



理论土力学

Theoretical Soil Mechanics

沈珠江 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

886

7.14.15

5.14.15



理论土力学

沈珠江 著

水利部科技专著出版基金资助项目



A0935238



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

前 言

作者早期从事土体极限平衡理论的研究，曾立志要为土力学理论的发展贡献毕生的精力。1963年在一份《关于理论土力学发展的可能途径》的研究报告中提出建立散粒体土力学、饱和粘土力学和黄土力学的任务就是当时心愿的反映。可惜，由于“文革”爆发，作者的努力被迫中断。经历了30年风风雨雨以后，不但我国的国情发生了根本变化，土力学理论本身也取得了长足的进展，编写一本总结70年来土力学理论研究成果专著的条件已经成熟。从1993年开始，作者就开始为编写本著作作准备。经过6年的努力，总算脱稿，并列入了水利水电出版基金的资助项目。

Terzaghi的经典著作《理论土力学》已问世50多年，尚未有人对此后的理论土力学的发展作出过总结。由中国人来填补这一空白，并且把中国人的成就作为重要内容写入这一专著，摆脱国内某些论文和专著中“言必称希腊”（毛泽东：改造我们的学习，1941）的风气，这是作者编写这一专著遵循的宗旨。希望本书的出版对激发我国土力学研究者，特别是青年学者的创新精神有所裨益。

作为理论成果的总结，本书主要介绍了土力学的基本概念、基本理论、基本方程式及其解析解。限于篇幅，详细的推导过程均予省略。对于无法求得解析解的问题，只列举数值计算的结果。不言而喻，书中作者及其学生们的成果占了较多的篇幅，特别是第二章、第五章、第六章和第七章。作者主观上想把国内重要的理论成果都收集进来，特别是在岩土工程学报上发表过的，但是由于精力、能力及篇幅的限制，疏漏之处敬希读者谅解。

本书由清华大学李广信教授审稿，并提出了许多宝贵的修改意见，谨表谢意。天津港湾工程研究所黄传志、后勤工程学院陈正汉和清华大学宋二祥也审阅了部分书稿，岩土工程学报编辑部的同仁对书稿的编辑出版付出了辛勤的劳动，一并致谢。

沈珠江

1999年12月于南京

第一章 绪 论

第一节 土力学发展史回顾

土力学的发展可以划分成以下三个历史时期。

萌芽期 (1773~1923) 土力学的发展当以 Coulomb 首开先河,他在 1773 年发表了论文《极大极小准则在若干静力学问题中的应用》^[1],为今后的土体破坏理论奠定了基础。但是,在此后的漫长的 150 年中,研究工作只是个别学者在探索着进行,而且只限于研究土体的破坏问题。两篇有代表性的论文是 1857 年英国人 Rankine 关于土压力的理论^[2]和瑞典工程师 Petterson 针对 Goteborg 港滑坡提出的分析方法^[3]。20 世纪初随着高层建筑的大量涌现,沉降问题开始突出,与土力学紧密相关的学科——弹性力学的发展为沉降问题的研究提供了必要的手段,从而为 Terzaghi 开创的土体变形研究提供了客观条件。

古典土力学 (1923~1963) 1923 年, Terzaghi 发表了著名的论文《粘土中动水应力的消散计算》^[4],提出了土体一维固结理论,接着又在另一文献中提出了著名的有效应力原理^[5],从而建立起一门独立的学科——土力学。此后,随着弹性力学的研究成果被大量吸引过来,变形问题的研究越来越成为重要的内容,但是,土体的破坏问题始终是当时土力学研究的主流。这一时期在土体破坏理论研究方面的主要成就有:① Fellenius, Taylor 和 Bishop 等关于滑弧稳定分析方法的建立与完善^[6,7,8];② Terzaghi 关于极限土压力的研究和提出承载力公式^[9];③ Соколовский 散粒体静力学的建立^[10];④ Shield 和沈珠江等关于土体破坏的运动方程和极限平衡理论的建立^[11,12]。而在变形理论方面则有:① 地基沉降计算方法的建立与完善^[13,14];② Mindlin 公式的提出及其在桩基沉降计算中的应用^[15,16];③ 弹性地基梁板的计算^[17,18];④ 砂井固结理论^[19];⑤ Biot 固结理论的提出和完善^[20,21]。

古典土力学可以归结为一个原理——有效应力原理和两个理论——以弹性介质和弹性多孔介质为出发点的变形理论和以刚塑性模型为出发点的破坏理论(极限平衡理论)。前一理论随着 1956 年 Biot 动力方程的建立而划上一个完满的句号;后一理论则于 60 年代初完成了基本的理论框架。但是,真实的土体决不是理想弹性体,也不是理想刚塑性体。可以考虑土体两个基本特性(压硬性和剪胀性^[22])的现代土力学理论在 50 年代初已开始蕴酿^①,例如 Skempton 的著名公式^[23] $u_w = B [\sigma_1 + A (\sigma_1 - \sigma_3)]$ 中孔隙压力系数 $A \neq 1/3$ 就是剪胀性的体现,而 Janbu 的模量公式^[24] $E_i = K p_a (\sigma_3 / p_a)^n$ 中对 σ_3 的考虑就是压硬性的体现。一方面,随着认识的深化,人们已越来越不满足于理想弹性介质和理想刚塑性介质这样简单的描述,另一方面,现代电子计算技术的发展为采用复杂的模型提供了手段,从而为现代土力学的建立创造了客观条件,而 Roscoe 的工作则直接导致现代土力学的诞生。

现代土力学 虽然在 50 年代已有人对塑性理论应用于土力学的可能性进行过探

① 沈珠江·关于理论土力学发展的可能途径·南京水利科学研究所报告,1963, No. 16

索^[25],但只有到1963年,Roscoe发表了著名的剑桥模型,才提出第一个可以全面考虑土的压硬性和剪胀性的数学模型,因而可以看作现代土力学的开端^[26]。经过30多年的努力,现代土力学已越过重要的阶段而渐趋成熟,并且在下列几方面取得重要进展:①非线性模型和弹塑性模型的深入研究和大量应用^[27,28,29,30];②损伤力学模型的引入与结构性模型的初步研究^[31,32];③非饱和土固结理论的研究^[33,34];④砂土液化理论的研究^[35,36];⑤剪切带理论及渐进破损问题的研究^[37,38];⑥土的细观力学研究^[39,40]等。当然,在这一段时间内,古典土力学框架内尚未解决的一些问题继续有人在研究,并取得许多进展,例如土与结构共同作用、土体极限分析中的不均匀和非线性问题,而土工数值分析更是这一段时间内才发展起来的。另外土工测试技术等方面也取得很大进展,特别是原位测试技术和离心模型试验技术。就土力学理论研究而言,上述6项中只有第一项已比较成熟,其它几项有的刚刚起步,有的虽已研究多年,尚未取得重大突破。但是,时至今日,现代土力学理论的基本轮廓已逐渐清晰。

中国学者的贡献 我国对土力学的研究始于1945年黄文熙在中央水利实验处创立第一个土工试验室,但是,大规模的研究则是在中华人民共和国成立以后随着一批国外留学人员回国和50年代初大批青年学者参加工作以后才开始的。40多年来,各方面都取得了长足的进展,提出许多重要成果,为土力学的发展和完善作出了积极的贡献。例如,在土的特性方面有刘祖典等对黄土湿陷特性的研究^[41],魏汝龙对软粘土强度变形特性的研究^[42]和汪闻韶对砂土动力特性的研究^[43]等;在理论和计算方面,有黄文熙对地基应力和沉降计算方法方面的改进^[44],陈宗基的流变模型^[44],钱家欢应用李氏比拟法求解粘弹性多孔介质的固结问题^[45],谢定义关于砂土液化理论的研究^[36],沈珠江关于有效应力动力分析方法的研究^[46],以及同济大学关于土与结构共同作用的研究和浙江大学关于动力波传播的研究^[47,48]等,在试验技术方面有黄文熙提议和汪闻韶负责建成的振动三轴仪^[49];在应用方面有软土地基的真空预压、灌浆技术和滑坡支挡技术^[50,51,52]等。近几年来,一批基础扎实、思想活跃的青年学者投身于土力学的研究,作出了不少新的贡献,特别是国内培养的一批博士,写出了不少高质量的论文^[33~37,53,54]。这些成果中属于理论方面的将在本书中得到反映。总的说来,我国的土力学研究水平在理论分析和工程应用方面,与世界各国相比并不逊色,当然在测试技术方面尚比较落后。

第二节 现代土力学的展望

现代土力学的研究,呈现以下几个特点:

(1) 对土的力学特性的认识越来越深入,已经发现了许多新的现象,例如应力路线的依赖性、强剪缩性(表观泊松比小于0)和反向剪缩(剪应力减小时发生体缩)等,而一些研究多年的力学特性,如黄土湿陷、砂土液化、粘土断裂等现象,也有了更深入的认识。许多问题不但经典土力学理论无法解释,现有的非线性和弹塑性本构理论也无能为力。目前,不少学者正在探索新的思路,包括从细观结构上进行研究。

(2) 由于土的特性多变,人们越来越不满足于一个土层具有一定力学指标的定值研究方法,从70年代开始的土的随机性研究正方兴未艾。

(3) 随着电子计算技术的发展，再复杂的数学方程和工程条件，也可以通过数值分析求解和模拟，土工数值分析正是当前最热门的研究课题之一。

(4) 尽管取土技术在不断改进，但是越来越多的人认识到，室内土样试验的结果常常不能反映现场的实际情况，原位测试技术正成为土力学的一个重要组成部分。

(5) 土工离心模型试验虽然始于 30 年代，但真正大规模的发展则是近 20 年的事。离心模型试验的完善与成熟将使实验土力学变成土力学的一个完整的分支。

(6) “边设计—边观测”曾是 Terzaghi 和 Peck 提出的一种研究方法^[55]，用现代术语说，这就是反馈分析。一方面用现代先进技术进行原体观测，一方面用现代计算技术进行反馈分析，通过这一途径改进当前或今后的工程设计，无疑是现代土力学的一个重要特点。

(7) 土力学的实际应用离不开工程师的经验，在现代计算技术的基础上建立联系理论与经验的专家系统，必将是现代土力学的一个重要内容。

综上所述，现代土力学可以归结为一个模型、三个理论和四个分支。一个模型即本构模型，特别是指结构性模型。这是因为迄今为止所提出的本构模型都是从重塑土的变形特点出发的，并把颗粒之间的滑移看作塑性变形的根源，而包括砂土在内的天然土类都具有内部结构，变形过程必然伴随着结构的破坏和改变。因此发展新一代的结构性模型是现代土力学的核心问题。三个理论即一个变形理论和两个破坏理论，其主要目标如下^[56]：

(1) 非饱和土固结理论，这是饱和土固结理论的推广，必须建立在合理的本构模型的基础上，并用于分析黄土、膨胀土和冻土的变形问题。

(2) 液化破坏理论，即描述由于孔隙压力升高而导致土体破坏的理论，其核心是要建立一个能反映复杂应力路线下变形规律的本构模型，研究对象既可以是饱和砂土，也可以是饱和粘土。

(3) 渐进破坏理论，即描述荷载增加情况下土体真实破坏过程的理论，它的建立可能要运用损伤力学、细观力学和分叉理论等现代力学分支，最后要完成对应变软化问题和剪切带形成过程的数学模拟。

四个分支即理论土力学、计算土力学、实验土力学和应用土力学，后者也可以叫做土

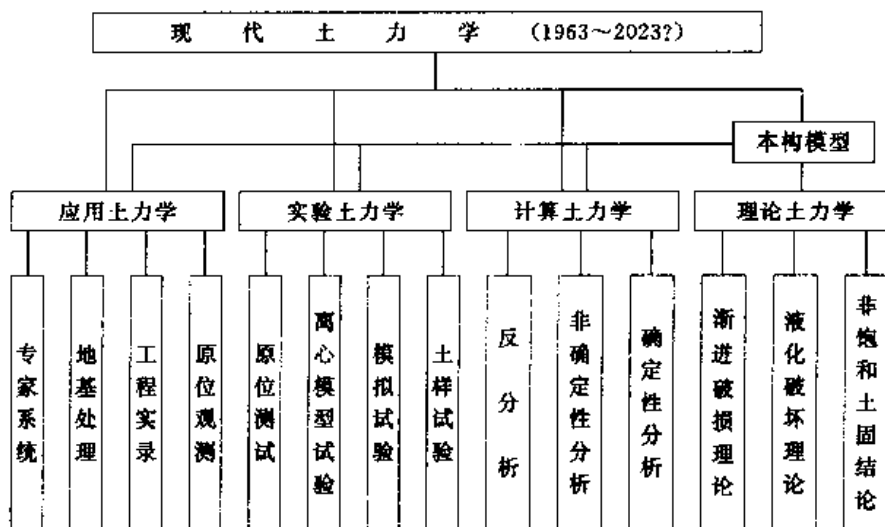


图 1-1 现代土力学的基本框架

工学 (Soil Engineering), 各自的主要内容如图 1-1 所示。其中的室内模拟试验是指把土样当作边值问题进行试验研究, 与把土样当作一个元素进行试验有根本的不同^[57]。现代土力学已有 30 多年的历史, 可能还需要 30 年才能大体上完成其基本框架。

第三节 理论土力学的地位

“从实践中来, 到实践中去”, 这是任何学科发展的必由之路, 当然也是实用性很强的土力学发展的必由之路。固结理论是从地基沉降计算的需要出发而建立起来的, 在指导地基设计中得到不断发展和完善, 便是对这一命题的最好说明。这里“来”包含两重意义, 一是理论为生产实践的需要而提出, 二是从具体事例中抽象出来; “去”也包含两重意义, 一是对实践的指导, 二是到实际中进行检验。不符合上述原则的理论是脱离实际的, 它要么是无用的, 要么是错误的。已提出的许多本构模型中大部分没有多大的实用价值, 有的从未被工程师们所接受, 就是例证。但是, 正确的理论一旦为广大的工程师所掌握, 就一定会产生巨大的力量。有效应力原理对饱和土的变形和强度理论的影响及其在软基加固和砂土液化分析中的作用, 就是最好的例证。相反, 许多学者孜孜不倦追求的所谓“粒间应力”理论, 则是错误的, 因为土体骨架仅仅是人们头脑中的一种抽象, 不能人为地把土体割裂成骨架和孔隙流体两部分。这种错误倾向在非饱和土有效应力原理的研究中更曾引起不少混乱。

另一方面, 土力学中尚有许多理论没有被广泛地把握, 在实践中出现过一些盲目做试验、写论文或者盲目设计、施工等问题。例如古典的土体破坏理论中采用了刚塑性体的假设, 实际的土体破坏过程与理论相差甚远, 因此, 对试桩曲线上确定破坏点的问题, 找出一个比前人更合理的办法恐怕是徒劳的。所谓合理, 应当是符合刚塑性体的假设, 这显然是做不到的。在这里, 最好还是用约定俗成的经验办法。又如在有限元法引入土工计算的初期, 曾有人对每一个单元计算安全系数, 然后以某种方式平均得出整体的安全系数。这种方法是不可取的, 因为它混淆了设计应力状态与极限应力状态, 不符合极限设计的基本原则。还有一个未被所有人认识的例子是土的剪缩性。粗粒料在低围压下剪胀, 高围压下剪缩。因此, 许多在重力场下所做的土槽模型试验, 有的可以定性模拟实际情况, 有的则连定性都做不到, 甚至可能得到错误的结果。例如 100m 高的堆石坝, 如果做成 1m 高的模型放在振动台上, 振动过程中坝坡将逐渐鼓出, 实际遇到地震时由于堆石体的剪缩, 坝顶会有相当的塌陷, 但坝坡不一定有明显的鼓出。当混凝土板与土石料接触时, 接触面上的摩擦力方向可能因剪胀或剪缩而改变, 从而板内本来是压应力的地方出现拉应力, 因此试验结果甚至定性上也是错误的。

综上所述, 可见正确把握土力学基本理论的重要性。如果说, 有效应力原理是古典土力学的核心, 曾经发挥过巨大作用, 那么现代土力学的核心问题必定是本构模型。在某种意义上, 古典土力学只能称为弹性土力学, 它的大部分成果只是借用弹性力学中已有的解答, 而真正的土力学必须建立在符合土本身特性的本构模型的基础上, 因此, 一个优秀的土工工程师必须对土的本构模型有基本的了解, 掌握常用的本构模型的适用性与局限性, 并善于选用适应实际工程特点的模型。

第四节 土力学理论问题的研究方法

理论问题的研究途径，无非是归纳法和演绎法（包括类比法）的交替使用。一方面能掌握土的基本物理力学性质，一方面善于借用相邻学科中行之有效的办法，这是取得成功的必由之路。Terzaghi 固结理论就是一个很好的实例，它是从建筑物实际沉降观测中归纳出来的，又是借用了热传导理论中已有的解答。

从一个领域归纳出来的理论或从更普遍的公理演绎出来的理论，能否用于另一个领域，需要检验，并根据实际情况加以一定的修正。典型的例子如 Drucker-Prager 模型，纯粹是从金属塑性理论和 Drucker 公设推演出来的，虽然在岩石力学中有人还在用，但始终没有得到土工工程师的普遍认同；而帽子形的剑桥模型，虽然也借用了金属塑性理论的基本概念，但经过修正，可以考虑土的体积塑性应变和剪缩性，从而得到较广泛的应用。适用于一种土类的理论，搬到另一种土类，往往也会出现同样的问题。例如 Coulomb 摩擦定律是从总结砂土的破坏规律得出的，应用于粘土，就产生一系列的问题，历史上曾对粘土的三种强度理论，即总强度理论、真强度理论和有效强度理论，产生过很大的争论。总之，借用相邻学科中的成熟的东西，始终是理论研究的一条捷径，但成功与否，关键在于把握所研究对象的具体特点，加以灵活运用。如果仅仅从相邻学科中引进一些新名词，而不深入研究土的具体特性，恐怕算不上什么创新。

理论研究离不开假设。可以毫不夸张地说，没有假设就没有理论。土力学中常用的假设也很多，如小应变假设、各向同性假设、Winkler 假设等。其中最重要的要数应力路线无关的假设，土力学发展史上许多重大的争论往往是围绕这一假设而展开的。有效应力强度指标与应力路线无关的假设今天已被普遍接受，但是对于具有较强结构性的土类，这一假设未必正确。近年来受到广泛注意的塑性应变方向与应力路线无关的假设（塑性势假设）是又一个例子。假设是对复杂事物的一种简化，只要能在一定范围内适用，简化假设就会有生命力，土的弹性体假设就是例证。假设越少，考虑的因素越全面的理论，如果使用起来太复杂，就未必优于更简单的理论，有的甚至是画蛇添足，多此一举。该简单的地方简单，该复杂的地方复杂，这恐怕是研究工作的一条重要原则。例如率无关假设（即不考虑流变），对大部分土类适用，对某些土可能不适用。但即使对同一种土类，也不能笼统地说都要考虑或者都不要考虑。软粘土的流变现象是比较明显的，但很多情况下可以不必考虑。例如 60 年代曾发现许多建于斜坡上的码头结构遭到破坏，当时许多人把原因归之于软土的剪切流变。以后的研究表明，主要的原因是土层压缩变形引起的差异沉降造成的^[42]。砂土料的流变特性不明显，但如果和混凝土构件相互作用，持续的少量变形可能引起构件破坏，则同样需要考虑。地下洞室的支护中甚至要考虑岩石的流变，就是例证。总之，任何一项有价值的理论研究成果都必须有明确的基本假设，能大致规定其适用范围，并通过对比（包括与已有理论的对比及试验资料和原型观测资料的对比）证明其优越性。

第五节 本书的内容和任务

从 1943 年 Terzaghi 出版理论土力学到现在，已过了 50 多年。该书是一本奠基性著作，

但不是完整的古典土力学理论的总结,因为它没有包括当时已经发表的 Соколовский 的散体静力学理论,更没有包括以后发展的土体极限分析理论和新的 Biot 固结理论。虽然,现代土力学的理论框架到今天也还没有完成,但是,与当时的情况相比,这一理论框架至少已初见端倪,即前面所提的一个模型,一个变形理论和两个破坏理论。因此,我们认为,编写一本新的理论土力学的客观条件已经成熟。本书的任务有三点:①对古典土力学理论作一个比较全面的总结;②对 30 年来现代土力学理论的成就作一个初步的总结;③对现代土力学的今后发展作一些探讨。

我国学者在 50 年代曾对土力学的发展作出许多贡献,但以后随着经济发展的中断,科学研究工作也被迫中断。近 20 年来,随着经济建设高潮的重新出现,我国学者的聪明才智又重新展现出来。尤其是近年来,随着青年学者的大量加入,土力学的研究不断取得新的成果。总结世界各国的研究成果,重点介绍中国学者的成就,这是编写本书的一个指导思想。

本书不准备对所有理论作全面介绍,而是重点介绍已在实践中得到较广泛应用或可能有较广泛应用前景的,也就是说,理论的实用性,是本书编写中的另一个指导思想。此外,为了不使篇幅过大,本书将不介绍理论公式的完整推导过程及其求解方法,重点介绍各理论的基本概念、基本假设和适用条件等,适当补充一些基本公式的解析解和数值解法的原则,以及应用实例。

本书的主要内容如下:

第二章介绍土的强度和本构理论,这是理论土力学的核心问题。

第三章至第五章介绍古典土力学的基本理论,除了 60 年代以前的成果外,也包括 30 年来来的重要发展。

第六章介绍现代土力学中的变形理论,这一理论的基本框架已经有了,但将它应用于膨胀土、黄土和冻土的研究工作才起步,因此本书中只能作些初步探讨。

第七章介绍饱和土由于孔隙压力上升而导致破坏的液化理论,这一理论的主要方面已经建立,但尚不完整,尤其是粘土的振动液化理论研究甚少。

第八章介绍土的渐进破坏理论,这一理论虽已研究多年,但只是最近才有初步的突破,因此有关的介绍大多是探索性的。

在 Terzaghi 的理论土力学中,渗流理论曾作为一个重要内容加以讨论。但渗流理论只把土当作不变形的刚性载体,因此,在严格的意义上它不是土力学的一部分。况且近年来渗流理论的主要发展不是土中渗流。至于环境土力学中讨论的地下水溶解物质的扩散问题,更多的是流体力学问题。因此本书中除固结理论涉及渗流外,不另加讨论。

为节省篇幅,弹性力学和土力学中常见的公式和概念将不再说明。书中符号同《土力学与基础工程名词》(建筑工业出版社,1990)的附录 I,书末还列有通用符号表,不符合此表者另加说明。

参 考 文 献

- 1 Coulomb C A L. Application des regles des maximis et minimis a quelques problems de statique, Relatifs a l'architecture. Mem. d. L'Acad. des. Sc., Paris; 1773 (译文见:岩土工程学报, 1993, 15)

(6)

- 2 Rankine W J M. On the stability of loose earth, *Tran. Royal Soc.*, London. 1857, 47
- 3 Petterson K E. Kajraseti Goteborg des 5te Mars 1916, *Teknishe Tidskrift.* 1916, 46; 289
- 4 Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlaessigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungeserscheinungen, *Sitsber. Akad. Wiss. Vienna, Abt. I a*, 1923, 132
- 5 Terzaghi K. Principles of soil mechanics, *Eng. Naws Record*, Dec. 17, 1925
- 6 Fellenius W. *Erdstatische Berechnungen*, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1927
- 7 Taylor D W. Stability of earth slope, *Boston Soc. Civil Engrs.* 1937. 24: 197~246
- 8 Bishop A W. Use of the slip circle in the stability analysis of slopes, *Geotechnique*, 1955. 5
- 9 Terzaghi K, *Theoretical soil mechanics*, 1943 (中译本: 理论土力学, 徐志英译, 地质出版社, 1960)
- 10 Соколовский В В, *Статика сыпучей среды*, Изд-во А Н СССР, 1942
- 11 Shield R T. Mixed boundary value problems in soil mechanics, *Quartly of Applied Mathematics*, 1953. 11 (1)
- 12 沈珠江. 散粒体极限平衡理论及其应用. *水利学报*, 1962. (3): 22~36
- 13 Frohlich O K, *Druckerverteilung im Baugrunde*, Berlin. Springer, 1934
- 14 黄文熙等. 水工建筑物土壤地基的沉降量与地基中的应力分布. *水利学报*, 1957. (3): 1~60
- 15 Mindlin R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics*, 1936: 195~202
- 16oulos H G & Davis E H. *Pile foundation analysis and design*, New York; John Wiely and Sons. 1980
- 17 Selvadurai A P S. 土与基础相互作用的弹性分析. 北京: 中国铁道出版社, 1984
- 18 Горбунов-Посадов М И 等. 弹性地基上构筑物计算. 北京: 中国工业出版社, 1957
- 19 Barron R A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells. *Trans. ASCE*, 1948. 113: 718~733
- 20 Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, 1941. 12: 155~164
- 21 Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *J Acoust Soc, Am.*, 1956. 28 (2): 166~191
- 22 沈珠江. 当前土力学研究中的几个问题. *岩土工程学报*, 1986. 8 (5): 1~8
- 23 Skempton A W. The pore pressure coefficient A and B, *Geotechnique*, 1954. (4): 143~147
- 24 Janbu N, Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial test. *European Conf. SMFE, Wiesbaden*, 1963. 1: 19~25
- 25 Drucker D L, Gibson R E & Henkel H J. Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, *J. SMFD, ASCE*, 1955. 81: 708
- 26 Roscoe K H. Schofield AN & Thurairajah, Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, 1963. 13 (3): 211~240
- 27 Roscoe K H & Burland J B, On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity, Cambridge Univ.*, 1968; 535~608
- 28 Duncan J M & Chang C-Y, Non-linear analysis of stress and strain in soils, *J. SMFD, ASCE*, 1971. 96 (SM5): 1629~1653
- 29 Sandler I S, Dimaggio F L & Baladi G Y. Generalized cap model for geological materials, *J. GED, ASCE*, 1976. 102 (GT7): 683~700
- 30 沈珠江. 土体应力应变分析的一种新模型, 第五届土力学及基础工程学术会议论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990: 101~105
- 31 沈珠江. 结构性粘土的非线性损伤力学模型. *水利水运科学研究*, 1993 (3): 247~256
- 32 Desai C S & Ma Y, Modelling of joints and interfaces using the disturbed state concept. *Int. J. Num. Analyt. Methods in Geomech.* 1992, 16 (9): 623~653

- 33 杨代泉. 非饱和土广义固结非线性数值模型. 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 2~12
- 34 陈正汉, 谢定义, 王永生. 非饱和土的水气运动规律及其工程性质研究. 岩土工程学报, 1993, 15 (3): 9~20
- 35 陈生水, 沈珠江, 郦能惠. 复杂应力路线下无粘性土的弹塑性数值模拟. 岩土工程学报, 1995, 17 (2): 20~28
- 36 谢定义, 张建民. 往返荷载下饱和砂土强度变形瞬态变化的机理. 土木工程学报, 1987, 20 (3): 57~70
- 37 蒋明镜, 沈珠江. 土体应变局部化(剪切带)研究的现状. 见: 岩土力学的理论与实践. 南京: 河海大学出版社, 1998: 134~149
- 38 沈珠江. 应变软化材料的广义孔隙压力模型. 岩土工程学报, 1997, 19 (3): 14~21
- 39 钟晓雄, 袁建新. 散粒体的微观组构与本构模型. 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 39~48
- 40 Chang C S, Numerical and analytical modeling for granulates. In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech., Wahan, 1997, I: 105~114
- 41 刘祖典. 黄土力学与工程. 西安: 陕西科学技术出版社, 1997
- 42 魏汝龙. 软粘土的强度和变形. 北京: 人民交通出版社, 1987
- 43 汪闻韶. 土的动力强度和液化特性. 北京: 中国电力出版社, 1997
- 44 陈宗基. 固结及次时间效应的单维问题. 土木工程学报, 1958, 5 (1): 1~10
- 45 钱家欢. 粘弹性理论在土力学方面的应用. 高等学校自然科学学报(土木水利版), 1966, 2 (1)
- 46 沈珠江. 饱和砂土的动力渗流变形计算. 水利学报, 1980 (2): 14~22
- 47 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与计算—土与结构共同作用的理论与应用. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
- 48 吴世明. 土介质中的波. 北京: 科学出版社, 1997
- 49 黄文熙. 砂土地基与砂土坝坡的液化可能性鉴定. 水利水电建设, 1959 (15): 22~23
- 50 叶柏荣. 真空预压加固法的研究与发展. 见: 第五届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990: 636~639
- 51 熊厚金. 中国化学灌浆的成就. 见: 国际岩土锚固与灌浆的新进展. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996
- 52 卢肇钧, 吴肖茗, 张肇伸. 锚定板挡土结构. 岩土工程学报, 1981, 3 (3): 34~40
- 53 阮怀宁, 徐志英. 复杂岩土材料平面变形强度理论. 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 49~55
- 54 陈祖煜. 边坡稳定分析的塑性力学上限解. 见: 第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994: 484~488
- 55 Peck R B. Advantage and limitation of observation method in applied soil mechanics, Geotechnique, 19 (2), 1969: 171~187
- 56 沈珠江. 现代土力学的基本问题. 力学与实践, 1998, 20 (6): 1~6
- 57 沈珠江, 左元明. 土工压力室模型试验. 见: 第二届华东地区岩土力学学术讨论会论文集. 杭州: 浙江大学出版社, 1992: 160~165

第二章 土的强度和本构理论

第一节 预备知识

本节择要介绍强度和本构理论中的一些基本概念，这些概念当然也适用于其它材料。

一、一维元件模型

为简单起见，人们常用一维元件讨论材料的应力应变关系，这种一维元件组合的模型常称流变模型。除欧几里德刚体外，曾经用过的元件有三种，即弹簧、粘壶和滑片^[1]。本书作者近来提出了一种新的元件——胶结杆，可以用于描述材料的脆性破坡^[2]，此处一并介绍之。单元件模型如图 2-1 所示，相应的应力—应变—时间的关系式如下：

弹簧(Hook 体) $\sigma = E\epsilon$ (2-1a)

粘壶(Newton 体) $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ (2-1b)

