revolution (NACA RM-10). NACA Rep. 1161 (1954).
- [36] Motzfeld, H.: Die turbulente Strömung an welligen Wänden. Diss. Göttingen 1935, ZAMM 17, 193-212 (1937).
- [36a] Mulhearn, P.J.: Turbulent boundary layer wall pressure fluctuations downstream from an abrupt change in surface roughness. Physics of Fluids 19, 796-801 (1976).
- [37] Naleid, J.F., and Thompson, M.J.: Pressure-gradient effects on the Preston tube in supersonic flow. JASS 28, 940-944 (1961).
- [38] Nikuradse, J.: Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Published by ZWB, R. Oldenbourg, München and Berlin, 1942.
- [39] Paeschke, W.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeits- und Stabilitätsproblem in der bodennahen Luftschicht. Diss. Göttingen 1937. Summary in: Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre 24, 163 (1937); see also: Z. Geophysik 13, 14 (1937).
- [39a] Perry, A.E., and Schofield, W.H.: Rough wall turbulent boundary layers. JFM 37, 363-413 (1959).
- [40] Prandtl, L.: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse AVA Göttingen, Third Series (1927) and: Zur turbulenten Strömung in Röhren und längs Platten. Ergebnisse AVA Göttingen, IVth Series (1932); First mention in 1st Series 136 (1921); see also Coll. Works II, 620-626 and 632-648.
- [41] Prandtl, L., and Schlichting, H.: Das Widerstandsgesetz rauher Platten. Werft, Reederei, Hafen 1-4 (1934); see also Coll. Works II, 648-662.
- [42] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids, in: W.F. Durand: Aerodynamic theory, III 34-208 (1935).
- [43] Preston, J.H.: The determination of turbulent skin friction by means of Pitot tubes. J. Roy. Aero. Soc. 58, 109-121 (1954).
- [44] Rotta, J.C.: Control of turbulent boundary layers by uniform injection or suction of fluid. Jb. 1970 Dt. Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt, ed. by H. Blenk and W. Schulz, Braunschweig, 1971, pp. 91-104; see also ZAMM 46, T 213-T 215 (1966).
- [45] Schlichting, H.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem. Ing.-Arch. 7, 1-34 (1936); NACA TM 823 (1937).
- [46] Schlichting, H.: Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19, 293-301 (1942).
- [47] Schlichting, H.: Die Grenzschicht mit Absaugen und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19, 179-181 (1942).
- [48] Scherbarth, K.: Grenzschichtmessungen hinter einer punktförmigen Störung in laminarer Strömung. Jb. dt. Luftfahrtforschung I, 51-53 (1942).
- [49] Schmieden, C.: Über den Widerstand einer in einer Flüssigkeit rotierenden Scheibe. ZAMM 8, 460-479 (1928).
- [50] Schoenherr, K.E.: Resistance of flat surfaces moving through a fluid. Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng. 40, 279 (1932).

- [51] Schofield, W.H.: Measurements in adverse pressure gradient turbulent boundary layers with a step change in surface roughness. *JFM* 10, 573—593 (1975).
- [52] Schultz-Grunow, F.: Der hydraulische Reibungswiderstand von Platten mit mässig rauher Oberfläche, insbesondere von Schiffsoberflächen. *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 39, 176—193 (1938).
- [53] Schultz-Grunow, F.: Neues Widerstandsgesetz für glatte Platten. *Luftfahrtforschung* 17, 239 (1940); also NACA TM 986 (1941).
- [54] Schultz-Grunow, F.: Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. *ZAMM* 15, 191—204 (1935); see also: H. Föttinger: *ZAMM* 17, 356—358 (1937) and K. Pantelli: *Forschg. Ing.-Wes.* 16, 97—108 (1950).
- [55] Schultz-Grunow, F.: Der Mechanismus des Widerstandes von Einzelrauigkeiten. *ZAMM* 36, 309 (1956).
- [55a] Schultz-Grunow, F.: Die Entstehung von Längswirbeln in Grenzschichten. *ZAMM* 38, 85—95 (1958).
- [56] Smith, D.W., and Walker, J.H.: Skin friction measurements in incompressible flow. NASA TR R-26 (1959).
- [57] Sörensen, E.: Wandrauigkeitseinfluss bei Strömungsmaschinen. *Forschg. Ing.-Wes.* 8, 25 (1937).
- [58] Speidel, L.: Einfluss der Oberflächenrauigkeit auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. *Forschg. Ing.-Wes.* 20, 129—140 (1954).
- [59] Squire, L.G.: Eddy viscosity distributions in compressible turbulent boundary layers with injection. *Aero. Quart.* 22, 169—182 (1971).
- [60] Szeckenyi, E.: Supercritical Reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders. *JFM* 70, 529—542 (1975).
- [61] Szablewski, W.: Berechnung der turbulenten Strömung längs der ebenen Platte. *ZAMM* 31, 309—324 (1951).
- [62] Tani, I., Hama, J., and Mitui, S.: On the permissible roughness in the laminar boundary layer. *Aero. Res. Inst. Tokyo, Rep.* 199 (1940).
- [63] Tillmann, W.: Neue Widerstandsmessungen an Oberflächenstörungen in der turbulenten Grenzschicht. *Forschungshefte für Schiffstechnik* No. 2 (1953).
- [64] Townsend, A.A.: The turbulent boundary layer. *Boundary-layer Research, IUTAM Symposium Freiburg/Br. 1957* (H. Görler, ed.), 1—15 (1958).
- [65] Wieghardt, K.: Über die turbulente Strömung im Rohr und längs der Platte. *ZAMM* 24, 294—298 (1944).
- [66] Wieghardt, K.: Erhöhung des turbulenten Reibungswiderstandes durch Oberflächenstörungen. *Techn. Berichte* 10, Heft 9 (1943); see also: *Forschungshefte für Schiffstechnik* 1, 65—81 (1953).
- [67] Wießelsberger, C.: Untersuchungen über den Reibungswiderstand von stoffbespannten Flächen. *Ergebnisse AVA Göttingen, 1st Series*, 120—126 (1921).
- [68] Williams, D.H., and Brown, A.F.: Experiments on a riveted wing in the compressed air tunnel. *ARC RM* 1855 (1938).
- [69] Young, A.D.: The drag effects of roughness at high subcritical speeds. *J. Roy. Aero. Soc.* 18, 534 (1960).

第二十二章

- [1] Ackeret, J.: Zum Entwurf dicht stehender Schaufelgitter. *Schweiz. Bauzeit.* 103 (1942).
- [2] Baker, R.J., and Launder, B.E.: The turbulent boundary layer with foreign gas injection. Part I: Measurements in zero pressure gradient. Part II: Predictions and measurements in severe streamwise pressure gradients. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 17, 275—306 (1974).
- [3] Baumert, W., and Enghardt, K.: Dreikomponentenmessungen an einem Rechteckflügel mit Vorflügel und abgesenkter Nase. *DFVLR Bericht* 71—C—29 (1971).
- [4] Betz, A.: Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden. *Lectures on aerodynamics and related subjects, Aachen 1929*. Verlag Springer, Berlin, 1930, 10—18.
- [5] Betz, A.: Höchstauftrieb von Flügeln an umlaufenden Rädern. *ZFW* 9, 97—99 (1961).
- [6] Bienert, P.: Strömungsbild einer turbulenten Ablösung. *ZFW* 16, 141—147 (1968).
- [7] Bradshaw, P.: Calculation of three-dimensional turbulent boundary layers. *JFM* 46, 417—445 (1971).
- [8] Bradshaw, P.: The understanding and prediction of turbulent flow. *Aero. J.* 76, 413—418 (1972).
- [9] Bradshaw, P.: Turbulence research — progress and problems. *Proc. of the 1976 Heat Transfer and Fluid Mech. Institute* (A.A. McKillop, ed.), Stanford Univ. Press, 1976.
- [10] Bradshaw, P. (ed.): *Turbulence*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
- [11] Bradshaw, P., and Ferriss, D.H.: Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equations: Compressible flow on adiabatic walls. *JFM* 46, 83—110 (1971).

- [12] Bradshaw, P., and Ferriss, D.H.: Applications of a general method of calculating turbulent shear layers. *J. Basic Eng.*, Trans. ASME Series D, **94**, 345-354 (1972).
- [13] Bradshaw, P., Ferriss, D.H., and Atwell, N.P.: Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *JFM* **28**, 593-616 (1967).
- [14] Bradshaw, P., and Wong, F.Y.F.: The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer. *JFM* **52**, 113-135 (1972).
- [15] Buri, A.: Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung. Diss. Zürich-1931.
- [16] Carrière, P., and Eichelbrenner, E.A.: Theory of flow reattachment by a tangential jet discharging against a strong adverse pressure gradient. *Boundary layer and flow control* (G. V. Lachmann, ed.), Vol. **1**, 209-231, 1961.
- [17] Cebeci, T., Mosinakis, G.J., and Smith, A.M.O.: Calculation of separation points in incompressible turbulent boundary layers. *J. Aircr.* **9**, 618-624 (1972).
- [18] Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: A finite-difference solution of the incompressible turbulent boundary layer equations by an eddy viscosity concept. AFOSR-IFP, Stanford Conference on Computation of Turbulent Boundary Layers, Vol. **1**, 343-356 (1968).
- [19] Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: A finite-difference method for calculating compressible laminar and turbulent boundary layers. *J. Basic Eng.*, Trans. ASME, Series D, **92**, 523-535 (1970).
- [20] Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic Press, New York, 1974.
- [21] Clauser, F.H.: Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. *JAS* **21**, 91-108 (1954).
- [21a] Clauser, F.H.: The turbulent boundary layer. *Adv. Appl. Mech.* **4**, 1-51 (1965).
- [22] Cooke, J.C.: Boundary layers over infinite yawed wings. *Aero. Quart.* **11**, 333-347 (1960).
- [23] Cooke, J.C., and Hall, M.G.: Boundary layer in three dimensions. *Progress in Aeronautical Sciences* **2**, 222-282 (1962).
- [24] Cumpsty, N.A., and Head, M.R.: The calculation of three-dimensional turbulent boundary layers. Part I: Flow over the rear of an infinite swept wing. *Aero. Quart.* **18**, 55-84 (1967). Part II: Attachment-line flow on an infinite swept wing. *Aero. Quart.* **18**, 150-164 (1967). Part III: Comparison of attachment-line calculations with experiment. *Aero. Quart.* **20**, 99-113 (1969). Part IV: Comparison of measurements with calculations on the rear of a swept wing. *Aero. Quart.* **21**, 121-132 (1970).
- [25] Deissler, R.G.: Evolution of a moderately short turbulent boundary layer in a severe pressure gradient. *JFM* **64**, 763-774 (1974).
- [26] Deissler, R.G.: Evolution of the heat transfer and flow in moderately short turbulent boundary layers in severe pressure gradients. *J. Heat and Mass Transfer* **17**, 1079-1085 (1974).
- [27] von Doenhoff, A.E., and Tetervin, N.: Determination of general relations for the behavior of turbulent boundary layers. NACA Rep. 772 (1943).
- [28] Dönch, F.: Divergente und konvergente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. Diss. Göttingen 1925. Forschungsarbeiten VDI No. 292 (1926).
- [29] East, L.F.: Measurements of the three-dimensional incompressible turbulent boundary layer on the surface of a slender delta wing by the leading edge vortex. ARC RM 3768 (1973).
- [30] East, L.F., and Hoxey, R.P.: Low-speed three-dimensional turbulent boundary layer data, Part I. RAE Techn. Rep. 69041 (1969).
- [30a] East, L.F. (ed.): Computation of three-dimensional boundary layers. Symposium Euro-mech 60, Trondheim, 1975, FEA TN AE 1211 (1975). See article by Fannelöp, T.K., and Kragstad, P.A.: Three-dimensional turbulent boundary layers in external flows. Also *JFM* **71**, 815-820 (1975).
- [31] Elsenaar, A., van den Berg, B., and Lindhout, J.F.P.: Three-dimensional separation of an incompressible turbulent boundary layer on an infinite swept wing. AGARD Conf. Proc. No. 168, Flow Separation, 34-1 to 34-15 (1975).
- [32] Eppler, R.: Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absaug-Grenzschichten. *Ing.-Arch.* **32**, 221-245 (1963).
- [33] Fernholz, H.H.: Halbempirische Gesetze zur Berechnung turbulenter Grenzschichten nach der Methode der Integralbedingungen. *Ing.-Arch.* **33**, 384-395 (1964).
- [34] Fernholz, H.H.: Experimentelle Untersuchung einer inkompressiblen turbulenten Grenzschicht mit Wandreibung nahe Null in einem längsangeströmten Kreiszyylinder. *ZFW* **16**, 401-406 (1968).
- [35] Garner, H.C.: The development of turbulent boundary layers. ARC RM 2133 (1944).
- [36] Gersten, K.: Corner interference effects. AGARD Rep. No. 299 (1959).
- [37] Goradia, S.H., and Colwell, G.T.: Analysis of high-lift wing systems. *Aero. Quart.* **26**, 88-108 (1975).
- [38] Goradia, S.H., and Lyman, V.: Laminar stall prediction and estimation of $C_{L, max}$. *J. Aircr.* **11**, 523-536 (1974).

- [39] Granville, P.S.: Similarity-law entrainment method for thick axisymmetric turbulent boundary layers in pressure gradients. David Taylor Naval Ship Research and Development Center, Bethesda, MD. Rep./No. 4525 (1975).
- [40] Gruschwitz, E.: Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. *Ing.-Arch.* 2, 321–346 (1931); summary in *ZFW* 23, 308 (1932).
- [41] Gruschwitz, E.: Turbulente Reibungsschichten mit Sekundärströmungen. *Ing.-Arch.* 6, 355–365 (1935).
- [42] Gutsche, F.: Versuche an umlaufenden Flügelschnitten mit angerissener Strömung. *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 41, 188–226 (1940).
- [43] Head, M.R.: Entrainment in the turbulent boundary layer. *ARC RM* 3152 (1960).
- [44] Himmelskamp, H.: Profliuntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. *Diss. Göttingen* 1945. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung, Göttingen, Rep. No. 2 (1950).
- [45] Hochschild, H.: Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. *Forschungsarbeiten VDI No.* 114 (1910).
- [46] Hornung, H.G., and Joubert, P.N.: The mean velocity profile in three-dimensional turbulent boundary layers. *JFM* 15, 368–384 (1963).
- [47] Jacob, K.: Berechnung der abgelösten inkompressiblen Strömung um Tragflügelprofile und Bestimmung des maximalen Auftriebs. *ZFW* 17, 221–230 (1969).
- [48] Jacob, K., and Steinbach, D.: A method for prediction of lift for multi-element airfoil systems with separation. *AGARD CP* 143, V/STOL-Aerodynamics, 12–1 to 12–16 (1974).
- [49] Johnston, J.P.: On the three-dimensional turbulent boundary layer generated by secondary flow. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.* 82, 233–248 (1960).
- [50] Johnston, J.P.: The turbulent boundary layer at a plane of symmetry in a three-dimensional flow. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.* 82, 622–628 (1960).
- [51] Johnston, J.P.: Measurements in a three-dimensional turbulent boundary layer induced by a forward facing step. *JFM* 42, 823–844 (1970).
- [52] Johnston, J.P., and Wheeler, A.J.: An assessment of three-dimensional turbulent boundary layer prediction methods. *Trans. ASME, Ser. I, J. Fluids Eng.* 95, 415–421 (1973).
- [53] Kehl, A.: Untersuchungen über konvergente und divergente turbulente Reibungsschichten. *Diss. Göttingen* 1942; *Ing.-Arch.* 13, 293–329 (1943).
- [54] Kline, S.J., Morkovin, M.V., Sovran, G., Cockrell, D.J., Coles, D.E., and Hirst, E.A. (eds.): *Proc. AFOSR-IFP-Stanford Conference 1968. Computation of turbulent boundary layers, Vol. I and II.* Stanford Univ. Press, 1969.
- [55] Korbacher, G.K.: Aerodynamics of powered high-lift systems. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 6, 319–358 (1974).
- [56] Kovaszny, L.S.G.: The turbulent boundary layer. *Ann. Rev. Fluid Mech.* (M. van Dyke, ed.) 2, 95–112 (1970).
- [57] Krüner, R.: Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen. *Forschungsarbeiten VDI No.* 222 (1920).
- [58] Laufer, J.: Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. *NACA Rep.* 1053 (1951).
- [59] Ludwig, H.: Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten. *Ing.-Arch.* 17, 207–218 (1949).
- [60] Ludwig, H., and Tillmann, W.: Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. *Ing. Arch.* 17, 288–299 (1949); summary of both papers *ZAMM* 29, 15–16 (1949). Engl. transl. in *NACA TM* 1285 (1950).
- [61] Mager, A.: Generalization of boundary-layer momentum-integral equations to three-dimensional flows including those of rotating system. *NACA Rep.* 1067 (1952).
- [62] Mager, A., Mahoney, I.L., and Budinger, R.E.: Discussion of boundary layer characteristics near the wall of an axial-flow compressor. *NACA Rep.* 1085 (1952).
- [63] Mellor, G.L.: The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall. *JFM* 24, 255–274 (1966).
- [64] Mellor, G.L., and Gibson, D.M.: Equilibrium turbulent boundary layers. *JFM* 24, 225–253 (1966).
- [65] Mellor, G.L., and Herring, H.J.: A survey of the mean turbulent field closure methods. *AIAA J.* 11, 590–599 (1973).
- [65a] Meroney, R.N., and Bradshaw, P.: Turbulent boundary layer growth over a longitudinally curved surface. *AIAA J.* 13, 1448–1453 (1975).
- [66] Michel, R., Quemard, G., and Cousteix, J.: Méthode pratique de prévision des couches limites turbulentes bi- et tri-dimensionnelles. *Recherche Aérosp.* No. 1972–1, 1–14 (1972).
- [67] Millikan, C.E.: The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 54, 2–29 (1932).