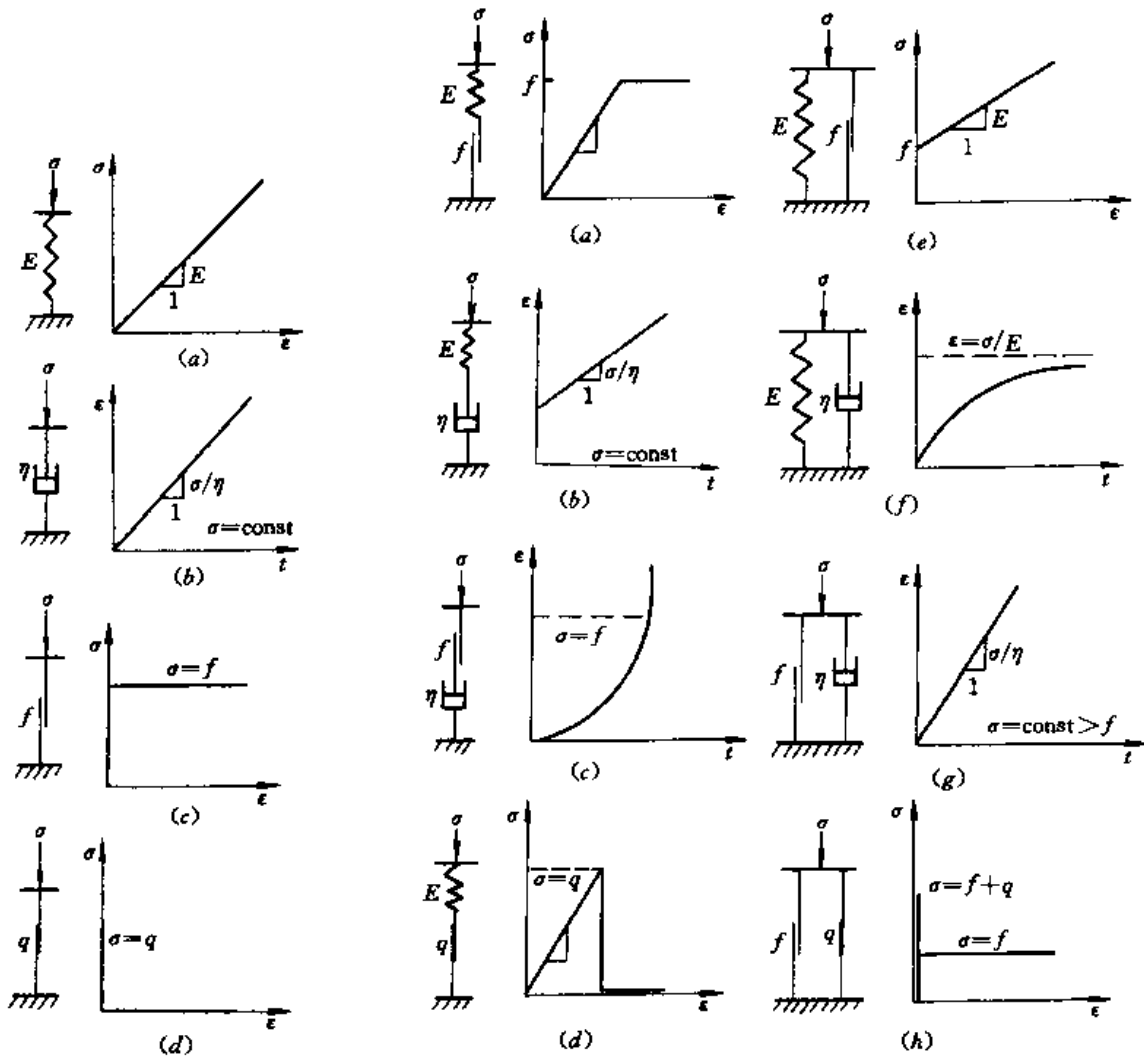


图 2-1 单元件模型

图 2-2 双元件模型

滑片(San Venant 体) $\sigma < f, \epsilon = 0, \sigma = f, \epsilon > 0$ (2-1c)

胶结杆 $\sigma < q, \epsilon = 0; \sigma = 0, \epsilon > 0$ (2-1d)

式中： f 和 q 分别为屈服应力和胶结强度。

双元件模型 如图 2-2 所示，其中 a 为理想弹塑性体， b 常称 Maxwell 体， f 常称 Kelvin-Voigt 体， g 常称 Bingham 体，其它则无专名。

三元件模型 如图 2-3 所示，其中 a 为弹塑性硬化体， b 常称 Merchant 体，其它无专名。

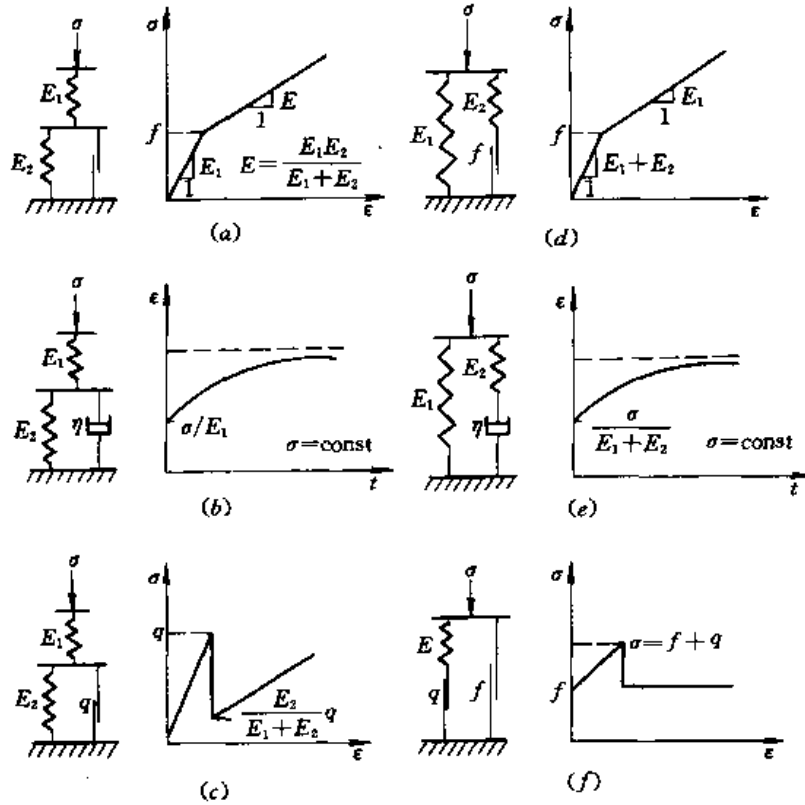


图 2-3 三元件模型

多元件模型 图 2-4 中列举了三种多元件模型分别为村山朔郎、Schiffman 和 Komamura-Huang 所用过^[3]。

复元件模型 双元件模型用串联或并联的办法多次重复，可得各种复元件模型，如图 2-5 称广义 Kelvin 模型，图 2-6 称广义 Maxwell 模型。图 2-7 的广义弹塑性模型曾由 Iwan 建议过^[4]，而图 2-8 的脆性破坏模型则由本书作者建议^[2]。

二、强度理论和破坏准则

强度是指材料破坏时的应力状态。材料的破坏可分塑性破坏和脆性破坏两种，前一种破坏时应力保持恒定，应变不断发展；后一种破坏时材料将不能再承受应力。强度理论不考虑破坏前的应变，故塑性破坏可用滑

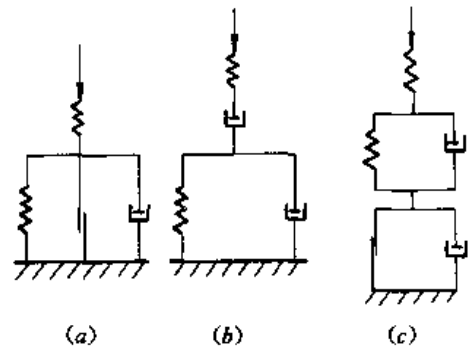


图 2-4 多元件模型

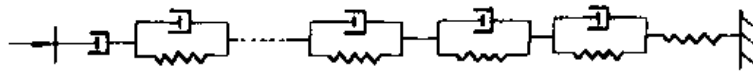


图 2-5 广义 Kelvin 模型

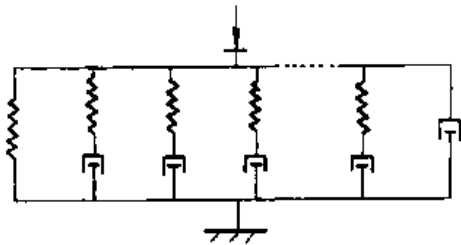


图 2-6 广义 Maxwell 模型

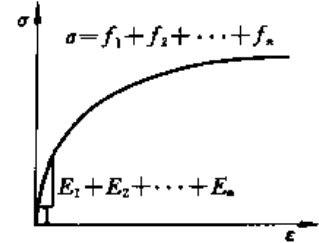
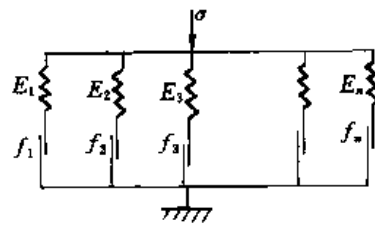
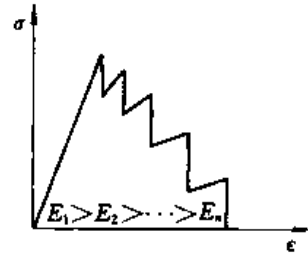
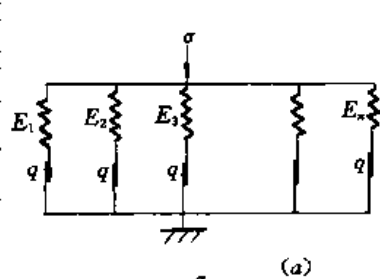
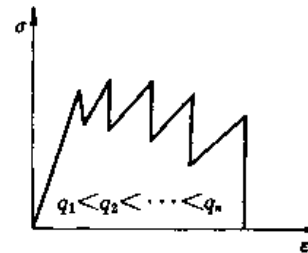
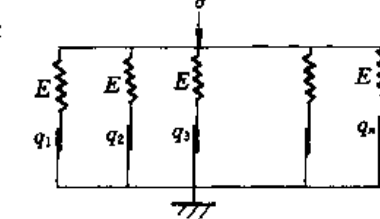


图 2-7 广义弹塑性模型

片模型(刚塑性体)描述,脆性破坏则可用胶结杆模型描述。根据破坏形态,岩土材料的破坏又可分为剪切破坏和拉伸破坏两种,拉伸破坏以脆性破坏为主,剪切破坏则既有塑性的,也有脆性的。塑性破坏是塑性力学研究的对象,脆性破坏则是断裂力学和损伤力学研究的对象。土体的脆性破坏理论尚未最后形成,综合剪切破坏与拉伸破坏的统一强度理论也未成熟,故本节的讨论只限于塑性剪切破坏。



(a)



(b)

图 2-8 脆性破坏模型

材料力学中曾归纳四种强度理论:

①最大拉应力理论;②修正最大拉应力理论;③最大主剪应力理论(Tresca 理论);④最大均方根剪应力理论(Mises 理论)。后来,俞茂铨又提议了第五种强度理论——双剪应力理论^[5]。前两种属抗拉强度理论,后三种属抗剪强度理论。三种抗剪强度理论均可以考虑压应力的影响,考虑的方法又有两种,一种加上静水压力 σ_m ,另一种加剪应力作用面上的压应力 σ_n 。如果把原先的强度理论称作最大剪应力准则,则两类考虑压应力的强度理论可以分别称为广义最大剪应力准则和最大剪切角准则。因此,抗剪强度理论可分 3 个系列,每个系列又有 3 个准则,共有 9 个具体表达式,现分别介绍如下。

I_a——单剪应力理论 (Tresca 理论)

$$\tau_{13} = \tau_f \quad (2-2)$$

式中 τ_{13} 及下面的 σ_{13} 、 τ_{12} 等符号的含义见图 2-9。

I_b——广义单剪应力理论

$$\tau_{13} = \frac{3\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \bar{\sigma}_m \quad (2-3)$$

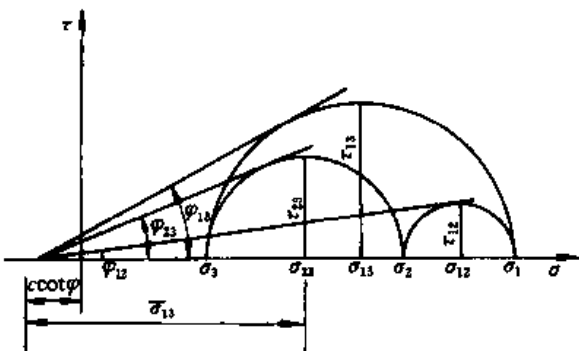


图 2-9 主应力莫尔圆

$$\bar{\sigma}_m = \sigma_m + c \cot \varphi$$

I_c——单剪切角理论 (Mohr-Coulomb 理论)

$$\sin \varphi_{13} = \frac{\tau_{13}}{\sigma_{13}} = \sin \varphi \quad (2-4)$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13} + c \cot \varphi$$

I_a——双剪应力理论 (俞茂镛)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\tau_{13} + \tau_{12}) &= \tau_f & (\tau_{12} > \tau_{23}) \\ \frac{1}{2}(\tau_{13} + \tau_{23}) &= \tau_f & (\tau_{12} < \tau_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

或

I_b——广义双剪应力理论

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\tau_{13} + \tau_{12}) &= \frac{3 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \bar{\sigma}_m \\ \frac{1}{2}(\tau_{13} + \tau_{23}) &= \frac{3 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \bar{\sigma}_m \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

或

I_c——双剪切角理论

考虑两个较大 Mohr 圆的剪切角, 求其正弦值的均方根, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin^2 \varphi_{13} + \sin^2 \varphi_{12}]^{1/2} &= \sin \varphi & (\varphi_{12} > \varphi_{23}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin^2 \varphi_{13} + \sin^2 \varphi_{23}]^{1/2} &= \sin \varphi & (\varphi_{12} < \varphi_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

或

俞茂镛等先把两个莫尔圆的圆心坐标和半径平均起来, 得另一种表达式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{13} + \tau_{12}}{\sigma_{13} + \sigma_{12}} &= \sin \varphi \\ \frac{\tau_{13} + \tau_{23}}{\sigma_{13} + \sigma_{23}} &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

或

I_a——三剪应力理论 (Mises 理论)

$$\tau_m = \frac{1}{\sqrt{2}}[\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2]^{1/2} = \tau_f \quad (2-9)$$

这一理论也可称为等倾面上最大剪应力理论。

I_b——广义三剪应力理论 (Prager-Drucker 理论)

$$\tau_m = \frac{3 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \sigma_m \quad (2-10)$$

I_c——三剪切角理论 (沈珠江)^[6]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\sin^2 \varphi_{13} + \sin^2 \varphi_{12} + \sin^2 \varphi_{23}]^{1/2} = \sin \varphi \quad (2-11)$$

与这一理论十分相近的是下列松冈元提议的空间滑动面上最大剪切角理论 (SMP 理论)^[7]

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{\sigma_1 \sigma_3} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{\sigma_2 \sigma_3} \right]^{1/2} = \text{const} \quad (2-12)$$

以上理论在 $\sigma_m = \text{const}$ 的 π 面上的图形见图 2-10, I_b , I'_b 和 II_b 的图形与 (a) 图中 I_a , I'_a 和 II_a 相同, (b) 图中 II_c 为式 (2-7) 的图形, I'_c 为式 (2-8) 的图形, 而式 (2-11) 和式 (2-12) 的图形则十分接近。

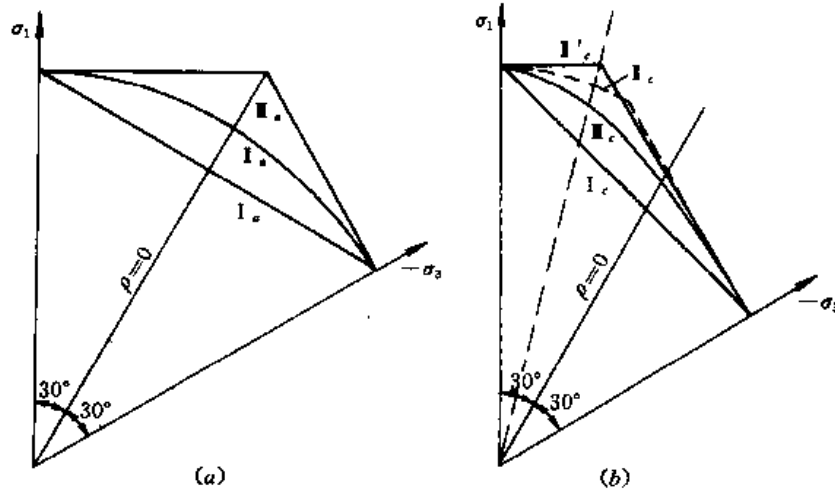


图 2-10 π 面上破坏轨迹

由图 2-10 可见, 在通过 $\rho = -30^\circ$ ($\sigma_2 = \sigma_3$) 和 $\rho = +30^\circ$ ($\sigma_2 = \sigma_1$) 两点的所有破坏轨迹中, 基于最大应力圆的理论 (I_a , I_b 和 I_c) 是内包线, 基于两个较大应力圆的理论 (I'_a , I'_b 和 I'_c) 是外包线, 基于 3 个应力圆的理论则介于两者之间。

π 平面上的破坏轨迹还可以通过 τ_m 随 Lode 角 ρ 而变的各种经验公式来表达^[8], 此处限于篇幅不再介绍。

三、非线性弹性理论

非线性弹性理论假定应力与应变之间存在某种唯一性关系, 随着所采用的唯一性假设的不同, 非线性模型可以分为三类。

变弹性模型 此类模型直接把广义虎克定律写成增量型, 即

$$\{\Delta\epsilon\} = [C]\{\Delta\sigma\} \quad (2-13)$$

并假定弹性柔度矩阵 $[C]$ 中所包含的参数 E 、 ν 或 K 、 G 等只是应力状态的函数, 与应力路线无关。土力学中常用的几种非线性模型都是这类变弹性模型。

次弹性模型 如果式 (2-13) 中的柔度矩阵具有比广义虎克定律更一般的形式, 即

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

则可以得到更一般的增量型应力应变关系。这类模型统称次弹性模型 (Hypoelastic)。由于 c_{11} 可以不等于 c_{22} 和 c_{14} 、 c_{15} 等可以不等于零, 故此类模型可以考虑应力引起的各向异性和剪

胀性。显然，由次弹性模型积分所得的应力应变总量之间的关系将不是唯一的。

超弹性模型 超弹性 (Hyperelastic) 模型假定应变总能与应力总量存在唯一关系

$$W = W(\{\sigma\}) = \int \{\sigma\} \{\Delta\epsilon\} \quad (2-15)$$

或者假定应变余能与应力总量存在顺一关系

$$\Omega = \Omega(\{\sigma\}) = \int \{\epsilon\} \{\Delta\sigma\} \quad (2-16)$$

由此可得

$$\{\epsilon\} = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-17)$$

相应的增量关系为

$$\{\Delta\epsilon\} = \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma \partial \sigma} \right] \{\Delta\sigma\} \quad (2-18)$$

显然，式 (2-17) 与式 (2-19) 是等同的

$$\{\epsilon\} = \{f(\{\sigma\})\} \quad (2-19)$$

因此，超弹性理论与塑性全量理论之间无实质性区别。

四、弹塑性理论

弹塑性模型把应变增量分成弹性和塑性两部分，即

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon^e\} + \{\Delta\epsilon^p\} \quad (2-20)$$

相应地，弹塑性应力应变的最一般关系可以写为

$$\{\Delta\sigma\} = [D](\{\Delta\epsilon\} - \{\Delta\epsilon^p\}) \quad (2-21)$$

式 (2-20) 中前一项按虎克定律计算，后一项一般写成下列形式

$$\{\Delta\epsilon^p\} = \Delta\lambda \{n\} \quad (2-22)$$

式中 $\Delta\lambda$ 代表塑性应变增量的大小，常称塑性乘子， $\{n\}$ 代表其方向。计算前者的规则称硬化规律，计等后者的规则称流动法则。卸荷准则规定什么时候只有弹性应变， $\Delta\lambda=0$ 。各种不同的塑性理论无非是对这三种规则作出不同的假设而已。

屈服面 屈服是产生塑性应变的同义词。塑性理论认为在应力空间中存在一个屈服面，应力点到达该面时就可能产生塑性应变，并假定该屈服面与应力路线无关。对理想弹塑性材料，屈服面是不变的，并等于破坏面。对塑性硬化材料，屈服面将是变的。此时，刚开始产生塑性变形的屈服面称为初始屈服面，改变以后的屈服面称为后继屈服面。一般假定后继屈服面的形状与初始屈服面相同，但其大小和位置改变。等向硬化理论假定后继屈服面随着塑性应变增大而扩大，其屈服函数可以写为

$$F(\{\sigma\}, h) = f(\{\sigma\}) - p(h) = 0 \quad (2-23a)$$

运动硬化理论则假设屈服面只发生位置变化，其屈服函数可以写为

$$F(\{\sigma\}, \{a\}) = f(\{\sigma\} - \{a\}) - p_0 = 0 \quad (2-23b)$$

式中： p 和 $\{a\}$ 分别是表征屈服面大小和位置的量 (图 2-11)； h 称为硬化参数。

加荷准则 按照前面的定义，塑性应变的产生伴随着屈服面的扩大或移动，这就要求应力增量方向与屈服面法向矢量的夹角小于 90° ，亦即

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} > 0 \quad (2-24)$$

这就是加荷准则。反之， $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} < 0$ 时为卸荷，卸荷以后的应力点将落在屈服面以内，而 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} = 0$ 称为中性加荷，此时应力点仍落在原先的屈服面上。

有的文献把式 (2-23) 中 F 称为屈服面，而把 f 另称为加荷面，即实际上只把 f 的作用限制于加荷，卸荷的判别。鉴于 $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$ ，把 F 和 f 均称为屈服面不会引起混乱。

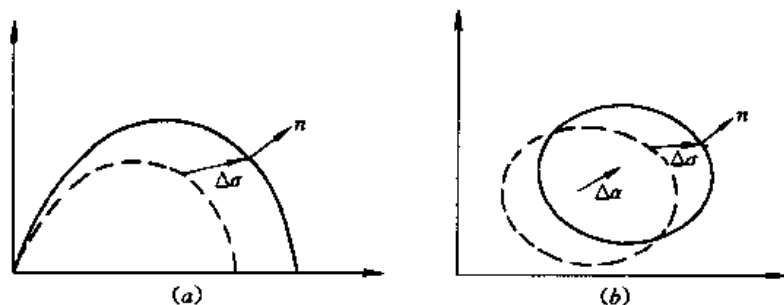


图 2-11 两种屈服面
(a) 等向硬化；(b) 运动硬化

塑性势 如果塑性应变方向 $\{n\}$ 与应力路线无关，这就等同于应力空间中存在塑性势面 g ，塑性应变方向垂直于此面，即

$$\{n\} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-25)$$

其中 $N = \left[\left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \right]^{1/2}$ 为法向矢量的模。 g 可以假定与 f 一致或不一致。前者称相适应的流动法则，后者称不相适应的流动法则。

塑性系数 屈服面扩大或移动一个单位所伴随的塑性应变增加称为塑性系数 A ，其倒数即硬化模量 H 。根据这一定义，式 (2-22) 中的 $\Delta \lambda$ 可以写为

$$\Delta \lambda = A \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} \quad (2-26)$$

确定塑性系数 A 的方法有等值面理论、对偶应力理论和等价应力理论三种^[9]。等值面理论假定屈服面 f 为某一硬化参数 h 的等值面，硬化参数 $h(\{\epsilon^p\})$ 又是从塑性应变中选出的某一代表性的量。把式 (2-26) 代入式 (2-22) 中，考虑到 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} = \frac{\partial p}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \{ \Delta \epsilon^p \}$ ，可得

$$A = \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \{n\}} \quad (2-27)$$

其它两种理论将结合具体模型说明。

多重屈服面 假定通过应力空间中一点有 n 个屈服面通过，每一屈服面的屈服均对塑性应变产生一定的贡献。这时式 (2-20) 应写为

$$\{ \Delta \epsilon \} = \{ \Delta \epsilon^e \} + \sum_{i=1}^n \{ \Delta \epsilon^p \}_i \quad (2-28)$$

或当采用相适应的流动法则时

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon^e\} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} \quad (2-29)$$

式中： f_i 为第 i 重屈服面； A_i 为相应的塑性系数。

多重屈服面把应力空间分成 4 区，I 为完全弹性区，N 为完全塑性区，II 和 III 则为部分塑性区。当加荷矢量 $\{\Delta\sigma\}$ 落在部分塑性区内时，塑性应变方向将随 $\{\Delta\sigma\}$ 方向的改变而改变，从而可以考虑应力路线对塑性应变方向的影响（图 2-12a）。

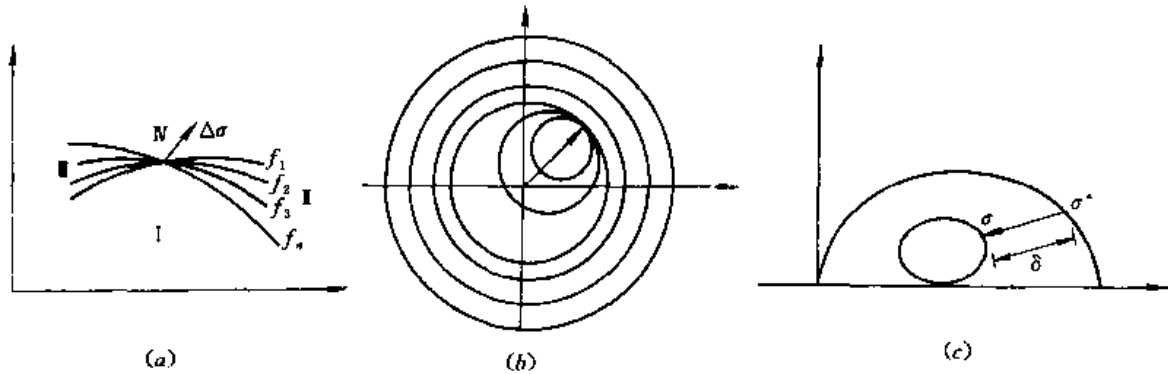


图 2-12 多屈服面

(a) 多重屈服面；(b) 多次屈服面；(c) 边界面

多次屈服面 多次屈服理论是运动硬化理论的发展，它假定应力空间中分布着由小到大一连串屈服面，应力点每碰到一个屈服面便屈服一次 [图 2-12 (b)]，多次屈服的物理模型见图 2-7。边界面模型是多次屈服理论的进一步发展，它只保留最小和最大两个屈服面，前者随应力点而移动，后者固定不变，并称为边界面。这一理论假定对每一应力点可以在边界面上找到一个对偶应力（图 2-12c），并根据两点之间的距离 δ 计算硬化模量，这就是前面提到的对偶应力硬化理论的由来。

无屈服面理论 屈服面的主要作用在于用来判别加荷或卸荷。但是，人们也可以放弃屈服面而采用其它准则，例如用应力路线转折角 θ 来判别（图 2-13），即 $\theta < 90^\circ$ 时判为加荷， $\theta \geq 90^\circ$ 时判为卸荷。内时理论实际上就是采用了这一准则^[10]。同样也可以放弃塑性势概念而用其它办法规定塑性应变方向 $\{n\}$ 。

五、粘弹塑性理论

以上模型均未考虑应变速率影响。考虑粘性项以后，式 (2-20) 应改写为

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon^e\} + \{\Delta\epsilon^p\} + \{\Delta\epsilon^{vp}\} + \{\Delta\epsilon^{vp}\} \quad (2-30)$$

如果式 (2-30) 右边只含 1 和 3 两项，则称粘弹性模型。粘弹性模型可分为两类。一类是真实意义上的，如图 2-2 (f) 中的 Voigt 模型和图 2-3 (b) 的 Merchant 模型；另一类

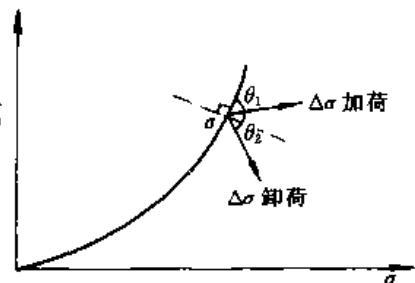


图 2-13 应力路线转折

称等价粘弹性模型，用于周期荷载，即原本的弹塑性模型（图 2-2a）在周期荷载下将产生滞回圈，而 Voigt 材料在周期荷载下也产生滞回圈，不过前者为菱形，后者为椭圆，如果两

者的面积和倾斜度一样，则称后者为前者的等价粘弹性模型（图 2-14）。

式 (2-30) 中的粘塑性应变常写成如下形式

$$\langle \Delta \epsilon^{vp} \rangle = \dot{\gamma} \left(\frac{f - f_0}{f_0} \right) \langle n \rangle \Delta t \quad (2-31)$$

式中： f 为屈服应力； f_0 为应变速率等于 0 时的屈服应力，即弹塑性理论中的屈服值； $\dot{\gamma}$ 为流动系数，即 $f=2f_0$ 时的应变速率。

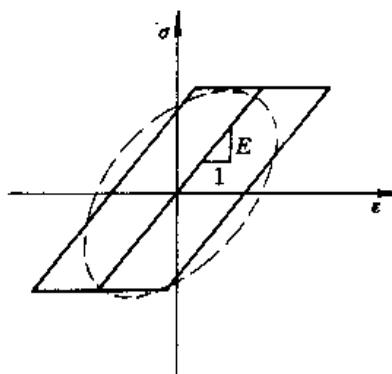


图 2-14 等价粘弹性模型

由于此处的屈服应力可超过弹塑性理论的屈服值，此理论常称过应力理论，其元件模型如图 2-4 (c) 所示。另一类是把式 (2-30) 中的 $\Delta \epsilon^{vp}$ 项去掉，即粘性只与弹性相联系，此时先发生弹塑性变形，后发生粘弹性变形，故常称滞后变形理论。如果式 (2-30) 中所有 4 项均保留，即得最一般的流变模型。

六、本构理论中的若干公理

一些学者企图为材料的本构理论建立起一个完满的理论体系，例如西方的理性力学学派。这一努力尚未最后成功，但是他们在探索过程中提出的一些原理和公理可以指导材料本构模型的研究工作，因此有必要了解它们^[11]。下面择要介绍其中几个。

客观性原理 也称标架无差异原理，即物质的本构方程不应随时空参考标架的变换而变换。按照这一原理，各向同性材料的本构模型应当通过应力和应变的不变量来表达。

对称性原理 进入同一物理方程中的张量必须都是偶数阶的或者都是奇数阶的。例如应力和应变是二阶张量，温度和压力是零阶张量，都可以进入某一方程式中，但不能把力、位移、流速等矢量（一阶张量）包括进来。反之，由一阶张量组成的方程式（如 Darcy 定律）中，不应包括应力或孔隙压力等偶数阶张量。土力学文献中某些似是而非的提法，例如渗透力引起压缩，就是违反这一原理的。

减退记忆原理 应变历史对材料的力学响应的影响随时间而减退，或者说离当前越近的应变历史影响越大，越远的影响越小。例如反复加荷中应力刚反转时表现出明显卸荷特征，但随后反转历史的影响就减退，塑性变形越来越明显。

Drucker 公设 在一个应力循环中，外力对材料所做的功是非负的（图 2-15）

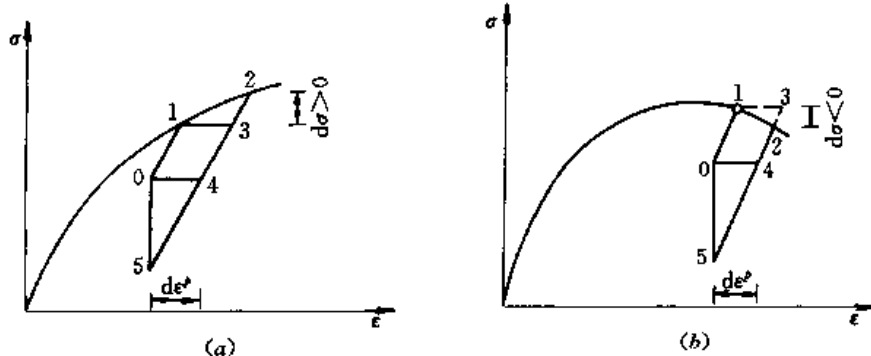


图 2-15 Drucker 和 Ильющин 公设

(a) 稳定材料；(b) 不稳定材料

$$W_D = \int_0^4 \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} \geq 0 \quad (2-32)$$

如果从点 1 到点 2 的应力增量是微小的，则从上式可以推论

$$(\{\sigma\}^T - \{\sigma_0\}^T) \{d\epsilon^p\} \geq 0 \quad (2-33)$$

反之，如果点 0 十分接近于点 1，则可以推论

$$\frac{1}{2} \{d\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} \geq 0 \quad (2-34)$$

前者代表菱形 0134 的面积，后者代表三角形 123 的面积。由式 (2-33) 可以得出屈服面必须是凸的结论，而由式 (2-34) 则可以推论出正交流动法则。

Ильющин 公设 在一个应变循环中，外力对材料所做功是非负的

$$W_I = \int_0^5 \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} \geq 0 \quad (2-35)$$

显然， W_I 比 W_D 大了三角形 045 的面积，因此，当式 (2-32) 满足时，式 (2-35) 一定满足；反之则不一定成立。例如对不稳定材料，三角形 123 的面积将是负的。

七、本构理论的热力学基础

塑性应变是不可逆的，在讨论本构模型时，应注意不违反不可逆过程热力学的基本原理。下面简单介绍两个热力学基本定律及有关概念^[11]。

能量守恒定律 亦称热力学第一定律：系统的动能 K 和内能 E 的时间变化率等于作用在系统上的机械功率 \dot{W} 和热能变化率 \dot{Q} ，其数学表达式为

$$\dot{K} + \dot{E} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2-36)$$

对连续介质，式中各项分别为

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_a \rho \{v\}^T \{v\} d\Omega \\ E &= \int_a \rho e d\Omega \\ \dot{W} &= \int_a \rho \{b\}^T \{\delta\} d\Omega + \int_r \{t\} \{v\} d\Gamma \\ \dot{Q} &= \int_a \rho \dot{q} d\Omega - \int_r \{h\}^T \{n\} d\Gamma \end{aligned}$$

式中： $\{v\}$ 为质点速度； e 为单位质量具有的内能（能量密度）； $\{b\}$ 和 $\{t\}$ 分别为体积力和表面力； \dot{q} 为热源的产热率； $\{h\}$ 为热流。对一个微分体，上式可写为

$$\rho \dot{e} = \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}\} + \rho \dot{q} - \text{div}\{h\} \quad (2-37)$$

熵增大定律 即热力学第二定律：在一个封闭系统中，熵只增不减。设 S 为总熵， η 为单位质量所具有的熵（熵密度），上述定律可写为

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (2-38)$$

T 为绝对温度。在封闭系统中，热能交换率 \dot{Q} 为 0，故 $\dot{S} \geq 0$ 。这就是著名的 Clausius-Duhem 不等式。把前面的 \dot{Q} 代入上式中，可得

$$\int_a \rho \dot{\eta} d\Omega \geq \int_a \rho \frac{\dot{q}}{T} d\Omega - \int_r \frac{\{h\}^T \{n\}}{T} d\Gamma \quad (2-39)$$

改造后可得下列对微分体的熵不等式

$$\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{e}}{T} \right) + \frac{1}{T} \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}\} - \frac{1}{T^2} \{\text{grad}T\} \{h\} \geq 0 \quad (2-40)$$

Gibbs 自由能 定义自由能 $\psi(\{\epsilon\}, T, p_i)$ 为

$$\psi = e - T\eta \quad (2-41)$$

则第一定律式 (2-37) 和第二定律式 (2-40) 可以改写为

$$\dot{\psi} + T\dot{\eta} + T\dot{\eta} = \frac{1}{\rho} \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}\} + \dot{q} - \frac{1}{\rho} \text{div}\{h\} \quad (2-42)$$

和

$$\frac{1}{\rho} \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}\} - \dot{\psi} - T\dot{\eta} - \frac{1}{\rho T} \{\text{grad}T\} \{h\} \geq 0 \quad (2-43)$$

另一方面

$$\dot{\psi} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right\}^T \{\dot{\epsilon}\} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \dot{p}_i \quad (3-44)$$

式中: p_i 为内变量。比较式 (3-44) 与式 (3-42) 可知

$$\{\sigma\} = \rho \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right\} \quad (2-45)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2-46)$$

且式 (2-44) 代入式 (2-43) 后

$$- \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \dot{p}_i - \frac{1}{\rho T} \{\text{grad}T\} \{h\} \geq 0 \quad (2-47)$$

无热流时

$$Y_i \dot{p}_i \geq 0 \quad (2-48)$$

$$Y_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad (2-49)$$

称为广义摩擦力, p_i 可以理解为广义变位, 则式 (2-48) 可以理解为摩擦引起的能量耗散率总是正的。

第二节 土的力学性质

土的力学性质是建立土的强度和本构理论的基础, 而强度和本构理论的研究又进一步深化人们对土的力学性质的认识。本节介绍土的基本力学特性和重要力学特性。所谓基本力学特性, 是指对所有土类和主要受力阶段都有重要影响的力学性质, 是土区别于其它工程材料的标志; 而重要力学特性则是指对一定土类在一定受力阶段有重要影响的, 在其它情况下可以忽略不计。

土的基本特性有两个, 即压硬性和剪胀性, 因此土可以定义为具有压硬性和剪胀性的工程材料。按照这一定义, 堆石体也应看作土的一种。土的重要特性很多, 例如非线性、流变性、各向异性等等, 下面择要介绍之。

土的许多力学特性与其颗粒排列和颗粒间结合情况——即结构性有关, 涉及这方面的问题将在第七节中简要介绍。

一、基本力学特性

压硬性 指土的强度和刚度随压应力的增大而增大和随压应力的降低而降低。

库仑摩擦定律是有关压硬性的最早表述, Hvorslev 把这一定律推广用于粘性土^[12]。至于模量方面, 则下列 Janbu 公式是有关压硬性的最明确的体现^[13]

$$E_t = K_E p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2-50)$$

式中: K_E 和 n 为常数。

在土力学的理论和实践中, 人们无不自觉或不自觉地应用土的这一基本特性。软土的排水固结就是明显的例证, 粘土孔隙压力研究的最终目的无非就是为了判断有效压应力可能增加多少。许多工程的成功和失败正是与是否正确运用这一特性有关。例如, 软粘土上填土要求慢速施工, 硬粘土中开挖则要求快速施工和及时回填。

剪胀性 指土体在剪切时产生体积膨胀或收缩的特性。密砂剪胀, 松砂剪缩, 早在 30 年代就广为人知。据此, Casagrande 提出了表征不胀不缩的临界孔隙比的概念^[14]。粘土的剪胀性, 虽然亦早在 1936 年就为 Rendulic 发现^[15], 但长期没有引起注意。Skempton 于 1954 年提出著名的孔隙压力公式^[16]

$$\Delta u_w = B[\Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)] \quad (2-51)$$

再次把粘性土的剪胀性提了出来, 因 $A \neq 1/3$ 就意味剪胀或剪缩。至 60 年代初, 魏汝龙对土的剪胀性作了较全面的总结^[17], 此后剪胀性的概念逐渐被普遍接受。

如果把应力张量分为球张量和偏张量两部分, 压硬性表示应力球张量对应变偏张量的影响, 而剪胀性则表示应力偏张量对应变球张量的影响。这就意味着应力球张量—应变偏张量和应力偏张量—应变球张量之间存在交叉影响, 下列广义虎克定律不再适用

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_v &= \frac{1}{K} \Delta \sigma_m \\ \{\Delta e\} &= \frac{1}{2G} \{\Delta s\} \end{aligned} \quad (2-52)$$

而必须改用下式代之

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_v &= \frac{\Delta \sigma_m}{K_t} + \frac{\Delta \sigma_s}{K_d} \\ \{\Delta e\} &= -\frac{\Delta \sigma_m}{G_d} \frac{\{s\}}{\sigma_s} + \frac{\{\Delta s\}}{G_t} \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

式中: $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$, $\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$; 而 K_t 、 K_d 和 G_t 、 G_d 则可以分别称为压缩模量、剪胀模量、压硬模量和剪切模量^①, 以上表述实际上就是次弹性模型的一种。

二、重要力学特性

各向异性 引起各向异性的原因有两个, 一是天然土在沉积过程中或人工土在填筑过程中形成的, 二是受力过程中逐渐形成的, 与扁平形颗粒的扁平面取向于垂直大主应力方

① 沈珠江, 关于理论土力学发展的可能途径, 南京水利科学研究所“研究报告”, 1963. No. 6.

向有关，后者常称应力引起的各向异性。本构模型中是否要考虑第一种各向异性，须视情况而定，而第二种各向异性，则在一个好的模型中应能自动包括进去。

流变性 比萨斜塔的不断倾斜大概是土体流变性的最著名例子。粘土颗粒周围包含有粘滞性较为明显的水膜，因而表现出较大的流变性，而刚性骨架类土的流变性则不明显。但实际应用中是否需要考虑流变，需视具体情况而定。有时粘土的流变也可忽略，有时粗粒土的流变也必须考虑^[18]。土力学中常把流变分成固结流变和剪切流变，前者又称次固结。从理论上讲，这样的划分并没有必要。

应力路线相关性 土体的变形特性并不仅仅取决于当前的应力状态 $\{\sigma\}$ ，而是与到达 $\{\sigma\}$ 之前的应力历史和今后的加荷方向 $\{\Delta\sigma\}$ 有关，这两种影响可以统称应力路线相关性。在同一围压下，超固结土的抗剪强度明显高于正常固结土，这是说明应力历史影响的最明显的例子。应变与应力路线相关的例证也可以在许多文献中找到^[19,20]。但是，应力路线相关性的考虑不但使本构模型本身大大复杂化，也给计算模拟带来困难，从而限制了它的实际应用价值。因而现有强度和本构理论大都忽视应力路线的相关性而采用某种唯一性假设。这些唯一性假设可能带来多大误差，这是多年来许多土力学文献的研究对象。这些研究的主要结论有：①有效应力强度指标的唯一性，即粘土不排水剪切试验测定的内摩擦角 φ 大体上等于排水剪切试验测定的内摩擦角 φ_u ^[21]；②含水量或体应变的唯一性，即粘土试样达到同一应力状态时体应变大体相同（图 2-16a）^[22]；③剪应变的唯一性，即砂土试样达到同一应力状态时剪应变大体相同 $[\sigma_1/\sigma_3 = \text{const}$ 的应力路线除外（图 2-16b）^[19]]。以上结论都是在简单应力路线条件下得到的，在复杂应力路线下，尤其当应力路线发生大的转折时，上述唯一性是得不到保证的。

应变强化 又称应变硬化，指屈服极限随应力增大而提高，是许多土类共有的特性，具体表现为应力应变关系的非线性。

应变软化 又称应变弱化，原指屈服极限随应变增大而降低。这是具有结构强度的土类和紧密砂土所具有的特性，需要用图 2-8 所示的脆性破坏模型来描述。

三、不同土类的力学特性

砂土 天然砂土和砂卵石颗粒坚硬，它的变形主要是颗粒之间滑移所致，故常称刚性骨架土，砂土的压缩性较小，但剪胀和剪缩性却很明显。天然沉积的砂土常有各向异性，并因颗粒之间的胶结而表现出较强的应变软化特性。

堆石体 堆石体和人工砂与天然砂土不同之处主要在于颗粒接触点处的棱角破碎，从而表现出较大的压缩性和剪缩性。由于接触点应力很高，有时还会表现出较明显的随时间发展的流变变形。

粉煤灰 粉煤灰与上述两类土不同之处在于整个颗粒都容易破碎，不但加荷时会破碎，卸荷时也会破碎，从而表现出强烈的反向剪缩——剪应力降低时的体积收缩现象（图 2-17b）^[23]。砂土中也有反向剪缩现象，但只有出现明显的剪胀以后才产生（图 2-17a）^[24]。

软粘土 粘土颗粒可由更小的片状颗粒集合而成，颗粒表面还有水膜，因此颗粒本身也会变形。软粘土的变形量较大，其压缩性和剪缩性均很明显，剪胀性则不明显。由于水膜的粘滞性，软粘土流变性也较突出。天然沉积的软粘土多有各向异性，应变软化特点更明显，十字板试

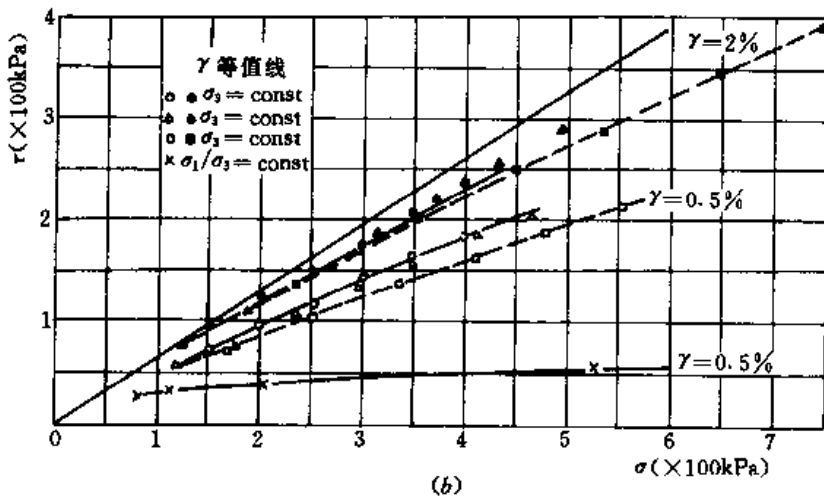
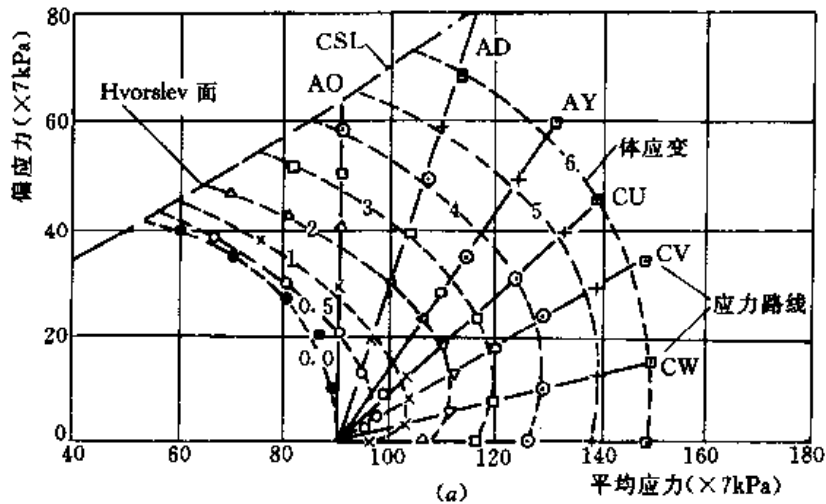


图 2-16 应变总量的唯一性验证

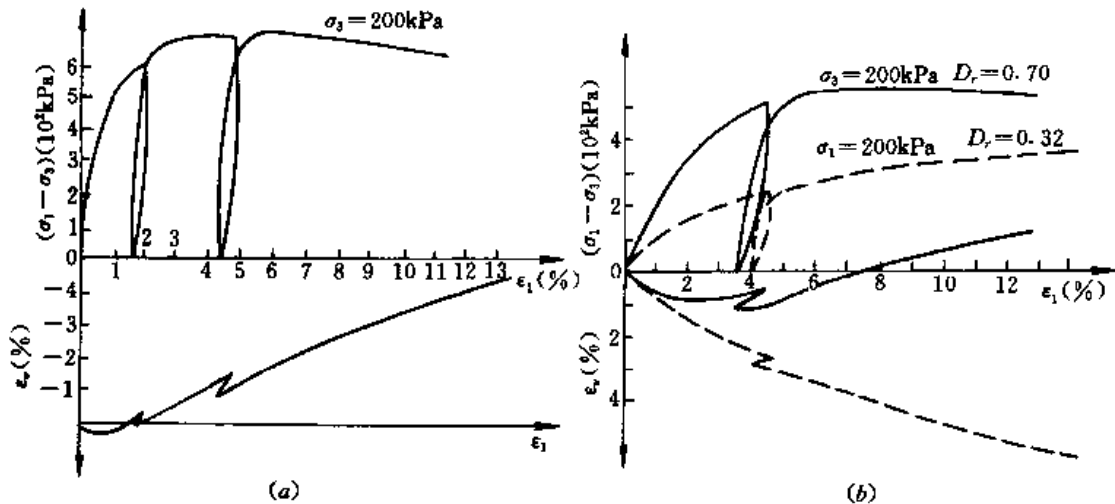


图 2-17 反向剪缩现象

(a) 砂土; (b) 粉煤灰

验测定的灵敏度多不低于 3, 因此, 取样扰动可能使试样大为软化, 必须充分注意^[21]。应变软化现象的另一种表现形式是压缩曲线呈现明显的 R 形 (图 2-18), 在某一压力 σ_p 处呈现急剧的转折。这一压力常称准先期固结压力, 其实更确切地应称为结构破坏压力。如果以扰

动土的压缩曲线为标准，位于上方的称欠固结土，位于下方的称超固结土，则原状软粘土多为欠固结土。

硬粘土 硬粘土应是一种超固结土，往往表现出明显的剪胀性。硬粘土也具有明显的应变软化特性，但是这里必须分清因结构强度脆性破坏的真正应变软化和因负孔隙压力作用造成的吸水软化，也就是说，在整理试验资料时应当用有效应力而不用总应力。同样，对于硬粘土的流变问题，也必须分清真正意义上的随时间发展的变形还是因孔隙水入渗引起的时间过程。有些硬粘土中还含有大量裂缝，此时连续介质理论可能不再适用，而要借用岩石力学中的某些分析方法。

膨胀土 膨胀土是硬粘土的一种，其矿物成份具有更大的亲水性。膨胀土的特性当与硬粘土一样，但因吸力过大，孔隙水汽化，研究时应考虑其非饱和性。

黄土 应变软化和浸水软化是黄土的两大特性，这些特性与其细观上的结构性密切相关。与结构性粘土一样，黄土也是一种欠固结土，差别在于前者是在水下形成的，后者则是在干燥条件下形成的。

冻土 冻土也是一种强应变软化材料，其变形特性受温度影响自不待言。由于冰粒的流变特性较明显，冻土的流变特性也较黄土明显。

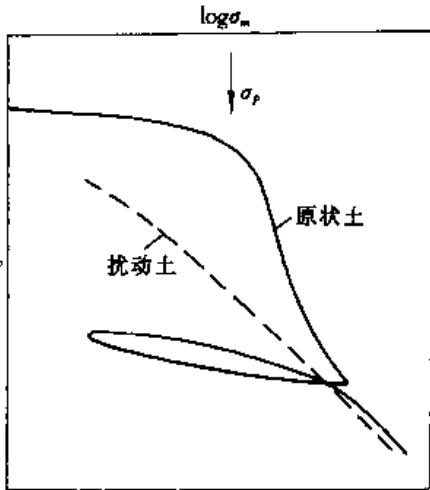


图 2-18 软土压缩曲线

第三节 土的强度理论

一、概述

强度理论研究包括两个方面，一是破坏时的应力状态表达式，即破坏准则；二是强度参数的变形规律。材料的剪切破坏准则已在第一节中讨论过，下面除必要的补充外，重点将放在强度参数的讨论上。

本节中对强度理论的介绍将遵循以下原则：①强度理论只涉及最终破坏状态，有关破坏以前的变形和孔隙压力过程，是应力应变关系的研究对象，一般不予涉及。②强度理论研究的最终目的是用于土体的极限平衡分析，而后者是建立在刚塑性体模型基础上的。许多土类并不适用这一模型，尤其是应变软化明显的脆性破坏土。这时，传统的强度理论常区分峰值强度和残余强度，分别讨论。下面仍将遵循这一传统，但将及时说明其局限性。③强度理论研究历史悠久，文献众多，但从现代土力学观点看，许多是陈旧的，或者是经验性的（例如所谓的不排水强度），一般不再介绍。

强度理论只涉及宏观现象，有关机理问题，除必要时作些说明外，一般也不再介绍。

二、无粘性土的强度

无粘性土的强度可用下列库伦摩擦定律描述

$$\tau_f = \sigma_f \operatorname{tg} \varphi \quad (2-54a)$$

式中： σ_f 为破坏面上正应力，或写成主应力状态

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = (\sigma_1 + \sigma_3)_f \sin \varphi \quad (2-54b)$$

对于一定颗粒组成的土类，影响 φ 角的主要因素是破坏面的压力及密实度。

围压的影响 当 σ_f 的变动范围较大时， φ 角不能再看作常量，即必须考虑强度包线的非线性。非线性的表达方式有两种，一是直接把 φ 角当作变量，例如下列 Duncan 建议的公式^[24]。

$$\varphi = \varphi_1 - \Delta\varphi \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (2-55)$$

式中： φ_1 为 $\sigma_3=1$ 大气压时的 φ 角， $\Delta\varphi$ 则是围压增加 10 倍后 φ 角的减少量（图 2-19）。二是直接把强度包线写成下列幂曲线形式^[25]

$$\tau_f = A(\sigma_f/p_a)^m \quad (2-56)$$

A 和 m 为两个常数。

上述非线性现象是高压下颗粒破碎增多，从而剪胀性减弱的结果。在一段有限的压力范围内，曲线总是可以近似地当作直线，此时可把式（2-54a）改写为

$$\tau_f = c + \sigma_f \operatorname{tg} \varphi \quad (2-57)$$

截距 c 往往称为咬合强度。当然，在天然沉积的砂土中，颗粒间也可能存在一定的胶结强度。

密实度的影响 紧密砂土具有明显的应变软化特性，此时 φ 角常对应于峰值强度，最终强度则通过 φ 表示。松砂没有峰值强度，因而 $\varphi = \varphi_c$ 。 φ_c 对各种密实度的砂基本不变，而 φ 则随密实度的增大而增大（图 2-20）^[3]。

三、软粘土的强度

对正常固结的软粘土，排水条件下的抗剪强度表达式将与式（2-54a）形式上完全相同，即

$$\tau_f = \sigma_f \operatorname{tg} \varphi_a \quad (2-58)$$

但是，软粘土是柔性骨架土，在围压增大的同时孔隙比也发生变化。因此，有人认为软粘土强度随围压的增大而增大，部分原因是凝聚力增大的结果，从而引出了如何从总强度中划分出凝聚成分和摩擦成分的问题。历史上对这一问题的诸多争论可以归结为以下三种理论：

真强度理论 最早为 Krey^[27] 所建议，后来 Tiedeman, Hvorslev 等作了进一步发展^[12]。这一理论认为，存在一个只取决于含水量而与应力历

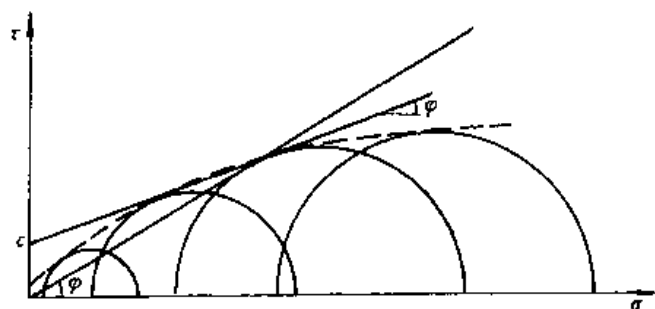


图 2-19 砂土的非线性强度包线

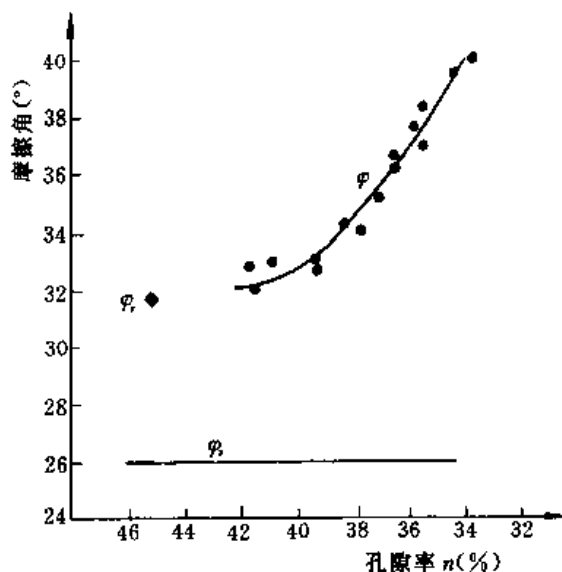


图 2-20 中砂摩擦角与起始孔隙率的关系

史无关的真凝聚力 $c_c(w)$, 从而可以把总强度划分成 c_c 和 $\sigma_f \tan \varphi_c$ 两部分

$$\tau_f = c_c(w) + \sigma_f \tan \varphi_c \quad (2-59)$$

式中: c_c 可以从超固结土的退荷后剪切试验测定, 只要点③的含水量与点①相同 (图 2-21)。

总强度理论 这一理论不再把强度区分为两部分, 并认为抗剪强度与破坏时的含水量之间存在唯一关系^[28], 这样式 (2-58) 可以写为

$$\tau_f = c(w) \quad (2-60)$$

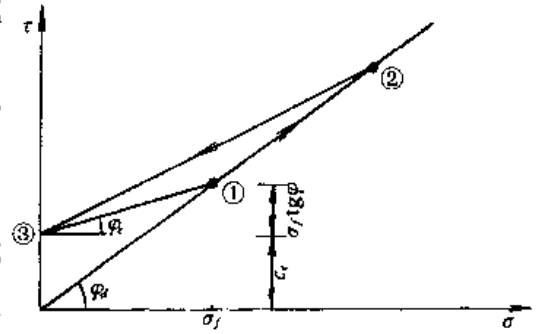


图 2-21 真凝聚力的确定

沈珠江更假定压缩曲线为对数曲线, 而把上式具体写为^[29]

$$\tau_f = \tau_{f0} \exp\left(\frac{w_{f0} - w_f}{I_f}\right) \quad (2-61)$$

式中: τ_{f0} 为天然含水量 w_{f0} 下的抗剪强度; w_f 为破坏时含水量; I_f 类似于压缩指数; σ_0 和 σ_c 为破裂面上的天然状态下和固结后的压力。软粘土的“ $\varphi=0$ ”分析法就是应用上述强度理论的一个特例。

有效强度理论 有效强度理论最早由 Terzaghi 提出^[30], 经 Skempton 和 Bishop 的改进而被广泛接受^[31], 该理论把式 (2-58) 写为

$$\tau_f = \sigma'_f \tan \varphi' \quad (2-62)$$

并认为 $\varphi' = \varphi_c$, 因此只要不排水剪中 σ'_f 等于排水剪中的 σ_f , 两种情况下的强度将相等。

真强度理论是基于对土的抗剪强度应当由凝聚力和摩擦力两部分组成的理念的追求, 本无可非议, 但它采用的具体划分办法却是通过两种不同应力历史的试样的测试结果, 这就缺乏根据。至于后两种理论, 则只要承认 σ_f 与 w 之间存在唯一关系, 它们之间并无实质区别。事实上, 要不要从总强度中划分出摩擦力成分, 其症结所在是破裂面方向角的取值。对同一破坏摩尔圆, 三个理论作了三种不同的解释 (图 2-22)。破裂面与大主应力方向的夹角为 $45^\circ + \varphi/2$, 按真强度理论 $\varphi = \varphi_c$, 按总强度理论 $\varphi = 0$, 而按有效强度理论 $\varphi = \varphi'$ 。破裂面上的应力为

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= \frac{1}{2} (\sigma_{1f} - \sigma_{3f}) \cos \varphi \\ \sigma_f &= \frac{1}{2} (\sigma_{1f} + \sigma_{3f}) - \frac{1}{2} (\sigma_{1f} - \sigma_{3f}) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-63)$$

由于 φ 角不同, 三种理论的破裂面上应力也将不同。对于这一问题, 下面在讨论极限平衡理论时将作进一步说明。

天然沉积的软粘土大多具有结构强度, 表现出明显的应变软化特性。图 2-23 是这类土的典型强度包线^[32]。围压较小时, 结构强度发挥作用, 围压增大到一定程度时, 结构强度遭到破坏, 抗剪强度反而降低; 围压继续增大, 土体显著压密, 抗剪强度又开始增大。前述的传统的强度理论, 只有到这最后阶段才适用。取样扰动对结构强度影响很大, 低质量的试样和粗糙的试验技术往往得不出图中所示的前一段强度包线, 对此必须充分注意。天然的软粘土还往往表现出明显的强度各向异性。如果从所取原状土样中沿不同方向切出试

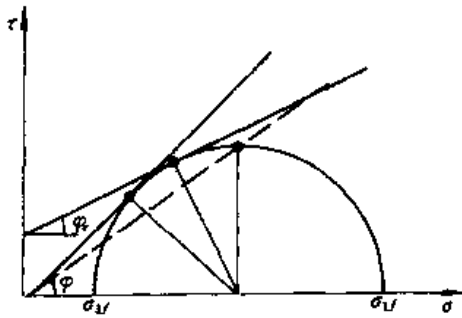


图 2-22 三种强度理论的破裂面

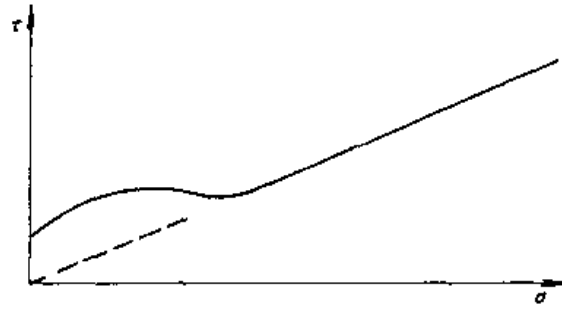


图 2-23 结构性粘土的抗剪强度

样进行不排水三轴剪切试验, 则以垂直切出的试样强度最高, 45°方向斜切的试样强度最低。图 2-24^[21]显示了软粘土总强度 S 随切样方向角 i 的变化。这就意味着, 破裂面与水平面重合时强度最低。

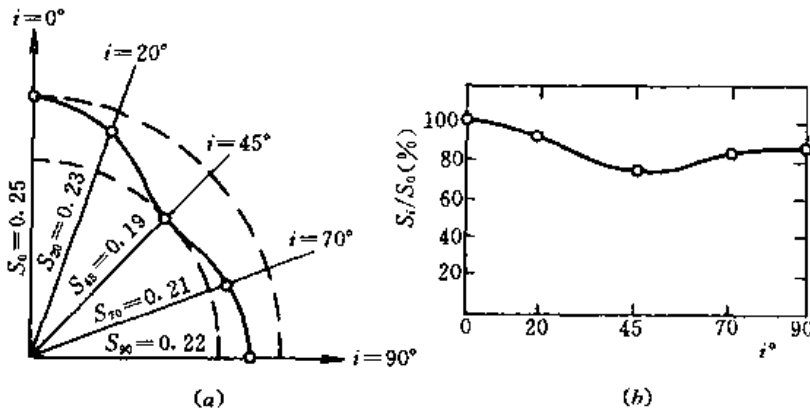


图 2-24 上海粘土的各向异性

四、硬粘土的强度

本文所称的硬粘土, 是指所有的超固结土。某些硬粘土因含有大量亲水矿物而具有强烈的胀缩性, 常称膨胀土。人工压实土在压实功能较大时, 也具有显著的超固结特性。

硬粘土具有明显的应变软化现象, 其软化程度一般随超固结比的增大而增大。超固结土的峰值强度将明显地高于正常固结土, 把不同围压下的强度值近似地当作直线, 可得出强度参数 c' 和 ϕ 。显然, 此时的 ϕ 将小于正常固结土的 ϕ (图 2-25)。对此, 只能认为是试验直线的斜率发生改变, 不宜再与破裂面的方向联系起来。超固结土的强度不同于正常固

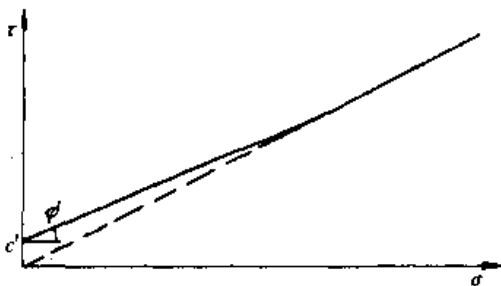


图 2-25 超固结土的强度

结土, 主要表现在 c' 上。使 c' 增大的原因, 不外是两个: 一个是应力历史, 另一个是地质条件 (天然土) 或制样方法 (人工土)。扰动和加大应变可消除这两个因素的影响, 从而使残余凝聚力 c_r 接近于 0, 此时残余内摩擦角 ϕ_r 将表现为一个相当稳定的值, 只取决于土颗粒及其矿物成份, 并且与塑性指数之间存在某种经验关系^[33,34]。

五、非饱和土强度

对于非饱和土，人们常把强度划分成三部分，即

$$\tau_f = c + f_1(\sigma - u_a) + f_2(u_a - u_w) \quad (2-64)$$

第一项常称真凝聚力，第二项为摩擦力，第三项代表由于吸力作用而产生的附加摩擦强度，可称为表观凝聚力或吸附强度^[35]。前面两项常与饱和土一样处理，非饱和土强度研究的重点是第三项。