- [68] Muesmann, H.: Zusammenhang der Strömungseigenschaften des Laufrades eines Axialgebläses mit denen eines Einzelfügels. Diss. Braunschweig 1958; ZFW 6, 345—362 (1958).
- [69] Nash, J. F.: The calculation of three-dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow. JFM 37, 625—242 (1959).
- [70] Nash, J. F., and Patel, V. C.: Three-dimensional turbulent boundary layers. S.B.C. Technical Books. (Scientific & Business Consultants, Inc., Atlanta, Georgia), 1972.
- [71] Nikuradse, J.: Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forschungsarbeiten VDI No. 289 (1929).
- [72] Orzag, S. A., and Israeli, M.: Numerical simulation of viscous incompressible flows. Ann. Rev. Fluid Mech. 6, 281—313 (1974).
- [73] Pappas, C. C., and Okuno, A. F.: Measurements of skin friction of the compressible turbulent boundary layer on a cone with foreign gas injection. JASS 27, 321—331 (1960).
- [74] Parr, O.: Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. Diss. Braunschweig 1962; Ing.-Arch. 32, 393—413 (1963).
- [75] Pechau, W.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der ebenen und rotations-symmetrischen turbulenten Grenzschicht mit beliebiger Absaugung oder Ausbläsung. Jb. WGL 1958, 82—92 (1959).
- [76] Polzin, J.: Strömungsuntersuchungen an einem ebenen Diffusor. Ing.-Arch. 11, 361—385 (1940).
- [77] Pretsch, J.: Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jb. dt. Luftfahrtforschung 1, 61—81 (1938).
- [77a] Ramaprian, B. R., and Shivaprasad, B. G.: Mean flow measurements in turbulent boundary layers along mildly curved surfaces. AIAA J. 15, 189—196 (1977).
- [78] Raspet, A., Cornish, J. J., and Gryant, G. D.: Delay of the stall by suction through distributed perforations. Aero. Eng. Rev. 11, 6, 52—60 (1952).
- [79] Reynolds, W. C.: A morphology of the prediction methods (of turbulent boundary layers). Article in [54] Vol. 1, pp. 1—15 (1969).
- [80] Reynolds, W. C.: Recent advances in the computation of turbulent flow. Advances in Chemical Engineering 8, 193—246 (1974), ed. by T. B. Brew et al., Academic Press.
- [81] Reynolds, W. C.: Computation of turbulent flow. Ann. Rev. Fluid Mech. 9, 183—208 (1976).
- [82] Rotta, J.: Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten. Ing.-Arch. 19, 31—41 (1951) and Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung Göttingen Rep. No. 1 (1950).
- [83] Rotta, J.: Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. Ing.-Arch. 20, 195—207 (1952).
- [84] Rotta, J.: Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung Göttingen Rep. No. 8 (1953).
- [85] Rotta, J.: Turbulent boundary layers in incompressible flow. Progress in Aero. Sci. 2, 1—219 (1962), ed. by A. Ferri, D. Küchemann and L. H. G. Sterne, Pergamon Press, Oxford, 1962.
- [86] Rotta, J.: Vergleichende Berechnungen von turbulenten Grenzschichten mit verschiedenen Dissipationsgesetzen. Ing.-Arch. 38, 212—222 (1969).
- [87] Rotta, J.: Turbulente Strömungen. Stuttgart, 1972.
- [88] Rubesin, M. W., and Pappas, C. C.: Analysis of the turbulent boundary-layer characteristics on a flat plate with distributed light-gas injection. NACA TN 4149 (1958).
- [88a] Rubin, S. G.: Incompressible flow along a corner. JFM 26, 97—110 (1966).
- [89] Sadcheva, R. D., and Preston, J. H.: Investigation of turbulent boundary layers on a ship model. Schiffstechnik 23, 1—45 (1976).
- [90] Schlichting, H.: Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19, 293—301 (1942).
- [91] Schlichting, H.: Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. Proc. First Int. Congr. Aero. Sci. Madrid; Adv. in Aero. Sci. II, 563—586, Pergamon Press, London, 1959.
- [92] Schlichting, H., and Pechau, W.: Auftriebserhöhung von Tragflügeln durch kontinuierlich verteilte Absaugung. ZFW 7, 113—119 (1959).
- [93] Schlichting, H.: Three-dimensional boundary layer flow. Intern. Assoc. Hydraulic Research, IXth Congr., Dubrovnik, 1262—1290, (1961).
- [94] Schlichting, H.: Aerodynamische Probleme des Höchstauftriebes. Lecture at Third Int. Congr. Aero. Sci. (ICAS) Stockholm, Sweden, 1962; ZFW 13, 1—14 (1965).
- [95] Schlichting, H.: Einige neuere Ergebnisse aus der Aerodynamik des Tragflügels (Tenth Prandtl Memorial Lecture 1966). Jb. WGLR 1966, 11—32 (1967).
- [96] Schmidbauer, H.: Verhalten turbulenter Reibungsschichten an erhabenen gekrümmten Wänden. Diss. München 1934; see also Luftfahrtforschung 13, 181 (1936); Engl. transl. in NACA TM 791 (1936).
- [97] Schubauer, G. B., and Klebanoff, P. S.: Investigation of separation of the turbulent boundary layer. NACA Rep. 1030 (1951).
- [98] Schubauer, G. B., and Spangenberg, W. G.: Forced mixing in boundary layers. JFM 3, 10—32 (1960).

- [99] Schwarz, F., and Wuest, W.: Flugversuche am Baumuster Do 27 mit Grenzschichtabsaugung zur Steigerung des Höchstauftriebes. ZFW 12, 108-120 (1964).
- [99a] Shafr, M., and Rubin, S.G.: The turbulent boundary layer near a corner. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, Ser. E), 43, 567-570 (1976).
- [100] Shancbrook, J.R., and Summer, W.J.: A small cross flow theory for the three-dimensional compressible turbulent boundary layer on adiabatic walls. AIAA J. 11, 950-954 (1973).
- [101] Smith, A.M.O.: High-lift aerodynamics. 37th Wright Brothers Lecture 1974. JF of Aircr. 12, 501-530 (1975).
- [101a] So, R.M.C., and Mellor, G.L.: Experiments on turbulent boundary layers on concave wall. Aero. Quart. 28, 25-40 (1975).
- [101b] So, R.M.C., and Mellor, G.L.: Experiments on convex curvature effect in turbulent boundary layers. JFM 60, 43-62 (1973).
- [102] Speidel, L., and Scholz, N.: Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 464 (1957).
- [103] Squire, H.B., and Young, A.D.: The calculation of profile drag of airfoils. ARC RM 1838 (1938).
- [104] Stratford, B.S.: Prediction of separation of the turbulent boundary layer. JFM 5, 1-16 (1959); An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise. JFM 5, 17-35 (1959).
- [104a] Smith, A.M.O.: Stratford's turbulent separation criterion for axially symmetric flow. ZAMP 28, 928-938 (1977).
- [105] Stüper, J.: Untersuchung von Reibungsschichten am fliegenden Flugzeug. Luftfahrtforschung 11, 26-32 (1934); see also NACA TM 751 (1934).
- [106] Szablewski, W.: Turbulente Strömung in konvergenten Kanälen. Ing.-Arch. 20, 37-45 (1952).
- [107] Szablewski, W.: Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen (mittlerer und starker Druckanstieg). Ing.-Arch. 22, 268-281 (1954).
- [108] Szablewski, W.: Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. Ing.-Arch. 23, 296-306 (1955).
- [109] Thomas, F.: Untersuchungen über die Erhöhung des Auftriebes von Tragflügeln mittels Grenzschichtbeeinflussung durch Ausblasen. Diss. Braunschweig 1961; ZFW 10, 46-65 (1962).
- [110] Thomas, F.: Untersuchungen über die Grenzschicht an einer Wand stromabwärts von einem Ausblaspalt. Abhandl. Wiss. Ges. Braunschweig 15, 1-17 (1963).
- [111] Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationsymmetrischer Strömung. Ing.-Arch. 20, 211-228 (1952).
- [112] Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern. Ing.-Arch. 22, 21-35 (1954).
- [113] Truckenbrodt, E.: Strömungsmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.
- [114] Truckenbrodt, E.: Neuere Erkenntnisse über die Berechnung von Strömungsgrenzschichten mittels einfacher Quadraturformeln. Part I: Ing.-Arch. 43, 9-25 (1973); Part II: Ing.-Arch. 43, 136-144 (1974).
- [115] Turcotte, D.L.: A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer. JASS 27, 675-678 (1960).
- [116] Walz, A.: Strömungs- und Temperaturgrenzschichten. Braun, Karlsruhe, 1966.
- [117] Wauschkuhn, P., and Vasanta Ram, V.: Die turbulente Grenzschicht hinter einem Ablösungsgebiet. ZFW 23, 1-9 (1975).
- [118] White, F.M.: A new integral method for analyzing the turbulent boundary layer with arbitrary pressure gradient. J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D, 91, 371-378 (1969).
- [118a] White, F.M., and Lessmann, R.C.: A three-dimensional integral method for calculating incompressible turbulent skin friction. Trans. ASME, Ser. I, 97, 550-557 (1975).

- [119] White, F.M.: *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1974, 728 pp.
- [120] Wieghardt, K.: *Turbulente Grenzschichten*. Göttinger Monographie, Part B 6 (1945/46).
- [121] Wilckun, H.: *Turbulente Grenzschichten an gewölbten Wänden*. Ing.-Arch. *7*, 357-376 (1930).
- [122] Williams, J.: British research on boundary layer and flow control for high lift by blowing. *ZFW* *6*, 143-160 (1958).
- [122a] Willmarth, W.W., Winkel, R.E., Sharma, L.K., and Bogar, T.J.: Axially symmetric turbulent boundary layers on cylinders: mean velocity profiles and wall pressure fluctuations. *JFM* *76*, 35-64 (1976).
- [123] Winternitz, F.A.L., and Ramsay, W.J.: Effects of inlet boundary layer on the pressure recovery in conical diffusers. Mech. Eng. Res. Lab., Fluid Mech. Div., East Kilbride, Glasgow, Rep. No. 41 (1956).
- [124] Young, A.D.: The calculation of the total and skin friction drags of bodies of revolution at 0° incidence. ARO RM 1874 (1939).
- [125] Young, A.D., and Majola, O.O.: An experimental investigation of the turbulent boundary layer along a streamwise corner. *Turbulent Shear Flow*, AGARD Conf. Proc. *93*, 12-1 to 12-9 (1971).
- [126] Young, A.D.: Some special boundary-layer problems. 20th Prandtl Memorial Lecture, *ZFW* *1*, 401-414 (1977).

第二十三章

- [1] Anon.: *Compressible turbulent boundary layers*. A symposium held at Langley Research Center, Hampton, Virginia, December 10-11, 1968; NASA SP 216 (1969).
- [1a] Arnal, D., Cousteix, J., and Michel, R.: Couche limite se développant avec gradient de pression positif dans un écoulement extérieur turbulent. *Rech. Aerosp. Paris*, 1976, *7*, 13-26 (1976).
- [2] Bertram, M.H.: Calculations of compressible average turbulent skin friction. NASA TR R-123 (1962).
- [3] Bourne, D.E., and Davies, D.R.: On the calculation of eddy viscosity and of heat transfer in a turbulent boundary layer on a flat surface. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* *11*, 223-234 (1958).
- [4] Bradshaw, P.: Effects of streamline curvature on turbulent flow. AGARDograph No. 169 (1973).
- [5] Bradshaw, P.: The effect of mean compression or dilatation on the turbulence structure of supersonic boundary layers. *JFM* *63*, 449-464 (1974).
- [6] Bradshaw, P., and Ferriss, D.H.: Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation: compressible flow on adiabatic walls. *JFM* *46*, 83-110 (1971).
- [7] Brinich, P.F., and Diaconis, N.S.: Boundary layer development and skin friction at Mach number 3.05. NASA TN 2742 (1952).
- [8] Burggraf, O.R.: The compressibility transformation and the turbulent boundary layer equation. *JASS* *29*, 434-439 (1962).
- [9] Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: A finite-difference method for calculating compressible laminar and turbulent boundary layers. *Trans. ASME Ser. D, J. Basic Eng.* *92*, 523-536 (1970).
- [9a] Cousteix, J.: Analyse théorique et moyens de prévision de la couche limite turbulente tridimensionnelle. ONERA Publ. No. 157 (1974).
- [9b] Cousteix, J., and Houdeville, R.: Épaississement et séparation d'une couche limite turbulente soumise en interaction avec un choc oblique. *Rech. Aerosp. Paris*, 1976, *7*, 1-11 (1976).
- [10] Cebeci, T.; Kaups, K., Ramsey, J., and Moser, A.: Calculation of three-dimensional compressible turbulent boundary layers on arbitrary wings. Douglas Aircr. Co., Report No. MDC J. 6866 1-40, (1975).
- [11] Chapman, D.R., and Keeter, R.H.: Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. *JAS* *20*, 441-448 (1953).
- [12] Cohen, N.B.: A method for computing turbulent heat transfer in the presence of a streamwise pressure gradient for bodies in high-speed flow. NASA Memo. 1-2-59 L (1959).
- [13] Coles, D.: Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. *JAS* *21*, 433-448 (1954).

- [14] Coles, D.: Measurements in the boundary layer on a smooth flat plate in supersonic flow. I. The problem of the turbulent boundary layer. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20-69 (1953); II. Instrumentation and experimental techniques at the Jet Propulsion Laboratory. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20-70 (1953); III. Measurements in a flat plate boundary layer at the Jet Propulsion Laboratory. Cal. Inst. Techn. Jet Propulsion Lab. Rep. 20-71 (1953).
- [15] Coles, D.: The turbulent boundary layer in a compressible fluid. *Phys. Fluids* 7, 1403-1423 (1964).
- [16] Crocco, L.: Compressible turbulent boundary layer with heat exchange. *AIAA J.* 1, 2723-2731 (1963).
- [17] Gulick, F.E.C., and Hill, J.A.F.: A turbulent analog of the Stewartson-Hillingworth transformation. *JAS* 25, 259-262 (1958).
- [18] Davies, D.R.: On the calculation of eddy viscosity and heat transfer in a turbulent boundary layer near a rapidly rotating disk. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 12, 211-221 (1959).
- [19] Davies, D.R., and Bourne, D.E.: On the calculation of heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layers. I. The laminar case. II. The turbulent case. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 9, 457-488 (1958).
- [20] Deissler, R.G., and Eian, C.S.: Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties. NACA TN 2629 (1952).
- [21] Deissler, R.G.: Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers. NACA TR 1210 (1955).
- [22] Deissler, R.G., and Taylor, M.F.: Analysis of turbulent flow and heat transfer in non-circular passages. NACA TN 4384 (1959).
- [22] Deissler, R.G.: Analysis of turbulent flow and heat transfer on a flat plate at high Mach numbers with variable fluid properties. NACA Techn. Rep. R-17, 1-39 (1959).
- [24] Dhawan, S.: Direct measurements of skin friction. NACA Rep. 1121 (1953).
- [25] Dippyrey, D.F., and Sabersky, R.H.: Heat and momentum transfer in smooth and rough tubes at various Prandtl numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 329-353 (1963).
- [26] O'Donnell, R.M.: Experimental investigation at Mach number of 2.41 of average skin friction coefficients and velocity profiles for laminar and turbulent boundary layers and assessment of probe effects. NACA TN 2132 (1954).
- [27] Van Driest, E.R.: Turbulent boundary layer in compressible fluids. *JAS* 18, 145-160 (1951).
- [28] Van Driest, E.R.: The turbulent boundary layer with variable Prandtl number. Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien and H. Görtler, eds.), Braunschweig, 1955, 257-271.
- [29] Eckert, E.R.G.: Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow. *JAS* 22, 585-587 (1955).
- [30] Eckert, E.R.G.: Survey on heat transfer at high speeds. Rep. Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn. (1961).
- [31] Englert, G.W.: Estimation of compressible boundary-layer growth over insulated surfaces with pressure gradient. NACA TN 4022 (1957).
- [32] Ferrari, G.: Study of the boundary layer at supersonic speeds in turbulent flow: Case of flow along a flat plate. *Quart. Appl. Math.* 8, 33 (1950).
- [33] Ferrari, G.: The turbulent boundary layer in a compressible fluid with positive pressure gradient. Cornell Aeronautical Laboratory CAL/CM-560 (1949); summary: *JAS* 18, 460-477 (1951).
- [34] Ferrari, G.: Comparison of theoretical and experimental results for the turbulent boundary layer in supersonic flow along a flat plate. *JAS* 18, 555-564 (1951).
- [35] Ferrari, G.: Determination of the heat transfer properties of a turbulent boundary layer in the case of supersonic flow when the temperature distribution along the wall is arbitrarily assigned. Fifty years of boundary-layer research, (W. Tollmien and H. Görtler, eds.), Braunschweig, 1955, 364-384.
- [36] Gardner, G.O., and Kestin, J.: Calculation of the Spalding function over a range of Prandtl numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 289-299 (1963).
- [37] Goddard, F.E.: Effect of uniformly distributed roughness on turbulent skin friction drag at supersonic speeds. *JASS* 26, 1-15, 24 (1959).
- [38] Hill, F.K.: Boundary-layer measurements in hypersonic flow. *JAS* 23, 35-42 (1956).
- [39] Hill, F.K.: Turbulent boundary layer measurements at Mach numbers from 8 to 10. *Phys. Fluids* 2, 668-680 (1959).

- [40] Hoffmann, E.: Der Wärmeübergang bei der Strömung im Rohr. *Z. Ges. Kälte-Ind.* 44, 99-107 (1937).
- [41] Johnson, D.S.: Velocity, temperature, and heat transfer measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature. *J. Appl. Mech.* 24, 2-8 (1957).
- [42] Johnson, D.S.: Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature. *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 26, 325-336 (1959).
- [43] von Kármán, Th.: The problem of resistances in compressible fluids. *Volta Congress Rome 1935*, 222-277; see also *Coll. Works III*, 179-221.
- [44] von Kármán, Th.: The analogy between fluid friction and heat transfer. *Trans. ASME 61*, 705-710 (1939); see also *Coll. Works III*, 355-367.
- [45] Kestin, J., and Richardson, P.D.: Heat transfer across turbulent incompressible boundary layers. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 6, 147-189 (1963).
- [46] Kestin, J., and Richardson, P.D.: Wärmeübertragung in turbulenten Grenzschichten. *Forsch. Ing.-Wes.* 29, 93-104 (1963).
- [46a] Kestin, J., and Persen, L.N.: The transfer of heat across a turbulent boundary layer at very high Prandtl numbers. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 5, 355-371 (1962).
- [47] Kistler, A.L.: Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer. *Phys. Fluids* 2, 290-296 (1959).
- [48] Klebanoff, P.S.: Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA TN 3178* (1964); *TR 1247*, 1135-1153 (1955).
- [49] Kovasznay, L.S.G.: The hot-wire anemometer in supersonic flow. *JAS* 17, 565-573 (1950).
- [50] Kutateladze, S.S., and Leont'ev, A.I.: Turbulent boundary layer in compressible gases. *Transl. by D.B. Spalding*. Edward Arnold Publishers Ltd., London, 1964.
- [51] Lilley, G.M.: An approximation solution of the turbulent boundary layer equation in incompressible and compressible flow. *Coll. Aero. Cranfield Rep.* 134 (1960).
- [52] Liepmann, H.W., and Goddard, F.E.: Note on the Mach number effect upon the skin friction of rough surfaces. *JAS* 24, 784 (1957).
- [53] Lobb, R.K., Winkler, E.M., and Persh, J.: Experimental investigation of turbulent boundary layers in hypersonic flow. *NAVORD Rep.* 3880 (1955).
- [54] Ludwig, H.: Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten. *Ing.-Arch.* 17, 207-218 (1949).
- [55] Ludwig, H.: Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten. *ZFW* 4, 73-81 (1956).
- [56] Mack, L.M.: An experimental investigation of the temperature recovery-factor. *Jet Propulsion Laboratory, Calif. Inst. Techn., Pasadena, Rep.* 26-80 (1954).
- [57] Mager, A.: Transformation of the compressible turbulent boundary layer. *JAS* 25, 305-311 (1958).
- [58] Matting, F.W., Chapman, D.B., Nyholm, J.R., and Thomas, A.G.: Turbulent skin friction at high Mach numbers and Reynolds numbers in air and helium. *NASA TR R-82* (1961).
- [59] McLafferty, G.H., and Babber, R.E.: The effect of adverse pressure gradients on the characteristics of turbulent boundary layers in supersonic streams. *JASS* 29, 1-10, 18 (1962).
- [60] Meier, H.U.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen von turbulenten Grenzschichten bei Überschallströmung. *Mitt. MPI Strömungsforsch. u. Aerodyn. Versuchsanst. Nr. 49*, 1-116, (1970); *Diss. Braunschweig* 1970.
- [61] Meier, H.U., Lee, R.E., and Voisinet, R.L.P.: Vergleichsmessungen mit einer Danberg-Temperatursonde und einer kombinierten Druck-Temperatursonde in turbulenten Grenzschichten bei Überschallströmung. *ZFW* 22, 1-10 (1974).
- [62] Meier, H.U., Voisinet, R.L.P., and Gates, D.F.: Temperature distributions using the law of the wall for compressible flow with variable turbulent Prandtl numbers. *AIAA 7th Fluid and Plasma Dynamics Conf.*, Palo Alto, Calif. 1974, *AIAA Paper No. 74-596* (1974).
- [63] Meier, H.U., and Rotta, J.C.: Temperature distributions in supersonic turbulent boundary layers. *AIAA J.* 9, 2149-2156 (1971).
- [64] Meier, H.U.: Investigation of the heat transfer mechanisms in supersonic turbulent boundary layers. *Wärme- und Stoffübertragung* 8, 159-165 (1975).
- [65] Morkovin, M.V.: Effects of compressibility on turbulent flows. *Colloques Int. CNRS No. 108*, 367-390, *Mécanique de la turbulence*, Marseille, 1962.
- [66] Nunner, W.: Wärmeübergang und Druckabfall in rauen Rohren. *VDI-Forsch.* 455 (1956).