Bishop 理论 所建议的强度公式为^[36]

$$\tau_f = c + (\sigma - u_a)\text{tg}\phi + \chi(u_a - u_w)\text{tg}\phi \quad (2-65)$$

$0 \leq \chi \leq 1$ 为一经验系数。当 $\chi=1$ 时，上式退化为饱和土的有效强度公式

$$\tau_f = c + (\sigma - u_w)\text{tg}\phi$$

上式表明，当孔隙水压力 $u_w < 0$ 时， $\chi < 1$ 的假设实际上就是认为负压中只有一部分能转化为有效应力，使摩擦力相应增加。由于系数 χ 难以确定，上述理论没有被广泛应用。

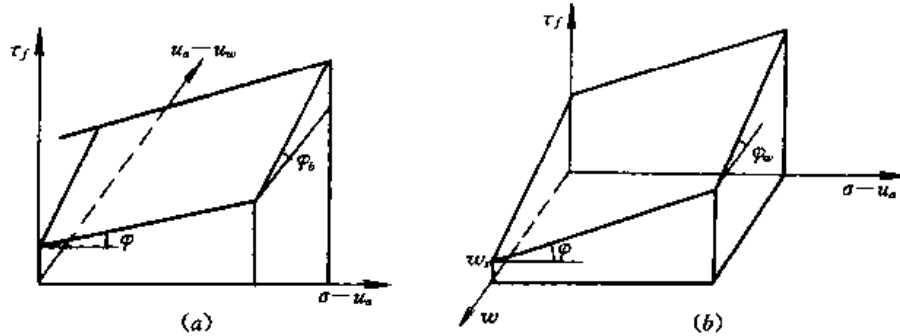


图 2-26 非饱和土强度

Fredlund 理论 所建议的强度公式为 (图 2-26a)^[37]

$$\tau_f = c + (\sigma - u_a)\text{tg}\phi + (u_a - u_w)\text{tg}\phi_b \quad (2-66)$$

由于 χ 是吸力 $u_a - u_w$ 的函数，式 (2-65) 中第三项实际上是非线性的。上式则把它线性化，而且令 $\text{tg}\phi_b = \chi\text{tg}\phi$ 。已有的试验资料证明， ϕ_b 并不是一个常数^[38]，因而式 (2-66) 与式 (2-65) 没有实质性区别。

卢肇均理论 所建议的公式为^[35]

$$\tau_f = c + (\sigma - u_a)\text{tg}\phi + p_i\text{tg}\phi \quad (2-67)$$

p_i 为膨胀压力。用膨胀压力代替吸力作为参变量据说是为了便于测定，但膨胀压力并不适用于所有的非饱和土类，例如黄土。其次，已有的试验资料还不足以证明，膨胀土中吸附强度与膨胀压力之间都有这样简单的线性关系。

杨代泉理论 考虑到吸力难以测定，用含水量作为变量显然更为实用。杨代泉通过击实土的试验证明，第三项与含水量之间的关系是线性的，因而强度公式可以写为 (图 2-26b)^[39]

$$\tau_f = c + (\sigma - u_a)\text{tg}\phi + (w_s - w)\text{tg}\phi_w \quad (2-68)$$

w_s 为饱和含水量。但是，他在试验中所用的含水量 w 为土样的制备含水量，而不同制备含水量的土应考虑为不同性质的土。

综上所述,非饱和土强度研究中把强度分成三个成分,无非是追求一个线性化的表达式,其3个系数(如Fredlund理论中的 c , $\text{tg}\phi$ 和 $\text{tg}\phi_s$)均为常量。这一想法恐怕是不切实际的。其实,即使 ϕ 角也不是常量,可以从峰值 ϕ 变到残余值 ϕ_r 。所谓的真凝聚力,就算理解为颗粒间的胶结强度,也会随围压的增大而逐渐破坏(图2-23)。因此,比较实际的做法还是把强度分成两部分,测定土样在吸水或失水过程中的强度,由此算出 c 和 ϕ 随含水量的变化规律,如图2-27所示的对黄土的试验结果^[40]。当然,进一步的工作应当是把图中曲线用某种简单的经验曲线拟合。

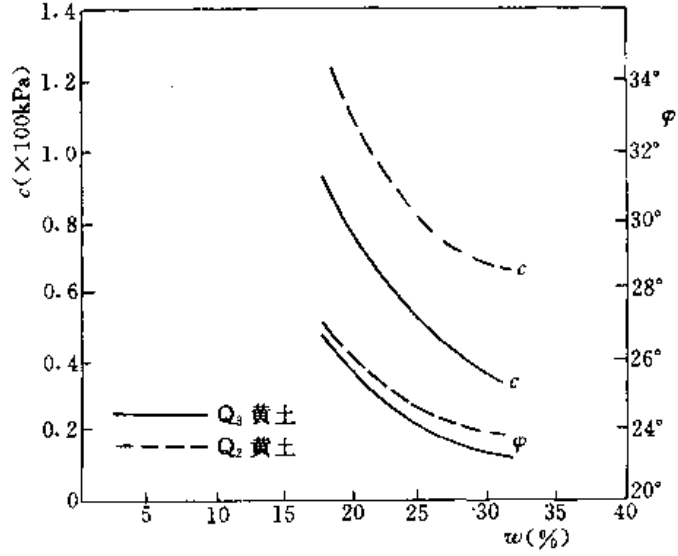


图 2-27 黄土的强度参数

六、粘土的联合强度理论

以上讨论只涉及剪切破坏,而粘土在拉伸条件下也可能破坏。在围压逐步降低的情况下,土体将由剪切破坏逐步过渡到拉伸破坏。对这一问题可以从两种角度进行研究。第一是经验方法,即根据低围压下的剪切试验及抗拉试验资料,用某一经验曲线描述其强度包线。另一是在某一假设下根据抗剪强度指标 c 、 ϕ 和抗拉强度 σ_t 求出其理论曲线。下面分别介绍之。

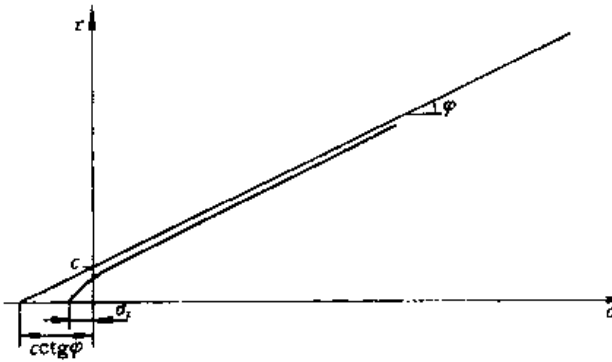


图 2-28 双曲线强度包线

经验公式 直线型强度包线与 σ 轴的截距为 $c\cot\phi$,而抗拉强度 σ_t 明显低于此值,因此这一段强度包线必须用曲线拟合。许多人建议用二次曲线,其中又以下列以 σ_t 为截距和抗剪强度直线为渐近线的双曲线方程最为

合理(图2-28)

$$\tau^2 = (c + \sigma \text{tg}\phi)^2 - (c - \sigma_t \text{tg}\phi)^2 \tag{2-69}$$

或通过 $\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ 表示

$$\bar{\tau}^2 = \sin^2\phi [(\bar{\sigma} + c\cot\phi)^2 - (c\cot\phi - \sigma_t)^2] \tag{2-70}$$

关德斌理论 Griffith 根据材料内含有椭圆形微裂隙的假设推导了下列公式

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 < 0 \text{ 时} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_3 &= \sigma_t; & \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2-71a}$$

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \text{ 时} \quad \left. \begin{aligned} \bar{\tau}^2 &= \frac{1}{2}\sigma_t\bar{\sigma}; & \theta &= \arccos\left(-\frac{1}{2}\frac{\bar{\tau}}{\sigma}\right) \end{aligned} \right\} \tag{2-71b}$$

式中: θ 为破裂面(椭圆缺陷的长轴)与大主应力的夹角; σ_t 为单轴抗压强度,且其理论值 $\sigma_c = 8\sigma_t$ 。式(2-71)为一段直线接一段抛物线。关德斌则建议强度包线的前一段为抛物线,

后一段为直线，两者在某一点光滑连结，并根据连结点的一次导数相等的原则推导了下列抛物线公式

$$\bar{\tau}^2 = 2\tau_b \sin\varphi \bar{\sigma} + \tau_b \sin\varphi \sigma_i + \frac{1}{4}\sigma_i^2 \quad (2-72)$$

其中

$$\tau_b = (\sigma_b \operatorname{tg}\varphi + c) / \cos\varphi$$

$$\sigma_b = -\frac{(2c \operatorname{tg}\varphi + \sigma_i) \sin^2\varphi}{2 \operatorname{tg}^2\varphi} + \sqrt{\frac{(2c \operatorname{tg}\varphi + \sigma_i)^2 \sin^4\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi (\sigma_i \cos\varphi + 2c \sin\varphi)^2 + 4c^2 \sin^2\varphi}{2 \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

并且称连结点应力 σ_b 为闭合应力，即应力大于此值后微裂隙闭合，因而只发生剪切破坏。剪切阶段的破裂角为 $\theta = 45^\circ - \varphi/2$ ，拉断时的破裂角 $\theta = 0$ ，而过渡段的破裂角则可由下式计算

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\tau_b \sin\varphi}{\tau}\right) \quad (2-73)$$

设 $\varphi = 30^\circ$ ， $\sigma_i = 20 \text{ kPa}$ ， $c = 60 \text{ kPa}$ ，则式 (2-72) 和式 (2-70) 的计算结果如图 2-29 中的实线和虚线所示。

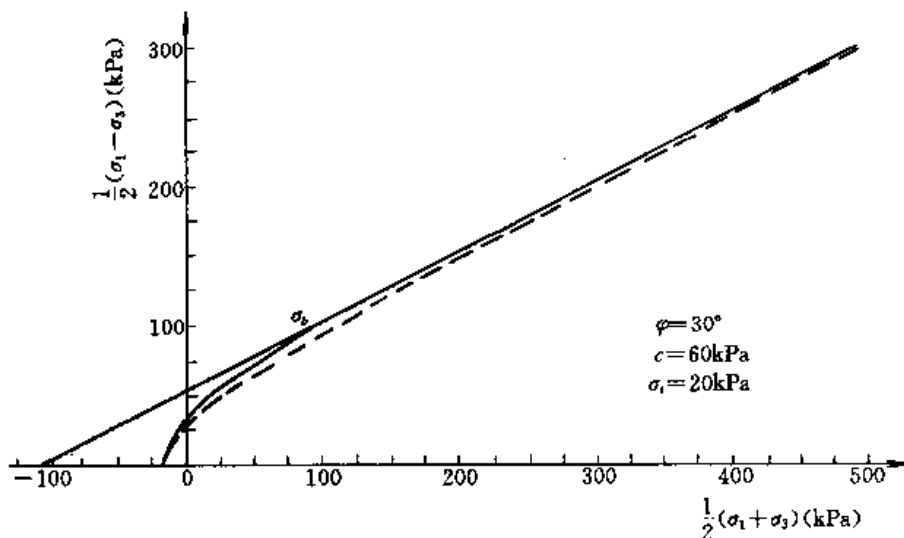


图 2-29 两种强度包线的比较

第四节 非线性模型

一、概述

应力应变关系的一般形式可以写为

$$\langle \Delta \epsilon \rangle = [C] \langle \Delta \sigma \rangle \quad (2-74)$$

柔度矩阵 $[C]$ 可以看作一种变换矩阵，通过它把应力增量 $\langle \Delta \sigma \rangle$ 变换成应变增量 $\langle \Delta \epsilon \rangle$ 。变换的步骤可以分旋转和伸缩两步 (图 2-30a)。各种本构模型无非在这两步的具体规定上有所不同。例如超弹性模型，由于要求变形前后均满足关系 $\langle \epsilon \rangle = \{f(\langle \sigma \rangle)\}$ 和 $\langle \epsilon + \Delta \epsilon \rangle = \{f(\langle \sigma + \Delta \sigma \rangle)\}$ ，自然得出 $[C] = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]$ ；而在弹塑性模型中，则把 $\Delta \epsilon$ 分为 $\Delta \epsilon^e$ 和 $\Delta \epsilon^p$ 两部分， $\Delta \epsilon^e$ 的

方向固定不变，而 $\Delta\epsilon'$ 与 $\Delta\sigma$ 是平行的（就偏应力空间而言），如图 2-30 (b) 所示。最一般情况下，矩阵 $[C]_{6 \times 6}$ 由 36 个分量组成，但从对坐标变换客观性的要求出发，对各向同性材料，独立的分量只有 6 个。每个独立分量均可以是应力历史、应力现状和应力增量的函数。这里所讲的应力增量影响只是狭义的，因为从广义上看，对加荷和卸荷采用不同的模量也是考虑应力增量的影响。

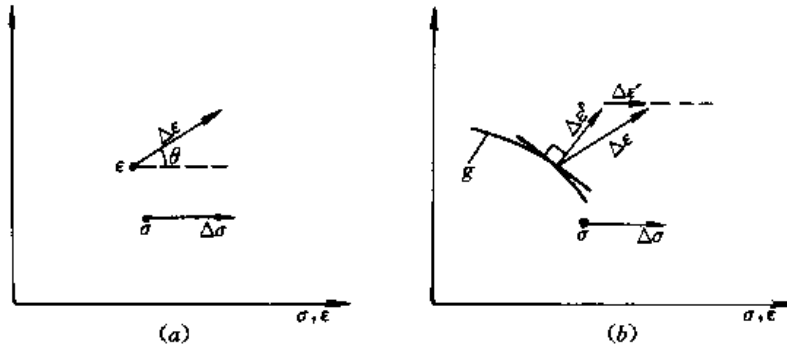


图 2-30 应力与应变的转换

本章以后各节都是讨论构造 $[C]$ 矩阵的各种方法。本节讨论不把应变增量区分为弹性和塑性两部分的构造方法，并根据所采用的基本假设由简到繁介绍。

二、变弹性模型

最简单的构造方法是变弹性模型，它是线弹性模型的直接推广，可把式 (2-52) 中的 K 和 G 换成变量 K_t 和 G_t 再把第一式乘上 $\frac{1}{3} \{\delta\}$ 后与第二式相加后得到，即

$$\begin{aligned} \{\Delta\epsilon\} &= \{\Delta\epsilon\} + \frac{1}{3}\Delta\epsilon_v\{\delta\} = \frac{\{\Delta\epsilon\}}{2G_t} + \frac{\Delta\sigma_m}{3K_t}\{\delta\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2G_t}[\mathbf{I}] + \left(\frac{1}{9K_t} - \frac{1}{6G_t} \right) [\mathbf{I}]\{\delta\} \right\} \{\Delta\sigma\} \end{aligned} \quad (2-75)$$

其中

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{I}]\{\delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式右边展开后即得相应的柔度矩阵 ($\{\Delta\epsilon\}$ 中的 e_{xy}, e_{yz} 和 e_{zx} 换成工程应变 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$)

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_t \end{bmatrix} \quad (2-76)$$

求逆后的刚度矩阵为

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

其中 $C_t = \frac{1}{G_t}$, $C_1 = \frac{1}{9K_t} + \frac{1}{3G_t}$, $C_2 = \frac{1}{9K_t} - \frac{1}{6G_t}$, $D_1 = K_t + \frac{4}{3}G_t$, $D_2 = K_t - \frac{2}{3}G_t$ 。 K_t 和 G_t 常称切线体积和剪切模量。从式 (2-75) 可见, 如果仅就偏应力和偏应变而言, 从矢量 $\{\Delta s\}$ 变换到 $\{\Delta e\}$ 只是缩短 $2G_t$ 倍而已, 并没有方向的转动。由此可见, 变弹性模量的最基本一点是保留了弹性理论中关于偏应变与偏应力之间相似而共轴的假设。

大家知道, 各向同性材料的弹性常数只有两个, 除前面的 (K, G) 外, 还可以用杨氏模量和泊松比 (E, ν) , 因此这类模型可以统称双参数模型。由于不同的双参数之间可以互相换算, 各种双参数模型之间除模型常数的测定方法上有差别外, 并无实质上的不同。已提出的双参数模型很多, 下面只介绍常用的两个。

Naylor 模型^[42] 这一模型采用下列变弹性参数

$$\left. \begin{aligned} K_t &= K_t + \alpha_K \sigma_m \\ G_t &= G_t + \alpha_G \sigma_m + \beta_G \sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (2-78)$$

式中: K_t , G_t 和 α_K , α_G , β_G 为 5 个常数。等向压缩条件下 $\Delta \epsilon_v = \Delta \sigma_m / K_t$, $\sigma_m = \text{const}$ 剪切条件下, $\Delta \epsilon_s = \frac{1}{2} \Delta \sigma_s / G_t$, 两者积分后可得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \epsilon_{v_1} + \frac{1}{\alpha_K} \ln(K_t + \alpha_K \sigma_m) \\ \epsilon_s &= \epsilon_{s_1} + \frac{1}{2\beta_G} \ln(G_t + \alpha_G \sigma_m + \beta_G \sigma_s) \end{aligned} \right\} \quad (2-79)$$

式中: ϵ_{v_1} 和 ϵ_{s_1} 为积分常数。通过某种办法拟合这两种试验曲线, 可以求得上述 5 个常数。

形式上的简单是此模型的优点, 但要通过等向压缩和 $\sigma_m = \text{const}$ 剪切这两种非常规试验测定参数, 则是它的缺点。

Duncan—张模型^[43] 在常规三轴压缩试验条件下, $\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 = 0$ 。定义 $E_t = \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta \epsilon_1} = \frac{1}{C_1}$, $\nu_t = -\frac{\Delta \epsilon_3}{\Delta \epsilon_1} = -\frac{C_2}{C_1}$, 则由式 (2-76) 可得 (E_t, ν_t) 与 (K_t, G_t) 之间的关系如下

$$E_t = \frac{9K_t G_t}{3K_t + G_t}, \quad \nu_t = \frac{3K_t - 2G_t}{6K_t + 2G_t} \quad (2-80)$$

与前面的思路相反, Duncan—张模型先假定积分后的 $\sigma_1 \sim \epsilon_1$ 曲线和 $\epsilon_3 \sim \epsilon_1$ 曲线为双曲线, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{\epsilon_1}{\frac{1}{E_t} + \frac{R_f \epsilon_1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}} \\ \epsilon_3 &= -\frac{\nu_t \epsilon_1}{1 - D_1 \epsilon_1} \end{aligned} \right\} \quad (2-81)$$

并设 E_i 和 ν_i 与 σ_3 之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} E_i &= K_E p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \\ \nu_i &= G_1 - F_1 \lg \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

则微分以后可得

$$\left. \begin{aligned} E_i &= E_i (1 - R_f S_f)^2 \\ \nu_i &= \frac{\nu_i}{\left[1 - D_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i (1 - R_f S_f)} \right]^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-83)$$

式中: $S_f = (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)_f$, $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = 2(c \cos \varphi + \sigma_3 \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi)$; c , φ , R_f , K_E , n , G_1 , F_1 和 D_1 为 8 个常数。

变弹性模型中也可以设定加荷—卸荷准则, 并对加荷和卸荷选用不同的模量。例如 Duncan—张模型中对卸荷状态用下列卸荷模量代替 E_i

$$E_w = K_w p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2-84)$$

只有在这个意义上, 变弹性模型的 $[C]$ 矩阵中也考虑了应力增量的影响, 而狭义来说, 这一类模型在构造 $[C]$ 矩阵对只计及应力现状的影响, 具体地说, 在 Naylor 模型中只计及 σ_m 和 σ_1 的影响, 在 Duncan—张模型中只计及 σ_3 和 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 的影响。

三、四参数模型

双参数变弹性模型的最大缺点是无法考虑剪胀性。下面从式 (2-53) 出发, 构造一个可以全面反映剪胀性和压硬性的四参数模型。把该式中的第一式乘上 $\frac{1}{3} \{\delta\}$ 后与第二式相加, 可得

$$\begin{aligned} \{\Delta \epsilon\} &= \frac{1}{2G_i} \{\Delta s\} - \frac{\Delta \sigma_m}{2G_d \sigma_i} \{s\} + \frac{\Delta \sigma_m}{3K_i} \{\delta\} + \frac{\Delta \sigma_1}{3K_d} \{\delta\} \\ &= \left(\frac{1}{2G_i} [\mathbf{I}] + \left(\frac{1}{9K_i} - \frac{1}{6G_i} \right) [\mathbf{II}] + \frac{1}{2K_d \sigma_i} [\mathbf{III}] - \frac{1}{6G_d \sigma_i} [\mathbf{III}]^T \right) \{\Delta \sigma\} \end{aligned} \quad (2-85)$$

右边括弧内为柔度矩阵, 其逆矩阵可以写为

$$\begin{aligned} [D] &= \frac{K_i}{1 + C_K C_G} \left([\mathbf{I}] + \frac{C_G}{\sigma_i} [\mathbf{III}] \right) \\ &\quad + 2G_i \left([\mathbf{I}] - \frac{3C_K}{2(1 + C_K C_G) \sigma_i} [\mathbf{III}]^T + \frac{C_G}{\sigma_i} [\mathbf{N}] \right) \left([\mathbf{I}] - \frac{1}{3} [\mathbf{II}] \right) \end{aligned} \quad (2-86)$$

式中

$$C_K = \frac{K_i}{K_d}, \quad C_G = \frac{G_i}{G_d}$$

$$[\mathbf{III}] = \{\delta\} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\}$$

$$[\mathbf{N}] = \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\}^T \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\}$$

如果写成显式, 柔度矩阵可分对称部分 $[C]_s$ 和非对称部分 $[C]_d$ 两部分, 前者与式 (2-76) 同, 后者的表达式如下

$$[C]_d = \begin{bmatrix} \alpha s_x - \beta s_x & \alpha s_y - \beta s_x & \alpha s_z - \beta s_x & 2\alpha\tau_{xy} & 2\alpha\tau_{yz} & 2\alpha\tau_{zx} \\ \alpha s_x - \beta s_y & \alpha s_y - \beta s_y & \alpha s_z - \beta s_y & 2\alpha\tau_{xy} & 2\alpha\tau_{yz} & 2\alpha\tau_{zx} \\ \alpha s_x - \beta s_z & \alpha s_y - \beta s_z & \alpha s_z - \beta s_z & 2\alpha\tau_{xy} & 2\alpha\tau_{yz} & 2\alpha\tau_{zx} \\ -2\beta\tau_{xy} & -2\beta\tau_{xy} & -2\beta\tau_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta\tau_{yz} & -2\beta\tau_{yz} & -2\beta\tau_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta\tau_{zx} & -2\beta\tau_{zx} & -2\beta\tau_{zx} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

其中 $\alpha = \frac{\rho_d}{2G_i\sigma_i}$, $\beta = \frac{\rho_h}{2G_i\sigma_i}$, $\rho_d = \frac{G_i}{K_d}$, $\rho_h = \frac{G_i}{G_d}$ 可以分别称为剪胀系数和压硬系数。

下面考虑两种特殊情况。首先令 $\rho_h = 0$ 或 $G_d = \infty$, 即只考虑剪胀性。此时, $[C]$ 矩阵中将只包含 K_i , G_i 和 ρ_d 三个参数, 因此可以称为三参数剪胀模型, 曾由 Al-Shawaf^[44]、Byrne^[45] 和沈珠江^[46] 建议过。下面介绍其中的两个。

Byrne 模型 采用 E_i , K_i 和 ρ_d 三个参数, E_i 的表达式仍用式 (2-83), K_i 的表达式为下列幂函数

$$K_i = K_B p_a \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^m \quad (2-88)$$

而 $\rho_d = -\sin\psi$, ψ 称为剪胀角, 可由下式计算

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \psi/2) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\right) / \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2) \quad (2-89)$$

而 φ 代表剪切时体积不变的残余内摩擦角。因此, 这一模型的参数也是 8 个, 即 φ , K_B , m 和前面的 K_E , n , R_f , c , φ 。

沈珠江模型 采用 E_i , M_i 和 μ_i 三个参数, E_i 的表达式也用式 (2-83), $M_i = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\epsilon_1}$ 则由单轴压缩试验测定, 并且也用幂曲线, 即

$$M_i = K_m p_a \left(\frac{\sigma_1}{p_a} \right)^m \quad (2-90)$$

μ_i 定义为体积比 $\frac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\epsilon_1}$, 原则上 $\mu_i = 1 - 2\nu_i$, 但不用式 (2-83) 的 ν_i 公式, 而是直接用抛物线拟合三轴试验得出的 $\epsilon_v - \epsilon_1$ 曲线, 即

$$\mu_i = 2c_d \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_d} \frac{E_i R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \frac{1 - R_d}{R_d} \left(1 - \frac{R_i}{1 - R_i} \frac{1 - R_d}{R_d} \right) \quad (2-91)$$

式中: $R_i = R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$; c_d , n_d 和 R_d 为三个常数。此时, 式 (2-77) 中的 D_1 , D_2 和剪胀系数 ρ_d 可分别表示如下

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{(3 - \mu_i)^2 M_i - 2(1 + \mu_i) E_i}{3(3 - \mu_i)(1 - \mu_i)} \\ D_2 &= \frac{(3 - \mu_i)^2 M_i - 4(2 - \mu_i) E_i}{3(3 - \mu_i)(1 - \mu_i)} \\ \rho_d &= \frac{2}{3 - \mu_i} \frac{\mu_i(3 - \mu_i) M_i - (1 + \mu_i) E_i}{(3 - \mu_i) M_i - 2E_i} \end{aligned} \right\} \quad (2-92)$$

此模型共有 10 个常数, 即 K_m , m , c_d , n_d , R_d 和前面的 K_E , n , R_f , c , φ 。

为了避免应用不对称的刚度矩阵, 上述三参数模型均建议具体计算时应用初应变法, 即

把应力应变关系写为

$$\{\Delta\sigma\} = [D](\{\Delta\epsilon\} - \{\Delta\epsilon^0\}) \quad (2-93)$$

初应变 $\{\Delta\epsilon^0\}$ 按下式计算

$$\{\Delta\epsilon^0\} = \frac{1}{3}\Delta\epsilon_v\{\delta\} = \frac{1}{3}\rho_d \frac{\Delta\sigma_s}{G_t}\{\delta\} \quad (2-94)$$

而刚度矩阵仍如式 (2-77) 所示。

另一种特殊情况是假定应力和应变总量之间存在下列关系。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= f_1(\sigma_m, \sigma_s) \\ \epsilon_s &= f_2(\sigma_m, \sigma_s) \end{aligned} \right\} \quad (2-95)$$

如令 $\frac{1}{K_t} = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_m}$, $\frac{1}{2G_t} = \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_s}$, $\frac{1}{K_d} = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_s}$, $\frac{1}{2G_d} = -\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_m}$, 这时, 四个参数中只有两个是独立的, 即四个参数必须满足下列两个关系^[47]

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{1}{K_t} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma_m} \left(\frac{1}{K_d} \right); \frac{\partial}{\partial \sigma_m} \left(\frac{1}{G_t} \right) = -\frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{1}{G_d} \right)$$

这样的模型可以称为双参数超弹性模型, 它与双参数变弹性模型不同之处是柔度矩阵中考虑了应力路线的影响, 因为它相当于把变弹性模型中的切线模量的定义改为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K'_t} = \frac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\sigma_m} &= \frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_d} \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\sigma_m} \\ \frac{1}{2G'_t} = \frac{\Delta\epsilon_s}{\Delta\sigma_s} &= \frac{1}{2G_t} - \frac{1}{2G_d} \frac{\Delta\sigma_m}{\Delta\sigma_s} \end{aligned} \right\} \quad (2-96)$$

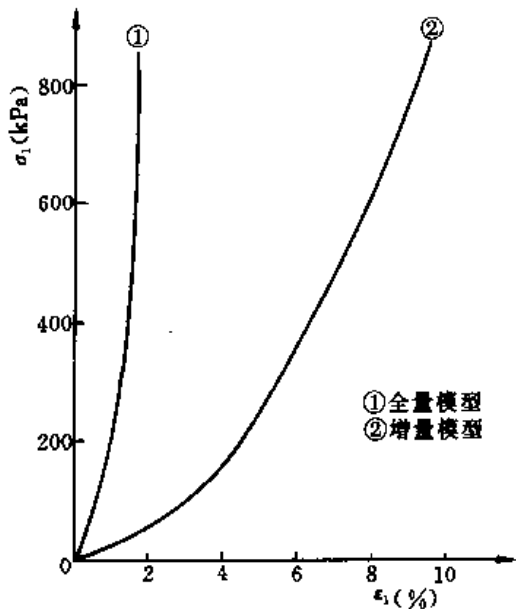


图 2-31 全量模型和增量模型的压缩曲线

右边的第二项 $\Delta\sigma_s/\Delta\sigma_m$ 和 $\Delta\sigma_m/\Delta\sigma_s$, 即反映应力增量方向的影响。与 $\sigma_m = \text{const}$ 的应力路线相比, 当 σ_m 与 σ_s 同时增大时, $\Delta\sigma_m/\Delta\sigma_s > 0$, 故 $G'_t > G_t$ 。图 2-31 显示了两种模型计算结果的差别^[48]。

四、七参数模型

迄今为止, 所有讨论过的模型都建立在偏应变与偏应力增量相似且共轴的假设成立的基础上。如果放弃相似, 只保留共轴的假设, 则可以得到类似正交各向同性体的更一般的关系。下面介绍周正明建议的符合这一假设的七参数模型^[49]。

首先建立下列主应变与主应力增量之间关系

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_1 \\ \Delta\epsilon_2 \\ \Delta\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (2-97)$$

假设: ① $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$ 的等向压缩曲线符合半对数曲线 $\epsilon_v = \epsilon_{v_1} - c \cdot \ln \sigma_m$; ② 侧向压力不变条件下 ($\Delta\sigma_1 > 0$, $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$) 的压缩曲线 $\sigma_1 \sim \epsilon_1$ 为双曲线; ③ 围压不变条件下的压缩试验所得的 $\sigma_1 \sim \epsilon_1$ 曲线符合下列经验公式 (图 2-32)

$$\epsilon_v = c_d \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_d} \times \frac{(1-R_d)^2 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1-R}{1-R_d} - \frac{1}{4} \right) - (1-R_d) \left(\ln \frac{1-R}{1-R_d} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-R_d} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-R_d} - \frac{1}{2} R_d - \frac{R_d^2}{4} \right)} \quad (2-98)$$

其中 $R = (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$, $R_d = (\sigma_1 - \sigma_3)_d / (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$, c_d 为 $R=R_d$, 且 $\sigma_3 = p_a$ 时的体应变 ϵ_{vd} , 且 $(\sigma_1 - \sigma_3)_d$ 符合下列经验公式

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_d = c_r \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (2-99)$$

则式 (2-97) 中的各项系数将为

$$\left. \begin{aligned} C_{ii} &= \frac{1}{E_{ii}} & (i = 1, 2, 3) \\ C_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3K_i} + \frac{1}{3K_{dj}} - \frac{1}{E_{ij}} \right) & (i \neq j; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (2-100)$$

其中

$$K_i = \frac{\sigma_m}{c_c} \quad (2-101)$$

$$E_{ii} = K_E p_a \left(\frac{\sigma_j + \sigma_k}{2p_a} \right)^n (1 - R_{ii})^2 \quad (2-102)$$

$$\frac{1}{K_{di}} = \frac{c_d \left(\frac{\sigma_j + \sigma_k}{2p_a} \right)^{n_d}}{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-R_{dj}} - \frac{3}{4}} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_j - \sigma_k}{2} \right) \ln \frac{1 - R_{ii}}{1 - R_{di}} \quad (2-103)$$

$$\text{其中 } R_{ii} = R_f \left| \sigma_i - \frac{\sigma_j + \sigma_k}{2} \right| / (\sigma_1 - \sigma_3)_f$$

$$R_{di} = R_f c_r \left(\frac{\sigma_j + \sigma_k}{2p_a} \right)^m / (\sigma_1 - \sigma_3)_f$$

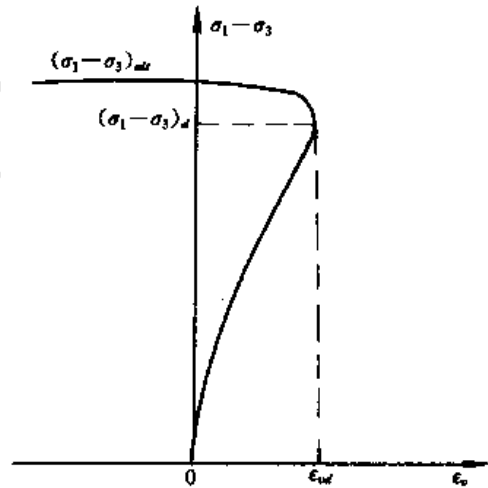


图 2-32 剪胀曲线

上述式中: c_c , c_d , n_d , c_r 和 m 为 5 个常数, 加上原来 Duncan 模型中 c , φ , R_f , K_E 和 n_5 个, 共计 10 个常数。显然, 这里借用了 Duncan 模型关于 E_i 的定义, 但把侧压力 σ_3 换成了 $\frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3)$ 。第二步是把上述应力应变关系通过坐标轴转换推广到一般空间, 即

$$[C]_{6 \times 6} = [R]_{6 \times 3}^T [C]_{3 \times 3} [R]_{3 \times 6} \quad (2-104)$$

其中转换矩阵为

$$[R] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \end{bmatrix} \quad (2-105)$$

l_i , m_i , n_i ($i=1, 2, 3$) 为三个坐标轴与三个主应力轴夹角的方向余弦。

上述模型包含了 K_i , E_{i1} , E_{i2} , E_{i3} , K_{d1} , K_{d2} 和 K_{d3} 7 个参数, 但按照式 (2-102) 和式

(2-103) 的表达, E_{i1} , E_{i2} 和 E_{i3} 之间及 K_{d1} , K_{d2} 和 K_{d3} 之间实际上是相关的, 所以真正的独立参数仍只有 3 个。要真正考虑各向异性, 只有对模型常数 K_E , c_r 和 c_d 对不同方向取不同的值。

五、九参数模型

前面各种模型中均未考虑应力增量对 $[C]$ 矩阵的影响。考虑应力增量后的一般表达式可以写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C(\{u\})]\{\Delta\sigma\} \quad (2-106)$$

其中 $\{u\} = \frac{\{\Delta\sigma\}}{\|\Delta\sigma\|}$ 代表 $\{\Delta\sigma\}$ 的方向, $\|\Delta\sigma\| = \sqrt{\{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\sigma\}}$, 为矢量 $\{\Delta\sigma\}$ 的模。上式展开后可以写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C_1]\{\Delta\sigma\} + [C_2]\{u\}\{\Delta\sigma\} + [C_3]\{u\}\{u\}\{\Delta\sigma\} + \dots \quad (2-107)$$

此时, $[C_1]$, $[C_2]$, $[C_3]$... 将只是应力历史和应力现状的函数。如果只取前面两项

$$\{\Delta\epsilon\} = ([C_1]_{6 \times 6} + \frac{1}{\|\Delta\sigma\|} [C_2]_{6 \times 6 \times 6} \{\Delta\sigma\}) \{\Delta\sigma\} \quad (2-108)$$

这一类模型可以称为二阶增量非线性模型, Darve^[50], Robinet 等^[51]均建议过这类模型, 下面介绍其基本思路。

根据正交各向同性假设, 这类模型的柔度矩阵中只有 12 个非零元素, 即

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

而且只有 9 个是独立的, 其它 3 个可以通过前面 9 个表示, 例如

$$C_{44} = \sqrt{2C_{22}^2 + C_{33}^2} - \frac{1}{2}(C_{22} + C_{33} + C_{23} + C_{32}) \quad (2-110)$$

其次, 假定通过试验已测定三个正交方向的 18 个应力应变关系如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= f_i^+(\epsilon_i) \\ \epsilon_j &= g_j^+(\epsilon_i) \\ \epsilon_k &= h_k^+(\epsilon_i) \end{aligned} \right\} \quad (\sigma_i \text{ 增大}, \sigma_j = \text{const}, \sigma_k = \text{const})$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= f_i^-(\epsilon_i) \\ \epsilon_j &= g_j^-(\epsilon_i) \\ \epsilon_k &= h_k^-(\epsilon_i) \end{aligned} \right\} \quad (\sigma_i \text{ 减少}, \sigma_j = \text{const}, \sigma_k = \text{const})$$

$$(i = 1, 2, 3, j \neq k \neq i) \quad (2-111)$$

相应的切线杨氏模量和泊松比按下式定义

$$\left. \begin{aligned} E_i^+ &= \frac{\partial f_i^+}{\partial \varepsilon_i} & \nu_i^+ &= -\frac{\partial g_i^+}{\partial \varepsilon_i} & \nu_i^+ &= -\frac{\partial h_i^+}{\partial \varepsilon_i} \\ E_i^- &= \frac{\partial f_i^-}{\partial \varepsilon_i} & \nu_i^- &= -\frac{\partial g_i^-}{\partial \varepsilon_i} & \nu_i^- &= -\frac{\partial h_i^-}{\partial \varepsilon_i} \end{aligned} \right\} \quad (2-112)$$

当应力增量的主轴偏离原来的应力主轴时，相应的 E 和 ν 通过下列内插公式得出

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}(E_i^+ + E_i^-) + \frac{1}{2}(E_i^+ - E_i^-)\cos\theta_i \\ \nu_i &= \frac{1}{2}(\nu_i^+ + \nu_i^-) + \frac{1}{2}(\nu_i^+ - \nu_i^-)\cos\theta_i \\ \nu_i &= \frac{1}{2}(\nu_i^+ + \nu_i^-) + \frac{1}{2}(\nu_i^+ - \nu_i^-)\cos\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (2-113)$$

θ_i 为应力增量方向与 i 轴的夹角。这相当于把式 (2-108) 中的矩阵写成下列形式

$$\left. \begin{aligned} [C_1] &= \frac{1}{2}([C^+] + [C^-]) \\ [C_2] &= \frac{1}{2}([C^+] - [C^-]) \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix} \quad (2-114)$$

其中 $l = \cos\theta_1$, $m = \cos\theta_2$, $n = \cos\theta_3$ 。而 $[C^+]$ 和 $[C^-]$ 可用一般弹性力学公式计算，即

$$\left. \begin{aligned} [C^+] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^+} & -\frac{\nu_2^+}{E_2^+} & -\frac{\nu_3^+}{E_3^+} \\ -\frac{\nu_1^+}{E_1^+} & \frac{1}{E_2^+} & -\frac{\nu_3^+}{E_3^+} \\ -\frac{\nu_1^+}{E_1^+} & -\frac{\nu_2^+}{E_2^+} & \frac{1}{E_3^+} \end{bmatrix} \\ [C^-] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^-} & -\frac{\nu_2^-}{E_2^-} & -\frac{\nu_3^-}{E_3^-} \\ -\frac{\nu_1^-}{E_1^-} & \frac{1}{E_2^-} & -\frac{\nu_3^-}{E_3^-} \\ -\frac{\nu_1^-}{E_1^-} & -\frac{\nu_2^-}{E_2^-} & \frac{1}{E_3^-} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2-115)$$

对 f_i , g_i 和 h_i 采用不同的曲线拟合，可得不同的具体表达式。

第五节 弹塑性模型

一、弹塑性矩阵及其性质

弹塑性矩阵的一般表达式可以写为

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \sum_{i=1}^l A_i \{n_i\} \Delta f_i \quad (2-116)$$

其中 $A\Delta f$ 相当于式 (2-22) 中的 $\Delta\lambda$, l 为屈服面的重数。式中第一部分为弹性应变增量，第

二部分为塑性应变增量，后者又可以假定由若干部分组成。考虑到 $\{\Delta\epsilon\} = [C] \cdot \{\Delta\sigma\}$ 和 $\Delta f_i = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\}$ ，上式的柔度矩阵可以表达为

$$[C] = [C]_e + \sum_{i=1}^l [C_i]_p \quad (2-117)$$

其中 $[C_i]_p = A_i \langle n_i \rangle \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \quad (2-118)$

由此可见，当应力增量 $\{\Delta\sigma\}$ 已知时，塑性应变增量可以通过 A_i （由硬化规律确定）、 $\langle n_i \rangle$ （由流动法则确定）和 $\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}$ （由屈服函数确定）三个因素计算，而流动法则是问题的核心。流动法则假定存在不依赖于应力路线的塑性势 g_i ，塑性应变增量的方向必须与此面正交

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{N_i} \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-119)$$

其中 $N_i = \sqrt{\left\{ \frac{\partial g_i}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial \sigma} \right\}}$ 。这就意味着，不管应力增量 $\{\Delta\sigma\}$ 的方向如何， $\langle n_i \rangle$ 是不变的，或者说 $\langle n_i \rangle$ 与 $\{\Delta\sigma\}$ 无关。反过来说，已知 $\langle n_i \rangle$ ，无法确定 $\{\Delta\sigma\}$ 的方向。这一特点决定塑性柔度矩阵是不可逆的——即不能根据塑性应变增量反求应力增量。周正明通过对柔度矩阵的分析证明了上述结论^[49]。下面引述其主要结果。

采用单屈服面时

$$[C]_p = \frac{A}{N} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T = \frac{A}{N} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2-120)$$

此矩阵的一阶行列式为

$$|C^{(1)}| = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \neq 0$$

二阶行列式

$$|C^{(2)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \end{vmatrix} = 0$$

同理

$$|C^{(3)}| = |C^{(4)}| = |C^{(5)}| = |C^{(6)}| = 0$$

这就是说，单屈服面的 $[C]$ 矩阵的秩为 1，是不可逆的。当采用双屈服面时

$$[C] = \frac{A_1}{N_1} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T + \frac{A_2}{N_2} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T$$

此时

$$|C^{(1)}| = \frac{A_1}{N_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \frac{A_2}{N_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} \neq 0$$

$$|C^{(2)}| = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{N_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \frac{A_2}{N_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} & \frac{A_1}{N_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} + \frac{A_2}{N_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} \\ \frac{A_1}{N_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \frac{A_2}{N_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} & \frac{A_1}{N_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} + \frac{A_2}{N_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_2} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

但 $|C^{(3)}| = |C^{(4)}| = |C^{(5)}| = |C^{(6)}| = 0$

可见双重屈服面模型的塑性柔度矩阵的秩为 2，仍不可逆。同理可以推论，三重屈服面的柔度矩阵的秩为 3，四重屈服面则为 4，五重屈服面为 5，六重屈服面为 6。这就是说只有采用六重屈服面时，塑性柔度矩阵才是可逆的满秩矩阵。

现在把弹性应变加上以后推求弹塑性柔度矩阵的逆矩阵 $[D]_{ep}$ 。式 (2-116) 两边乘上弹性刚度矩阵 $[D]$ 以后可得

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - \sum_{i=1}^l A_i [D]\{n_i\}\Delta f_i \quad (2-121)$$

由此

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{\Delta\varepsilon\} - \sum_{j=1}^l A_j \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_j\}\Delta f_j \quad (i = 1, \dots, l) \end{aligned} \quad (2-122)$$

由上述 l 个代数方程式可以解出 Δf_i ($i=1, l$)，代回到式 (2-121) 中即可得出下列应力应变关系

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{ep}\{\Delta\varepsilon\} \quad (2-123)$$

下面写出双重屈服面 ($l=2$) 的弹塑性矩阵的显式

$$\begin{aligned} [D]_{ep} &= [D] - \frac{1}{D_*} \left\{ A_1 [D]\{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T + A_2 [D]\{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T \right. \\ &\quad + A_1 A_2 [D] \left\{ \{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T \right. \\ &\quad - \{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T + \{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T \\ &\quad \left. \left. - \{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T \right\} [D] \right\} \quad (2-124) \end{aligned}$$

其中 $D_* = 1 + A_1 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_1\} + A_2 \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_2\}$

$$+ A_1 A_2 \left\{ \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_1\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_2\} - \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_2\} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n_1\} \right\}$$

对单屈服面， $A_2=0$ ，并去掉足标 1，上式简化为

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{A [D]\{n\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{1 + A \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]\{n\}} \quad (2-125a)$$

或当采用正交法则时

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{A' [D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{1 + A' \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \quad (2-125b)$$

其中

$$A' = A/N$$

由于上述弹塑性矩阵是依赖弹性矩阵而求得的，故其性质在很大程度上依赖于弹性常数。试想，如果弹性应变在总应变中所占的比例十分小，那么，依赖于这一微小的弹性应变增量来决定应力增量，其结果必然十分不可靠。这时， $[D]_p$ 将失去正定性，计算误差很大，具体地表现为计算结果不稳定，计算的总应变大大偏低，如图 2-33 中 1 和 2 两条曲线。

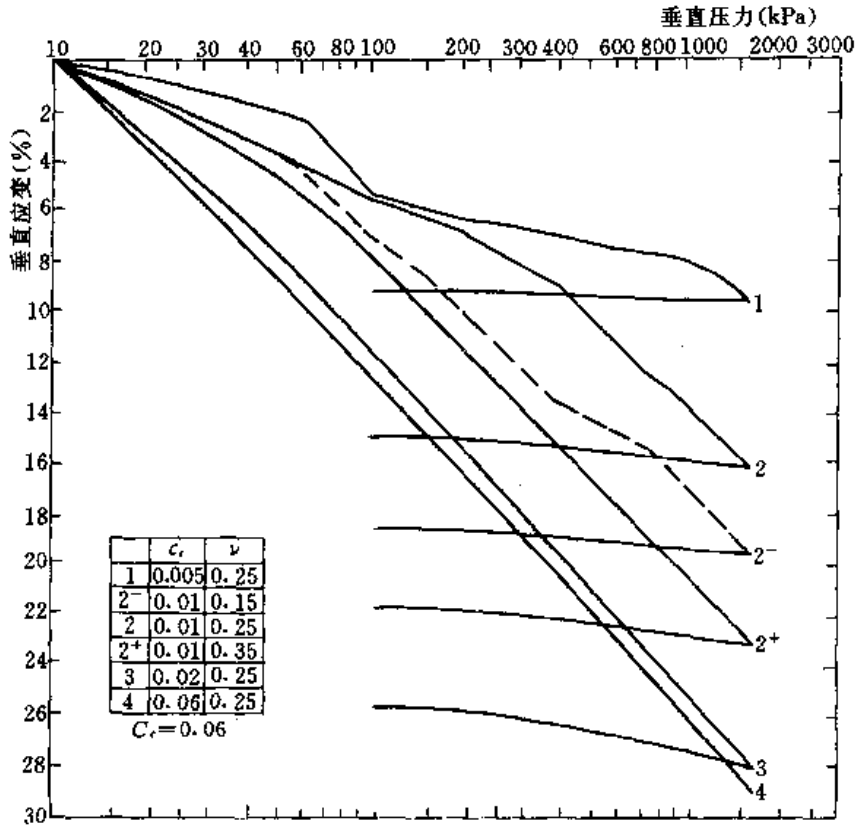


图 2-33 不同弹性常数计算的单向压缩曲线

要改善弹塑性矩阵的性质，可以采取以下几种措施。一是人为地降低弹性模量，使弹性应变在总应变中的比重不小于 1/5，同时令泊松比不小于 0.3^[52]。二是从总应变中多划出一部分应变当作变弹性处理，亦即采用下面要讨论的变弹性——弹塑性混合模型。三是采用多重屈服面模型，因为屈服面重数愈多，应变增量的方向将愈依赖于应力增量的方向(图 2-34)^[53]。

下面将以屈服面为线索，由简到繁逐步介绍各种弹塑性模型。

二、理想弹塑性模型

理想弹塑性材料的屈服面与破坏包线重合，对于各向同性材料，其表达式一般可以写为

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const} \quad (2-126a)$$

或
$$f(\sigma_m, \sigma_i/g(\rho)) = \text{const} \quad (2-126b)$$

$g(\rho)$ 为 Lode 角 ρ 的函数。由于屈服面不扩大， $\Delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} = 0$ ，代入 $\{\Delta \sigma\} =$

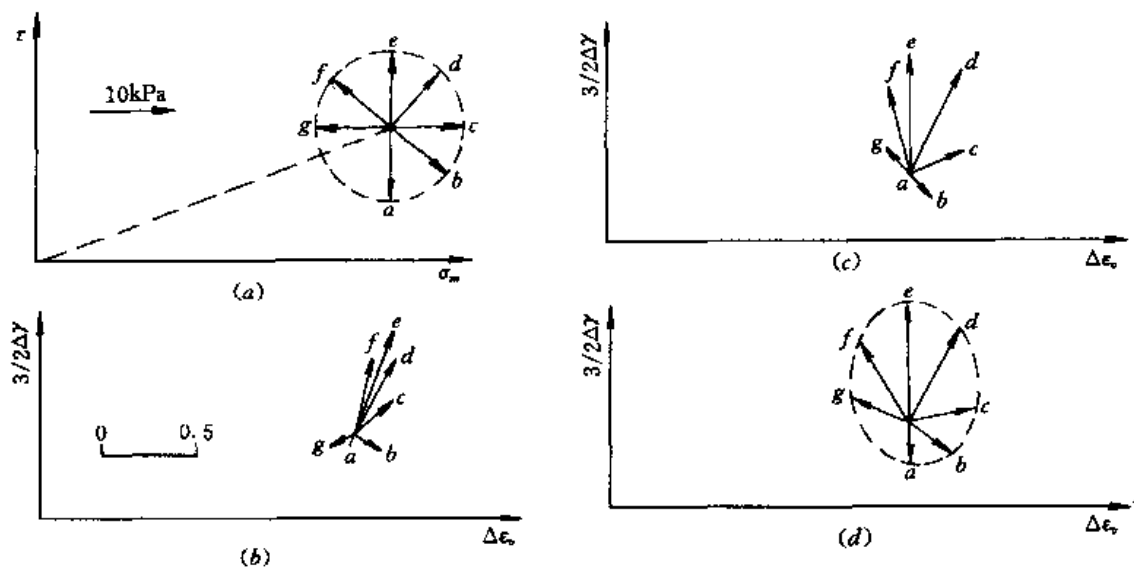


图 2-34 多重屈服面的应力和应变增量

(a) 应力增量; (b) 单屈服面应变增量; (c) 双屈服面应变增量; (d) 三屈服面应变增量

$[D] (\{\Delta\epsilon\} - \{\Delta\epsilon^p\})$ 和 $\{\Delta\epsilon^p\} = \Delta\lambda \{n\}$ 后可得

$$\Delta\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{\Delta\epsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{n\}} \quad (2-127)$$

再代回到 $\{\Delta\sigma\}$ 公式中可得

$$\{\Delta\sigma\} = \left[[D] - \frac{[D] \{n\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{n\}} \right] \{\Delta\epsilon\} \quad (2-128)$$

此式也可从式 (2-125) 得到, 只要令 $A \rightarrow \infty$ 。但此式只有理论意义, 无法应用, 因为由此式形成的刚度矩阵是不正定的, 无法求解。

在本章第一节中, 已介绍了 9 种强度理论, 重点讨论了 π 平面上的影响函数 $g(\rho)$, 但对子午面上的破坏包线则简单地假定为直线。下面将取消这一限制, 由简到繁介绍几种理想弹塑性模型。

纯凝聚性模型 此类材料的破坏包线可以写为

$$\frac{\sigma_1}{g(\rho)} = 2c \quad (2-129)$$

采用 Mises 准则时

$$g(\rho) = 1$$

而采用 Tresca 准则时

$$g(\rho) = \frac{3}{2\sqrt{3}\cos\rho} \quad (2-130)$$

对 Mises 材料, 当采用正交流动法则时, $\{n\} = \frac{\{s\}}{\sigma_s}$, 其中 $\{s\}^T = \{s_x \ s_y \ s_z \ 2\tau_{xy} \ 2\tau_{yz} \ 2\tau_{zx}\}^T$, 代入式 (2-127) 后可得

$$\Delta\lambda = \frac{\{s\}^T \{\Delta e\}}{\sigma_1} \quad (2-131)$$

从而

$$\{\Delta e^p\} = \frac{\{s\} \{s\}^T \{\Delta e\}}{\sigma_1^2} \quad (2-132)$$

而塑性体积应变 $\Delta\varepsilon_v^p = 0$ 。式 (2-132) 表明, 塑性偏应变的增量 $\{\Delta e^p\}$ 与偏应力总量 $\{s\}$ 成正比, 这就是著名的 Plandtl-Reuss 流动法则。

线性模型 其一般表达式可以写为

$$\eta' = \frac{\eta}{g(\rho)} = \eta_f \quad (2-133)$$

其中 $\eta = \sigma_1 / \bar{\sigma}_m$, $\bar{\sigma}_m = \sigma_m + \cot\varphi$ 。由此

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = -\frac{\eta}{\sigma_m g(\rho)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{\sigma_m g(\rho)}$$

故当采用正交流动法则时, 其体积剪胀率将为

$$\frac{\Delta\varepsilon_v^p}{\Delta\varepsilon^p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} / \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = -\eta g(\rho) \quad (2-134)$$

强度参数通常在三轴压缩条件下测定, 此时 $\sigma_2 = \sigma_3$, $\rho = -30^\circ$, 因此函数 $g(\rho)$ 必须满足 $g(-30^\circ) = 1$ 。相应地, 式 (2-133) 变为

$$\eta_f = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m} \right)_f = \frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \quad (2-135)$$

此式与式 (2-10) 完全一样 (注意 $\sigma_1 = 2\tau_m$)。除了前面提到过的几种破坏准则外, $g(\rho)$ 还可用各种经验公式表示。下面择要介绍之。

Drucker - Prager $g(\rho) = 1$

Mohr - Coulomb $g(\rho) = \frac{3 - \sin\varphi}{2(\sqrt{3}\cos\rho - \sin\rho\sin\varphi)} \quad (2-136)$

俞茂铨^[5] $g(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}\cos\varphi - \sin\varphi} \quad \rho < \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)$

$g(\rho) = \frac{2k}{\sqrt{3}\cos\varphi + \sin\varphi} \quad \rho \geq \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ $(2-137)$

其中 $k = (3 - \sin\varphi) / (3 + \sin\varphi)$ 。

Gudehus - Arygris^[8] $g(\rho) = \frac{2k}{(1+k) - (1-k)\sin 3\rho} \quad (2-138)$

但此式当 $\varphi > 22^\circ$ 时不能保证曲线的外凸性。

史述昭—杨光华^[54]

$$g(\rho) = \frac{2}{(1+k) + 1.125(1-k)^2 - [(1-k) + 1.125(1-k)^2]\sin 3\rho} \quad (2-139)$$

刑义川—郑颖人^[55]

$$g(\rho) = \frac{k}{(2k-1) + (\sin\rho + \sqrt{3}\cos\rho)(1-k)} \quad (2-140)$$

有的函数不便通过 Lode 角表示, 这时可用 η' 代替 η , 而把式 (2-133) 直接写成显式, 如

$$\text{Mohr - Coulomb} \quad \eta' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin\varphi \quad (2-141)$$

$$\text{沈珠江}^{[6]} \quad \eta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}\right)^2} = \sin\varphi \quad (2-142)$$

此式是式 (2-11) 的另一种写法

$$\text{松冈元}^{[7]} \quad \eta' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{\sigma_2\sigma_3}} = \text{tg}\varphi \quad (2-143)$$

Lade - Duncan^[56]

$$\eta' = \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}_m^3} = 27 \frac{(1 - \sin\varphi)\cos^2\varphi}{(3 - \sin\varphi)^3} \quad (2-144)$$

以上各种 $g(\rho)$ 函数可以分为两类, 一类在 $\rho = -30^\circ$ 和 $\rho = 30^\circ$ 两点与 Mohr-Coulomb 一致, Mohr-Coulomb 函数是其内包线, 俞茂镛函数是其外包线, 其它函数介于中间 (图 2-10); 另一类在 $\rho = 30^\circ$ 线上超过 Mohr-Coulomb 的值, 如史-杨和 Lade-Duncan 的函数。现把这些函数在 $\rho = 0^\circ$ 和 $\rho = 30^\circ$ 处的值列于表 2-1 中。由此表可见, Gudehus-Arygris 函数在 $\varphi > 30^\circ$ 时超越俞茂镛的外包线, 不合理。

表 2-1 几种模型的 $g(\rho)$ 函数值

ρ	模 型	φ				
		20°	25°	30°	35°	40°
0°	Mohr-Coulomb	0.767	0.744	0.722	0.701	0.662
	刑义川-郑颖人	0.841	0.806	0.773	0.743	0.715
	沈珠江	0.869	0.834	0.799	0.765	0.733
	松冈元	0.869	0.835	0.801	0.768	0.737
	Gudehus-Arygris	0.886	0.859	0.833	0.809	0.786
	俞茂镛	0.918	0.870	0.824	0.784	0.747
	史述昭-杨光华	0.921	0.911	0.903	0.898	0.894
	Lade-Duncan	0.910	0.884	0.856	0.828	0.798
30°	Mohr-Coulomb	0.795	0.753	0.714	0.679	0.647
	史述昭-杨光华	0.842	0.822	0.806	0.795	0.787
	Lade-Duncan	0.850	0.815	0.779	0.745	0.711

双曲线模型 强度包线用双曲线拟合时, 可能有两种方案。第一种方案以 Mohr-Coulomb 直线为渐近线, 如式 (2-70)。该式可以改写成下列更一般的形式

$$(9 - \sin^2\varphi) \frac{\sigma_s^2}{g^2(\rho)} - 12\sin^2\varphi \bar{\sigma}_m \frac{\sigma_s}{g(\rho)} - 36\sin^2\varphi \bar{\sigma}_m + 36\sin^2\varphi (c \cot\varphi - \sigma_t)^2 = 0 \quad (2-145)$$

第二种方案以水平线为渐近线, 可以写为^[55]

$$\frac{\sigma_s}{g(\rho)} - \frac{d}{\sigma_t} \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_{ult}}\right) \sigma_m = d \quad (2-146)$$

该曲线的形状如图 2-35 所示。

幂曲线模型 其一般表达式可以写为

$$\left(\frac{\sigma_s}{dg(\rho)}\right)^n - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} = 1 \quad (2-147)$$

式中： d 和 σ_s 的含义同前（图 2-35）。

指数曲线模型 其一般表达式可以写为^[57]

$$\frac{\sigma_s}{g(\rho)} + (\sigma_{ult} - d) \exp\left(-\frac{\sigma_m}{\sigma_s} \ln \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_{ult} - d}\right) = \sigma_{ult} \quad (2-148)$$

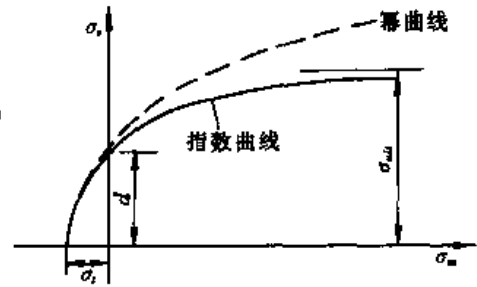


图 2-35 子午面上强度包线

此曲线的形状与式 (2-146) 接近。

三、帽盖屈服面模型

前述理想弹塑性模型的屈服面都是开口的筒形或锥形面，当应力路线在其内变动时将不产生塑性应变。这一假设显然与实际情况不符。为此，Drucker 等提出在锥体上套一球形的帽盖以反映 σ_m 增加情况下的塑性应变^[59]（图 2-36）。第一个具体的帽盖模型是 Roscoe 提出的弹头形模型^[59]，魏汝龙则建议了第一个椭圆形帽盖模型^[60]。以后椭圆帽盖形模型又得到不断的改进。

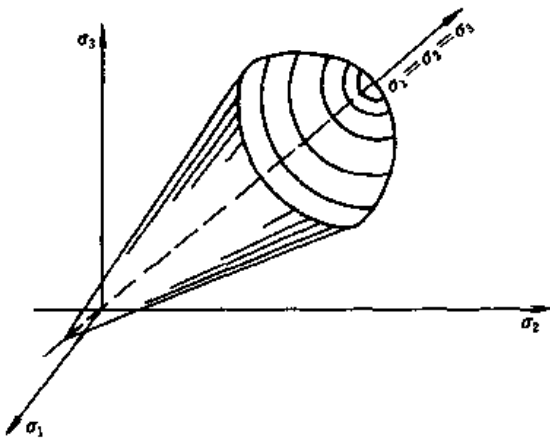


图 2-36 球形帽盖

在帽盖模型中，一般都假定屈服面为硬化参数等值面。黄文熙曾归纳了几种硬化规律^[3]，但最常用的还是把塑性体应变当作硬化参数。帽盖屈服面的表达式常可以写为

$$f = p(h) = \sigma_m f_0(\eta) \quad (2-149)$$

f_0 只是 $\eta = \sigma_s / \sigma_m$ 的函数， $\eta = 0$ 时 $f_0 = 1$ ， $p(h) = \sigma_m$ 。因此，当采用 $h = \epsilon_p^e$ 作为硬化参数时，所谓的硬化规律就是等向压缩条件下塑性体应变的变化规律。鉴于 $\left\{\frac{\partial \epsilon_p^e}{\partial \epsilon^p}\right\}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}$ ，如果

采用正交流动法则， $\left\{\frac{\partial h}{\partial \epsilon^p}\right\}^T \{n\} = \frac{1}{N}$

$\times \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}\right) = \frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m}$ 。故式 (2-27) 可以写为

$$A' = \left[\frac{\partial p}{\partial \epsilon_p^e} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m}\right]^{-1} \quad (2-150)$$

f 的选择应当满足下列条件： $\eta = 0$ 时 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 1$ ； $\eta = \eta_c$ 时 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 0$ 。后一种条件称为临界状态，此时 $A \rightarrow \infty$ ，剪切变形无限发展，但体应变保持不变。在软粘土中，临界状态也就是破坏状态， $\eta = \eta_f$ 。

前面讨论式 (2-26) 时已经提到，塑性系数还可以用其它办法确定^[9]。一种办法是借用运动硬化理论中的对偶应力理论，即在破坏线上找出与实际应力 σ 相对应的对偶应力 σ^* ，并根据两点之间的距离 δ 与参考距离 δ_0 之比确定塑性系数

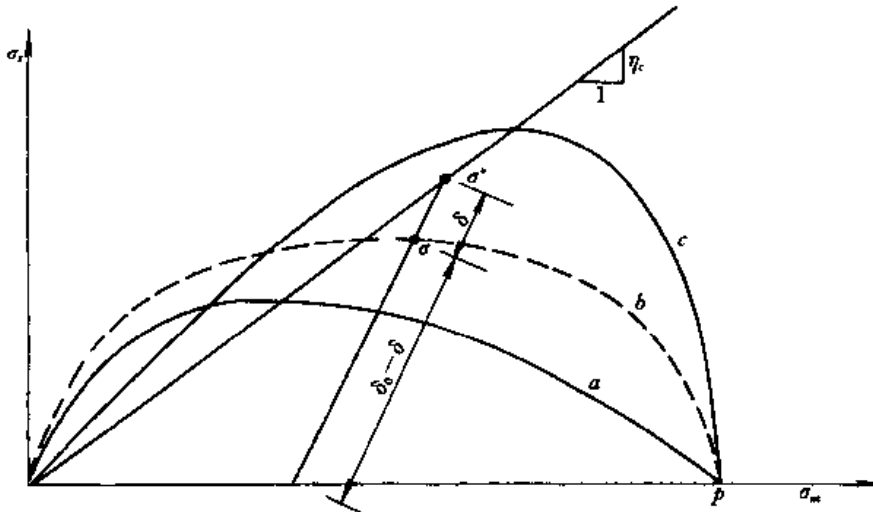


图 2-37 三种帽盖屈服面

$$A = A_0 \frac{\delta_0}{\delta} \quad (2-151)$$

A_0 为 $\delta = \delta_0$ 时的塑性系数 (图 2-37)。鉴于 $\delta/\delta_0 = 1 - \eta/\eta_c$ ，代入式 (2-150) 后可得

$$A' = \left[\left(1 - \frac{\eta}{\eta_c} \right) \frac{\partial p}{\partial \epsilon_p'} \right]^{-1} \quad (2-152)$$