- [67] Owen, P.R., and Thomson, W.R.: Heat transfer across rough surfaces. *JFM* 15, 321-334 (1943).
- [68] Pappas, C.C.: Measurement of heat transfer in the turbulent boundary layer on a flat plate in supersonic flow and comparison with skin friction results. NACA TN 3222 (1954).
- [69] Persen, L.N.: A note on the basic equations of turbulent boundary layers and the heat transfer through such layers. *ZFW* 15, 311-314 (1967).
- [70] Prandtl, L.: Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten. *Phys. Z.* 11, 1072-1078 (1910); see also *Coll. Works II*, 585-596.
- [71] Reichardt, H.: Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. *ZAMM* 20, 297-328 (1940); NACA TM 1047 (1943).
- [72] Reichardt, H.: Impuls- und Wärmeaustausch bei freier Turbulenz. *ZAMM* 24, 268-272 (1944).
- [73] Reichardt, H.: Der Einfluss der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang. Rep. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung No. 3, 1-63 (1950).
- [74] Reichardt, H.: Die Grundlagen des turbulenten Wärmeübergangs. *Arch. Wärmebechn.* 2, 129-142 (1951).
- [75] Reshotko, E., and Tucker, M.: Approximate calculation of the compressible turbulent boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. NACA TN 4154 (1957).
- [76] Reynolds, O.: On the extent and action of the heating surface for steam boilers. *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* 14, 7-12 (1874).
- [77] Reynolds, W.C., Kays, W.M., and Kline, S.J.: Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. I. Constant wall temperature. NASA Memo. 12-1-58 W (1958); II. Step wall temperature distribution. NASA Memo. 12-2-58 W (1958); III. Arbitrary wall temperature and heat flux. NASA Memo. 12-3-58 W (1958); IV. Effect of location of transition and prediction of heat transfer in a known transition region. NASA Memo. 12-4-58 W (1958).
- [78] Rotta, J.C.: Über den Einfluss der Machschen Zahl und des Wärmeübergangs auf das Wandgesetz turbulenter Strömungen. *ZFW* 7, 264-274 (1959).
- [79] Rotta, J.C.: Turbulent boundary layers with heat transfer in compressible flow. AGARD Rep. 281 (1960).
- [80] Rotta, J.C.: Bemerkung zum Einfluss der Dichteschwankungen in turbulenten Grenzschichten bei kompressibler Strömung. *Ing.-Arch.* 32, 187-190 (1963).
- [81] Rotta, J.C.: Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte. *Int. J. Heat Mass Transfer* 7, 215-228 (1964).
- [82] Rotta, J.C.: Effect of streamwise wall curvature on compressible turbulent boundary layers. IUTAM Symp. Kyoto, Japan, 1966. *Phys. Fluids* 10, S 174-S 180 (1967).
- [83] Rotta, J.C.: Eine Beziehung zwischen den örtlichen Reibungsbeiwerten turbulenter Grenzschichten bei kompressibler und inkompressibler Strömung. *ZFW* 18, 195-201 (1970).
- [84] Rotta, J.C.: FORTRAN IV - Rechenprogramm für Grenzschichten bei kompressiblen ebenen und achsensymmetrischen Strömungen. DLR FB 71-51, 1-82 (1971).
- [85] Rubesin, M.W.: A modified Reynolds analogy for the compressible turbulent boundary layer on a flat plate. NACA TN 2917 (1953).
- [86] Schubauer, G.B., and Tchen, C.M.: Turbulent flow. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion* 7, 75-195, Princeton (1959).
- [87] Seiff, A.: Examination of the existing data on the heat transfer of turbulent boundary layers at supersonic speeds from the point of view of Reynolds analogy. NACA TN 3264 (1954).
- [88] Spalding, D.B.: Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a step-wise discontinuity in wall temperature. *International developments in heat transfer* (Proc. Conf. organized by ASME at Boulder, Colorado, 1961), Part II, 439-446.
- [89] Spalding, D.B., and Chi, S.W.: The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer. *JFM* 18, 117-143 (1964).
- [90] Spence, D.A.: Velocity and enthalpy distributions in the compressible turbulent boundary layer on a flat plate. *JFM* 8, 368-387 (1960).
- [91] Spence, D.A.: Some applications of Crocco's integral for the turbulent boundary layer. *Proc. 1960 Heat Transfer Fluid Mech. Inst., Stanford Univ.* 62-76 (1960).
- [92] Spence, D.A.: The growth of compressible turbulent boundary layers on isothermal and adiabatic walls. ARC RM 3191 (1961).
- [93] Stratford, B.S., and Beavers, G.S.: The calculation of the compressible turbulent boundary layer in an arbitrary pressure gradient. A correlation of certain previous methods. ARC RM 3207 (1959).

- [94] Smith, P.D.: An integral prediction method for three-dimensional compressible turbulent boundary layers. ARC RM 3739, 1-54 (1974).
- [95] Schlichting, H.: Heat transfer calculations in turbulent boundary layers using integral relations. *Acta Mechanica* 21, 301-312 (1975).
- [96] Taylor, G.I.: Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind. ARC RM 272 (1919).
- [97] Taylor, G.I.: The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Appendix by A. Fage and V. M. Falkner. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 236, 685 (1957); see also *Phil. Trans. A* 216, 1 (1915).
- [98] Taylor, J.R.: Temperature and heat flux distributions in incompressible turbulent equilibrium boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transfer* 15, 2473-2488 (1972).
- [99] Tucker, M.: Approximate turbulent boundary layer development in plane compressible flow along thermally insulated surfaces with application to supersonic-tunnel contour correction. NACA TN 2046, 78 (1950).
- [100] Walz, A.: Näherungstheorie für kompressible turbulente Grenzschichten. *ZAMM-Sonderheft* 26, 50-56 (1956).
- [101] Walz, A.: Über Fortschritte in Näherungstheorie und Praxis der Berechnung kompressibler laminarer und turbulenter Grenzschichten mit Wärmeübergang. *ZFW* 13, 89-102 (1955).
- [102] Wilson, R.E.: Turbulent boundary layer characteristics at supersonic speeds - Theory and experiment. *JAS* 17, 585-594 (1950).
- [103] Winkler, E.M.: Investigation of flat plate hypersonic turbulent boundary layers with heat transfer. *J. Appl. Mech.* 33, 323-329 (1961).
- [104] Winkler, E.M., and Cha, M.H.: Investigation of flat plate hypersonic turbulent boundary layers with heat transfer at a Mach number of 5.2 (U). NAVORD Rep. 6631 (1959).
- [105] Winter, K.G., Rotte, J.G., and Smith, K.G.: Untersuchungen der turbulenten Grenzschicht an einem taillierten Drehkörper bei Unter- und Überschallströmung. DLR FB 95-52, 1-71 (1965); see also ARC RM 3033, 1-75 (1970).
- [106] Young, A.D.: The drag effects of roughness at high subcritical speeds. *J. Roy. Aero. Soc.* 18, 534 (1950).

第二十四章

- [1] Abramovich, G.N.: *The theory of turbulent jets* (Translation from the Russian). MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.
- [1a] Ahmed, S.E.: Die Vermischung von koaxialen und turbulenten Strahlen verschiedener Geschwindigkeit und Temperatur in einem Rohr. *Diss. Braunschweig* 1970. VDI-Forschungsheft 547, 18-30 (1971).
- [1b] Albertson, M.L., Dal, Y.B., Jensen, R.A., and Rouse, H.: Diffusion of submerged jets. *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.* 116, 639-696 (1950).
- [2] Anderlik, E.: *Math. termeszett. Ertes* 52, 54 (1935).
- [2a] Antonia, R.A., and Bilger, R.W.: The heated round jet in a coflowing stream. *AIAA J* 14, 1541-1547 (1976).
- [3] Basko, P.: An experimental investigation of a wall jet. *JFM* 2, 467-472 (1957).
- [4] Bradshaw, P., and Gee, M.T.: Turbulent wall jets with and without an external stream. ARC RM 3252, 1-48 (1962).
- [5] von Bohl, J.G.: Das Verhalten paralleler Luftstrahlen. *Ing.-Arch.* 11, 295-314 (1940).
- [6] Bourque, C., and Newmann, B.G.: Re-attachment of a two-dimensional incompressible jet to an adjacent flat plate. *Aero. Quart.* 11, 201-232 (1960).
- [7] Cordes, G.: Statische Druckmessung in turbulenter Strömung. *Ing.-Arch.* 8, 245-270 (1937).
- [8] Corrsin, S., and Uberoi, M.S.: Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet. NACA TN 998 (1950).
- [9] Davies, D.R.: The problem of diffusion into a turbulent boundary layer from a plane area source bounded by two straight perpendicular edges. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 7, 468-471 (1954).
- [10] Dvorak, F.A.: Calculation of turbulent boundary layers and wall jets over curved surfaces. *AIAA J.* 11, 517-524 (1973).
- [11] Föthmann, E.: Über turbulente Strahlausbretung. *Diss. Göttingen* 1933; *Ing.-Arch.* 5, 42-54 (1934); NACA TM 789 (1936).
- [12] Frost, B.: Turbulence and diffusion in the lower atmosphere. *Proc. Roy. Soc. A* 186, 20 (1946).
- [13] Eichhorn, R.A., and Dumarque, P.: Le problème du "jet pariétal" plan en régime turbulent pour un écoulement extérieur de vitesse U_∞ constante. *J. Mécanique* 1, 109-122 and 1, 123-134 (1962).

- [14] Gartshore, J.S., and Newman, B.G.: The turbulent wall jet in an arbitrary pressure gradient. *Aero. Quart.* 20, 25-58 (1969).
- [15] Gersten, K.: Flow along highly curved surfaces. Lecture at *EUROMECH I*, Berlin 1965; see also [57].
- [16] Glauert, M.B.: The wall-jet. *JFM* 7, 625-643 (1956).
- [17] Gooderum, P.B., Wood, G.P., and Brevoort, M.J.: Investigation with an interferometer of the turbulent mixing of a free supersonic jet. *NACA Rep.* 968 (1950).
- [18] Görtler, H.: Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. *ZAMM* 22, 244-254 (1942).
- [19] Gran Olsson, R.: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. *ZAMM* 16, 257-267 (1936).
- [20] Hinze, J.O., and van der Hegge Zijnen, B.G.: Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet. *Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech.* 2, Part I, 286-299 (1948).
- [20a] Hirst, E.: Buoyant jet discharged into quiescent stratified ambients. *J. Geophys. Res.* 76, 7375-7384 (1971).
- [21] Howarth, L.: Concerning the velocity and temperature distributions in plane and axially symmetrical jets. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 34, 185-203 (1938).
- [22] Keffler, J.F., and Baines, W.D.: The round turbulent-jet in a cross-wind. *JFM* 15, 481-496 (1963).
- [23] Kruke, V., and Eskinazi, S.: The wall jet in a moving stream. *JFM* 20, 555-579 (1964).
- [24] Kuethe, A.M.: Investigations of the turbulent mixing regions formed by jets. *J. Appl. Mech.* 2, 87-95 (1935).
- [24a] Mohammadian, S., Salky, M., and Peerless, J.: Fluid mixing with unequal free-stream turbulence intensities. *J. Fluids Eng. Trans. ASME* 1, 98, 229-235 (1976).
- [24b] List, E.H., and Imberger, J.: Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes. *J. Hydr. Div. ASCE* 99, HY 9, 1461-1474 (1973).
- [24c] Métral, A.: Sur un phénomène de déviation des veines fluides et ses applications. *Effet Coanda*. Cabinet Technique du Ministère de l'Air (1938).
- [24d] Métral, A., and Zerner, F.: L'effet Coanda. *Publication Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, No. 218 (1948). *MOS. TIB/T* 4027 (1953).
- [25] Newman, B.G., Patel, R.P., Savage, S.B., and Tjio, H.K.: Three-dimensional wall jet originating from a circular orifice. *Aero. Quart.* 23, 188-200 (1972).
- [25a] Newman, B.G.: The deflection of plane jets by adjacent boundaries - Coanda effect. G.V. Lachmann (ed.): *Boundary Layer and Flow Control*. Pergamon Press. Vol. 1, 232-264 (1961).
- [26] Pai, S.I.: *Fluid dynamics of jets*. New York, 1954.
- [26a] Pfeil, H., and Eifer, J.: Zur Frage der Schubspannungsverteilung für die ebenen freien turbulenten Strömungen. *Forsch. Ing.-Wes.* 41, 105-136 (1975).
- [26b] Pfeil, H., and Eifer, J.: Messungen im turbulenten Nachlauf des Einzelzylinders. *Forsch. Ing.-Wes.* 41, 137-145 (1975).
- [27] Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In W.F. Durand (ed.): *Aerodynamic Theory*, III, 16-208 (1935); see also *Proc. IInd Intern. Congress Appl. Mech.* Zürich 1926.
- [28] Reichardt, H.: Über eine neue Theorie der freien Turbulenz. *ZAMM* 21, 257-264 (1941).
- [29] Reichardt, H.: *Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz*. VDI-Forschungsheft 414 (1942). 2nd ed. 1951.
- [30] Reichardt, H.: Impuls- und Wärmeaustausch in freier Turbulenz. *ZAMM* 24, 266-272 (1944).
- [31] Reichardt, H., and Ernshaus, R.: Impuls- und Wärmeübertragung in turbulenten Windschatten hinter Rotationskörpern. *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 251-265 (1963).
- [22] Reichardt, H.: Turbulente Strahlausbreitung in gleichgerichteter Grundströmung. *Forsch. Ing.-Wes.* 30, 133-139 (1964).
- [33] Ruden, P.: Turbulente Ausbreitung im Freistrah. *Naturwissenschaften* 21, 375-378 (1933).
- [34] Sawyer, R.A.: The flow due to a two-dimensional jet issuing parallel to a flat plate. *JFM* 9, 543-560 (1960).
- [35] Schlichting, H.: Über das ebene Windschattenproblem. *Diss. Göttingen* 1930; *Ing.-Arch.* 1, 533-571 (1930).
- [36] Schmidt, W.: Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. *ZAMM* 21, 265-278 and 351-363 (1941).

- [36a] Schneider, W.: Über den Einfluß der Schwerkraft auf anisotherm, turbulente Freistrahlen. *Abh. Aerod. Inst. T.H. Aachen*, No. 22, 59—65 (1973).
- [37] Sigalla, S.: Measurements of skin friction in plane turbulent wall jet. *J. Roy. Aero. Soc.* 62, 873—877 (1968).
- [38] Squire, H.B., and Rouncer, J.T.: Round jets in a general stream. *ARC RM 1974* (1944).
- [39] Squire, H.B.: Reconsideration of the theory of free turbulence. *Phil. Mag.* 39, 1—20 (1948).
- [40] Squire, H.B.: Jet flow and its effect on aircraft. *Aircraft Engineering* 22, 62—67 (1950).
- [41] Swain, L.M.: On the turbulent wake behind a body of revolution. *Proc. Roy. Soc. London A* 125, 647—659 (1929).
- [42] Sforza, P.M., and Herbst, G.: A study of three-dimensional incompressible turbulent wall jet. *AIAA J.* 8, 276—283 (1970).
- [43] Swamy, N.V.C., and Gowda, B.H.L.: Characteristics of three-dimensional wall jets. *ZFW* 22, 314—323 (1974).
- [44] Swamy, N.V.C., and Bandyopadhyay, P.: Mean and turbulence characteristics of three-dimensional wall jets. *JFM* 71, 541—562 (1975).
- [45] Schmidt, D.W., and Wagner, W.J.: Measurements of the temperature fluctuations in turbulent wakes. *ZFW* 22, 10—14 (1974).
- [46] Szablewski, W.: Zur Theorie der turbulenten Strömung von Gasen stark veränderlicher Dichte. *Diss. Göttingen* 1947; *Ing.-Arch.* 20, 67—72 (1952).
- [47] Szablewski, W.: Zeitliche Auflösung einer ebenen Trennungsfläche der Geschwindigkeit und Dichte. *ZAMM* 35, 464—468 (1955).
- [48] Szablewski, W.: Turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahlen von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur. *Ing.-Arch.* 20, 73—80 (1952).
- [49] Tanner, M.: Einfluss des Keilwinkels auf den Ähnlichkeitsparameter der turbulenten Vermischungszone in inkompressibler Strömung. *Forsch. Ing.-Wes.* 39, 121—125 (1973).
- [50] Taylor, G.I.: The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Appendix by A. Fage and V.M. Falkner. *Proc. Roy. Soc. A* 135, 685—705 (1932).
- [51] Thomas, F.: Untersuchungen über die Grenzschicht an einer Wand stromabwärts von einem Ausblaspalt. *Abhandl. Wiss. Ges. Braunschweig* 16, 1—17 (1963).
- [52] Tollmien, W.: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. *ZAMM* 6, 468—478 (1926); *NACA TM* 1085 (1945).
- [53] Tollmien, W.: Die von Kármánsche Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenz-Theorie und des ebene Windschattenproblem. *Ing.-Arch.* 4, 1—15 (1933).
- [54] Townsend, A.A.: Momentum and energy diffusion in the turbulent wake of a cylinder. *Proc. Roy. Soc. London A* 197, 124—140 (1949).
- [55] Viktorin, K.: Untersuchungen turbulenter Mischvorgänge. *Forsch. Ing.-Wes.* 12, 16—30 (1941); *NACA TM* 1096 (1946).
- [56] Wieghardt, K.: Über Ausbreitungsvorgänge in turbulenten Reibungsschichten. *ZAMM* 28, 346—355 (1948).
- [57] Wille, R., and Fernholz, H.: Report on the First Mechanics Colloquium on the Coanda effect. *JFM* 23, 801—819 (1965).
- [58] Wille, R.: Beiträge zur Phänomenologie der Freistrahlen (Third Otto-Lilienthal-Lecture 1962). *ZFW* 11, 222—233 (1963).
- [59] Wuest, W.: Turbulente Mischvorgänge in zylindrischen und kegelförmigen Fangdüsen. *Z. VDI* 92, 1000—1001 (1950).
- [60] Yamaguchi, S.: Turbulente Vermischung eines ebenen Strahles in gleichgerichteter Aussenströmung. *Ing.-Arch.* 35, 172—180 (1966).
- [60a] Young, D.W., and Zonars, D.: Wind tunnel tests of the Coanda wing and nozzle. *USAF Techn. Report* 6199 (1950).
- [61] Zimm, W.: Über die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. *VDI-Forschungsheft* 234 (1921).
- [62] Reports of the AVA Göttingen, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. B. Oldenbourg, München, Vol. 2, 69—77 (1923).