第三种选择是应用等价应力理论，即把三轴应力状态理解为实际应力的等价应力，并把三轴试验测定的 A 的变化规律直接用于其它应力状态。三轴试验中测定值是 σ_1 和 ϵ_1 ($\sigma_3 = \text{const}$)，如果令 $\frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta \sigma_1} = \frac{1}{E_t}$ ，并直接代入式 (2-116) 中 ($l=1$)，可得

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_w} + A \{n\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}$$

或当采用正交流动法则时

$$A' = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_w} \right) \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \right)^2 \right. \quad (2-153)$$

式中： E_t 和 E_w 分别为切线和回弹杨氏模量。

下面介绍几个典型的帽盖模型。

弹头形屈服面^[59] Roscoe 最初建议的弹头形屈服面可以写为 (图 2-37 曲线 a)

$$f = \sigma_m \exp(\eta/\eta_c) \quad (2-154)$$

相应地

$$\partial f / \partial \sigma_m = (1 - \eta/\eta_c) \exp(\eta/\eta_c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{\eta_c} \exp(\eta/\eta_c)$$

此式满足 $\eta=0$ 时 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 1$ 和 $\eta=\eta_c$ 时 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 0$ 的条件。至于硬化函数 $p(\epsilon_p')$ ，则可从下列半对数压缩和回弹曲线得到

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \epsilon_{v_1} + c_c \ln p \\ \epsilon_v' &= \epsilon_{v_1}' + c_r \ln p \end{aligned} \right\} \quad (2-155)$$

式中： ϵ_{v_1} 和 ϵ_{v_1}' 是 $p=1$ 时的相应体应变， c_c 和 c_r 是两个参数，与常见的压缩指数和回弹指数

相差一个乘数 $\frac{0.4343}{1+\epsilon_0}$ 。由此可得

$$p = p_1 \exp\left(\frac{\epsilon_v^p}{c_c - c_s}\right) \quad (2-156)$$

代入式 (2-150) 后

$$A' = \frac{c_c - c_s}{p(1-\eta/\eta_c)\exp(\eta/\eta_c)} \quad (2-157)$$

该模型具有下列线性剪缩率

$$\frac{\Delta\epsilon_v^p}{\Delta\epsilon_s^p} = \frac{\partial f}{\partial\sigma_m} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial\sigma_s} = \eta_c - \eta$$

即初期剪缩率为 η_c ，破坏时逐渐降低到 0。

椭圆屈服面^[61] Roscoe 和 Burland 后来建议的所谓修正剑桥模型采用下列椭圆形屈服函数 (图 2-37 中曲线 b)

$$f = \sigma_m(1 + \eta^2/\eta_c^2) \quad (2-158)$$

相应地 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_m} = 1 - \eta^2/\eta_c^2$; $\frac{\partial f}{\partial\sigma_s} = 2\eta/\eta_c^2$ 。

而剪胀率为 $\frac{\Delta\epsilon_v^p}{\Delta\epsilon_s^p} = \frac{\eta_c^2 - \eta^2}{2\eta}$

即 $\eta=0$ 时, $\Delta\epsilon_s^p=0$, 初期只有体积应变。

采用等值面理论时, 此模型的塑性系数可以写为

$$A' = \frac{c_c - c_s}{p(1 - \eta^2/\eta_c^2)} \quad (2-159a)$$

改用对偶应力理论时上式将为

$$A' = \frac{c_c - c_s}{p(1 - \eta/\eta_c)} \quad (2-159b)$$

而当应用等价应力理论时

$$A' = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_{wr}}\right) \bigg/ \left(\frac{3\eta_c^2}{\eta_c^2 - \eta^2 + 6\eta}\right)^2 \quad (2-159c)$$

E_t 和 E_{wr} 可以借用邓肯模型的式 (2-83) 和式 (2-84) 计算, 但为了使 $\eta=0$ 时的等向压缩曲线符合公式 (2-155), 有关参数必须用下列公式换算^[52]

$$K_{wr} = \frac{3(1-2\nu)}{c_s}, K_E = \frac{9}{c_s + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}c_s} \quad (2-160)$$

且式 (2-82) 中的 $n=1$ 。令 $c_c=0.06$, $c_s=0.01$, $\nu=0.35$, 按上式算出 $K_{wr}=90$, $K_E=60$, 并且取 $R_f=0.8$, $\varphi=28^\circ$, 即 $\eta_f=6\sin\varphi/(3-\sin\varphi)=1.113$, 则三种硬化理论计算所得的三轴压缩曲线将如图 2-38 所示 ($\sigma_3=100\text{kPa}$)。用同一组参数计算所得的弹头形和椭圆形屈服函数的比较则示于图 2-39 中。

一般椭圆屈服面^[66] 当椭圆与 σ_m 轴的左交点不通过坐标原点时, 其一般的表达式应写为

$$f = \left(\frac{\sigma_m - \alpha p}{1 - \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_s}{\alpha\eta_c}\right)^2 = p^2 \quad (2-161a)$$

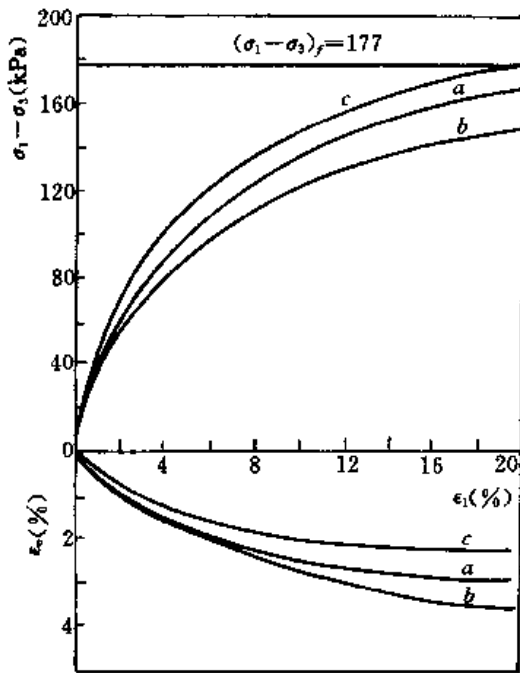


图 2-38 三种硬化理论比较
a—等值面；b—对偶应力；c—等价应力

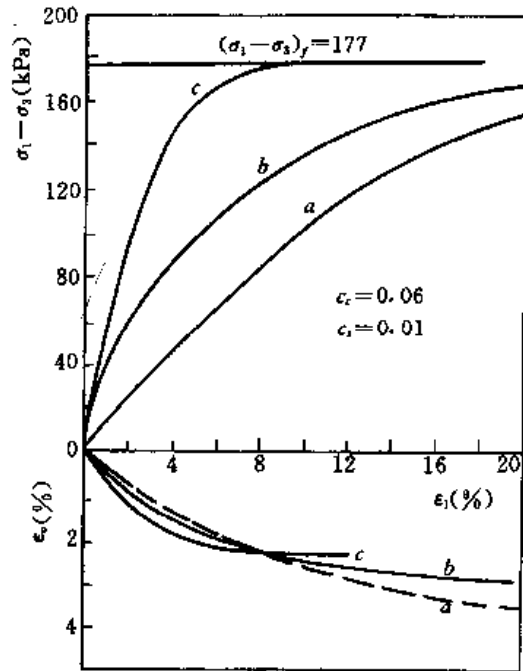


图 2-39 三种屈服面的比较
a—弹头形；b—椭圆形；c—水滴形

当 $\alpha = \text{const}$ 时，可解出 p 如下

$$p = \sigma_m \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - (2\alpha + 1) \left[1 + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\eta}{\eta_c} \right)^2 \right]}}{2\alpha - 1} \quad (2-161b)$$

$p_r = \alpha p$ 为椭圆的中心坐标，且 $\alpha = \frac{1}{2} (1 - p_r/p)$ ，故 $\alpha = \text{const}$ 时截距 p_r 将是变量（图 2-40）。 $p_r > 0$ 和 $p_r < 0$ 两种情况的椭圆分别如图中实线和虚线所示。 $p_r = 0$ 或 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时上式退化为式 (2-158)。此函数相应的剪缩率为

$$\frac{\Delta \epsilon_s^p}{\Delta \epsilon_s^e} = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \frac{\sigma_m - \alpha p}{\sigma_s} \eta_c^2 \quad (2-162)$$

可见 α 愈大，剪缩愈多。

一般椭圆屈服面也可以用于砂性土。为了模拟砂土破坏时的剪胀特性，必须把 η_c 重新定义为

$$\eta_c = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi} \quad (2-163)$$

η_s 仍为 $6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi)$ 。 $\psi < \varphi$ ，可以称为临胀角。当 $\eta \leq \eta_c$ 时， $\sigma_m > \alpha p$ ； $\eta = \eta_c$ 时， $\sigma_m = \alpha p$ ； $\eta > \eta_c$ 时， $\sigma_m < \alpha p$ ，故这一模型可以模拟从剪缩到剪胀的全过程^[62]。

水滴形屈服面 沈珠江曾建议过下列屈服函数^[18]，其形状呈水滴形，或如反置的

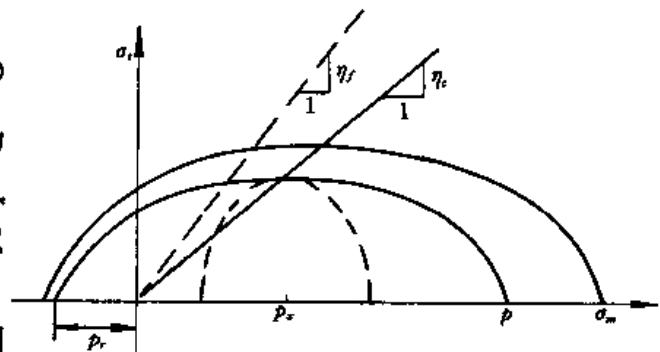


图 2-40 一般椭圆屈服面

弹头形 (图 2-37 中曲线 c)

$$f = \sigma_m \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_c} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2-164)$$

相应的剪缩率为

$$\frac{\Delta \epsilon_v^p}{\Delta \epsilon_s^p} = 2 \frac{1 - (\eta/\eta_c)^2}{\eta/\eta_c^2} \quad (2-165)$$

此模型的表现与式 (2-161) 中 $\alpha > \frac{1}{2}$ 的情况相似, 用此模型计算的三轴压缩试验曲线亦示于图 2-39 中。可见弹头形屈服面呈现较软的趋势, 水滴形屈服面则显得较硬, 椭圆形屈服面介于中间, 但三种屈服面计算的最终破坏应力均等于理论值 177kPa ($\sigma_3 = 100\text{kPa}$)。

高级帽盖模型 前面的帽盖模型都假定破坏包线为直线。Baladi^[57,63]等发展了所谓的高级帽盖模型 (Advanced cap model), 其与众不同之处有两点: 一是采用式 (2-148) 所示的指数型破坏包线; 二是假定弹性模量随应力状态 (σ_m, σ_s) 和塑性体应变 ϵ_v^p 而变, 即

$$\left. \begin{aligned} K &= K_E \frac{1 + \delta \exp(-K_1 \sigma_m)}{1 + \beta \exp(-K_1 \sigma_m)} + \frac{2 \left(K_i - K_E \frac{1 + \delta}{1 + \beta} \right) \exp(K_2 \epsilon_v^p)}{1 + \exp(2K_2 \epsilon_v^p)} \\ G &= G_E \frac{\exp(G_1 \sigma_s) + \gamma \exp(-G_2 \sigma_s)}{1 + \eta \exp(-G_2 \sigma_s)} + \frac{2 \left(G_i - G_E \frac{1 + \gamma}{1 + \eta} \right) \exp(G_3 \epsilon_s^p)}{1 + \exp(2G_3 \epsilon_s^p)} \end{aligned} \right\} \quad (2-166)$$

式中: $K_E, K_i, K_1, K_2, \beta, \delta$ 和 $G_E, G_i, G_1, G_2, G_3, \gamma, \eta$ 为常数。而帽盖则仍用式 (2-161) 所示的椭圆屈服面, 并用 $\alpha > \frac{1}{2}$ 。但由于强度包线是曲线, η_c 将是变量, 可由 $\eta_c = \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_m} \right)_c$ 和 $\sigma_m = \alpha p$ 的条件由式 (2-148) 解出

$$\eta_c = \frac{\sigma_{ult}}{\alpha p} - \left(\frac{\sigma_{ult} - d}{\alpha p} \right) \exp \left(- \frac{\alpha p \ln \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_{ult} - d}}{\sigma_s} \right)$$

此外, 此模型仍假定帽盖屈服面为塑性体应变等值面, 并具有下列关系

$$\begin{aligned} \epsilon_v^p &= w [1 - \exp(-Dp) - \xi Dp(1 - D_1 p - D_2 p^2)] \\ &\quad + w_1 p^2 \exp(-D_3 p) \end{aligned} \quad (2-167)$$

式中: w, w_1, D, D_1, D_2, D_3 和 ξ 为另一组常数。此模型共有 29 个常数, 实际应用显然

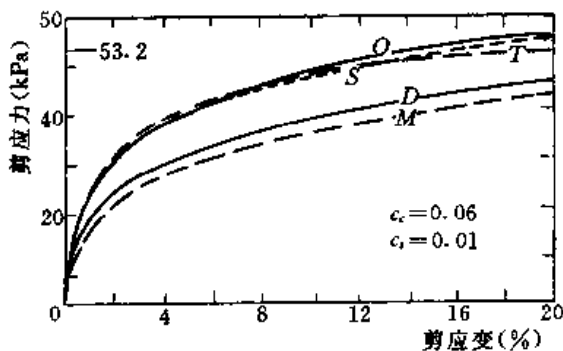


图 2-41 单剪试验曲线
M—Mohr-Coulomb; D—双剪;
T—三剪; S—史述照; O—Mises

不便。

初期的帽盖模型均假定 π 平面上的屈服轨迹为 Mises 圆, 或者说假定了 Prandtl-Reuss 流动法则。要改变这种情况并不难, 只要像前面理想弹塑性模型中讨论过一样, 把式 (2-149) 及以后各式中的 σ_s 换成 $\sigma_s/g(\rho)$ 或 η 换成 η' 即可, $g(\rho)$ 和 η' 的公式可用式 (2-136) 到式 (2-144) 中的任一个。图 2-41 中列出了应用椭圆形屈服面, 即式 (2-158) 和式 (2-159) 及同一组常数 ($c_c = 0.06, c_s = 0.01, \nu = 0.35, \varphi = 28^\circ$), 但 $g(\rho)$ 函

数不一样时计算所得的单剪试验曲线的比较^[52]，该组曲线由低到高的排列次序与表 2-1 中 $\rho=0$ 时， $g(\rho)$ 值的排列次序基本一致。

四、封闭屈服面模型

前面讨论的模型由破坏包线加帽盖屈服面组成。由于这类模型多数采用塑性体应变作为硬化参数，故原则上只适用于塑性体应变增大的应力路线，即从等向压缩到三轴不排水剪切，如图 2-42 中应力路线 1~5。或者说，帽盖模型只适用于正常固结土。对图中 6 和 7 两种应力路线，帽盖就失去作用，结果将仍回到理想弹塑性模型上。为了同时适应正常固结和超固结土，就要考虑采用封闭型屈服面。它可以由两段曲线组成，交点可以不连续，也可以光滑连接，还可以用统一的完整曲线表达，下面介绍其中的几个。

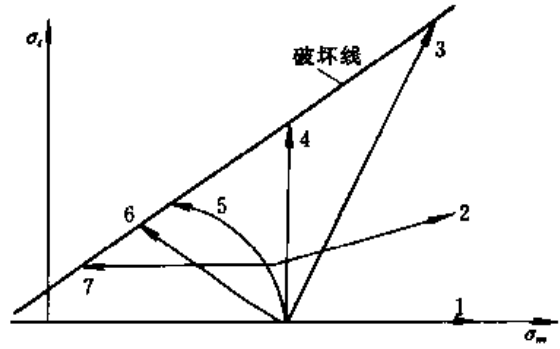


图 2-42 各种应力路线

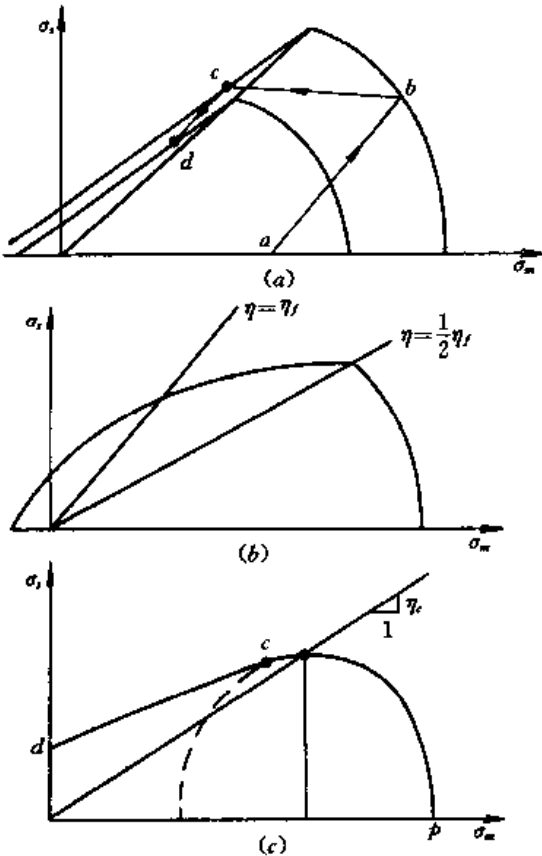


图 2-43 两段屈服面

两段屈服面 这类屈服面曾由许多人建议过。例如 Atkinson 等建议的所谓 Roscoe-Hovrslev 模型^[64]，由椭圆和直线相连（图 2-43a）。邢义川则针对黄土，建议把直线改成式 (2-146) 所示的双曲线^[55]。Nova 提出的建议是把直线段改成反置的弹头形曲线，并把椭圆与该曲线的连接点放在 $\eta = \eta_f/2$ 线上^[65]（图 2-43b）。这类模型往往仍用塑性体应变作为硬化参数。如果试样先进行常规三轴压缩试验，然后保持 $\sigma_1 = \text{const}$ ，令 σ_m 不断降低，则得到（图 2-43a）中所示的 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ 应力路线， ab 段为硬化阶段， ϵ_v^p 增大， bc 段为弹性阶段， cd 段为软化阶段，即 ϵ_v^p 随着剪胀而变小。

马正明进一步用光滑连接的办法设定直线段，如图 2-43 (c) 所示^[66]。如果假定直线段的倾角 α_1 和椭圆纵横轴之比 R 为常量，则为了保证 c 点的光滑，该屈服面在 σ_m 轴上的截距 p 和 σ_1 轴上的截距 d 之间须满足下列关系

$$d = \left(\frac{\eta_c}{R} \sqrt{R^2 + \alpha_1^2} - \alpha_1 \right) \frac{R}{R + \eta_c} p$$

另外，他还假设了下列硬化规律

$$\Delta p = d_0 \left[(1 + r e^{-\delta \epsilon_v^p}) - \eta/\eta_c \right] \Delta \epsilon_v^p + \frac{p_0}{c_c - c_s} \exp\left(\frac{\epsilon_v^p}{c_c - c_s} \right) \Delta \epsilon_v^p \quad (2-168)$$

式中： d_0 和 r 、 δ 为另外 3 个常数。采用 ϵ_v^p 和 ϵ_s^p 共同作为硬化参数的优点是，弹性阶段结

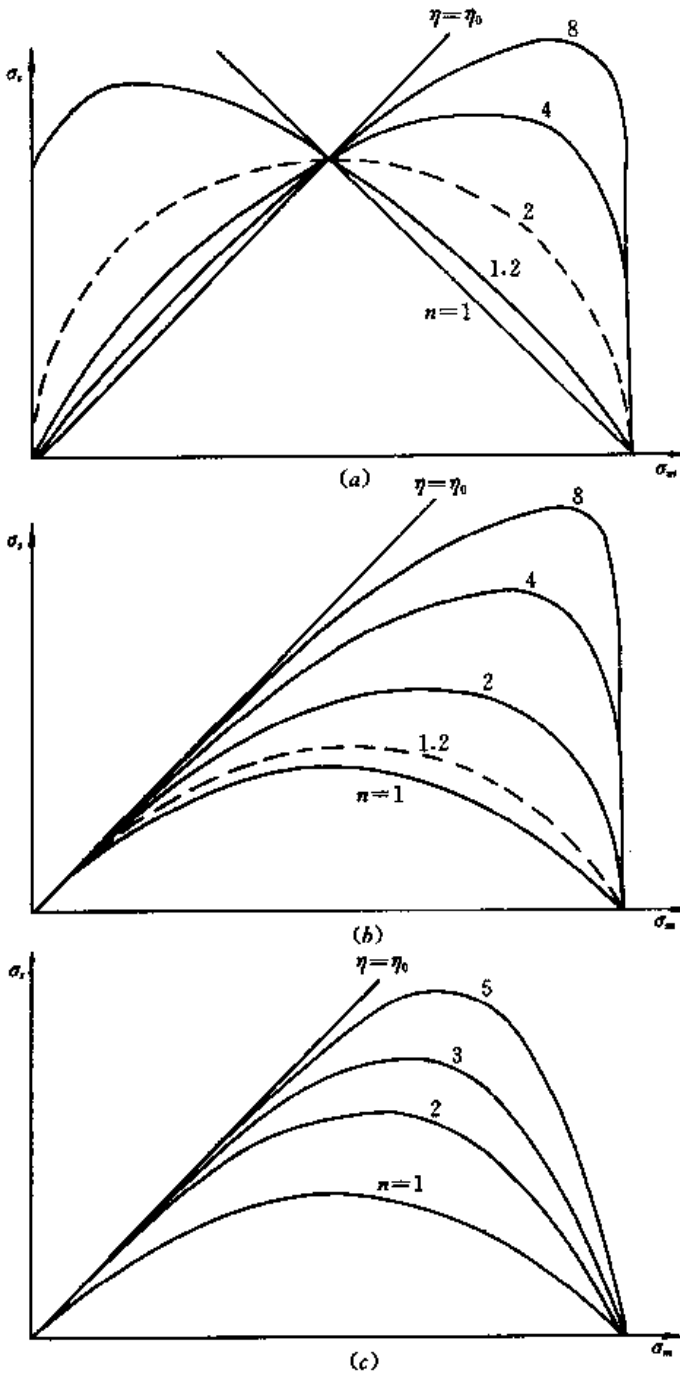


图 2-44 几种统一屈服面

束时将不直接进入软化阶段，而在膨胀引起的 ϵ_s^e 变小以前先有一个 ϵ_s^e 增加而引起的硬化阶段，然后由于 ϵ_s^e 的减小而膨胀软化。

统一屈服面 原则上前面所述的帽盖屈服面都可以作为统一屈服面，但像椭圆和弹头形屈服面，左侧凸出太多，离开破坏包线的实际形状太远，显然是不合适的。因此，统一屈服面应当类似反置的弹头形曲线那样，左边是小头，右边是大头。这类屈服面可以分为两大类，一类是蛋形，两头都是圆的，另一类呈水滴形，一头尖一头圆。它们的统一表达式仍可以写成式 (2-149)，并随着 $f_0(\eta)$ 的不同可以分成几族：

$$A \text{ 族 } f_0(\eta) = 1 + \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n$$

$$\eta_0 = \sqrt[n]{n-1}\eta_c \quad (2-169)$$

属蛋形曲线。随着 n 的不同，其形状如图 2-44 (a) 所示， $n=2$ 即为椭圆形， $n \rightarrow \infty$ 变为三角形。比较合适的值可选用 3 或 4。

$$B \text{ 族 } f_0(\eta) = \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n\right]^{-1}$$

$$\eta_0 = \sqrt[n]{n+1}\eta_c \quad (2-170)$$

呈水滴形，如图 2-44 (b)， $n \rightarrow \infty$ 也变为三角形。合适的 n 值应在 1.2~2 之间。

$$C \text{ 族 } f_0(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\eta_0 = \frac{n+1}{n}\eta_c \quad (2-171)$$

也呈水滴形，如图 2-44 (c)， $n=1$ 时 C 族与 B 族重合，合适的 n 值应在 1.5~3 之间。Desai 建议的屈服函数 $\sigma_s = \gamma\sigma_m - \alpha\sigma_n^{n+1}$ 可以化作上式^[67]。李伯侨的建议与此类似^[69]。

$$D \text{ 族 } f_0(\eta) = \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{n}} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{n+2}{n}}\eta_c \quad (2-172)$$

$n=2$ 的曲线已见式 (2-164)。

$$E \text{ 族 } p^2 = \left(\frac{\sigma_m - \alpha p}{1 - \alpha}\right)^2 + \left[\frac{p^2(1 - \alpha)(1 - \beta^2)}{(1 - \alpha)p + \beta(\sigma_m - \alpha p)}\right]^2 \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 \quad (2-173)$$

此式由任放等人建议^[68]。 α 的含义同式 (2-161)， β 相当于前面式中的 n ， $\beta=0$ 相当于 $n=2$ ， $\beta>0$ 相当于 $n>2$ 。此族曲线呈蛋形，与 A 族曲线大体类似。

在讨论封闭屈服面模型时，还必须涉及两个问题。

双硬化模型 前面已提到，如果封闭屈服面也像帽盖模型一样只用一个硬化参数，那么超固结土在应变软化以前将只有弹性应变，其应力应变曲线将如图 2-45 中实线。为了得到图 2-45 中虚线所示的更符合实际的应力应变曲线，只有采用双硬化参数。式 (2-168) 是解决问题的一个方案，但该式实际上仍采用单硬化参数 $h(\epsilon_s^p, \epsilon_s^e)$ ，只是 h 中包含了两个成分 ϵ_s^e 和 ϵ_s^p ，并且没有写出 h 的显式来，因为按照该模型，屈服面的位置和形状只用一个参数 p 就完全确定了。真正意义上的双硬化模型可以通过改造式 (2-169) ~ 式 (2-172) 等统一屈服面函数而得到，即令一个硬化参数为 $p(\epsilon_s^e)$ ，另一个参数为 $\eta_0(\epsilon_s^p)$ 。例如，当 $f_0(\eta)$

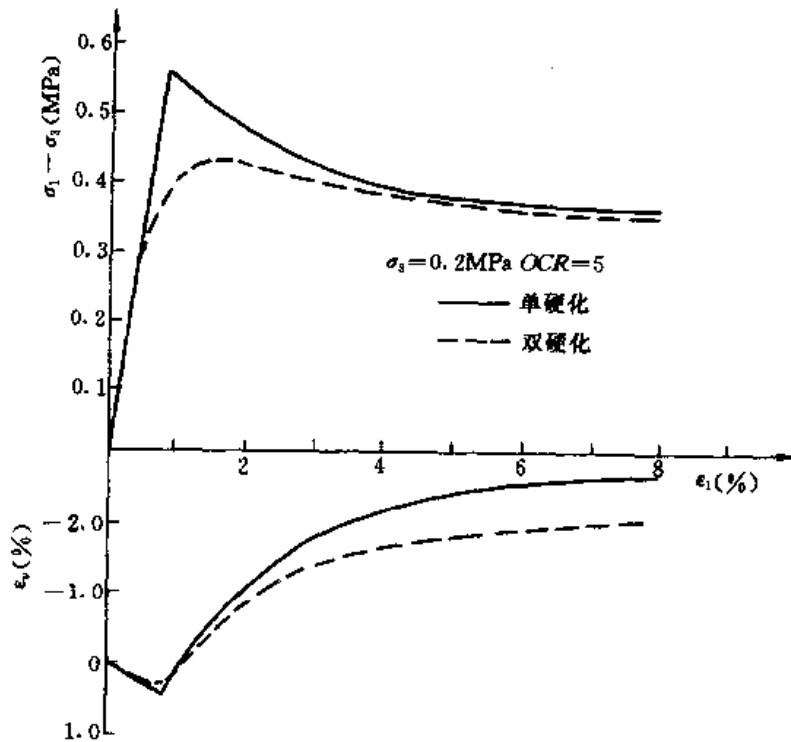


图 2-45 超固结土应力应变曲线

采用 B 族曲线时，式 (2-149) 可以写为

$$p(\epsilon_s^e) = \frac{\sigma_m}{1 - [\eta/\eta_0(\epsilon_s^p)]^n} \quad (2-174)$$

或

$$\eta_0(\epsilon_s^p) = \frac{\eta}{\left[1 - \frac{\sigma_m}{p(\epsilon_s^e)}\right]^{1/n}} \quad (2-175)$$

当 $n=1.2$ 时， $p=\text{const}$ 和 $\eta_0=\text{const}$ 的曲线族分别如图 2-46 中 a 和 b 所示。

把上式写成 $F(\sigma, p, \eta_0) = 0$ ，则应用推导式 (2-27) 相同的方法可以得出塑性系数如下：

$$A' = - \left[\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \epsilon_s^e} \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial F}{\partial \eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial \epsilon_s^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_s} \right]^{-1} \quad (2-176)$$

相应的塑性应变增量公式为

$$\{\Delta \epsilon^p\} = A' \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} \quad (2-177)$$

如果 $p(\epsilon^p)$ 仍如式 (2-156), 而 $\eta_0(\epsilon^p)$ 函数取为

$$\eta_0 = \eta_m [1 - c_1 \exp(-\epsilon^p/c_2)] \quad (2-178)$$

并假定 $n=1.2, c_2=0.06, c_1=0.01, c_1=0.4, c_2=0.05$, 且 $\varphi=28^\circ$, 即 $\eta_c=1.113, \eta_m = \sqrt[3]{1+n} \times \eta_c = 2.147$, 则对 1MPa 下固结后退到 $\sigma_3=0.2$ MPa 后剪切的三轴试样, 分别用 $\eta_0=\eta_m$ 的单硬化模型及 η_0 是变量的双硬化模型的计算结果分别如图 2-45 中实线和虚线所示。用双

硬化模型时, 势函数 g 等于单硬化时的屈服函数, 即

$$g = \frac{\sigma_m}{1 - (\eta/\eta_m)^n} \quad (2-179)$$

非正交流动法则 对于超固结土, 用正交流动法则计算的剪胀量太大。为此, 许多模型都对软化段或对整个阶段采用了非正交流动法则或所谓的非关联流动法则, 即塑性势 g 不等于屈服函数 f , 如图 2-47。绝大多数非正交模型都假定 g 与 f 属于同一类型, 例如都是椭圆^[66]或式 (2-171) 所示的曲线^[67,69], 只是其中的参数不同而已, 也就是说, 两种曲线只是位置和大小不同。前面的式 (2-179) 实际上也采用同一手法, 因为当 $\eta_0 \neq \eta_m$ 时, $f \neq g$ 。此时, 各应力点上 g 与 f 将相交, 且 g 曲线的法向矢量 n_g 与剪

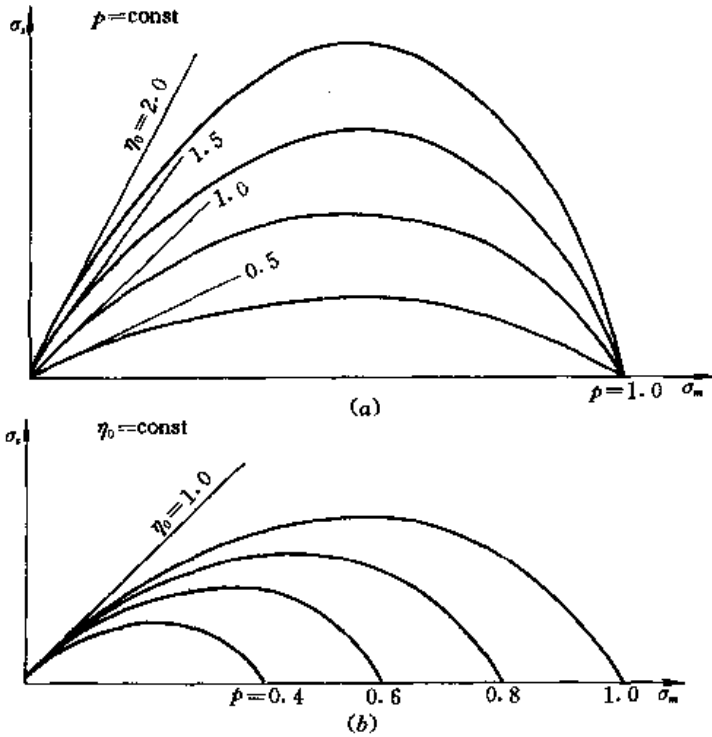


图 2-46 双硬化屈服面

应力轴的倾角将比 f 曲线的相应值 n_f 明显减少, 故按流动法则计算的剪胀比 $\Delta \epsilon_v^p / \Delta \epsilon_s^p$ 也将明显减少。

非正交流动法则的采用大大增加了模型的复杂性, 并且给数值计算带来了困难, 是否是一个研究方向, 尚是一个争议的问题, 将不予重点介绍。

五、多重屈服面模型

前面的双硬化模型已经提示, 是否可以把单屈服面改成双重屈服面, 并且给每一个屈服面指定一个硬化参数, 这样就引出了双重屈服面模型, 并且在此基础上进一步引伸出多重屈服面模型。

多重屈服面理论认为, 通过应力空间一点有多个屈服面通过。随着应力增量方向的不同,

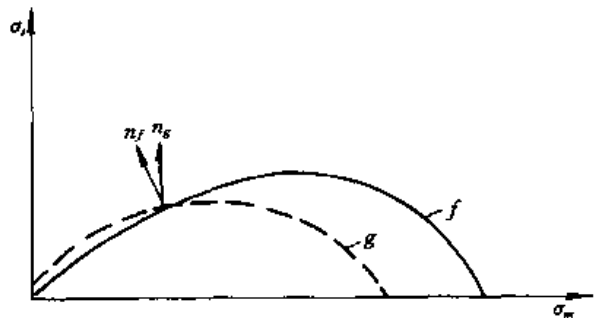


图 2-47 非正交流动法则

加荷可以引起一个、两个……或全部屈服面的屈服。多重屈服面把应力空间划分成若干区，如图 2-12 所示，可以反映土体塑性变形的两个基本特点：①不等向硬化特性，即在应力路线前进方向硬化得多一些，其它方向不硬化或硬化得少一些；②塑性应变方向对应力增量方向的依存性。此外，当应力路线从弹性区穿过部分塑性区时，塑性应变将是逐步增加的，不像单屈服面理论那样有一个截然的界线。

多重屈服面的塑性系数最好通过几种应力路线的试验确定，每种试验只引起一个屈服面的屈服。如果试验中测定了某个总应变分量 $\Delta \epsilon_k$ 和弹性应变分量 $\Delta \epsilon_k^e$ ，则由式 (2-116) 可得第 k 个屈服面的塑性系数如下

$$A_k = \frac{\Delta \epsilon_k - \Delta \epsilon_k^e}{n_k \Delta f_k} \quad (2-180)$$

双屈服面模型 双屈服面的设想最初也是 Roscoe 建议的，他在提出弹头形屈服面的同时还补充了一个水平的剪切屈服面。以后 Prevost、Vermeer 和 Ohmaki 等都提出了各自的双屈服面模型。其中流行较广的是下列 Lade 建议的双屈服面^[56]

$$f_1 = I_1^2 + 2I_2 \quad (2-181)$$

$$f_2 = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left(\frac{I_1}{p_2} \right)^m$$

式中： I_1 、 I_2 和 I_3 分别是第一、第二和第三应力不变量； f_1 和 f_2 分别称压缩和剪切屈服面，各自是压缩和剪切塑性功的等值面。此外还对压缩屈服面假定了正交流动法则，对剪切屈服面采用了非正交的势函数，如图 2-48 所示。

国内沈珠江最早建议了下列双屈服面^[47]

$$f_1 = c_c \ln \frac{\sigma_m(1 + d\eta^n)}{\sigma_{m0}} - c_s \ln \frac{\sigma_s}{\sigma_{m0}} = \epsilon_s^p \quad (2-182a)$$

$$f_2 = \frac{a\eta}{1 - b\eta} \ln \frac{\sigma_m(1 + d\eta^n)}{\sigma_{m0}} - \frac{\sigma_s}{2G} = \epsilon_s^p \quad (2-182b)$$

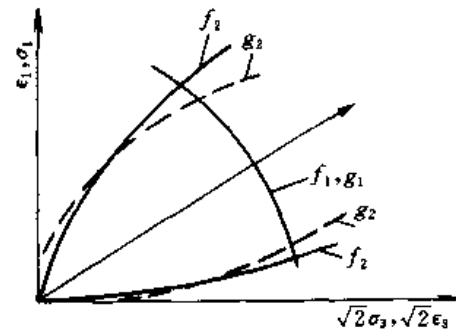


图 2-48 Lade 双屈服面

并假定 f_1 是塑性体应变等值面， f_2 是塑性剪应变得等值

面，因此它们的增量可以由下式计算

$$\Delta \epsilon_v^p = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_m} \Delta \sigma_m + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_s} \Delta \sigma_s \quad (2-183a)$$

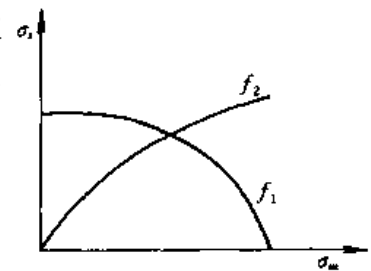
$$\Delta \epsilon_s^p = \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_m} \Delta \sigma_m + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_s} \Delta \sigma_s \quad (2-183b)$$

上述式中： c_c 、 c_s 、 a 、 b 、 d 和 n 为 6 个参数； G 为弹性剪切模量。

以上模型都假定屈服面为塑性应变等值面。沈珠江后来放弃这一假设，把屈服面只看作弹性区的界面，塑性系数则通过三轴试验中的等价应力确定^[53]。建议的双屈服面为 (图 2-49)

$$f_1 = \sigma_m^2 + r^2 \sigma_s^2 \quad (2-184a)$$

$$f_2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_m} \quad (2-184b)$$



r 和 s 为两个可以根据土性特点调整的参数。在三轴试验条件 图 2-49 沈珠江双屈服面

下, $\Delta\sigma_m = \frac{1}{3}\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_s = \Delta\sigma_1$, 由此可得

$$\Delta f_1 = 2\left(\frac{\sigma_m}{3} + r^2\sigma_s\right)\Delta\sigma_1$$

$$\Delta f_2 = \frac{\sigma_s}{\sigma_m}\left(\frac{s}{\sigma_s} - \frac{1}{3\sigma_m}\right)\Delta\sigma_1$$

采用正交流动法则, 按式 (2-119) 算出 $\{n_1\}$ 和 $\{n_2\}$, 与 Δf_1 和 Δf_2 一起代入式 (2-116), 并计及 $\Delta\epsilon_v = \Delta\epsilon_1 + 2\Delta\epsilon_3$ 后可得

$$\frac{\Delta\epsilon_1}{\Delta\sigma_1} = \frac{1}{E} + \frac{1}{9}(1 + 3r^2\eta)^2 A_1 + \frac{1}{9\eta}(3s - \eta)^2 A_2 \quad (2-185a)$$

$$\frac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\sigma_1} = \frac{1 - 2\nu}{E} + \frac{1}{3}(1 + 3r^2\eta) A_1 + \frac{1}{3\eta}(3s - \eta) A_2 \quad (2-185b)$$

其中 $\eta = \sigma_s/\sigma_m$ 。当通过三轴试验测定切线杨氏模量 $E_t = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\epsilon_1}$ 和切线体积比 $\mu_t = \frac{\Delta\epsilon_v}{\Delta\epsilon_1}$ 后, 由上式可解出下列塑性系数的表达式

$$A_1 = \frac{\eta\left(\frac{9}{E_t} - \frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{3}{G}\right) + 2s\left(\frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{1}{K}\right)}{2(1 + 3r^2\eta)(s + r^2\eta^2)} \quad (2-186a)$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{9}{E_t} - \frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{3}{G}\right) - 2r^2\eta\left(\frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{1}{K}\right)}{2(3s - \eta)(s + r^2\eta^2)} \quad (2-186b)$$

殷宗泽则建议了下列双屈服面^[71]

$$f_1 = \sigma_m + \frac{\sigma_s^2}{M_1^2(\sigma_m + p_r)} = \frac{h\epsilon_v^p}{1 - t\epsilon_s^p} \quad (2-187a)$$

$$f_2 = \frac{a\sigma_s}{G} \left[\frac{\sigma_s}{M_2(\sigma_m + p_r)} - \sigma_s \right]^{1/2} = \epsilon_s^p \quad (2-187b)$$

式中: M_1, M_2, h, t 和 a 为参数; f_1 和 f_2 分别为椭圆和抛物线, 且分别为塑性体应变和塑性剪应变等值面。

三屈服面模型 沈珠江曾建议下列三重屈服面模型^[70]

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sigma_m \\ f_2 &= \sigma_s \\ f_3 &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (2-188)$$

三个屈服面把应力空间分割成 6 个区 (图 2-50)。当采用正交流动法则时, 相应的塑性体应变和剪应变分别为

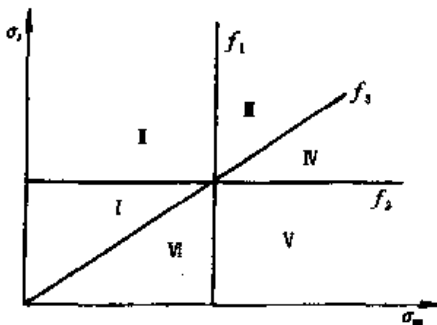


图 2-50 三重屈服面

$$\Delta\epsilon_v^p = A_1\Delta\sigma_m + A_3 \frac{\partial\eta}{\partial\sigma_m}\Delta\eta \quad (2-189a)$$

$$\Delta\epsilon_s^p = A_2\Delta\sigma_s + A_3 \frac{\partial\eta}{\partial\sigma_s}\Delta\eta \quad (2-189b)$$

由于 $\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_m} = -\frac{\eta}{\sigma_m}$, η 较大时由式 (2-189a) 算出的剪胀量较

大, 因此该模型令 $A_3 \frac{\partial\eta}{\partial\sigma_m} = C$, $A_3 \frac{\partial\eta}{\partial\sigma_s} = D$, 并从拟合试验

结果直接确定塑性系数 C 和 D 。

郑颖人和严德俊则建议了下列以三个塑性主应变为参数的三重屈服面^[72]

$$f_i = A_i \sigma_1^2 + B_i \sigma_2^2 + C_i \sigma_3^2 + D_i \sigma_1 \sigma_2 + E_i \sigma_2 \sigma_3 + F_i \sigma_3 \sigma_1 + R_i \sigma_1 + S_i \sigma_2 + T_i \sigma_3 + p_i = \epsilon_i^p \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-190)$$

式中的系数 A_i 等可以通过拟合单向压缩、单向拉伸和三向等压试验结果确定。塑性主应变增量 $\Delta \epsilon_i^p$ 可以直接由上式求得，并在应变增量主轴与应力主轴重合的假设下求得各应变分量的增量。

六、多次屈服和边界面模型

前面讨论的弹塑性模型均属等向硬化模型，即屈服面随着塑性应变的增大而扩大，虽然多重屈服面模型在一定程度上可以反映不等向硬化，但无法描述循环荷载下的变形。运动硬化理论是从偏应力空间上圆环型屈服面发展起来的。Iwan 和 Mroz 首先把一个圆环扩展为多个圆环^[73]，如图 2-12 (b)，所得的多次屈服应力应变曲线已见图 2-7。对于循环加载，单环和多环屈服所描述的滞回曲线将如图 2-51 (a) 和 (b) 所示。多环屈服面用于土体时，一般应把运动硬化与等向硬化结合起来，即相应的每一环的屈服面用下式表示

$$F_m = [(s_{ij} - \alpha_{ij}^m)(s_{ij} - \alpha_{ij}^m)]^{1/2} - k^m \sigma_m = 0 \quad (2-191)$$

其中 α_{ij}^m 表示第 m 个圆环的圆心， $k^m \sigma_m$ 表示其半径。 α_{ij}^m 和 k^m 均是塑性应变的函数，前者反映运动硬化，后者反映等向硬化。对于压硬性材料，屈服面当然还应随平均有效应力 σ_m 的增大而扩大。多环屈服面模型曾被 Prevost 等人用于模拟循环荷载下饱和粘土的变形，因为此时不需要考虑体应变^[74]。

在多环屈服面模型中，每一环的屈服引起一次模量的降低，因此得出的应力应变曲线实际上是折线形的。Dafalias 发展的边界面模型把多环改成双环^[76]，外环固定不变，并称之为边界面，内环可以运动，模量则随内环到外环的距离而变，这样就得到了连续变化的模量场 (图 2-12c)，相应的应力应变曲线也将是连续的。当内环与外环接触时，模量等于 0，即达到破坏。边界面模型很容易由偏应力空间推广到全应力空间，从而可以描述土体的剪胀—剪缩特性。

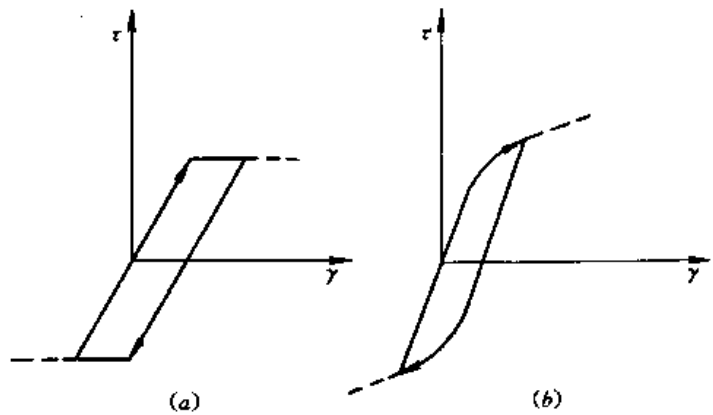


图 2-51 循环荷载下应力应变曲线
(a) 单环屈服面；(b) 多环屈服面

Mroz 等人首先建议了子午面上由两个椭圆组成的边界面模型 (图 2-52)，其边界面和屈服面的方程分别为^[75]

$$F = (\sigma_m - c)^2 + \frac{\sigma_s^2}{M^2} - a^2(\epsilon_s^p) = 0 \quad (2-192a)$$

$$f_0 = (\sigma_m - \alpha_p)^2 + \frac{(\sigma_s - \alpha_q)^2}{M_0^2} - a_0^2(\epsilon_s^p) = 0 \quad (2-192b)$$

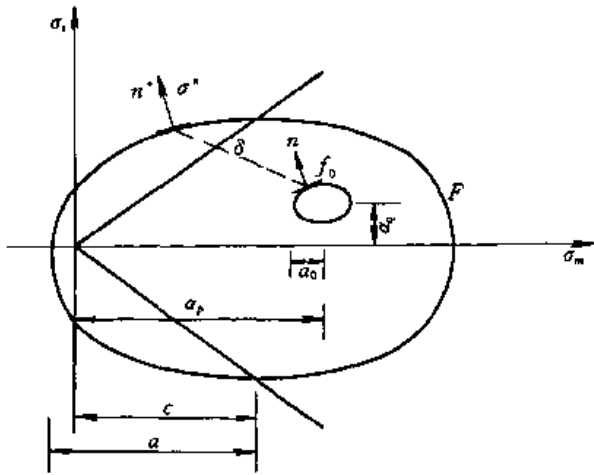


图 2-52 双椭圆模型

这里界面变为随塑性体应变而扩大的等向硬化屈服面，并被称为固结面，内屈服面则是一个运动硬化屈服面， a_p 和 a_q 为其圆心。两者的长轴半径分别为 a 和 a_0 ， M 和 M_0 则为相应的长短轴之比。设 σ 为实际应力， σ^* 为该应力点投影到固结面上的对偶应力， δ 为两点距离，则相应的硬化模量按下式计算

$$H_p = H_b + (H_{p_0} - H_b) \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^2 \quad (2-193)$$

式中： δ_0 为两个椭圆中心重合时的相应距离； H_0 类似于回弹模量； H_p 则相当于单调加荷时的模量，可以由前面的等向硬化理论确定。后

一种情况下随着 F 面的扩大， f 与 F_0 相切而运动。

Dafalias 等建议了一个类似的模型，但考虑到土体对压缩和拉伸反应的不同，把半径不同的两半椭圆合成一个，另外还把内椭圆改为弹性核，并认为后者可以缩小为一点。

Bardet 建议了类似的椭圆界面，但把 M 看成下列随 Lode 角而变的函数^[77]

$$M(\rho) = \frac{2M_c M_e}{M_c + M_e - (M_c - M_e) \sin 3\rho} \quad (2-194)$$

式中： $M_c = \frac{6 \sin \varphi_c}{3 - \sin \varphi_c}$ ， $M_e = \frac{6 \sin \varphi_e}{3 - \sin \varphi_e}$ ； φ_c 和 φ_e 分别是压缩和伸长试验测定的内摩擦角。椭圆的硬化扩大规律同剑桥模型，而内椭圆则假定缩小为一点。如果 σ 为现有应力点，并从原点引直线把它映射到边界面上得 σ^* ，则映射点的法向即为流动方面，塑性模量的公式为（图 2-53）

$$H = H_b + \frac{\sigma_m}{c_c - c_e} \frac{\delta}{\delta_{\max} - \delta} h_0 \left(\frac{M_p}{M_c} - \frac{\sigma_s}{M \sigma_m} \right) \quad (2-195)$$

式中： $M_p = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p}$ ； φ_p 为峰值内摩擦角； h_0 为另一个参数。当 $M > M_c$ 且 H_b 为负值时， H 可为负值，故可反映应变软化现象。

以上所举例子说明，界面模型主要依靠现有应力到边界面上映射点的距离和映射点上的法线方向决定硬化模量和流动方向，因此，选择映射方法成为一个关键。图 2-52 采用了映射点的法线方向与内屈服面法线方向平行的办法。当内屈服面缩为一点时，目前采用的方法有全量映射法、增量映射法和组合映射法。图 2-53 中采用了全量映射法。增量映射法按应力增量延长线与边界面交点确定映射点应力 σ^* 及其法线方向 n_d^* ，如图 2-54。显然，采用了增量映射法以后，所得的弹塑性矩阵不仅与应力总量有关，还与应力增量有关，从而得到式 (2-106) 那样的增量非线性应力应变关系。王志良等则采用了 n_d^* 和

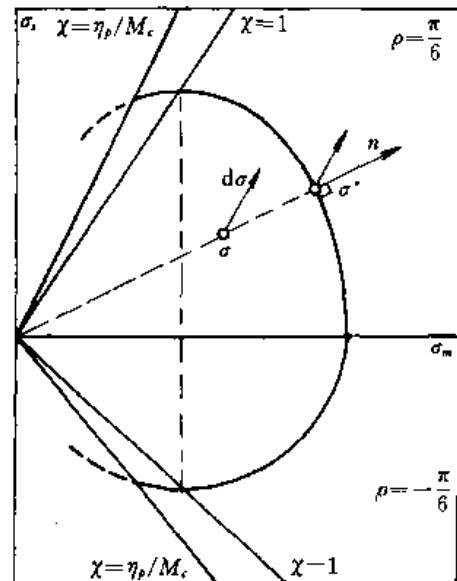


图 2-53 单椭圆界面模型

n_i 两者线性组合的映射法^[78]。显然, 这些映射方法都是人为规定的。如果像陈生水等人建议那样, 直接在应力总量方向 n_i 和增量方向 n_d 之间内插, 即令流动方向 $\{n\} = \omega \{n_i\} + (1-\omega) \{n_d\}$, ω 为权系数, 同样可以建立相应的模型^[79]。

七、无屈服面模型

屈服面的主要功能有两个, 一是用于判别加荷——卸荷, 二是作为硬化参数的等值面用于确定硬化模量。前面介绍了边界面模型的硬化模量场理论, 如果再找到其它办法判别卸荷, 则屈服面就不再需要了。下面正是介绍这样的理论。

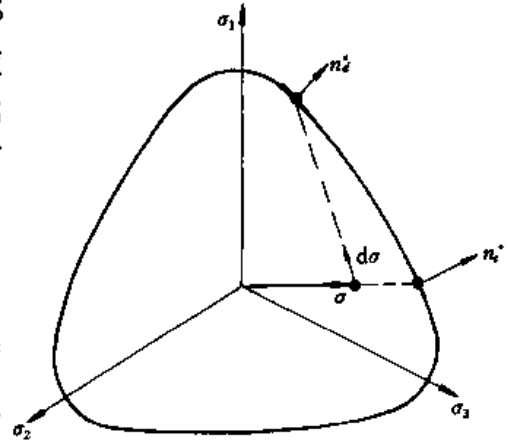


图 2-54 映射规则

内时模型 内时模型模仿粘弹性材料的本构关系, 把偏应力—偏应变和球应力—球应变的关系分别写为

$$s_{ij} = 2 \int_0^{\varepsilon_d} G(z_d - z'_d) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial z'_d} dz'_d; \quad G(z_d) = \sum_{i=1}^m G_i e^{-\lambda_i z_d} \quad (2-196a)$$

$$\sigma_m = \int_0^{\varepsilon_h} K(z_h - z'_h) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z'_h} dz'_h; \quad K(z_h) = \sum_{i=1}^m K_i e^{-\lambda_i z_h} \quad (2-196b)$$

其中

$$z_d = \int [a_{00} (d\varepsilon_i^p)^2 + a_{01} (d\varepsilon_v^p)^2]^{1/2}$$

$$z_h = \int [a_{10} (d\varepsilon_i^p) + a_{11} (d\varepsilon_v^p)^2]^{1/2}$$

被称为内时标度, 而 $\int d\varepsilon_i^p$ 和 $\int d\varepsilon_v^p$ 被称为内时量度。系数 a_{01} 和 a_{10} 的引入在于考虑球张量和偏张量的耦合效应。开始加荷时, $z_d = z_h = 0$, $G(0) = G$, $K(0) = K$, 即表示弹性反应。随 z_d 和 z_h 的增大, $G(z_d)$ 和 $K(z_h)$ 不断降低, 因此, 上式积分得出的偏应力和球应力将像双曲函数一样趋向于一个极限值。内时模型具有以下特点: ①在偏应力空间采用了 Prandtl—Reuss 流动法则, 不再另外规定塑性势; ②在应力路线转折角不小于 90° 时自动得出弹性反应, 而在偏转角为 0 的光滑应力路径下, 应变路径的切线方向与应力路径的切线方向一致, 而当应力路线转角小于 90° 时, 应变路径方向仍与原应力路径方向一致。后一特性使该类模型具有一定的反应复杂荷载的能力。

Bazant 等^[80]最早用内时理论描述砂土液化问题, 但是当时选用的内时量度为总剪应变增量的累加量而不是像前面那样为塑性剪应变增量的累加量, 在循环加荷情况下不能很好反映剪应力与剪应变之间的滞回特性, 而且引入一个体积收缩参数后只能反映剪缩, 无法同时描述剪胀和剪缩。王建国^[81]从微观滑移机制出发建立了一个剪胀方程, 还对偏应力和偏应变之间的关系作了一定改进。吴汉津等^[82]除了反映体积应变和剪切应变的内变量外, 还引入了反映剪胀剪缩的内变量, 从而能较好地模拟各种真三轴应力路线和圆周形应力路线。

这类模型表达式比较复杂，也不能反映土的所有重要特性，难有实用价值，但模型研究中发展起来的内变量的概念，无疑在本构模型理论中有过积极的影响。

次塑性模型 如前所述，以式 (2-106) 为代表的增量非线性模型最先由法国人 Darve 所建议。Dafalias 把这类模型称为次塑性 (Hypoplastic) 模型。后来，以 Kolymbas 为代表的德国学者发展了另一种类似于应变空间定义的次塑性模型，即把增量型应力应变关系写为

$$\{\Delta\sigma\} = [L]\{\Delta\epsilon\} - \{N\} \|\Delta\epsilon\| \quad (2-197)$$

右边第一项为增量线性部分，第二部分代表非线性部分， $\|\Delta\epsilon\| = [\{\Delta\epsilon\}^T \{\Delta\epsilon\}]^{1/2}$ 为应变增量的模。如图 2-34 所示，通常的弹塑性理论可以看作把应力空间中单位应力增量形成的圆变换成应变空间的增量椭圆，则上式的作用可以想象为把应变空间的单位圆变换成应力空间的椭圆。这一变换过程可以理解为分两步完成，第一步乘 $[L]$ 后变成椭圆，第二步圆心沿 $\{N\}$ 方向移动一段距离，如图 2-55 所示。上式可以改写为

$$\{\Delta\sigma\} = ([L] - \{N\}\{v\}^T)\{\Delta\epsilon\} \quad (2-198)$$

其中 $\{v\} = \{\Delta\epsilon\} / \|\Delta\epsilon\|$ 。此式与 (2-106) 类似，只不过那里用柔度矩阵，这里把刚度矩阵定义为

$$[D(\{v\})] = [L] - \{N\}\{v\}^T \quad (2-199)$$

由此可见，与传统弹塑性理论先假定屈服面和塑性势，然后推算刚度矩阵不同，这类模型采用了直接假定 $[L]$ 和 $\{N\}$ 的办法得出刚度矩阵。不言而喻，刚度矩阵中自然隐含着流动方向和加一卸荷规则。例如对于破坏时刚度等于 0，由上式可得流动方向

$$\{v\} = [L]^{-1}\{N\} \quad (2-200)$$

对于单轴加荷情况， $\Delta\epsilon > 0$ 时 $v = 1$ ， $\Delta\epsilon < 0$ 时 $v = -1$ ，由式 (2-198) 可得

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon > 0 & \quad \Delta\sigma = (L - N)\Delta\epsilon \\ \Delta\epsilon < 0 & \quad \Delta\sigma = (L + N)\Delta\epsilon \end{aligned} \quad (2-201)$$

这一结果也与式 (2-114) 类似。由此可见， $L + N$ 相当于弹性模量， $2N$ 相当于塑性模量，而 $\|\Delta\epsilon\|$ 则起到开关函数的作用。

吴伟和 Bauer 提出一个具体模型如下^[84]

$$\{\Delta\sigma\} = c_1 \sigma_m \{\Delta\epsilon\} + c_2 \frac{W}{\sigma_m} \{\sigma\} + \left(c_3 \frac{\{\sigma^2\}}{\sigma_m} + c_4 \frac{\{S^2\}}{\sigma_m} \right) \|\Delta\epsilon\| \quad (2-202)$$

图 2-55 应变增量的变换

式中： $W = \{\sigma\}^T \{\Delta\epsilon\}$ ； c_1, c_2, c_3 和 c_4 为 4 个无因次参数。把上式用于三轴试验，如果 E_i 为初始模量， $R_f = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_f$ 为破坏时的应力比， ν_i 和 ν_f 分别为初始和破坏时的泊松比，则针对初始状态和破坏状态可以建立 4 个方程式，并解出 4 个参数如下

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{E_i}{3\sigma_3(1+v_i)} \\ c_2 &= \frac{9d_f v_i (R_f^2 - 4) + d_i (2 + R_f)^2 (1 + 4v_f)}{d_f (1 - 2v_i) (R_f^2 - 4) + d_i (2v_f - R_f) (R_f - 4)} c_1 \\ c_3 &= \frac{9v_i (2v_f - R_f) (R_f - 4) - (1 - 2v_i) (R_f + 2)^2 (1 + 4v_f)}{d_f (1 - 2v_i) (R_f^2 - 4) + d_i (2v_f - R_f) (R_f - 4)} c_1 \\ c_4 &= - \frac{9[(R_f^2 v_f + 1)(R_f + 2)^2 c_1 + (R_f - 1)R_f(2v_f - R_f)c_2]}{d_f (R_f - 1)^2 (R_f^2 - 4)} \end{aligned} \right\} \quad (2-203)$$

其中 $d_i = \sqrt{1 + 2v_i^2}$, $d_f = \sqrt{1 + 2v_f^2}$

上述模型参数是针对一定密实度的砂土得出的，为了能让同一参数适用于不同孔隙比的砂土，Gudehus 和 Bauer 又引入了三个影响参数，把式 (2-198) 改写为^[86,86]

$$\{\Delta\sigma\} = f_b f_c ([L] - f_d \{N\} \{v\}^T) \{\Delta\varepsilon\} \quad (2-204)$$

并建议了如下关系式

$$f_d = \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^a \quad (2-205)$$

$$f_c = \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta \quad (2-206)$$

$$f_b = \frac{1 + e_i}{e_i} \frac{h_s}{3nh_i} \left(\frac{3\sigma_m}{h_i} \right)^{1-n} \quad (2-207)$$

式中： e_i 、 e_c 和 e_d 分别为疏松状态、临界状态和密实状态的孔隙比，它们随围压的变化服从下列指数规律

$$e_i = e_{i0} \exp[-(3\sigma_m/h_i)^n] \quad (2-208)$$

式中： h_s 和 h_i 为反映颗粒刚度的参数； $\beta > 1$ ， $a < 1$ ， $n < 1$ 为三个参数。3 个因子中 f_d 反映应力应变曲线中峰值的高低， f_c 反映密度对整个刚度的影响， f_b 反映围压压密引起的刚度变化。

上述模型用于循环荷载时也出现像早期内时模型那样不能形成滞回圈的缺点，因为该模型也不能区分初始加荷和再加荷。为此，张利民把剪胀因子 f_d 修改为^[87]

$$f_d^* = k \frac{\lambda}{\lambda_{\max}} f_d \quad (2-209)$$

式中： λ 和 λ_{\max} 分别为阻尼比和最大阻尼比； k 为一经验常数。因为 λ 随循环应变幅值的增大而增大，故非线性项也随之增大，而小应变下 $f_d^* \rightarrow 0$ 。修改后的模型表现更接近实际，但下一节将要说明， λ 纯粹是经验参数，这样的修改带有明显的经验性。

广义塑性模型 式 (2-116) 也可以写为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [C] \{\Delta\sigma\} + \sum_{i=1}^l \frac{1}{H_i} \{n_i\} \{n_{fi}\}^T \{\Delta\sigma\} \quad (2-210)$$

其中 $\{n_{fi}\} = \frac{1}{N_{fi}} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}$ ， $N_{fi} = \left[\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\} \right]^{1/2}$ ，而 $H_i = \frac{1}{A_i N_{fi}}$ 为硬化模量。所谓广义塑性模型，就是直接假定 $\{n_i\}$ ， $\{n_{fi}\}$ 和 H_i ，而不是先假定塑性势、屈服面和硬化规律而间接得出它们。在 Zienkiwicz 和 Pastor^[88] 建议的这类模型中，硬化模量仍用传统弹塑性理论—

样的开关函数区分加荷和卸荷，即 $\{\Delta\sigma\}$ 与 $\{n_f\}$ 之间的夹角小于 90° 为加荷，大于 90° 为卸荷。 $\{n_f\}$ 和 $\{n\}$ 则根据试验曲线假设，由它们的积分可间接得出屈服面 f 和塑性势 g 。

根据试验得出的下列剪胀方程

$$d = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = (1 + \alpha)(M - \eta) \quad (2-211)$$