第二十五章

- [1] Abbott, J.H., von Doenhoff, A.E., and Stivers, L.S.: Summary of airfoil data. NACA Rep. 824 (1946).
- [2] Bahr, J.: Untersuchungen über den Einfluss der Profildicke auf die kompressible ebene Strömung durch Verdichtergitter. Diss. Braunschweig 1962. Forsch. Ing.-Wes. 30, 14--25 (1964).
- [3] Bammert, K., and Milsch, R.: Boundary layers on rough compressor blades. ASME Paper No. 72-GT-48. Gas Turbine Conference, San Francisco, 1972.
- [4] Betz, A.: Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. ZFM 16, 42--44 (1925).
- [5] Davis, H., Kottas, H., and Moody, A.M.: The influence of Reynolds number on the performance of turbo-machinery. Trans. ASME 73, 499--509 (1951).
- [6] Doetsch, H.: Profilwiderstandsmessungen im grossen Windkanal der DVL. Luftfahrtforschung 14, 173--178 and 370--372 (1937).
- [7] Dowlen, E.M.: A shortened method for the calculation of airfoil profile drag. J. Roy. Aero. Soc. 56, 109--116 (1952).
- [8] Dunham, J.: Predictions of boundary layer transition on turbomachinery blades. AGARD AG-164 (1972).
- [9] Eastman, N., Jacobs, E.N., and Sherman, A.: Airfoil section characteristics as affected by variation of the Reynolds number. NACA RM 586 (1937).
- [10] Evans, R.L.: Stream turbulence effects on the turbulent boundary layer in a compressor cascade. British ARC Rep. 34 587 (1973).
- [11] Fage, A., Falkner, V.M., and Walker, W.S.: Experiments on a series of symmetrical Joukowski sections. ARC RM 1241 (1929).
- [12] Fage, A.: Profile and skin-friction airfoil drags. ARC RM 1852 (1938).
- [13] Feindt, E.G.: Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. Diss. Braunschweig 1956; Jb. Schiffbautechn. Ges. 50, 180--205 (1966).
- [14] Gersten, K.: Experimenteller Beitrag zum Reibungseinfluss auf die Strömung durch ebene Schaufelgitter. Abhandl. Wiss. Ges. Braunschweig 7, 93--99 (1955).
- [15] Gersten, K.: Der Einfluss der Reynolds-Zahl auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. Abhandl. Wiss. Ges. Braunschweig 11, 5--19 (1959).
- [16] Geett, H.J.: Experimental investigation of the momentum method for determining profile drag. NACA Rep. 660 (1939).
- [17] Göthert, B.: Widerstandsbestimmung bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten aus Impulsverlustmessungen. Jb. dt. Luftfahrtforschung 1, 149--185 (1941).
- [18] Granville, P.S.: The calculation of the viscous drag of bodies of revolution. David W. Taylor Model Basin, Rep. 849 (1953).
- [19] Götler, H.: Verdrängungswiderstand der laminaren Grenzschicht und Druckwiderstand. Ing.-Arch. 14, 286--305 (1943/44).
- [20] Gester, M.: The structure and behaviour of laminar separation bubbles. British ARC Rep. 28 226 (1966).
- [20a] Haas, H., and Maghon, H.: Mögliche Wirkungsgradverbesserungen bei Dampf- und Gasturbinen. Conference on technologies for more efficient utilization of energy in electric power stations at Kernforschungsanlage Jülich, Febr. 1976. Jülich-Conf. 19, 74--80 (1976).
- [21] Hebbel, H.: Über den Einfluss der Mach-Zahl und der Reynolds-Zahl auf die aerodynamischen Beiwerte von Turbinenschaukelgittern bei verschiedener Turbulenz der Strömung. Diss. Braunschweig 1962; Forsch. Ing.-Wes. 30, 65--77 (1964).
- [22] Helmbold, H.B.: Zur Berechnung des Profilwiderstandes. Ing.-Arch. 17, 273--279 (1949).
- [23] Hebbel, H.: Über den Einfluss der Mach-Zahl und der Reynolds-Zahl auf die aerodynamischen Beiwerte von Verdichter-Schaukelgittern bei verschiedener Turbulenz der Strömung. Forsch. Ing.-Wes. 33, 141--150 (1967).
- [24] Horlock, J.H., and Lakshminarayana, B.: Secondary flows: Theory, experiment, and application in turbomachinery aerodynamics. Annual Review of Fluid Mechanics (M. Van Dyke, ed.) 5, 247--280 (1973).
- [25] Horlock, J.H., Shaw, R., Pollhard, D., and Lewkowicz, A.: Reynolds number effects in cascades and axial flow compressors. Trans. ASME, J. Eng. Power 86, 236--242 (1964).
- [26] Jones, B.M.: The measurement of profile drag by the pitot traverse method. ARC RM 1688 (1936).

- [27] Jaumotte, A.L., and Devienne, P.: Influence du nombre de Reynolds sur les pertes dans les grilles d'aubes. *Technique et Science Aéronautique* 5, 227-232 (1956).
- [28] Horton, H.P.: A semi-empirical theory for the growth and bursting of laminar separation bubbles. *British ARC Rep. CP No. 1073* (1969).
- [29] Jones, B.M.: Flight experiments on boundary layers. *JAS* 5, 81-101 (1938); see also *Engineering* 145, 397 (1938) and *Aircraft Eng.* 19, 135-141 (1938).
- [30] Kiock, R.: Einfluss des Turbulenzgrades auf die aerodynamischen Beiwerte von ebenen Verzögerungsgittern. *Diss. Braunschweig* 1971; *Forschg. Ing.-Wes.* 39, 17-28 (1973).
- [31] Lawaczeck, O., and Amecke, J.: Probleme der transsonischen Strömung durch Turbinen-Schaufelgitter. *VDI-Forschungsheft* 540 (1970).
- [32] Lawaczeck, O., and Heinemann, H. J.: Von Kármán vortex streets in the wakes of subsonic and transonic cascades. Paper AGARD Meeting on Unsteady Phenomena in Turbomachinery, Monterey, Cal., Sept. 1975. AGARD CP-177, 28-1 to 28-13 (1976).
- [33] Lehthaus, F.: Berechnung der transsonischen Strömung durch ebene Turbinengitter nach dem Zeitschritt-Verfahren. *Diss. Braunschweig* 1977. *VDI-Forschungsheft* 586, 5-24 (1978).
- [34] Lawaczeck, O.: Halbempirisches Berechnungsverfahren für ebene transsonische Turbinenprofile mit Plattenprofilen. *VDI-Forschungsheft* 586, 25-36 (1978).
- [35] Lawson, T.V.: An investigation into the effect of Reynolds number on a cascade of blades with parabolic arc camberline. *British NGTE Memo. M 1975* (1953).
- [36] Lock, C.N.H., Hilton, W.F., and Goldstein, S.: Determination of profile drag at high speeds by a pitot traverse method. *ARC RM* 1971 (1946).
- [37] Ntini, B.A.: A theoretical and experimental investigation of separation bubbles. *Ph.D. Thesis Univ. of London* 1969.
- [38] Piercy, N.V.A., Preston, J.H., and Whitehead, L.G.: Approximate prediction of skin friction and lift. *Phil. Mag.* 26, 791-816 (1938).
- [39] Pfenninger, W.: Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung bei Profilwiderstandsmessungen. *Rep. Inst. of Aerodynamics ETH Zürich*, No. 8 (1943).
- [40] Pretsch, J.: Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1938, 1, 61-81; *Engl. transl. NACA TM* 1009 (1942).
- [41] Rhoden, H.G.: Effects of Reynolds number on the flow of air through a cascade of compressor blades. *ARC RM* 2919 (1956).
- [42] Raj, R., and Lakshminarayana, B.: Characteristics of the wake behind a cascade of airfoils. *JFM* 61, 707-730 (1973).
- [43] Roberts, W.B.: The effect of Reynolds number and laminar separation on axial cascade performance. *Trans. ASME, Ser. A, J. Eng. Power* 97, 261-274 (1975).
- [44] Riegels, F.W.: Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. *ZFW* 9, 2-15 (1961).
- [45] Schäffer, H.: Untersuchungen über die dreidimensionale Strömung durch axiale Schaufelgitter mit zylindrischen Schaufeln. *Diss. Braunschweig* 1964. *Forschg. Ing.-Wes.* 21, 9-19 and 41-49 (1955).
- [46] Schlichting, H., and Scholz, N.: Über die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters. *Ing.-Arch.* 19, 42-65 (1951).
- [47] Schlichting, H.: Ergebnisse und Probleme von Gitteruntersuchungen. *ZFW* 1, 109-122 (1953).
- [48] Schlichting, H.: Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. *VDI-Forschungsheft* 447 (1955).
- [49] Schlichting, H.: Anwendung der Grenzschichttheorie auf Strömungsprobleme der Turbomaschinen. *Siemens Z.* 33, 429-438 (1959); see also: Application of boundary layer theory in turbomachinery. *Trans. ASME Ser. D, J. Basic Eng.* 81, 543-551 (1959).
- [50] Schlichting, H.: Neuere Untersuchungen über Schaufelgitterströmungen. *Siemens Z.* 37, 827-837 (1963).
- [51] Surugue, J. (ed.): Boundary layer effects in turbomachines. *AGARDograph* No. 164 (1972).
- [52] Schlichting, H., and Das, A.: Über einige grundlegende Fragen auf dem Gebiet der Aerodynamik der Turbomaschinen. *L'Aerotechnica* 46, 179-194 (1956).
- [53] Schlichting, H., and Das, A.: On the influence of turbulence level on the aerodynamic losses of axial turbomachines. In: *Flow research on blading* (L.S. Dzung, ed.), Elsevier, Amsterdam, 1970, 243-274.

- [54] Scholz, N., and Hopkes, U.: Der Hochgeschwindigkeitsgitterwindkanal der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig. *Forschg. Ing.-Wes.* 25, 133-147 (1959). See also Schlichting, H.: The variable density high speed cascade wind tunnel of the Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig. AGARD Rep. 91 (1956).
- [55] Scholz, N.: Aerodynamik der Schaufelgitter. Vol. I, Braun, Karlsruhe, 1965. Revised Engl. translation by A. Klein: *Aerodynamics of cascades*. AGARDograph No. 220, AGARD, Paris, 1977.
- [56] Speidel, L.: Einfluss der Oberflächenrauigkeit auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. *Forschg. Ing.-Wes.* 20, 129-140 (1954).
- [57] Seyb, N.J.: Determination of cascade performance with particular reference to the prediction of boundary layer parameters. *British ARC Rep.* 27 214 (1965).
- [58] Scholz, N.: Über eine rationelle Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche. *Jb. Schiffbautechn. Ges.* 45, 244-259 (1951).
- [59] Scholz, N.: Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. *VDI-Forschungsheft* 442 (1954).
- [60] Scholz, N., and Speidel, L.: Systematische Untersuchungen über die Strömungsverluste von ebenen Schaufelgittern. *VDI-Forschungsheft* 464 (1957).
- [61] Schrenk, M.: Über die Profilwiderstandsmessung im Fluge nach dem Impulsverfahren. *Luftfahrtforschung* 2, 1-32 (1928); *NACA TM* 557 and 558 (1930).
- [62] Serby, J.E., Morgan, M.B., and Cooper, E.R.: Flight tests on the profile drag of 14% and 25% thick wings. *ARC RM* 1826 (1937).
- [63] Speidel, L.: Berechnung der Strömungsverluste von ungestaffelten ebenen Schaufelgittern. *Diss. Braunschweig* 1953; *Ing.-Arch.* 22, 296-322 (1954).
- [64] Squire, H.B., and Young, A.D.: The calculation of the profile drag of aerofoils. *ARC RM* 1838 (1938).
- [64a] Stark, U.: A theoretical investigation of the jet flap compressor cascade in incompressible flow. *Diss. Braunschweig* 1971; *Trans. ASME, J. Eng. Power.* 94, 249-260 (1972).
- [65] Stuart, D.J.K.: Analysis of Reynolds number effects in fluid flow through two-dimensional cascades. *ARC RM* 2920 (1956).
- [66] Tani, I.: Low speed flows involving bubble separations. *Progress in Aeronautical Sciences*, (D. Küchemann, ed.) Pergamon Press, 5, 70-103 (1964).
- [67] Taylor, G.I.: The determination of drag by the pitot traverse method. *ARC RM* 1808 (1937).
- [68] Trukenbrodt, E.: Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. *Ing.-Arch.* 21, 176-183 (1953).
- [69] Wanner, A., and Kretz, P.: Druckverteilungs- und Profilwiderstandsmessungen im Flug an den Profilen *NACA* 23012 und *Göttingen* 549. *Jb. dt. Luftfahrtforschung* 1, 111-119 (1941).
- [70] Weidinger, H.: Profilwiderstandsmessungen an einem Junkers-Tragflügel. *Jb. WGL* 1926, 112; *NACA TM* 428 (1927).
- [71] Young, A.D.: Note on the effect of compressibility on Jones's momentum method of measuring profile drag. *ARC RM* 1881 (1939).
- [72] Young, A.D.: The calculation of the total and skin friction drags of bodies of revolution at 0° incidence. *ARC RM* 1947 (1939).
- [73] Young, A.D., Winterbottom, B.A., and Winterbottom, N.E.: Note on the effect of compressibility on the profile drag of aerofoils at subsonic Mach numbers in the absence of shock waves. *ARC RM* 2400 (1950).
- [74] Young, A.D.: Note on momentum methods of measuring profile drags at high speeds. *ARC RM* 1963 (1946).
- [75] Young, A.D.: Note on a method of measuring profile drag by means of an integrating comb. *ARC RM* 2257 (1948).
- [76] Young, A.D., and Kirkby, S.: The profile drag of biconvex wing sections at supersonic speeds. *Fifty years of boundary-layer research* (W. Tollmien and H. Görtler, eds.), Braunschweig, 1955, 419-431.
- [77] Young, A.D.: The calculation of the profile drag of aerofoils and bodies of revolution at supersonic speeds. *WGL Jb.* 1963 (H. Blank, ed.), 66-75 (1954).

参 考 书 目

A. 连续出版的述评

A.1. Annual Review of Fluid Mechanics, Annual Review Inc., Palo Alto, Cal.

Vol. 1 (1969)

Goldstein, S.: Fluid mechanics in the first half of this century.

Turner, J.S.: Buoyant plumes and thermals.

Brown, S.N., and Stewartson, K.: Laminar separation.

Yih, Chia-Shun: Stratified flows.

Melcher, J.R., and Taylor, G.L.: Electrohydrodynamics; A review of the role of interfacial shear stresses.

Kennedy, J.F.: The formation of sediment ripples, dunes, and antidunes.

Tani, I.: Boundary-layer transition.

Howes Williams, J.R.: Hydrodynamic noise.

Jones, R.T.: Blood flow.

Phillips, O.M.: Shear-flow turbulence.

Van Dyke, M.: Higher-order boundary-layer theory.

Levich, V.G., and Krylov, O.S.: Surface-tension-driven phenomena.

Sherman, F.S.: The transition from continuum to molecular flow.

Hawthorne, W.R., and Novak, R.A.: The aerodynamics of turbo-machinery.

Lamley, J.L.: Drag reduction by additives.

Zel'Dovich, Y.B., and Raizer, Y.P.: Shock waves and radiation.

Lighthill, M.J.: Hydromechanics of aquatic animal propulsion.

Vol. 2 (1970)

Loitsianskiĭ, L.G.: The development of boundary-layer theory in the USSR.

Emmons, H.W.: Critique of numerical modeling of fluid-mechanics phenomena.

Veronis, G.: The analogy between rotating and stratified fluids.

Newman, J.N.: Applications of slender-body theory in ship hydrodynamics.

Kovaszny, L.S.G.: The turbulent boundary layer.

Lick, W.: Nonlinear wave propagation in fluids.

Brauner, H.: Rheology of two-phase systems.

Philip, J.R.: Fluid in porous media.

Henderholt, M., and Munk, W.: Tides.

Monin, A.S.: The atmospheric boundary layer.

Phillips, N.A.: Models for weather prediction.

Robinson, A.R.: Boundary layers in ocean circulation models.

Spreiter, J.R., and Alkens, A.U.: Solar-wind flow past objects in the solar system.

Rich, J.W., and Treanor, Ch.E.: Vibrational relaxation in gas-dynamic flows.

Marble, F.E.: Dynamics of dusty gases.

Vol. 3 (1971)

Basemann, A.: Compressible flow in the thirties.

Jaffrin, M.Y., and Shapiro, A.H.: Peristaltic pumping.

Hunt, J.C.R., and Shercliff, J.A.: Magnetohydrodynamics at high Hartmann number.

Friedmann, H.W., Linson, L.M., Patrick, R.M., and Petschek, H.E.: Collisionless shocks in plasmas.

- Vincenti, W.G., and Traugott, S.C.: The coupling of radiative transfer and gas motion.
 Rivlin, R.S., and Sawyers, K.N.: Nonlinear continuum mechanics of viscoelastic fluids.
 Willmarth, W.W.: Unsteady force and pressure measurements.
 Williams, F.A.: Theory of combustion in laminar flows.
 Fung, Y.C., and Zweifach, B.W.: Microcirculation: Mechanics of blood flow in capillaries.
 Rohsenow, W.M.: Boiling.
 Wehausen, J.V.: The motion of floating bodies.
 Hayes, W.D.: Sonic booms.
 Cox, R.G., and Mason, S.G.: Suspended particles in fluid flow through tubes.
 Korobeinikov, V.P.: Gas dynamics of explosions.
 Stuart, J.T.: Nonlinear stability theory.
 Mikhailov, V.V., Neiland, V.Y., and Sychev, V.V.: The theory of viscous hypersonic flow.

Vol. 4 (1972)

- Villat, H.: As luck would have it -- a few mathematical reflections.
 Harleman, D.R.F., and Stolzenbach, K.D.: Fluid mechanics of heat disposal from power generation.
 Turcotte, D.L., and Oxburgh, E.R.: Mantle convection and the new global tectonics.
 Long, R.R.: Finite amplitude disturbances in the flow of inviscid rotating and stratified fluids over obstacles.
 Jahn, Th.L., and Votta, J.J.: Locomotion of protozoa.
 Roberts, P.H., and Soward, A.M.: Magnetohydrodynamics of the earth's core.
 Becker, E.: Chemically reacting flows.
 Hall, M.G.: Vortex breakdown.
 Hunter, C.: Self-gravitating gaseous disks.
 Wu, Th. Yao-tsu: Cavity and wake flows.
 Barenblatt, G.I., and Zel'dovich, Y.B.: Self-similar solutions as intermediate asymptotics.
 Berger, E., and Wille, R.: Periodic flow phenomena.
 Houtt, D.P.: Oil spreading on the sea.
 van Wijngaarden, L.: One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles.
 Milgram, J.H.: Sailing vessels and sails.
 Ashley, H., and Rodden, W.P.: Wing-body aerodynamic interaction.
 Howard, L.N.: Bounds on flow quantities.

Vol. 5 (1973)

- Flügge, W., and Flügge-Lotz, I.: Ludwig Prandtl in the nineteen-thirties: Reminiscences.
 Penner, S.S., and Jerskey, T.: Use of lasers for local measurement of velocity components, species, and temperatures.
 Oppenheim, A.K., and Soloukhin, R.L.: Experiments in gasdynamics of explosions.
 Fischer, H.B.: Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow.
 Wegener, P.P., and Parlange, J.-Y.: Spherical-cap bubbles.
 Mollo-Christensen, E.: Intermittency in large-scale turbulent flows.
 Nieuwland, G.Y., and Speer, B.M.: Transonic airfoils: Recent developments in theory, experiment, and design.
 Fay, J.A.: Buoyant plumes and wakes.
 Acosta, A.J.: Hydrofoils and hydrofoil craft.
 Saibel, E.A., and Macken, N.A.: The fluid mechanics of lubrication.
 Gebhart, B.: Instability, transition, and turbulence in buoyancy-induced flows.
 Horlock, J.H., and Lakshminarayana, B.: Secondary flows: Theory, experiment, and application in turbomachinery aerodynamics.
 McCune, J.E., and Karrebrock, J.L.: Noise from aircraft turbomachinery.
 Ferri, A.: Mixing-controlled supersonic combustion.
 Michelbranner, E.A.: Three-dimensional boundary layers.
 Werle, H.: Hydrodynamic flow visualization.

Kogan, M.N.: *Molecular gas dynamics.*
Nickel, K.: *Prandtl's boundary-layer theory from the viewpoint of a mathematician.*

Vol. 6 (1974)

Taylor, G.I.: *The interaction between experiment and theory in fluid mechanics.*
Miles, J.W.: *Harbor seiching.*
Turner, J.S.: *Double-diffusive phenomena.*
Streeter, V.L., and Wylie, E.B.: *Waterhammer and surge control.*
van Atta, Ch.W.: *Sampling techniques in turbulence measurements.*
Phillips, O.M.: *Nonlinear dispersive waves.*
Truesdell, C.: *The meaning of viscometry in fluid dynamics.*
Panofsky, H.A.: *The atmospheric boundary layer below 150 meters.*
Roberts, P.H., and Donnelly, R.J.: *Superfluid mechanics.*
Batchelor, G.K.: *Transport properties of two-phase materials with random structure.*
Benton, E.R., and Clark, jr., A.: *Spin-up.*
Orzag, St.A., and Israeli, M.: *Numerical simulation of viscous incompressible flows.*
Korbacher, G.K.: *Aerodynamics of powered high-lift systems.*

Vol. 7 (1975)

Burgers, J.M.: *Some memories of early work in fluid mechanics at the Technical University of Delft.*
Willmarth, W.W.: *Pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers.*
Palm, E.: *Nonlinear thermal convection.*
Lomax, H., and Steger, L.: *Relaxation methods in fluid mechanics.*
Wiegardt, K.: *Experiments in granular flow.*
Christiansen, W.H., Russell, D.A., and Hertzberg, A.: *Flow lasers.*
Widnall, Sh.E.: *The structure and dynamics of vortex filaments.*
Tien, C.L.: *Fluid mechanics of heat pipes.*
Koh, R.C.Y., and Brooks, N.H.: *Fluid mechanics of waste-water disposal in the ocean.*
Goldsmith, H.L., and Skalak, R.: *Hemodynamics.*
Ladyzhenskaya, O.A.: *Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids.*
Maxworthy, T., and Browand, F.K.: *Experiments in rotating and stratified flows: Oceanographic application.*
Laufer, J.: *New trends in experimental turbulence research.*
Raichlen, F.: *The effect of waves on rubble-mound structures.*
Csamady, G.T.: *Hydrodynamics of large lakes.*

Vol. 8 (1976)

Rouse, H.: *Hydraulics' latest golden age.*

Bird, R.B.: *Useful non-Newtonian models.*
Peterlin, A.: *Optical effects in flow.*
Davis, St.H.: *The stability of time-periodic flows.*
Cermak, J.E.: *Aerodynamics of buildings.*
Fischer, H.B.: *Mixing and dispersion in estuaries.*
Hill, J.C.: *Homogeneous turbulent mixing with chemical reaction.*
Pearson, J.R.A.: *Instability in non-Newtonian flow.*
Reynolds, W.C.: *Computation of turbulent flows.*
Comte-Bellot, G.: *Hot-wire anemometry.*
Wooding, R.A., and Morel-Seytoux, H.J.: *Multiphase fluid flow through porous media.*
Inman, D.L., Nordstrom, Ch.E., and Flick, R.E.: *Currents in submarine canyons: An air-sea-land interaction.*
Reshotko, E.: *Boundary-layer stability and transition.*
Libby, P.A., and Williams, F.A.: *Turbulent flows involving chemical reactions.*
Rusanov, V.V.: *A blunt body in a supersonic stream.*

Vol. 9 (1977)

- Jones, R.T.: Recollections from an earlier period in American aeronautics.
Pipkin, A.C., and Tanner, R.I.: Steady non-viscometric flows of viscoelastic liquids.
Bradshaw, P.: Compressible turbulent shear layers.
Davidson, J.F., Harrison, D., and Guedes de Carvalho, J.R.F.: On the liquidlike behavior of fluidized beds.
Tani, I.: History of boundary-layer theory.
Williams, III, J.C.: Incompressible boundary-layer separation.
Plesset, M.S., and Prosperetti, A.: Bubble dynamics and cavitation.
Holt, M.: Underwater explosions.
Zel'dovich, Y.B.: Hydrodynamics of the universe.
Pedley, T.J.: Pulmonary fluid dynamics.
Canny, M.J.: Flow and transport in plants.
Spielman, L.A.: Particle capture from low-speed laminar flows.
Saville, D.A.: Electrokinetic effects with small particles.
Brennen, Ch., and Winet, H.: Fluid mechanics of propulsion by cilia and flagella.
Hütter, U.: Optimum wind-energy conversion systems.
Shen, Shan-fu: Finite-element methods in fluid mechanics.
Ffowcs Williams, J.E.: Aeroacoustics.
Belotserkovskii, S.M.: Study of the unsteady aerodynamics of lifting surfaces using the computer.

Vol. 10 (1978)

- Binnie, A.M.: Some notes on the study of fluid mechanics in Cambridge.
Tuck, E.O.: Hydrodynamic problems of ships in restricted waters.
Bird, G.A.: Monte Carlo simulation of gasflows.
Berman, N.S.: Drag reduction by polymers.
Ryzhov, O.S.: Viscous transonic flows.
Griffith, W.C.: Dust explosions.
Leith, C.E.: Objective methods for weather prediction.
Callander, R.A.: River meandering.
Dickinson, R.E.: Rossby waves -- Long-period oscillations of oceans and atmospheres.
Jenkins, J.T.: Flows of nematic liquid crystals.
Leibovich, S.: The structure of vortex breakdown.
Laws, E.M., and Livezey, J.L.: Flow through screens.

- Sherman, F.S., Imberger, J., and Corcos, G.M.: Turbulence and mixing in stably stratified waters.
Patterson, G.S., Jr.: Prospects for computational fluid mechanics.
Taub, A.H.: Relativistic fluid mechanics.
Reethof, G.: Turbulence-generated noise in pipe flow.
Ashton, G.D.: River ice.
Mei, Chiang C.: Numerical methods in water-wave diffraction and radiation.
Keller, H.B.: Numerical methods in boundary-layer theory.
Busse, F.H.: Magnetohydrodynamics of the earth's dynamo.

**A 2. Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York
(only contributions to fluid mechanics listed)**

Vol. 1 (1948), ed. by R. von Mises and Th. von Kármán,

- Dryden, H.L.: Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. p. 2-40.
Burgers, J.M.: A mathematic model illustrating the theory of turbulence. p. 171-199.
von Mises, R., and Schiffer, M.: On Bergman's integration method in two-dimensional compressible fluid flow. p. 249-285.

Vol. 2 (1951), ed. by R. von Mises and Th. von Kármán
von Kármán, Th., and Liu, C.C.: On the statistical theory of isotropic turbulence. p. 2—19.
Kuerti, G.: The laminar boundary layer in compressible flow. p. 23—92.
Polubarinova-Kochina, P.Y.: Theory of filtration of liquids in porous media. p. 154—225.

Vol. 3 (1953), ed. by R. von Mises and Th. von Kármán
Carrier, G.F.: Boundary layer problems in applied mechanics. p. 1—19.
Zaldastani, O.: The one-dimensional isentropic fluid flow. p. 21—59.
Frenkiel, F.N.: Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence. p. 62—107.
Ludloff, H.F.: On aerodynamics of blasts. p. 109—144.
Guderley, G.: On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns. p. 145—184.
Rosenhead, L.: Vortex systems in wakes. p. 185—195.

Vol. 4 (1956), ed. by H.L. Dryden and Th. von Kármán
Glaser, F.H.: The turbulent boundary layer. p. 2—51.
Moore, F.K.: Three-dimensional boundary layer theory. p. 160—223.

Vol. 5 (1958), ed. by H.L. Dryden and Th. von Kármán
Fabri, J., and Siestrunk, R.: Supersonic air ejectors. p. 1—34.
Van De Vooren, A.I.: Unsteady airfoil theory. p. 36—89.
Frieman, E.A., and Kulsrud, R.M.: Problems in hydromagnetics. p. 195—231.
Wegener, P.F., and Mack, L.M.: Condensation in supersonic and hypersonic wind tunnels. p. 307—447.

Vol. 6 (1960), ed. by H.L. Dryden and Th. von Kármán
Stewartson, K.: The theory of unsteady laminar boundary layers. p. 1—37.
Ludwig, G., and Heil, M.: Boundary layer theory with dissociation and ionization. p. 39—116.
Chester, W.: The propagation of shock waves along ducts of varying cross section. p. 120—152.
Oswatitsch, K.: Similarity and equivalence in compressible flow. p. 153—271.
Wille, R.: Karman vortex streets. p. 273—287.

Vol. 7 (1962), ed. by H.L. Dryden and Th. von Kármán
Mirois, H.: Hypersonic flow over slender bodies associated with power-law shocks. p. 2—54.

Raymond, H., and Robert, P.H.: Some elementary problems in magneto-hydrodynamics. p. 216—319.

Vol. 8 (1964), ed. by H.L. Dryden and Th. von Kármán,
Sears, W.R., and Reeder, E.L.: Magneto-aerodynamics flow past bodies. p. 1—63.
Markovitz, H., and Coleman, B.: Incompressible second order fluids. p. 69—101.
Ritner, H.S.: The generation of sound by turbulent jets. p. 104—182.
Rumyantsev, V.V.: Stability of motion of solid bodies with liquid filled cavities by Lyapunov's method. p. 184—232.
Moiseev, N.N.: Introduction to the theory of oscillations of liquid-containing bodies. p. 233—289

Vol. 9 (1965), ed. by G.G. Cherny et al.
Drazin, P.G., and Howard, L.N.: Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. p. 1—89.
Moiseev, N.N., and Petrev, A.A.: The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container. p. 91—154.

Vol. 10 (1967), ed. by G.G. Cherny et al.
Lick, W.: Wave propagation in real gases. p. 1—72.
Paria, G.: Magneto-elasticity and magneto-thermoelasticity. p. 73—112.

Vol. 11 (1971), ed. by Chia-Shun Yih
Yao, Th., and Tau, W.V.: Hydrodynamics of swimming fishes and cetaceans. p. 1—63.
Fung, Y.C.: A survey of the blood flow problem. p. 65—130.
Siegel, M.: Two-dimensional shock structure in transonic and hypersonic flow. p. 131—207.

Vol. 12 (1972), ed. by Chia-Shun Yih

Harper, J.F.: The motion of bubbles and drops through liquids. p. 59—120.

Germain, P.: Shock waves, jump relations and structure. p. 131—194.

Liu, V.C.: Interplanetary gas dynamics. p. 195—237.

Vol. 13 (1973), ed. by Chia-Shun Yih

Veronis, G.: Large scale ocean circulation. p. 3—92.

Wehausen, J.V.: Wave resistance of ships. p. 93—245.

Kuo, H.L.: Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory. p. 249—330.

Vol. 14 (1974), ed. by Chia-Shun Yih

Stewartson, K.: Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. p. 145—239.

Joseph, D.D.: Response curves for plane Poiseuille flow. p. 241—278.

Cowin, S.C.: The theory of polar fluids. p. 279—347.

Vol. 15 (1975), ed. by Chia-Shun Yih

Vanoni, V.A.: River dynamics. p. 1—87.

Tuck, T.O.: Matching problems involving flow through small holes. p. 89—168.

Willmarth, W.W.: Structure of turbulence in boundary layers. p. 159—259.

Vol. 16 (1976), ed. by Chia-Shun Yih

Batchelor, G.K.: G.I. Taylor as I knew him. p. 1—8.

Peregrine, D.H.: Interaction of water waves and currents. p. 10—117.

Moffatt, H.K.: Generation of magnetic fields by fluid motion. p. 120—181.

Yih, Chia-Shun: Instability of surface and internal waves. p. 369—419.

Vol. 17 (1977), ed. by Chia-Shun Yih

Long, R.R.: Some aspects of turbulence in geophysical systems. p. 2—90.

Ogilvie, T.F.: Singular-perturbation problems in ship hydrodynamics. p. 92—186.

A 3. Progress in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, London
(only contributions to fluid mechanics listed)

Vol. I (1961), ed. by A. Ferri, D. Küchemann and L.H.G. Stern

Maskell, E.C.: On the principles of aerodynamic design. p. 1—7.

Legendre, R.: Calcul des profils d'aubes pour turbomachines transsoniques. p. 8—25.

Fenain, M.: La théorie des écoulements à potentiel homogène et ses applications au calcul des ailes en régime supersonique. p. 26—103.

Becker, E.: Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungsstößen und Expansionswellen. p. 104—173.

Goldworthy, F.A.: On the dynamics of ionized gas. p. 174—205.

Warren, C.H.E., and Randall, D.C.: The theory of sonic bangs. p. 238—274.

Vol. II (1962), ed. by A. Ferri, D. Küchemann, and L.H.G. Stern

Rotta, J.: Turbulent boundary layers in incompressible flow. p. 1—219.

Cooke, J.C., and Hall, M.G.: Boundary layers in three-dimensions. p. 221—282.

Vol. III (1962), ed. by A. Ferri, D. Küchemann, and L.H.G. Stern

Bagley, J.A.: Some aerodynamic principles for the design of swept wings. p. 1—83.

Sacks, A.H., and Burnell, J.A.: Dusted propellers — a critical review of the state of the art. p. 85—135.

Cox, R.N.: Experimental facilities for hypersonic research. p. 137—178.

Panofsky, H.A., and Press, H.: Meteorological and aeronautical aspects of atmospheric turbulence. p. 179—232.

Vol. V (1964), ed. by D. Küchemann and L.H.G. Stern

Bradshaw, P., and Pankhurst, R.C.: The design of low speed wind tunnels. p. 1—69.

Fani, L.: Low speed flow involving bubble separation. p. 70—103.

- Telpe, I.: Ergebnisse der Theorie schallnaher Strömungen, p. 104--142.
- Germain, P.: Ecoulements transsoniques homogènes, p. 143--273.
- Esterma, J., and Roshko, A.: Rarefied gas dynamics, p. 274--284.
- Vol. VI (1965)*, ed. by D. Küchemann and L.H.G. Sterne
- Smolderen, J.J.: The evolution of the equations of gas flow at low density, p. 1--132.
- Gaeter, M.: The role of spatially growing waves in the theory of hydrodynamic stability, p. 251--270.
- Küchemann, D.: Hypersonic aircraft and their aerodynamic problems, p. 271--353.
- Vol. VII (1966)*, ed. by D. Küchemann
- Roy, M.: On the rolling-up of the conical vortices above a delta wing, p. 1--5.
- Legendre, R.: Vortex sheets rolling-up along leading-edges of delta wings, p. 7--33.
- Smith, J.H.B.: Theoretical work on the formation of vortex sheets, p. 35--51.
- Hall, M.G.: The structure of concentrated vortex cores, p. 53--110.
- Rott, N., and Lewellen, W.S.: Boundary layers and their interactions in rotating flows, p. 111--144.
- Morton, B.R.: Geophysical vortices, p. 145--194.
- Wille, R.: On unsteady flows and transient motions, p. 195--207.
- Vol. VIII (1967)*, ed. by D. Küchemann
- Hess, J.L., and Smith, A.M.O.: Calculation of potential flow about arbitrary bodies, p. 1--139.
- Lock, R.C., and Bridgewater, J.: Theory of aerodynamic design of swept-winged aircraft at transonic and supersonic speeds, p. 139--228.
- Wuest, W.: Boundary layers in rarefied gas flow, p. 295--352.
- Vol. IX (1968)*, ed. by D. Küchemann
- Vries, D.G., and Beatrix, C.: Les procédés généraux de mesure des caractéristiques, p. 1--39.
- Chushkin, P.J.: Numerical method of characteristics for three-dimensional supersonic flows, p. 41--122.
- Michel, R.: Caractéristiques thermiques des couches limites et calcul pratique des transferts de chaleur en hypersonique, p. 123--214.
- Broadbent, E.G.: A review of fluid mechanical and related problems in MHD generators, p. 216--327.
- Küchemann, D., and Weber, J.: An analysis of some performance aspects of various types of aircraft designed to fly over different ranges at different speeds, p. 329--465.
- Vol. X (1970)*, ed. by D. Küchemann
- Jeromin, L.O.F.: The status of research in turbulent boundary layers with fluid injection, p. 65--189.
- Fenaïn, M.: Calcul numérique des ailes en régime supersonique stationnaire ou instationnaire, p. 191--259.
- Enselme, M.: Contribution au calcul des caractéristiques aérodynamiques d'un aéronef en écoulement supersonique stationnaire ou instationnaire, p. 261--336.
- Vol. XI (1970)*, ed. by D. Küchemann
- Dutton, J.A.: Effects of turbulence on aeronautical systems, p. 67--109.
- Coupry, G.: Problèmes du vol d'un avion en turbulence, p. 111--181.
- Burnham, J.: Atmospheric turbulence at the cruise altitudes of supersonic transport aircraft, p. 183--234.
- Green, J.E.: Interactions between shock waves and turbulent boundary layers, p. 235--340.
- Vol. XII (1972)*, ed. by D. Küchemann
- Jaffe, N.A., and Smith, A.M.O.: Calculation of laminar boundary layers by means of a differential-difference method, p. 49--212.
- Michalke, A.: The instability of free shear layers, p. 213--239.
- Smith, J.H.B.: Remarks on the structure of conical flow, p. 241--272.

Chevallier, J.P., and Taillet, J.: Récent progrès dans les techniques de mesure en hypersonique. p. 273-358.

Vol. XIII (1972), ed. by D. Küchemann

Barantsev, R.G.: Some problems of gas solid surface interaction. p. 1-80.

Drummond, A.M.: Performance and stability of hypervelocity aircraft flying on a minor circle. p. 137-221.

Vol. XIV (1973) ed. by D. Küchemann

Lukaszewicz, J.: A critical review of development of experimental methods in high-speed aerodynamics. p. 1-26.

Gonor, A.L.: Theory of hypersonic flow about a wing. p. 109-175

Tanner, M.: Theoretical prediction of base pressure for steady base flow. p. 177-225.

Fuchs, H.V., and Michalke, A.: Introduction to aerodynamic noise theory. p. 227-297.

Vol. XV (1974), ed. by D. Küchemann

Rasmussen, H.: Application of variational methods in compressible flow calculations. p. 1-35.

Lichtfuss, H.J., and Starke, H.: Supersonic cascade flow. p. 37-149.

Hacker, T., and Oprisiv, C.: A discussion of the roll-coupling problem. p. 151-180.

Büfelfisch, K.A., and Venemann, D.: The electron beam technique in hypersonic rarefied gas dynamics. p. 217-255.

Vol. XVI (1975), ed. by D. Küchemann

Waszan, A.R.: Spatial stability of Tollmien-Schlichting waves. p. 99-127.

Clements, R.R., and Maul, D.J.: The representation of sheets of velocity by discrete vortices. p. 129-146.

Chue, S.H.: Pressure probes for fluid measurements. p. 147-223.

Tanner, M.: Reduction of base drag. p. 369-384.

Carriere, P., Sirisix, M., and Delery, J.: Méthodes de calcul des écoulement turbulents décollés et supersonique. p. 385-429.

Vol. XVII (1976/77), ed. by D. Küchemann

Broadbent, E.G.: Flows with heat addition. p. 93-107.

Jones, D.S.: The mathematical theory of noise shielding. p. 149-229.

Broadbent, E.G.: Noise shielding for aircraft. p. 231-268.

Glass, J.J.: Shock waves on earth and in space. p. 269-286.

Taneda, S.: Visual study of unsteady separated flows around bodies. p. 287-348.

A 4. Advances in Aeronautical Sciences

Vol. I and Vol. II: Proceedings of the First International Congress in Aeronautical Sciences, Madrid, 8-13 September, 1958. Pergamon Press, London, 1959.

Vol. III and Vol. IV: Proceedings of the Second International Congress in Aeronautical Sciences, Zürich, 12-16 September, 1960. Pergamon Press, London, 1962.

Vol. V: Proceedings of the Third Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Stockholm, 27-31 August, 1962. Spartan Books, Washington D.C., 1964.

Vol. VI: Proceedings of the Fourth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Paris, 24-28 August, 1964. Spartan Books, Washington D.C., 1965.

Two Volumes Aerospace Proceedings 1966: Proceedings of the Fifth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, London, 12-16 September, 1966, ed. by The Royal Aeronautical Society and McMillan, London, 1967.

B. 手册,论文集,应用力学会议录

B 1. 手册

Princeton University Series on High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Princeton University Press, 1955-1964, Vol. I to XII

Vol. I (1955), ed. by F.D. Rossini: Thermodynamics and physics of matter.

Vol. II (1956), ed. by B. Lewis, R.N. Pease, H.S. Taylor: Combustion processes.

Vol. III (1958), ed. by H.W. Emmons: Fundamentals of gas dynamics.

Vol. IV (1961), ed. by F.K. Moore: Theory of laminar flows.

Contributions by:

Moore, F.K.: Introduction.

Lagerstrom, P.A.: Laminar flow theory.

Mager, A.: Three-dimensional laminar boundary layers.

Rott, N.: Theory of time-dependent laminar flows.

Moore, F.K.: Hypersonic boundary layer theory.

Ostrach, S.: Laminar flow with body forces.

Shen, S.F.: Stability of laminar flows.

Vol. V (1959), ed. by C.C. Lin: Turbulent flows and heat transfer.

Contributions by:

Dryden, H.L.: Transition from laminar to turbulent flow.

Schubauer, G.B.: Turbulent flow.

Lin, C.C.: Statistical theories of turbulence.

Yachter, M., and Mayer, E.: Conduction of heat.

Deissler, R.G., and Sabersky, R.H.: Convective heat transfer and friction in flow of liquids.

Van Driest, E.R.: Convective heat transfer in gases.

Yuan, S.W.: Cooling by protective fluid films.

Penner, S.S.: Physical basis of thermal radiation.

Hottel, H.C.: Engineering calculations of radiant heat exchange.

Vol. VI (1954), ed. by W.R. Sears: General theory of high speed aerodynamics.

Vol. VII (1957), ed. by A.F. Donovan and H.R. Lawrence: Aerodynamic components of aircraft at high speeds.

Vol. VIII (1961), ed. by A.F. Donovan, H.R. Lawrence, F.E. Goddard, and R.R. Gilrath: High speed problems of aircraft and experimental methods.

Vol. IX (1954), ed. by R.W. Ladenburg, B. Lewis, R.N. Pease, and H.S. Taylor: Physical measurements in gas dynamics and combustion.

Vol. X (1964), ed. by W.R. Hawthorne: Aerodynamics of turbines and compressors.

Vol. XI (1960), ed. by W.R. Hawthorne and W.T. Olson: Design and performance of gas turbine power plants.

Vol. XII (1959), ed. by O.E. Lancaster: Jet propulsion engines.

Handbuch der Physik, ed. by S. Flügge, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Vol. VIII/1 (1959), Strömungsmechanik I

Oswatitsch, K.: Physikalische Grundlagen der Strömungslehre. p. 1-124.

Serrin, J.: Mathematical principles of classical fluid mechanics. p. 125-263.

Howarth, L.: Laminar boundary layers. p. 264-350.

Schlichting, H.: Entstehung der Turbulenz. p. 351-450.

Vol. VIII/2 (1963), Strömungsmechanik II

Berker, R.: Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. p. 1-384.

Weissinger, J.: Theorie des Tragflügels bei stationärer Bewegung in reibungslosen, inkompressiblen Medien. p. 385-437.

Lin, Chia-Chiao, and Reid, H.: Turbulent flow, theoretical aspects. p. 438-523.

Corrsin, S.: Turbulence, experimental methods. p. 524-590.

Schaaf, S.A.: Mechanics of rarefied gases. p. 591-624.

Scheidegger, A.E.: Hydrodynamics of porous media. p. 625-662.

Vol. IX/1 (1960), Strömungsmechanik III

Schiffer, M.: Analytical theory of subsonic and supersonic flows. p. 1-161.

Cabannes, H.: Théorie des ondes de choc. p. 162-224.

Meyer, R.E.: Theory of characteristics of inviscid gas dynamics. p. 225-282.

Timman, R.: Linearized theory of unsteady flow of a compressible fluid. p. 283-310.

Gilbarg, D.: Jets and cavities. p. 311-445.

Wehausen, V., and Laitone, E.V.: Surface waves. p. 446-778.

Handbook of Fluid Dynamics, 27 Sections, ed. by V.L. Streeter, Section 9: Schlichting, H.: Boundary layer theory. p. 9.1-9.68. McGraw-Hill, New York, 3rd. ed. 1966.

Handbuch der Experimentalphysik. Vol. 4, Part I, ed. by W. Wien, and F. Harma, Leipzig, 1931. Contributions by Tollmien, W.: Grenzschicht-Theorie. p. 239-287; Turbulente Strömungen. p. 289-339.

B 2. 论文集

Prandtl, L.: Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, 3 Volumes, ed. by W. Tollmien, H. Schlichting, and H. Görtler. Springer Verlag, 1961.

von Kármán, Th.: Collected works of Theodore von Kármán. 4 Volumes (1902-1951). Butterworth, London, 1956; Supplement Volume (1952-1963), von Kármán Institute Rhode St. Genèse, Belgium, 1975.

Taylor, G.I.: The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor. 4 Volumes, ed. by G.K. Batchelor. Cambridge University Press, 1958-1971.

Taylor, G.I.: Surveys in mechanics. The G.I. Taylor 70th anniversary volume, ed. by G.K. Batchelor, and R.M. Davies. Cambridge, 1956.

B 3. 应用力学会议录

Görtler, H., and Tollmien, W. (ed.): Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung. Eine Festschrift in Originalbeiträgen. Vieweg, Braunschweig, 1955, 499 pp.

Görtler, H. (ed.): Grenzschichtforschung. IUTAM-Symposium, Freiburg/Breisgau, 1957. Springer Verlag, 1958, 411 pp.

Mécanique de la Turbulence, Marseille, 28 August-2 September 1961. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, No. 108. Paris, 1962, 470 pp.

Proceedings of the 10th International Congress of Applied Mechanics, Stress, Italy, September 1960, ed. by F. Rolla and W.F. Koiter. Elsevier Publishing Co., Amsterdam/New York, 1962, 370 pp.

Proceedings of the 11th International Congress of Applied Mechanics, München, Germany, August 1964, ed. by H. Görtler. Springer Verlag, Berlin, 1966, 1190 pp.

Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, Cal., USA, August 1968, ed. by M. Hetényi and W.G. Vincenti. Springer Verlag, Berlin, 1969, 420 pp.

Proceedings of the 13th International Congress of Applied Mechanics, Moskau University, August 1972, ed. by E. Becker and G.K. Mikhailov. Springer Verlag, Berlin, 1973, 366 pp.

Proceedings of the 14th International Congress of Applied Mechanics, Delft, Holland, August-September 1976, ed. by W.J. Koiter. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1976, Preprints, 260 pp.

Proceedings of the Boeing Symposium on Turbulence, held at the Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington, USA, 23-27 June, 1969. University Press, Cambridge, 1970; reprinted from the Journal of Fluid Mechanics, Vol. 41, 480 pp.

C. 一般专题论文, 述评, 教科书

C 1. 一般专题论文

Howarth, L. (ed.): Modern developments in fluid dynamics. High speed flow. Vol. I, 330 pp. and Vol. II, 475 pp. 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1956.

Tuwaites, B. (ed.): Incompressible aerodynamics. Fluid Motion Memoirs, 636 pp. Clarendon Press, Oxford, 1960.

Lachmann, G.V. (ed.): Boundary layers and flow control. Vol. I and Vol. II, 1860 pp. Pergamon Press, London, 1961.

Rosenhead, L. (ed.): *Laminar boundary layers*. Fluid Motion Memoirs, 687 pp. Clarendon Press, Oxford, 1963.

Contributions by:

Lighthill, M.J.: *Introduction; Real and ideal fluids*. p. 1-45.

Lighthill, M.J.: *Introduction; Boundary layer theory*. p. 46-113.

Whitham, G.B.: *The Navier Stokes equations of motion*. p. 114-162.

Illingworth, C.R.: *Flow at small Reynolds number*. p. 163-197.

Jones, C.W., and Watson, E.J.: *Two-dimensional boundary layers*. p. 198-257.

Gadd, G.E., Jones, C.W., and Watson, E.L.: *Approximate methods of solution*. p. 258-348.

Stuart, J.T.: *Unsteady boundary layers*. p. 349-408.

Crabtree, L.F., Küchemann D., and Sowerby, L. *Three-dimensional boundary layers*. p. 409-491.

Stuart, J.T.: *Hydrodynamic stability*. p. 492-579.

Pankhurst, R.C., and Gregory, N.: *Experimental methods*. p. 580-628.

C 2. 述评

AGARD (= Advisory Group Aeronautical Research and Development)

AGARD Conference Proceedings, C.P. No. 30 (1968). *Hypersonic boundary layers and flow fields*. Symposium Fluid Dynamics Panel, London, 1968.

AGARD Conference Proceedings, C.P. No. 83 (1971). *Facilities and techniques for aerodynamic testing at transonic speeds and high Reynolds numbers*. Symposium Fluid Dynamics Panel, Göttingen, 1971.

AGARD Conference Proceedings, C.P. No. 93 (1971). *Turbulent shear flow*. Symposium Fluid Dynamics Panel, London, 1971.

AGARD Conference Proceedings, C.P. No. 168 (1975). *Flow separation*. Symposium Fluid Dynamics Panel, Göttingen, 1975.

AGARDograph No. 97 (1965); Parts I, II, III, IV. *Recent developments in boundary layer research*. Symposium Fluid Dynamics Panel, Naples, 1965.

AGARDograph No. 164 (1972); Surugue, J. (ed.): *Boundary layer effects in Turbomachines*.

Bradshaw, P. (ed.): *Turbulence*. 335 pp. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.

Contributions by:

Bradshaw, P.: *Introduction*. p. 1-44.

Fernholz, H.H.: *External flow*. p. 45-107.

Johnston, J.: *Internal flow*. p. 109-169.

Bradshaw, P., and Woods, J.D.: *Geophysical turbulence and buoyant flows*. p. 171-192.

Reynolds, W.C., and Cebeci, T.: *Calculation of turbulent flows*. p. 193-229.

Launder, B.E.: *Heat and mass transport*. p. 231-287.

Lumley, J.L.: *Two-phase and non-Newtonian flows*. p. 289-328.

Bradshaw, P. (ed.): *Turbulence research. Progress and problems*. Proceedings of the 1976 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford University Press, 1976.

Kline, S.J., Morkovin, M.V., Sovran, G., Cockerill, D.J., Coles, D.E., and Hirst, E.A. (ed.): *Proceedings: Computation of turbulent boundary layers*. Vol. I and Vol. II; AFOSR-IFP Stanford Conference, Thermosci. Div. Dep. Mech. Eng. Stanford University, 1969. Vol. I, ed. by Kline, Morkovin, Sovran, Cockerill: *Methods, predictions, evaluation and flow structure*. 590 pp. Vol. II, ed. by Coles and Hirst: *Compiled data*. 519 pp.

Fiedler, H. (ed.): *Structure and mechanisms of turbulence*, Vol. I and II. Proceedings, Berlin, 1977. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 75 and 76. Springer Verlag, Berlin 1978.

Schmidt, F.W.: *Symposium on Turbulent Shear Flows, 18 Sessions, April 18-20, 1977*. The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania.

C 3. 教科书

Abramovich, G.N.: *The theory of turbulent jets*. (Translated from Russian) MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.

Batchelor, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, London/New York, 1967.

- Batchelor, G.K.: *The theory of homogeneous turbulence*. 2nd ed., Cambridge University Press, London, 1970.
- Batchelor, G.K.: *An introduction to turbulence and its measurements*. Pergamon Press, Oxford/New York, 1971.
- Betchov, R., and Criminale, W.O.: *Stability of parallel flow*. Academic Press, New York, 1967.
- Betz, A.: *Konforme Abbildung*. 2nd ed., Springer Verlag, Berlin, 1964.
- Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.M.: *Transport phenomena*. John Wiley, New York, 1960.
- Brun, E.A., Martinot-Lagarde, A., and Mathieu, J.: *Mécanique des fluides*, Vol. I and II. 2nd ed. Dunod, Paris, 1968.
- Cebeci, T., and Bradshaw, P.: *Momentum transfer in boundary layers*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- Cebeci, T., and Smith, A.M.O.: *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic Press, New York, 1974.
- Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, Oxford, 1961.
- Chang, P.K.: *Separation of flow*. Pergamon Press, New York, 1970.
- Chang, P.K.: *Control of flow separation*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, D.C. 1976.
- Chapman, A.J.: *Heat transfer*. 2nd ed., Macmillan, New York, 1967.
- Curle, N.: *The laminar boundary layer equations*. Clarendon Press, Oxford, 1962.
- Curle, N., and Davies, H.J.: *Modern fluid dynamics*. Vol. I: Incompressible flow. Vol. II: Compressible flow. Van Nostrand Reinhold Comp., London/New York, 1968 and 1971.
- Dorrance, W.H.: *Viscous hypersonic flow. Theory of reacting and hypersonic boundary layers*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- Dryden, H.L., Murnagan, F.P., and Bateman, H.: *Hydrodynamics*. Reprint, Dover Publications, New York, 1956.
- Duncan, W.J., Thom, A.S., and Young, A.D.: *An elementary treatise on the mechanics of fluids*. Edward Arnold Publ., London, 1st ed. 1960; 2nd ed. 1970.
- Eck, B.: *Technische Strömungslehre*, 7th ed., Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.
- Eckert, E.R.G.: *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*. 3rd ed., Springer, Berlin, 1966.
- Eckert, E.R.G., and Drake, jr., R.M.: *Heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- Eckhaus, W.: *Studies in non-linear stability theory*. Springer, New York, 1965.
- Evans, H.: *Laminar boundary layers*. Addison-Wesley Publishing Comp., Reading, Mass., 1968.
- Favre, A., Kovasznay, I.S.H., Dumas, R., Gaviglio, J., and Coantio, M.: *Preface de E.A. Brun: La turbulence en mécanique des fluides; bases théoriques et expérimentales, méthodes statistiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1976.
- Gersten, K.: *Einführung in die Strömungsmechanik*. Düsseldorf, 1974.
- Goldstein, S. (ed.): *Modern developments in fluid dynamics*. Vols. I and II. University Press, Oxford, 1938.
- Goldstein, S.: *Lectures in fluid mechanics*. In: *Lectures in applied mathematics*, Vol. II. Interscience Publ., London/New York, 1930.
- Gosman, A.O. et al.: *Heat and mass transfer in recirculating flows*. Academic Press, London/New York, 1969.
- Grigull, U. (ed.): *Grober, H., Erk, S., and Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*. 3rd ed. 1955, 3rd printing 1963.
- Hansen, A.G.: *Fluid mechanics*. Wiley Press, New York, 1967.
- Hayes, D., and Probstein, F.: *Hypersonic flow theory*. Academic Press, New York, 1959.
- Hinze, J.O.: *Turbulence*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1975.
- Hoerner, S.F.: *Fluid-dynamic drag*. 2nd ed., Washington D.C., 1965.
- Kays, W.M.: *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- Kaufmann, W.: *Technische Hydro- und Aerodynamik*. 3rd ed., Springer Verlag, Berlin, 1963. Vol. I: *Inviscid flow*. 2nd ed., 1966.
- Knudsen, J.G., and Katz, D.L.: *Fluid dynamics and heat transfer*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- Kuethe, A.M., and Schnetzler, J.D.: *Foundations of aerodynamics*. John Wiley, New York, 1959.
- Kutateladze, S.S., and Leont'ev: *Turbulent boundary layers in compressible gases*. Translated from Russian by D.P. Spalding. Edward Arnold Publ., London, 1964.

- Lamb, H.: *Hydrodynamics*. 6th ed., Cambridge, 1957. German translation: *Lehrbuch der Hydrodynamik*. 2nd ed., 1931.
- Liepmann, H.W., and Roshko, A.: *Elements of gasdynamics*. John Wiley, New York, 1957.
- Lin, C.C.: *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1966.
- Lin, C.C.: *Turbulent flows and heat transfer*. Princeton University Press, 1959.
- Langlois, W.E.: *Slow viscous flow*. Macmillan, New York, 1964.
- Loitsianski, L.G.: *Laminare Grenzschichten*. Translated from Russian by W. Szablewski. Akademie-Verlag, Berlin, 1967.
- Leslie, D.C.: *The development of the theory of turbulence*. Clarendon Press, Oxford, 1973.
- Meksyn, D.: *New methods in laminar boundary layer theory*. Pergamon Press, London, 1961.
- Müller, W.: *Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
- Oswatitsch, K.: *Grundlagen der Gasdynamik*. Springer Verlag, Wien/New York, 1970.
- Pai, S.I.: *Viscous flow theory*. Vol. I: Laminar flow, Vol. II: Turbulent flow. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1956 and 1957.
- Pai, S.I.: *Fluid dynamics of jets*. Van Nostrand, New York, 1954.
- Patankar, S.U., and Spalding, D.B.: *Heat and mass transfer in boundary layers*, 2nd ed., Intertext Book, London, 1970.
- Plate, E.J.: *Aerodynamic characteristics of atmospheric boundary layers*. Atomic Energy Commission, 1971.
- Prandtl, L., and Tietjens, O.: *Hydro- und Aeromechanik*, 2 Vols. Springer, Berlin, 1929 and 1931. Vol. I: Fundamentals of hydro- and aeromechanics. English translation by L. Rosenhead. McGraw-Hill, New York/London, 1924. Vol. II: Applied hydro- and aeromechanics. English translation by J.P. Den Hartog. McGraw-Hill, New York/London, 1934.
- Prandtl, L.: *Führer durch die Strömungslehre*. 7th ed., Vieweg, Braunschweig, 1969. English translation by W.M. Deans: *Essentials in fluid dynamics*. Blackie and Son, London, 1962.
- Reynolds, A.J.: *Turbulent flows in engineering*. John Wiley, London, 1974.
- Riegels, F.W.: *Aerodynamische Profile*. Oldenbourg, München, 1968. English translation by D.G. Randall: *Aerofoil sections*. Butterworths, London, 1961.
- Rohsenow, W.M., and Choi, H.U.: *Heat, mass and momentum transfer*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.
- Rotta, J.C.: *Turbulente Strömungen*. Teubner, Stuttgart, 1972.
- Rouse, H.: *Advanced mechanics of fluids*. John Wiley, New York, 1959.
- Sovran, G. (ed.): *Fluid mechanics of internal flow*. Elsevier, Amsterdam, 1967.
- Schmidt, E.: *Einführung in die technische Thermodynamik und die Grundlagen der chemischen Thermodynamik*. 9th ed., Springer, Berlin, 1962. English translation by J. Kestin. Clarendon Press, Oxford, 1949; also Dover reprint.
- Shapiro, A.H.: *The dynamics and thermodynamics of compressible flow*. Vols. I and II. Ronald Press, New York, 1953 and 1954.
- Schlichting, H.: *Grenzschichttheorie*. 5th ed., Braun, Karlsruhe, 1966.
- Schlichting, H., and Truckenbrodt, E.: *Aerodynamik des Flugzeuges*. Vols. I and II, 2nd ed., Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1967 and 1969.
- Schubauer, G.B., and Teen, C.M.: *Turbulent flow*. Princeton Aeronautical Paperbacks No. 9, Princeton, New Jersey, 1961.
- Stewartson, K.: *The theory of laminar boundary layers in compressible fluids*. Clarendon Press, Oxford, 1964.
- Townsend, A.A.: *The structure of turbulent shear flow*. 2nd ed., Cambridge University Press, 1976.
- Truitt, B.W.: *Hypersonic aerodynamics*. Ronald Press, New York, 1959.
- Truitt, B.W.: *Fundamentals of aerodynamic heating*. Ronald Press, New York, 1960.
- Truckenbrodt, E.: *Strömungsmechanik; Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.
- Van Dyke, M.: *Perturbation methods in fluid mechanics*. 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
- Wieghardt, K.: *Theoretische Strömungslehre*. Teubner, Stuttgart, 1965.
- White, F.M.: *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1974.
- Walz, A.: *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*. Braun-Verlag, Karlsruhe, 1966. English translation: *Boundary layers of flow and temperature*, by H.J. Oser, MIT Press, Cambridge, Mass., USA, 1969.

D. 历史性文献(以年代为序)

- Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen IIIrd Intern. Math. Kongress Heidelberg 1904, 484—491 (1904), Teubner, Leipzig, 1905. English translation: NACA Memo No. 452 (1928). Reprinted in: Vier Abhandlungen zur Hydro- und Aerodynamik, Göttingen, 1927; Coll. Works, Vol. II, 575—584.
- Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1907, Z. Math. u. Phys. 56, 1—37 (1908). English translation: NACA TM 1256.
- Boltze, E.: Grenzschichten an Rotationskörpern. Diss. Göttingen 1908.
- Hiemenz, K.: Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. Diss. Göttingen 1911. Dingl. Polytechn. J. 28, 321—410 (1911).
- Prandtl, L.: Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 177—190 (1914); Coll. Works, Vol. II, 597—608.
- von Kármán, Th.: Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 233—252 (1921). NACA TM 1092 (1946).
- Pohlhausen, K.: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM 1, 252—268 (1921).
- Prandtl, L.: Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. ZAMM 1, 431—436 (1921); Coll. Works, Vol. II, 687—696.
- Tietjens, O.: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Diss. Göttingen 1922. ZAMM 5, 200—217 (1925).
- Burgers, J.M.: The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. First Intern. Congress Appl. Mech., Delft, 113—123 (1924).
- Betz, A.: Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. ZFM 16, 42 (1925).
- Prandtl, L.: Über die ausgebildete Turbulenz. ZAMM 5, 136—139 (1925); Verhandlungen II. Intern. Kongress Angew. Mechanik, Zürich, 82—75 (1926); Coll. Works, Vol. II, 714—718.
- Tollmien, W.: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. ZAMM 6, 468—478 (1926).
- Prandtl, L.: The generation of vortices in fluids of small viscosity. 15th Wilbur Wright Memorial Lecture, London 1927. J. Roy. Aero. Soc. 31, 720 (1927). See also: Die Entstehung von Wirbeln in einer Flüssigkeit mit kleiner Reibung. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 18, 489—496 (1927); Coll. Works, Vol. II, 752—777.
- Tollmien, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. I. Mitteilung Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 21—44 (1929). NACA TM 609 (1931).
- Schlichting, H.: Über das ebene Windschattenproblem. Diss. Göttingen 1930. Ing.-Arch. 1, 533—571 (1930).
- Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 356 (1932).
- Taylor, G.I.: The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Appendix by A. Fage and V.M. Falkner. Proc. Roy. Soc. 135, 685—705 (1932).
- Prandtl, L.: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 77, 106—114 (1933); Coll. Works, Vol. II, 819—845.
- Nikuradse, J.: Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 361 (1933).
- Schlichting, H.: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 182—203 (1933); see also ZAMM 13, 171—174 (1933).
- Prandtl, L.: The mechanics of viscous fluids. In W.F. Durand (ed.) Aerodynamics Theory, Vol. III. Springer Verlag, 34—208 (1935).
- Tollmien, W.: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1, 79—114 (1935).
- Schlichting, H.: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1, 47—78 (1935).
- Basemann, A.: Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM 15, 23—25 (1935).
- Jones, B.M.: Flight experiments on the boundary layer. First Wright Brothers' Memorial Lecture 1937. J. Aero. Sci. 5, 81—101 (1938).
- von Kármán, Th., and Tsien, H.S.: Boundary layer in compressible fluids. J. Aero. Sci. 5, 227—232 (1938). See also: Th. von Kármán: Report on the Volta Congress, Rome, 1935.
- Görtler, H.: Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konvexen Wänden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, New Series 2, No. 1 (1940).
- Schubauer, G.B., and Skramstad, H.K.: Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. J. Aero. Sci. 14, 69—78 (1947). NACA Rep. 909 (1948).

- Tollmien, W.: Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynolds-Zahlen. *ZAMM* 25/27, 33–50 and 70–83 (1947).
- Mangler, W.: Zusammenhang zwischen ebenen und rotations-symmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *ZAMM* 28, 97–103 (1948).
- Truckenbrodt, E.: Ein Quadratverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotations-symmetrischer Strömung. *Ing.-Arch.* 20, 211–228 (1952).
- Dryden, H. L.: Fifty years of boundary layer theory and experiment. *Sciences* 121, 375–380 (1955).
- Schlichting, H.: Application of boundary layer theory in turbomachinery. *J. Basic Eng.* 81, 643–651 (1959).
- Kestin, J.: The effect of free-stream turbulence on heat transfer rates. *Advances in Heat Transfer* 3, 1–32 (1966).
- Bradshaw, P.: The understanding and prediction of turbulent flow. 6th Reynolds-Prandtl Lecture. *J. Roy. Aero. Soc.* 76, 403–418; see also *DGLR Jb.* 1972, 61–82.
- Schlichting, H.: Recent progress in boundary layer research, 36th Wright Brothers' Memorial Lecture 1973. *AIAA J.* 12, 427–440 (1974).
- Smith, A. M. O.: High lift aerodynamics. 37th Wright Brothers' Memorial lecture 1974. *J. Aircraft* 12, 501–530 (1975).
- Schlichting, H.: An account of the scientific life of Ludwig Prandtl. Invited Lecture presented at the Symposium on Flow Separation of the AGARD Fluid Dynamics Panel at Göttingen, May 27 to 30, 1975. *ZFW* 23, 297–316 (1975).
- Tani, J.: History of boundary layer theory. *Ann. Review Fluid Mech.* 9, 87–111 (1977).

E. Ludwig Prandtl 纪念文集 (自1957年开始)

- Batz, A.: Lehren einer fünfzigjährigen Strömungsforschung. *ZFW* 5, 97–105 (1957).
- Dryden, L.: Gegenwartprobleme der Luftfahrtforschung. *ZFW* 6, 217–233 (1958).
- Roy, M.: Über die Bildung von Wirbelzonen in Strömungen mit geringer Zähigkeit. *ZFW* 7, 217–227 (1959).
- Schmidt, E.: Thermische Auftriebsströmungen und Wärmeübergang. *ZFW* 8, 273–284 (1960).
- Lighthill, M. J.: A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. *ZFW* 9, 267–275 (1961).
- Tollmien, W.: Aspekte der Strömungsphysik 1962. *ZFW* 10, 403–413 (1962).
- Sauer, R.: Die Aufgabe des Mathematikers in der Aerodynamik. *ZFW* 11, 349–357 (1963).
- Ackeret, J.: Anwendungen der Aerodynamik im Bauwesen. *ZFW* 13, 109–122 (1965).
- Busemann, A.: Minimalprobleme der Luft- und Raumfahrt. *ZFW* 13, 401–411 (1965).
- Schlichting, H.: Einige neuere Ergebnisse aus der Aerodynamik des Tragflügels. *DGLR Jb.* 1966, 11–32 (1967).
- Küchemann, D.: Entwicklungen in der Tragflügeltheorie. *DGLR Jb.* 1967, 11–22 (1968).
- Wittmeyer, H.: Aeroelastomechanische Untersuchungen an dem Flugzeug SAAB 37 „VIGGEN“. *DGLR Jb.* 1968, 11–23 (1969).
- Oswatitsch, K.: Möglichkeiten und Grenzen der Linearisierung in der Strömungsmechanik. *DGLR Jb.* 1969, 11–17 (1970).
- Germain, P.: Progressive waves. *DGLR Jb.* 1971, 11–30 (1972).
- Magnus, K.: Fortschritte in der Kinetik von Mehrkörpersystemen. *DGLR Jb.* 1972, 11–26 (1973).
- Becker, E.: Stoßwellen. *DGLR Jb.* 1973, 11–40 (1974).
- Olszak, W.: Gedanken zur Entwicklung der Plastizitätstheorie. *ZFW* 24, 123–139 (1976).
- Schultz-Grunow, F.: Exakte Zugänge zu hydrodynamischen Problemen. *ZFW* 23, 175–183 (1975).
- Truckenbrodt, E.: Näherungslösungen der Strömungsmechanik und ihre physikalische Deutung. *ZFW* 24, 178–187 (1976).
- Young, A. D.: Some special boundary layer problems. *ZFW* 1, 401–414 (1977).
- Zierep, J.: Instabilitäten in Strömungen zäher, wärmeleitender Medien. *ZFW* 2, 143–150 (1978).

主题索引

二 画

二次流动 115, 249, 255, 274, 464, 467, 469, 693, 694, 710, 727, 741
二组元边界层 435
力矩 118, 268, 730, 732
入射角 24, 41

三 画

干涉照片 345, 353

四 画

计算机 205
切应力(壁面上) 28, 149, 154, 159, 163, 223, 238, 679, 718, 741, 762
 参见表面摩擦力
无量纲数 12, 297, 298
无滑移条件 1, 20, 81
比热 293
不可压缩流体 51, 73, 313
不稳定性 528, 535, 538, 540, 546, 565
引射 见吹除
中性稳定性曲线
 533, 544, 546, 547, 549, 554, 565, 582, 611, 615
内能 290
水力学光滑 见临界粗糙高度
水力学 xvii
 ~直径 691
毛细管 9
气体 见完全气体; 真实气体
升力 14, 24, 41, 48, 430
 最大~ xix, 41, 48, 412, 775
风 738
风洞的湍流度 650
分层(介质) 587, 829
分离 xix, 26, 30, 36, 48, 146, 167, 189, 237, 243, 270, 281, 283, 285, 286, 394, 410, 451, 752, 759, 774, 862
 防止~见边界层控制

五 画

主轴 63
半相似解 448
平均运动 632
平板 25, 27, 35, 45, 150, 155, 172, 192, 220, 236, 276, 320, 324, 361, 363, 416, 483, 524, 538, 542, 717, 765, 795, 805
 振动~ 105, 469, 471
 粗糙~ 735, 814
 偏航~ 276
 ~温度计 314, 363
平移 62
可压缩性 6, 19, 355, 426, 478, 590, 788
可压缩湍流变换; 参见 Illingworth-Stewartson 变换
可逆过程 68
本构方程 67
边界层 xviii, xix, 25, 88, 142, 716, 751, 788
 三维~ 248, 264, 273, 605, 618, 781
 无分离~ 774
 可压缩~ 355, 788
 可压缩湍流~ 788
 ~方程 49, 143, 145, 166, 179, 220, 390, 311, 312, 359, 441, 761, 789, 792, 818
 ~再附 775
 ~厚度 25, 27, 46, 48, 142, 146, 156, 253, 717, 731, 757, 773
 ~相似解和自相似解 151, 166, 167, 222, 256, 315, 322, 330, 377, 424, 448, 449, 562, 766, 824
 ~剖面 见速度分布
 ~理论 xviii, 25
 ~控制 48, 410, 411, 436, 580, 775
 ~概念 25
 ~简化 89, 142, 309 参见边界层

~隔板 280
收缩和扩张管~ 785
凹壁~ 614
非定常~ 440,441
周期性~ 443,463,468,469
拐角~ 334,727,786
轴对称~ 248,259,260,781
高阶~ 160,214
热~ xix, 288, 309, 320, 334, 340,348
旋转物体的~ 783
湍流~ 716,751,755, 763, 788, 817
边缘效应 726
加速度 52,458
对流 295,313,320,788
 自然~313,348,844
叶片安装角 862
叶栅 862
 ~流动 274,345,745,834,862
失稳点 526,540,565,570,572,574

六 画

交换系数 见湍流粘性系数
次层 见层流次层
动量
 ~方程 192,220,225,520,850
 ~法 764
 ~积分方程 175,177, 220, 225, 387,390,427,755,762, 764, 815, 856
 ~厚度 157,176,194, 223, 230, 387,389,419,719,757,856
 ~交换 45
 运动~ 201,257
机翼 274,772,776,778
 开缝~ 413
 后掠~ 279
 ~理论 xviii
 偏航~ 274
过渡(光滑表面向粗糙表面) 741
扩压器 708,711,751
扩散 410,415,436
 热~ 415,436

激波~ 397
压力 54,67
 ~分布 xix,21,22, 23, 24, 46, 127,131,137,573,579,863
 ~降 8,41,104,266,673,693
 ~梯度 36,147, 227, 371, 527, 536,561,751 参看楔
 热力学~ 56,68,70
压差阻力 见型阻
压缩机 783,862
有限元 755
有限差分 205,213,755
 ~法 205
导热系数 293
曲率(速度剖面) 148,227, 245, 563, 591
回流 见倒流
刚体旋转 61,62
伪装油漆 737
传热 xix, 288,314, 325, 348, 590, 777,788,795
 参看对流;热边界层
 ~比拟 314,795
 粗糙表面~ 801
自动相关函数 646
自相似解 见边界层中相似解和自相似解

七 画

冷却 304,323,415,426,429,592
汽轮机,由于粗糙引起的损失 747
应力 52,53
 表观 Reynold~ xix, 634,635, 789
 偏离~张量 52,53
 流体静~ 54
 ~张量 54
 ~张量迹 56
应变 52
 ~率 3,56,64
状态 见状态方程;局部状态
状态方程 5,72,295,791
完全气体 6,72,291,296,355,436,789
运动方程 51

间歇性 522
~因子 522,628,644
声学 464,469
声速 见 Mach 数
扰动 446
 人为~ 552
 自然~ 531,552
 螺旋型~ 612
 三维~ 532,557,605
 ~方程 见 Orr-Sommerfeld 方程
 小~方法 529
攻角 24,41
形状因子 230,337,564,758,761,763
 修正的~ 758
进口段流动 203,264,266,419, 626,
 672
 477
吹除 411,412,414,435,775
阻力 xviii,1,14,21,26,29,30, 128,
 195,223,718,741,774,853,856
 参见型阻,表面摩擦力
 ~减小 713
 ~公式(Blasius) 674,679,690
 ~系数(管的) 9, 95, 673, 686,
 691,692,697
 普适~公式 688
 平板~ 29,154, 718, 724, 727,
 736,806 参见平板
 汽车~ 39
 压差~ 849
 圆柱~ 15,46,749 参见柱;圆柱
 翼型~ 23,859 参见翼型
 型阻 849,856
 总~ 849
阻尼 533,614
位移厚度 29,156,176,224,230, 389,
 418,719,757
位势流动 81,108,142
体力 52,79,116,249,285, 312, 561,
 586
体积粘性系数 68
伸长 59,63
坐标

曲线~ 75
柱~ 74
 ~变换 206,271,372,805,807
层流 xix,8,
 ~翼型 415,528,577,651
 ~次层 640,682,796
尾迹 26,192,259,817,821,833,849
 二维~192,821,834
 圆形~ 821,834
 钝头体后~ 828
 叶栅后~ 865
 排杆后~ 834
 单个物体后~ 829
局部状态原则 64
近似方法 123,125,141,175,220,236,
 242,264,335,387,427,716,755
纹影照片 353,396,400,401,402,405,
 406
狂风 633
连续方程 52,82,636,789

八 画

波长 531,614
波形图(湍流) 522,552,564
波阻 861
变形体 53
变换后的变量(在数值计算中) 206
空气 5,293
空气动力学 xviii
 建筑~ 42
突起 见粗糙度
直升机旋翼 281
抽吸 49,411,413,415,580,727,775
 ~渐近剖面 419,581
 最小~ 422,581
拐点 147,181
 ~准则 536,563,591
拐角流动 334,727,786
林家翘(Lin)方法 443,469
相容性条件(壁面上) 148,187
奇异扰动 89 参见边界层
环状效应 477
表面摩擦力 xviii,29,149,154, 159,
 223,314,717,719,721, 736, 761,

849

转换(层流—湍流) xx,17,43,44, 45, 158,520,558,562,767

~点 参见临界 Reynold 数,失稳点;湍斑

周期性流动 443,463,469

驻点

二维~流 36,39,108, 111, 172, 181,236,277,278

三维~流 112,182,267

~温度 292,355

~焓 388

性质(表) 4,5,293,746

绊线 47,524,624,865

质量守恒 51,435

参考温度 805

九 画

突然起动 101,449

突然加速 参见突然起动

穿透深度 106

浓度方程 436

染色实验 43,520

柱体

圆~ 15,21,27,30, 32, 42, 46, 185,188,189,237,336, 354, 419, 452,464,749

椭圆~ 46,240,452,571

振动~ 467

旋转~ 48,81,98,605

偏航~ 274

柱坐标 74,250

相关 635

~系数 641,642,755

相似性 8,78,167,295,521,676 参见边界层,相似解和自相似解
传热中的~ 271

Kármán~假设 661,686,804

相似解和自相似解 108,117,121,151, 167,168,180,182,222, 319, 330, 349,377,424,448,562, 824, 827, 830,837, 843 参见相似解和自相似解边界层

标准粗糙度 见粗糙度

指数法 12

轴承 130,137

轴对称 454 参见旋成体,柱体,管流,球体

型阻 xviii,30,36 参见阻力

砂粒粗糙度 695,708,737,747

柔壁 580

恢复系数 364,862,803

脉动 63,642,755,788,791

密度~ 788

温度~ 788

临界层 537

绝热

~压缩 292,355,855

~温度 306,314,808

~壁面 306,314,361,389,393

~温升 294,306,314,361,809

十 画

洞

~丝 101

~源 254

~街(Kármán 洞街) 18,32,190

~的形成 xix,18, 26, 30, 461, 462,606,609

~的脱落频率 34,190

螺旋~ 611

洞量 64,81

~输运方程 81

~输运理论(Taylor) 661, 686, 847

涡轮 862,869

~叶片 862

浮力 295,133,561

流动 见边界层

可压缩~ 51,292,355,590, 690, 788,810,860

不可压缩~ 51,73,312

人口~ 203

平均~ 632

非定常~ 100,440

周期性~ 443,463

亚临界~图象 46,47

超临界~ 46,47

旋涡~ 254
 自由湍流~ 817
 流体
 理想~ xvii,1,
 有摩擦~ xvii,1,
 无粘~ xvii
 粘性~ 56
 牛顿(Newton)~ 51,52,64,67
 非均匀~ 588,829
 真实~(相对于理想~) xvii,1,20
 ~力学 xvii,51
 ~静应力 56
 流函数 82,149,151,168,173,179
 流线体 22,47
 润滑流体动力学理论 86,126,306
 高超声速流动 356,605
 离心力 116,249,586,730
 衰减 533,613
 烧蚀 415,435
 真实气体 355
 耗散 69,82,291,791
 ~函数 291,791
 损失系数(叶栅) 747,865
 振荡 见(小)扰动(方法);周期性流动;
 (周期性)边界层
 起动 101,103,104,419,440,449,458,
 460
 速度
 ~间断 193,202,817
 ~梯度 37,142,147
 ~厚度 390
 声音~ 见 Mach 数
 扰动传播~ 532 参见 Orr-
 Sommerfeld 方程
 速度分布 2,26,37,147,188,192,359,
 679,717,718,722 参见边界层
 杆后~ 832,834
 槽内~ 95,122,184,303,752
 柱体~ 188,239
 射流~ 见射流
 润滑~ 131,135
 管内~ 见管流
 平板~ 158,225,418,525,717
 绕模~ 181

机翼~ 276,772,778,780
 热
 ~障 xx
 ~边界层 xix, 87,288,355,590,
 788,802,805,841
 ~通量 301,788,791
 ~传导 xx,288,314,325,348,
 590,777,788,795
 ~传导方程 173
 参见 Fourier 定律
 ~扩散 293,298
 ~扩散系数 293,298
 摩擦~见摩擦热
 传~ xix,288,314,325,348,590,
 777,788,795 参见对流;热边界层
 传~比拟 314,795
 粗糙面传~ 801
 热力学压力 56,68,70
 热力学第一定律 288
 圆盘 716
 自由~ 729
 外壳内的~ 732
 旋转~ 115,268,618,716,729,
 732
 圆形射流 254,821
 倒流 xix,26,31,95,122,135 参见分
 离
 随体导数 51
 能量
 ~分布(湍流) 649
 ~损失厚度 389,757
 ~方程 73,288,436
 ~积分方程 175,177,220,388,
 391,761,766,815
 ~法 529,762,766
 ~厚度 389,757
 特征值问题 533,614
 射流 187,197,254,785,817,836,842
 二维~ 197,821,847
 圆形~ 254,821
 浮力~ 842
 边界~ 820,826
 壁面~ 842,844
 ~叶片 866,870

~混合 846

十 一 画

海洋流 588

混合

~系数 见混流粘性系数

~长度 xix,655,659,683,805,818,845

~长度理论 659

修正~长度 819

渐近抽吸剖面 419,581

密度 5

~脉动 789

~分层 588,829

旋转体 267,783

旋转流动 248

旋成体 260,774,781 参见柱体;管流
球体旋转~784

粘附 见无滑移条件

粘性系数 1,2,4,5,66,293,357

~换算因子 4

~测量 9,98

~表 4,5,293,746

运动~ 4,5,293

粗糙度 619,701,706,735,801,814

容许~ 742,746

分布~ 625,735

水力学光滑~ 701,745

相对~ 696,735

标准~ 704

~单元 620,738,745

~因子 696,735

~间歇范围(转换状态) 620,696,704,741,01

临界~高度 620,748

熔 291,389,436

~厚度 389

理想气体 见完全气体

理论流体力学 xvii

球体 14,19,22,27,47,126,262,269,354,455

梳状皮托管法 849

控制面 193,221

惯性力 11,27,79,125,141

船舶 737,745

十 二 画

温度

参考~ 805

~扩散 844

~场 见热边界层

湍流 xx,44,630,672 参见转换

自由~ 716,817

均匀~ 649

各向同性~ 550,649,669

~对传热的影响 346

~尺度 646,756 参见湍流边界层

~起因 519,561 参见转换

~脉动 522,552,632,640 791

~粘性系数 655,669,687,792,795,819,845

~度 345,549,756

~涡 646

~斑 527,559

幂次律(1/7次) 679,680,718 731

普适速度分布律 633,685,726,812
参见壁面律

斑 见湍斑

量纲分析 12,80,295

最小抽吸量 参见抽吸

稀疏波 参见膨胀扇

十 三 画

滑块(在支承座上) 131

滑移 1

数字计算机 205

数值方法 205,242

楔 172,180

频率 34,105,149,463,531,778,850

稠密比 862 参见叶栅流动

缝 775

缝翼 413

十 四 画

谱 647 参见频谱

聚合物 713

管流 参见入口流动,环状效应,阻力系数

阻力公式 674,679,690
开始运动的~ 104
进口段的~ 104,266,627
非定常~ 104,713
弯曲~ 709
振动~ 473
层流~ 7,8,95,104
湍流~ 10,43,96,520,628,672
~的转换 43,520
~的稳定性 626
稳定性 528,535,538,540,546,565
无摩擦~方程 535
中性~ 540 参见中性稳定性曲线
~方程 见 Orr-Sommerfeld
~界限 533,571,582
~理论 xx,528

十五画

摩擦速度 620,662,679,725,743
摩擦热 292,320,321,325,327,590
横向流动 277,343
槽流 2,307,662,693 参见Couette流
扩张或收缩~ 37,48, 121, 173,
182,247,308,751
增长 530,537,545,546,564,584,661
~率 530,614
影响系数 770

十六画以上

激波 394,396,397,400,401,402,405,
486,478
~扩散 396
~管 478
壁面
绝热~ 292,303,314, 322, 361,
363,364,365,367,377, 594, 596,
807
~射流 842
壁面律 722, 725 参看普适速度分布
律
膨胀扇 480
翼弦 778
翼型(机翼) 23,24,41,43, 235, 243,
245,393,433,435,573, 574, 578,

741,771,778,,859
层流~见层流翼型
最大升力~ 778 参见 Zhuko-
vaki
NACA~ 574,576,780,859, 865

螺旋桨 783
螺旋型尾迹 627
蠕动流 85,125

其他

Bernonlli 方程 6,108,144,292,563
Betz 方法 850
Bjerknes 冷锋 588
Blasius 级数 165,261,277,334
Coanda 效应 844
Corioli 力 784
Couette 流动 2,78,94,103,303,668,
732
d'Alembert 佯谬 1,21
Dean 数 709
Eckert 数 299
Euler 方程 xvii,74
Flettner 旋筒 412
Fourier 定律 289,792
Froude 数 14
Görtler 涡 607,614
Grashof 数 298,349
Hagen-Poiseuille 流动 7,95,307,
627 参见管流,层流
Hiemenz 流动 108,214 参看驻点
流动
Illingworth-Stewartson 变换 372
Jones 方法 852
推广的~ 855
Kármán
~方程 见动量积分常数
~相似性假设 661,686,804
~涡街 见涡街
Kundt 烟尘图象 464,469
Laplace 方程 7
Mach 数 7,14,19,289,355,594,
624,804,808
~对损失系数的影响 868
Magnus 数 412

- Mangler 变换 271
- Navier-Stokes 方程 xvii, 49, 51, 72, 78, 93, 142, 635
- 可压缩~ 72
- Newton
- ~流体 见流体中~流体
- ~摩擦力定律 3, 28
- ~第二定律 51
- Nusselt 数 301, 326, 795
- Orr-Sommerfeld 方程 531, 532, 540
- Oseen 改进 129
- Peclet 数 299
- Poiseuille 流 见 Hagen-Poiseuille 流动; 参见管流
- Prandtl 数 293, 299, 300, 310, 317, 358
- 湍流~ 793, 795
- Prandtl 圆管阻力定律 690
- Prandtl-Schlichting 公式 724
- Rayleigh
- ~定理 536, 537
- ~方程 535
- ~问题 101
- Reynolds
- ~应力 635, 789
- ~润滑方程 136
- ~染色实验 44
- ~相似性原理 10, 78
- Reynolds 比拟 315, 793, 795
- 推广的~ 796, 797
- Reynolds 数 10, 13, 81, 142, 165, 866
- 约化~ 131
- 临界~ xx, 533, 535, 591, 651
- 平板临界~ 45, 158, 524, 543, 551, 581
- 圆柱、圆球临界~ 190
- 管流临界~ 44, 96, 521
- 翼型临界~ 573, 574, 577
- ~对损失系数的影响 866
- Richardson 数 588
- Richardson 圆环效应 477
- Schubauer-Skramsted 实验 551
- Stanford 大学会议 756
- Stanton 数 777, 795
- Stokes
- ~第一问题 101
- ~第二问题 105
- ~假设 66
- ~摩擦定律 xvii, 3, 52, 65
- Strouhal 数 34
- Sutherland 公式 356
- Taylor 数 606
- Tollmien-Schlichting 波 532, 547, 570
- Truckenbrodt 方法 756
- von-Mises 变换 173
- Zhukovskii 翼型 23, 24, 243, 429, 573

缩 写 词

- AIAA J.** *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, New York, published since 1963 (see JAS and JASS)
- ARC** Aeronautical Research Council, London. Publishes two series of documents, each numbered separately
ARC RM — Reports and Memoranda
ARC CP — Current Papers
- ARSJ** *Journal American Rocket Society*
- ASME** = American Society of Mechanical Engineers, New York
J. Appl. Mech. *Journal of Applied Mechanics*, being part E of the *Transactions of the ASME* (see above)
J. Heat Transfer *Journal of Heat Transfer*, being part C of the *Transactions of the ASME*
- AVA** Aerodynamische Versuchsanstalt, Goettingen, Germany
- DFL** Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Braunschweig, Germany (till 1959)
- DFVLR** Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Köln (since 1959)
- DVL** Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Köln, Germany (till 1959)
- DGLR** Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt, Köln
- ETH** Federal Institute of Technology (Eidgenössische Technische Hochschule) Zurich, Switzerland
- Forschg. Ing.-Wes.** Scientific journal entitled *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens*, VDI (German Society of Engineers), Berlin and Duesseldorf (since 1948)
- Forschungsheft** Research supplement to *Forschg. Ing.-Wes.* (see above)
- Ing.-Arch.** Scientific journal entitled *Ingenieur-Archiv*, Berlin and, since 1947, Berlin and Heidelberg
- JAS** *Journal of the Aeronautical Sciences*, New York, (1932—1958); replaced in 1959 by JASS
- JASS** *Journal of Aero/Space Sciences*, New York (1959—1962); replaced in 1963 by AIAA J.
- JFM** *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge, England
- J. Roy. Aero. Soc.** = *Journal of the Royal Aeronautical Society*, London, England
- NACA** The National Advisory Committee for Aeronautics, Washington D. C. [replaced in 1959 by NASA (see below)]. Published three series of documents, each numbered separately:
NACA Rep. — Reports
NACA TM — Technical Memoranda
NACA TN — Technical Notes

NASA	National Aeronautics and Space Administration (created in 1959 in replacement of NACA)
NGTE	National Gas Turbine Establishment, Great Britain
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aéropatiales, Châtillon-sous-Bagneux, France
Proc. Roy. Soc. A	<i>Proceedings of the Royal Society, London, series A</i>
RAE	Royal Aircraft Establishment, Great Britain
USAF	United States Air Force
VDI	Verein Deutscher Ingenieure (German Society of Engineers), Düsseldorf. Publishes: <i>Forsch. Ing.-Wes.</i> with its supplement <i>Forschungsheft</i> (see above)
WGL Jb.	Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, 1952--1962; für Luft- und Raumfahrt, 1963--1975 (H. Blank and W. Schulz, eds., Vieweg, Braunschweig)
ZAMM	<i>Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik</i> , Berlin, Germany
ZAMP	<i>Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik</i> , Basel, Switzerland
ZfM	<i>Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt</i> , Munich and Berlin, Germany
ZfW	<i>Zeitschrift für Flugwissenschaft</i> , Braunschweig, Germany, 1953--1976; from 1977 replaced by <i>Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung</i> , Köln.

常用符号一览表

为了不致于过分偏离有关论文中通常使用的惯用符号，需要用同一个符号来表示几个不同的量。例如， λ 既表示层流和湍流管流的阻力系数，同时又在层流边界层的稳定性理论中表示扰动的波长。类似地， k 既表示热边界层理论中的导热系数，同时又在粗糙度对湍流影响的讨论中表示突起物的高度。

下面是本书中最常用的符号一览表。

1. 一般符号

A 浸湿面积或迎风面积

c 声速

d, D 直径

g 重力加速度

h 槽的宽度

l, L 长度

p 压力(单位面积上的力)

$q = \frac{1}{2} \rho V^2$ 动压头

r, ϕ, z 柱坐标

r, R 半径

u 平均速度(在管道中)

U_∞ 来流速度

$U(x)$ 位势流动速度

u, v, w 速度分量

\bar{u} 时间平均速度(管道或边界层)

x, y, z 直角坐标

- V 来流速度
 ρ 密度(单位体积的质量)
 ω 角速度

II. 粘性流动, 湍流

- A_r 湍流粘性系数
 b 射流或尾迹的宽度
 c_D 阻力系数
 c_f 表面摩擦系数
 c'_f 局部表面摩擦系数
 D 阻力
 $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ 速度剖面的第一形状因子
 $H_{32} = \delta_3/\delta_2$ 速度剖面的第二形状因子
 $M = (v/c)$ Mach 数
 k 粗糙元(突起物)的高度
 k_s 有效砂粒粗糙度的颗粒高度
 K 边界层中速度剖面的形状因子
 l 混合长度
 $R = (VL/\nu$ 或 $\bar{u}d/\nu$ 或 $U\delta/\nu)$ Reynolds 数
 R_i Richardson 数
 S Strouhal 数
 T 湍流度(或湍流强度)
 u', v', w' 脉动速度分量
 $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{u'v'}, \dots$ 脉动速度的时间平均项
 U 圆管中心线上的最大速度
 U_∞ 自由来流速度
 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ 摩擦速度
 y 离开壁面的距离
 δ 边界层厚度
 δ_1 位移边界层厚度

- δ_2 动量边界层厚度
 δ_3 能量边界层厚度
 ε_r 湍流中表观(有效)运动粘性系数
 $\eta = yv_* / \nu$ 离开壁面的无量纲距离
 x 湍流中的经验常数; $l = xy$
 λ 管流的阻力系数
 Δ 层流边界层中速度剖面的型参数
 μ 粘性系数
 $\nu = \mu / \rho$ 运动粘性系数
 τ 切应力(单位面积所受的力)
 τ_0, τ_w 壁面切应力
 $\phi = u/v_*$ 无量纲速度
 ψ 流函数

III. 从层流向湍流的转换

- $c = \beta/\alpha = c_r + ic_i$
 c_i 增长(或衰减)系数
 c_r 扰动波传播速度
 $R_{crit} = (U_m \delta_1 / \nu)_{crit}$ 临界 Reynolds 数
 T_0 Taylor 数
 u', v' 扰动速度分量
 $U(y)$ 边界层速度剖面
 $U_m(x)$ 势流速度
 $\beta = \beta_r + i\beta_i$
 β_i 增长(或衰减)系数
 β_r 扰动的圆频率
 γ 间歇因子
 $\lambda = 2\pi/a$ 扰动的波长
 $\phi(y)$ 扰动流函数的振幅

IV. 热边界层和可压缩边界层

$a = k/\rho c_p$ 热扩散系数

$c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ 声速

c_p, c_v 定压比热和定容比热

$E = U_\infty^2/c_p \Delta T$ Eckert 数

$G = g\beta l^3 \Delta T/\nu^2$ Grashof 数

h 焓

k 导热系数

$M = V/c$ Mach 数

$N = \alpha l/k$ Nusselt 数

$P = \nu/a$ Prandtl 数

q 热通量(单位面积单位时间的热量)

r 恢复因子

R 气体常数

$R_i = -\{(g/\rho)(d\rho/dy)\}/(dU/dy)^2$ Richardson 数

$S = N/RP$ Stanton 数

S_s Schmidt 数

T 温度

T_s 绝热壁温度(恢复温度)

T_w 壁面温度

α 传热系数

β 热膨胀系数

$\gamma = c_p/c_v$ 等熵指数

δ_T 热边界层厚度

ΔT 温度差

Φ 耗散函数

ω 粘性-温度关系的指数