当采用单屈服面和相适应的流动法则时，他们假定了下列 $\{n\}$ 和加荷时的 H 值

$$\{n\} = (\{n_v\}, \{n_s\}) \quad (2-212)$$

其中

$$\{n_v\} = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} \{I\},$$

$$\{n_s\} = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \left\{ \frac{\partial g(\rho)}{\partial \sigma} \right\}$$

分别为 $\{n\}$ 在球应力和偏应力空间的分量，而

$$H = \frac{\sigma_m}{c_c - c_s} \left[\left(1 - \frac{\eta}{M} \right)^\alpha \frac{(1+d_0^2)}{(1+d^2)} \sin \left(1 - \frac{\eta}{M} \right) + \beta \exp(-\beta\xi) \right] \left(\frac{\xi_{\max}}{\xi} \right)^\gamma \quad (2-213)$$

式中： $d_0 = (1+\alpha)M$ ， $\beta = \beta_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\max}} \right)$ ， $\xi = \sigma_m \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right) \frac{\eta}{M} \right]^{-1/\alpha}$ ； ξ_{\max} 为应力转折时的最大 ξ 值； c_c ， c_s ， α ， β_0 ， μ ， γ 为参数； ξ 的含义与内时量度同。

对于砂土，采用不相适应的流动法则，即把 M 区分为 M_f 和 M_g ，此时由 $\{n_f\}$ 和 $\{n\}$ 积分得出的 f 和 g 分别为

$$f = \sigma_s - M_f \sigma_m \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{mc}} \right)^\alpha \right] \quad (2-214)$$

$$g = \sigma_s - M_g \sigma_m \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{mc}} \right)^\alpha \right] \quad (2-215)$$

它们在 $\sigma_m - \sigma_s$ 平面的形状如图 2-56 所示，而相应的硬化模量取为

$$H = \frac{\sigma_m}{c_c - c_s} \left[1 - \frac{\alpha\eta}{M_f(1+\alpha)} \right]^\alpha \times \left[1 - \frac{\eta}{M_g} + \frac{\partial \sigma_{mc}}{\partial \xi} \right] \quad (2-216)$$

σ_{mc} 是随 ϵ_s^p 和 ξ 而增大的参数

$$\frac{\partial \sigma_{mc}}{\partial \epsilon_s^p} = \frac{\sigma_{mc}}{c_c - c_s}$$

$$\frac{\partial \sigma_{mc}}{\partial \xi} = \beta_0 \beta_1 \exp(-\beta_0 \xi)$$

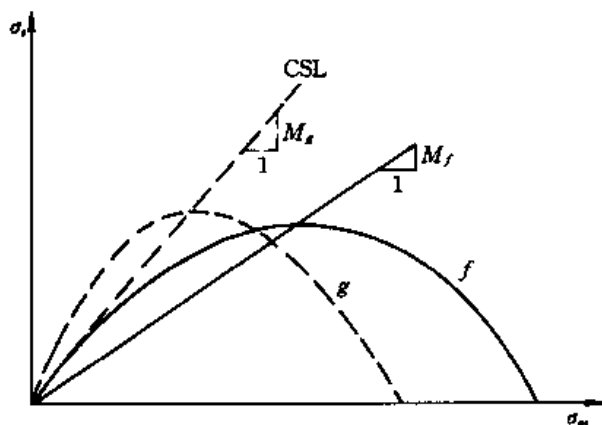


图 2-56 砂土的屈服面与塑性势

第六节 粘弹塑性模型

一、应力—应变—时间关系

考虑粘滞性以后，土的应力应变曲线将与应变速率有关，如图 2-57 (a) 所示。设 f_0 为十分缓慢条件下测定的极限应力（常称长期强度），如果曲线为硬化型，则当 $\sigma > f_0$ 时，蠕

变曲线最后将以一个恒定速度流动，如图 2-57 (b)。试验中常见的加速破坏现象显然与应变软化有关，如图中虚线。如果先快速加荷到 σ 后维持应变 σ 不变，即得图 2-57 (c) 所示的松弛曲线。

按照图 2-2 介绍的线性流变模型，等应力下的蠕变曲线或者是等速蠕变型的直线 (Maxwell 体)，或者是减速蠕变型的指数曲线 (Kelvin 体)，但实际试验曲线远比此复杂。为了更好拟合试验结果，可以有两种不同的途径。第一种是采用非线性理论模型，即令粘滞系数 η 为变量。另一种是采用直接拟合试验曲线的办法，典型的如下列 Singh-Mitchell 经验公式^[89]

$$\dot{\epsilon} = A e^{\alpha S_t} \left(\frac{t_1}{t} \right)^m \quad (2-217)$$

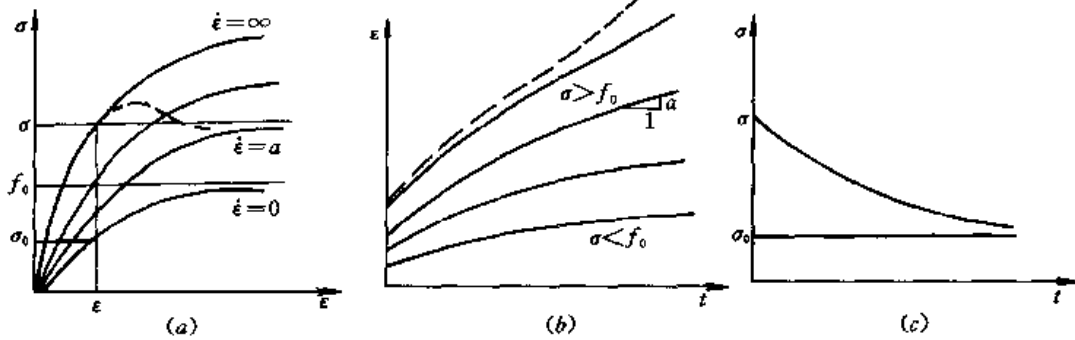


图 2-57 应力—应变—时间曲线

(a) 应力应变曲线；(b) 蠕变曲线；(c) 松弛曲线

或对 $m \neq 1$ 的情况积分后得

$$\epsilon = \epsilon_0 + A \frac{t_1}{1-m} e^{\alpha S_t} \left(\frac{t}{t_1} \right)^{1-m} \quad (2-218)$$

式中： t_1 为参考时间（例如 1 min）； A 、 α 和 m 为三个常数。 ϵ_0 可以理解为瞬时产生的弹性应变。乘子 $e^{\alpha S_t}$ 表明， $t = \text{const}$ 时的应力应变曲线为指数型，Mersi 建议改换成双曲线型即^[90]

$$\epsilon = \epsilon_0 + A \frac{t_1}{1-m} \frac{S_t}{1-R_f S_t} \left(\frac{t}{t_1} \right)^{1-m} \quad (2-219)$$

Вялов 则建议了另一个经验公式如下^[91]

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \left(\frac{1}{1+t} \right)^{n(\sigma)} \quad (2-220)$$

$n > 0$ 时表示减速蠕变， $n = 0$ 时为等速蠕变， $n < 0$ 时为加速蠕变。

土力学中关于蠕变问题的研究曾经是沿着两个方向分别进行的，一个是剪切流变问题，另一个是体积流变问题，后者常针对一维固结问题即所谓的次固结问题开展研究。合理的研究方向应当是把两者统一起来。

二、粘弹性模型

最简单的模型是 Maxwell 模型（图 2-2b）和 Kelvin 模型（图 2-2f），而土力学中应用

较多的是 Merchant 模型 (图 2-3b)。

按 Kelvin 模型

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (2-221)$$

或解出 ϵ 值

$$\epsilon = \left[\epsilon_0 + \frac{1}{\eta} \int \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{\eta}t\right) dt \right] \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad (2-222)$$

当 σ 为常量时

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right] \quad (2-223)$$

对于 Merchant 模型, $\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_1}$, 上式应改为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right) \right] \quad (2-224)$$

对于图 2-5 所示的广义 Kelvin 模型, 上式进一步变为

$$\epsilon = \sigma \left\{ \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_i}{\eta_i}t\right) \right] \right\} \quad (2-225)$$

假定泊松比为常量, 上述一维模型可以推广到三维问题。如果进一步假定弹性模量 E 和粘滞系数为变量, 也可推广为非线性粘弹性模型。

三、等价粘弹性模型

除了粘粒含量很大的土类外, 粘滞性 (流变性) 对土的应力应变关系的影响一般不大, 许多计算中可以忽略不计。但是, 在循环荷载作用下, 即使纯净的砂土也表现出明显的类似于粘弹性的滞回圈, 于是人们提出了用粘弹性模型代替实际上的弹塑性体进行计算, 这就是所谓的等价粘弹性模型。

大家知道, 在循环荷载下理想粘弹性体的应力应变曲线表现为椭圆, 等价粘弹性模型把实际滞回圈用倾角和面积相等的椭圆代替, 并由此确定粘弹性体的两个基本参数: 剪切模量 G 和阻尼比 λ (图 2-58)。假定滞回圈顶点轨迹 (骨架曲线) 为双曲线, Hardin 和

Drnevich 根据试验资料提供了下列经验公式^[92]。

$$G = \frac{G_{\max}}{1 + \gamma_h} \quad (2-226)$$

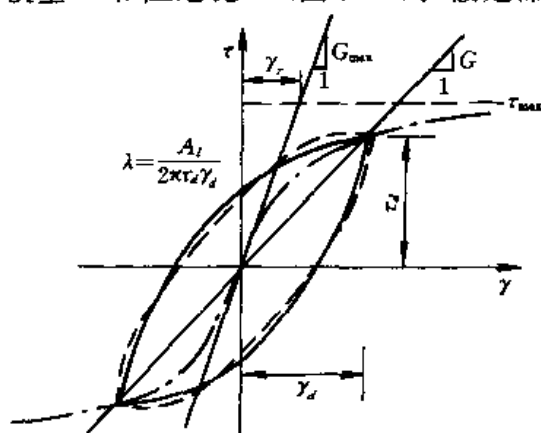
$$\lambda = \lambda_{\max} \frac{\gamma_h}{1 + \gamma_h} \quad (2-227)$$

其中 $G_{\max} = k_2 p_a \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^{1/2} (OCR)^{k_1} \quad (2-228)$

$$\lambda_{\max} = c - d \lg N \quad (2-229)$$

$$\gamma_h = \frac{\gamma_d}{\gamma_r} \left[1 + a \exp\left(-b \frac{\gamma_d}{\gamma_r}\right) \right] \quad (2-230)$$

式中: a 、 b 、 c 、 d 、 k_1 和 k_2 为经验常数; γ_d 为动应变幅值; $\gamma_r = \frac{\tau_{\max}}{G_{\max}}$ 称为参考应变; N 为振动次数。



A_l 滞回圈面积
 —— 实际滞回圈
 - - - 等价椭圆
 - - - 骨架曲线

图 2-58 等价粘弹性

但是，土体的真实变形性质是不可能完全用粘弹性体模拟的，因为粘弹性体在荷载循环结束时应变也回到初始状态，不会出现残余变形或残余孔隙压力。Martin 等人首先提出下列在等价粘弹性范围内考虑残余变形的经验公式^[93]。

$$\Delta \epsilon_v = c_1(\gamma_d - c_2 \epsilon_v) + \frac{c_3 \epsilon_v^2}{\gamma_d + c_4 \epsilon_v} \quad (2-231)$$

式中： c_1 、 c_2 、 c_3 和 c_4 为计算常数； $\Delta \epsilon_v$ 和 ϵ_v 为排水条件下每个荷载的循环的体积应变增量及累加量。根据 $\Delta \epsilon_v$ 可按下式推算不排水条件下的残余孔隙压力

$$\Delta u_w = E_w \Delta \epsilon_v \quad (2-232)$$

以上等价粘弹性模型系在等向固结土样基础上推导的，下列是沈珠江建议的适用于一般情况的等价粘弹性模型^[94]（图 2-59）。

$$G = \frac{k_2 p_a \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^{1/2}}{1 + k_1 \gamma_c} \quad (2-233)$$

$$\lambda = \lambda_{\max} \frac{k_1 \gamma_c}{1 + k_1 \gamma_c} \quad (2-234)$$

$$\Delta \epsilon_v = c_1 (\gamma_d)^{c_2} \exp(-c_3 S_t) \frac{\Delta N}{1 + N_c} \quad (2-235)$$

$$\Delta \gamma = c_4 (\gamma_d)^{c_5} S_t \frac{\Delta N}{1 + N_c} \quad (2-236)$$

其中

$$\gamma_c = \gamma_d^{3/4} / \sigma_m^{1/2} \quad (2-237)$$

$$N_c = \frac{\sum \gamma_d}{\gamma_d} \quad (2-238)$$

式中： $\bar{\gamma}_d$ 为某一时段的平均动剪应变幅值； $\sum \gamma_d$ 为各次动应变幅值的累加值； ΔN 为荷载次数的增加； S_t 为静应力水平，反映土的不等向应力状态。式 (2-233) 和式 (2-234) 为前面 Hardin 公式的简化， λ_{\max} 假定为常数，参数 k_1 、 k_2 和 λ_{\max} 通过共振柱或动三轴的模量试验测定。参数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 和 c_5 则由常规的动三轴液化试验测定。

等价粘弹性模型是以一个荷载循环为基础进行考察的，所以它得出的残余变形过程只是一个平均过程，每个荷载循环内应力应变瞬间变化的细节是无法得到的。

四、过应力模型

过应力理论最早由 Penzyna 建议^[95]，Zienkiewicz 等进一步加以发展并提出了相应的数值分析方法^[96]。这类模型的粘塑性项的表达式已见式 (2-31)，其更一般的表达式可写为

$$\{\Delta \epsilon^{vp}\} = \langle \Phi(F) \rangle \{n\} \quad (2-239)$$

Φ 是随 F 而增大的正函数，且当 $F > 0$ 时， $\langle \Phi \rangle = \Phi$ ， $F \leq 0$ 时 $\langle \Phi \rangle = 0$ 。

Adachi 和 Oka 采用了弹头形屈服函数^[97]，即如式 (2-154) 和式 (2-156)，令 f 和 f_0 分别为（图 2-60）

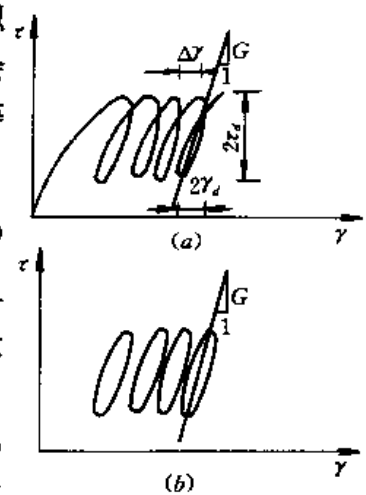


图 2-59 不等向固结土样的等价粘弹性
(a) 实际曲线；
(b) 等价椭圆

$$f = \sigma_m \exp\left(\frac{\eta}{\eta_c}\right) \quad (2-240)$$

$$f_0 = \sigma_{m_0} \exp\left(\frac{\eta}{\eta_c}\right) = p_0 \exp\left(\frac{\epsilon_v^p}{c_c - c_s}\right) \quad (2-241)$$

取 $F = \frac{f - f_0}{f_0}$, 并把函数 Φ 写为

$$\Phi(F) = c_0 \exp\left(m \frac{f - f_0}{f_0}\right) \quad (2-242)$$

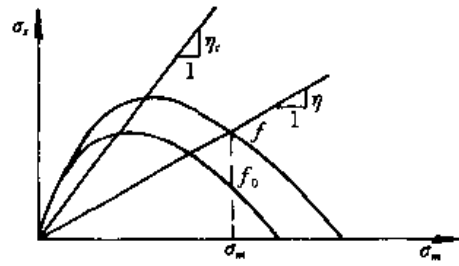


图 2-60 初始和瞬时屈服面

式中: c_0 和 m 为两个常数, 上式清楚地表明, 在恒定应力

(σ_m, σ_s) 条件下, 对理想弹塑性体, f_0 为常量, Φ 也是常量, 即发生等速蠕变, 而对于硬化材料, f_0 随 ϵ_v^p 的增大而扩大, 因此 Φ 是递减函数, 即发生减速蠕变。当 f_0 扩大到与 f 重合时, 达到蠕变停止的静力平衡状态。显然, 对于 f_0 随 ϵ_v^p 增加而收缩的软化材料, 将发生加速蠕变。

过应力理论的进一步发展是同时考虑式 (2-30) 中的瞬时塑性应变 $\Delta\epsilon^p$ 和蠕变塑性应变 $\Delta\epsilon^{vp}$, 即把式 (2-21) 和式 (2-239) 相加。考虑到式 (2-2), 得

$$\langle \dot{\epsilon}^p \rangle = \langle A \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \langle \dot{\sigma} \rangle + \Phi(F) \rangle \langle n \rangle \quad (2-243)$$

Sekiguchi 建议了下列塑性应变等值面^[98]

$$f_0 = f - \alpha \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\epsilon}_{v_0}} \right) = \epsilon_v^p \quad (2-244)$$

而
$$f = (c_c - c_s) \left[\ln \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{m0}} \right) + \frac{1}{\eta_f} (\eta - \eta_0) \right] \quad (2-245)$$

取 $F = \frac{f - f_0}{\alpha}$, $\Phi = \dot{\epsilon}_{v_0} \exp(F)$, 由此得出下列塑性应变速率的表达式

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = \left\langle \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right\}^T \langle \dot{\sigma} \rangle + \dot{\epsilon}_{v_0} \exp \left(\frac{f - \epsilon_v^p}{\alpha} \right) \right\rangle \langle n \rangle \quad (2-246)$$

其中
$$\langle n \rangle = \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right\} / \frac{\partial f_0}{\partial \sigma_m}, \quad \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right\} = \left[1 - \exp \left(- \frac{\epsilon_v^p}{\alpha} \right) \right] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$$

上述式中: α 和 $\dot{\epsilon}_{v_0}$ 为两个常数; η_f 为破坏时的 η_0 值。与式 (2-241) 不同的是, 此处 f_0 已不再是 $\dot{\epsilon}_v = 0$ 时的塑性应变等值面, 而是 $\dot{\epsilon}_v$ 等于某一比较缓慢的参考应变率 $\dot{\epsilon}_{v_0}$ 下的 ϵ_v^p 等值面, 即当 $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{v_0}$ 时, $f_0 = f$ 。鉴于塑性应变等值面一般即理解为屈服面, 又采用了正交流动法则, 因此 Sekiguchi 把 f_0 称为粘塑性势面。另一些人又把这种随时间或应变速率而变的屈服面称为流动面 (Flow Surface)。Matsui 和 Abe 也提出过类似的流动面模型^[99]。

五、滞后变形模型

土力学中滞后变形的概念最早由 Bjerrum 提出。滞后变形理论在瞬时发生的弹塑性应变基础上再加上随后发生的粘滞变形。与过应力理论首先要求知道 $\dot{\epsilon} = 0$ 条件下的屈服函数 f_0 不同, 这类模型只要求测定快速加荷下的应力应变曲线, 然后根据持续荷载下的蠕变曲线确定蠕变参数。

任何一个弹塑性模型加上蠕变项以后即得到一个相应的滞后变形模型。沈珠江在自己

的双屈服面模型基础上，加上由 Kelvin 模型组成的蠕变项，建议了一个相应的模型^[100]。对线性材料，由式 (2-224) 得出的蠕变速率为

$$\dot{\epsilon} = c\epsilon_f \exp(-ct) \quad (2-247)$$

其中 $c = E_2/\eta$, $\epsilon_f = \sigma/E_2$ 。针对筑坝材料，分别对体积变形和剪切变形假定了下列变形速率

$$\dot{\epsilon}_v = c\epsilon_{v_f} e^{-ct} \quad (2-248a)$$

$$\dot{\epsilon}_s = c\epsilon_{s_f} e^{-ct} \quad (2-248b)$$

其中

$$\epsilon_{v_f} = b \left(\frac{\sigma_3}{p_d} \right) \quad (2-249a)$$

$$\epsilon_{s_f} = d \frac{S_1}{1 - S_1} \quad (2-249b)$$

式中： c 、 b 和 d 为3个参数。变形的一般公式为

$$\{\dot{\epsilon}\} = \dot{\epsilon}_v \{\delta\} + \dot{\epsilon}_s \frac{\{s\}}{\sigma_s} \quad (2-250)$$

$\{s\}$ 为偏应力。

Borja 和 Kavazanjian 在剑桥模型基础上引入滞后变形项，并采用正交流动法则，即^[101]

$$\{\dot{\epsilon}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-251)$$

式中： f 为剑桥椭圆形屈服面。参数 λ 用两种办法计算。第一种采用 Taylor 的次固结理论计算体积应变，即

$$\dot{\epsilon}_v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = \frac{\Psi}{(1+e)t_v} \quad (2-252)$$

Ψ 为次固结系数。参考式 (2-159)，由上式求出 λ 代回式 (2-251)，得

$$\{\dot{\epsilon}\} = \frac{\Psi}{(1+e)t_v(1-\eta^2/\eta_c^2)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-253)$$

第二种是采用 Singh—Mitchell 的剪切蠕变公式 (2-217)，即

$$\dot{\epsilon}_s = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} = Ae^{\alpha_s t_s} t_s^{-m} \quad (2-254)$$

由此求出 λ 后代回式 (2-251) 得

$$\{\dot{\epsilon}\} = Ae^{\alpha_s t_s} t_s^{-m} \frac{\eta_c}{2\eta} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-255)$$

上述公式中体应变年龄 t_v 和剪应变年龄 t_s 分别按下式计算

$$t_v = \exp\left(\frac{e_2 - e_1}{\Psi}\right), \quad t_s = \exp\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{Ae^{\alpha_s t_s}}\right) \quad (2-256)$$

其中 e_1, γ_1 为现有孔隙比和剪应变， e_2, γ_2 为同一应力状态下土体处于正常固结状态时相应的孔隙比和剪应变，分别按压缩曲线为对数曲线和剪切曲线为双曲线算得。后来 Hsieh 等把单屈服面修改为双屈服面，即增加一个 $\sigma_s = \text{const}$ 剪切屈服面。Morsy 等^[102]进一步根据体积屈服面只产生体积应变和剪切屈服面只产生剪切应变的观点把式 (2-252) 和式 (2-254) 相加得

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = \frac{\Psi}{(1+e)t_v} \langle \delta \rangle + A \exp(\alpha S_t) \left(\frac{1}{t_s} \right)^m \frac{\langle s \rangle}{\sigma_s} \quad (2-257)$$

前面介绍中把滞后变形看作粘弹性变形，但以上几个模型均采用了流动法则，实际上已把滞后变形看成粘塑性变形，因此，与前面的流动面模型相比，已无实质性的区别。

六、一般粘弹塑性模型

瞬时发生的弹塑性变形与粘弹性和粘塑性变形同时考虑，可得一般的粘弹塑性模型。

袁建新对体积应变和剪切应变分别建议下列计算模型^[103]

$$\Delta \epsilon_v = \left(\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_{ve}} \right) \Delta \sigma_m + (\sigma_m - \sigma_{m_0}) \left(\frac{1}{K_{vp}} \Delta \sigma_m + \Delta h_v \right) \quad (2-258a)$$

$$\Delta \epsilon_s = \left(\frac{1}{G_e} + \frac{1}{G_{ve}} \right) \Delta \sigma_s + (\sigma_s - \sigma_{s_0}) \left(\frac{1}{G_{sp}} \Delta \sigma_s + \Delta h_s \right) \quad (2-258b)$$

上式说明应变增量由 4 部分组成， K_e 和 G_e 为弹性体积和剪切模量， K_{ve} 和 G_{ve} 为随时间而变的粘弹性体积和剪切模量， K_{vp} 和 G_{sp} 为随时间而变的粘塑性体积和剪切模量， Δh_v 和 Δh_s 为瞬时产生的体积和剪切塑性应变。塑性部分是否产生由加荷准则 $\sigma_m > \sigma_{m_0}$ 和 $\sigma_s > \sigma_{s_0}$ 规定， σ_{m_0} 和 σ_{s_0} 被称为临界应力。根据武汉粘土的单剪试验结果，得出粘弹性和粘塑性剪切模量分别为

$$G_{ve}(t) = a + b \left(\frac{2t_0}{t + t_0} \right)^m \quad (2-259a)$$

$$G_{sp}(t) = c \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_m} \right)^2 \quad (2-259b)$$

式中： a 、 b 和 m 为 3 个常数； σ_m 为 σ_s 的最终值； c 是 t 的函数，但近似地是一常数，而 $\Delta h_s = 0$ ，即无瞬时塑性应变。

谢宁则把总应变增量分成下列 4 部分^[104]

$$\langle \Delta \epsilon \rangle = \langle \Delta \epsilon^e \rangle + \langle \Delta \epsilon^{ve} \rangle + \langle \Delta \epsilon_i^{vp} \rangle + \langle \Delta \epsilon_n^{vp} \rangle \quad (2-260)$$

式中： $\Delta \epsilon_i^{vp}$ 和 $\Delta \epsilon_n^{vp}$ 分别为线性和非线性粘塑性蠕变项。一维条件下总应变的表达式被写为

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{\sigma}{E_H} + \sigma \sum_{r=1}^2 \frac{1}{E_{Kr}} \left[1 - \exp \left(- \frac{E_{Kr}}{\eta_{kr}} t \right) \right] + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_M} + \frac{\sigma - \sigma_0}{\eta_M} t \\ & + \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{A_0} \right)^{m_0} + \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{A_r} \right)^{m, \beta} \end{aligned} \quad (2-261)$$

式中： σ_0 为屈服应力，其它 12 个系数均为常数。此式右边第 3 和第 5 项与时间无关，应属瞬时产生的塑性应变，而与时间有关的粘弹性项，实际上采用过应力理论，其中第 4 项代表等速蠕变，第 6 项当 $\beta < 1$ 时表示减速蠕变。

第七节 结构性模型

一、概述

前面介绍的模型均未考虑实际的土体变形是如何发生的。实际上，除非变形很小，即

当变形只是由骨架的弹性变形引起时，土体的结构才保持原状，而不可逆的塑性变形必然伴随着土骨架结构的改变。经过多年摸索，许多研究者终于认识到，不深入探究土体变形与微结构改变之间的关系，而仅仅限于从宏观上假设屈服面、塑性势之类的办法，是不可能建立起真正符合实际的本构模型的。下面我们将把从微结构变化的考虑出发建立起来的本构模型称为结构性模型。

为了建立本构模型而进行的微结构研究，目前存在几种不同的研究途径。一种是从两个圆球的考察出发，建立圆球之间的变位和宏观平均应变之间的关系，及圆球之间的接触力和宏观平均应变之间的关系^[105]。如果变位与接触力之间的关系已知（例如线弹性关系），则宏观应力与宏观应变之间的关系即可间接地推导出来（图 2-61）。在这类推导中，往往假定圆球的直径和性质完全相同。显然，这样处理

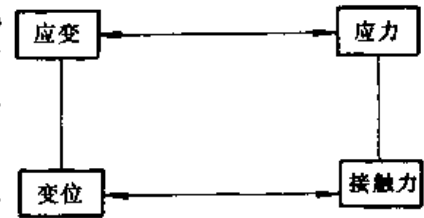


图 2-61 微观和宏观应力应变关系

过于理想化，尽管对深化土体变形的认识很有好处，但实用意义不大。另一途径是通过计算机仿真，例如选定几百个直径不同的圆棒或圆球集合体，用离散单元法（DEM）计算不同荷载下的变位，即得相应的平均应力应变关系^[106]。如果从事前一类研究者称为理论派，从事这一类研究者称为计算派，那末更多的学者是通过实验观察探究真实土体的宏观变形与微结构变化之间的关系，不妨称之为实验派，其代表人物如 Oda 等^[107]。我们主张，只有走实验的道路，彻底弄清实际土体变形过程的微观机理，才能建立起符合实际的本构模型。

二、微结构变量

砂土的微结构可以通过两个组构张量，即接触张量和定向张量来描述。前者代表一个代表性土单元中接触面的数目及其空间分布；后者代表颗粒的长轴（颗粒理想化为椭球）的空间分布。接触张量可以再分为球张量和偏张量。接触球张量反映单位土体内平均接触面个数（配位数），与平均孔隙比有密切的关系，但在一个代表性单元中孔隙比的分布往往是不均匀的，除平均孔隙比外还需要引入孔隙分布的频率（图 2-62）。接触张量的偏张量可以用接触面法向的优势方向及优势方向与其垂直方向接触面个数之比（即椭圆度）来表示。同样，定向张量也应有两个特征值，即颗粒长轴的优势方向及两个方向排列的个数之比。总括起来，砂土的微结构可以用下列 6 个变量来表征：①平均孔隙比 \bar{e} ；②孔隙分布标准差 Δe ；③接触面主倾角 θ_ϕ ；④接触张量椭圆度 r_ϕ ；⑤定向张量主倾角 θ_ψ ；⑥定向张量椭圆度 r_ψ 。

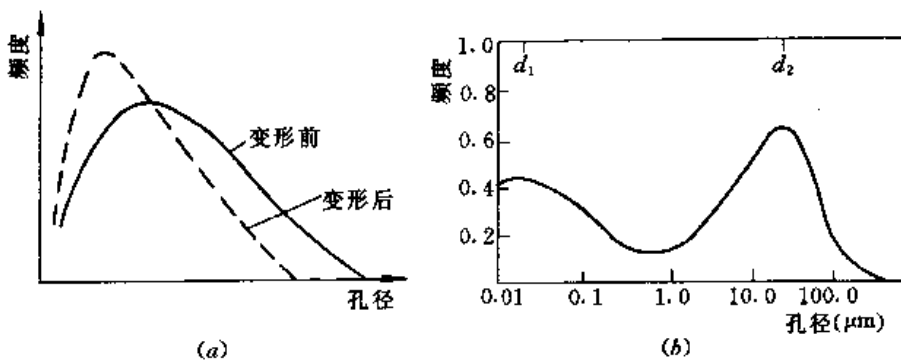


图 2-62 孔隙分布
(a) 砂土；(b) 粘土

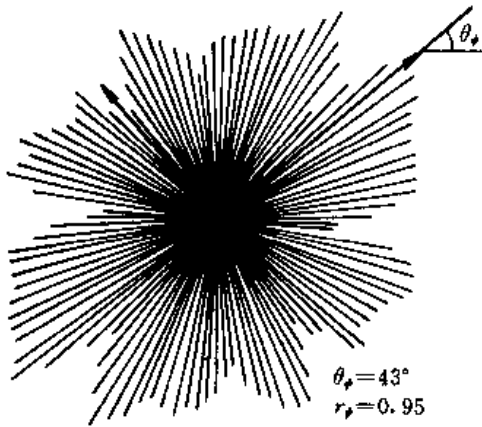


图 2-63 粘土的定向角和椭圆度

有关粘土微结构，仅仅考虑颗粒排列的组构特性显然是不够的，还必须考虑颗粒间作用力。与砂土的接触面上作用力一般由外荷引起不一样，粘土颗粒接触面上还存在内部作用力，包括胶结力，远距离作用力和毛管吸力。如果针对饱和土且不考虑胶结力的方向性，则粘土的微结构变量还应增加两个，平均胶结力 \bar{q} 及其分布的标准差 Δq 。胶结力强的土粒将组成团粒，团粒内部的胶结力和团粒之间的胶结力可能相差很多。与此相应，团粒之间的大孔隙和团粒内部的小孔隙导致粘土的孔隙分布具有显著的双峰特征，如图 2-62 (b)。图 2-63 是从扫描电镜得到的粘土颗粒定向玫瑰图^[108]。

显然，以上的微结构特征量是在颗粒本身不变的条件下得出的。有的土粒本身强度不高，或者土体受到较高的围压，颗粒破碎不可避免，此时微结构变量中还应加上颗粒的破损率。

三、微结构变化规律

土体受荷后内部结构发生改变，在宏观上就表现出一定的塑性变形。从理论分析和数值模拟可以得出最简单情况下微结构变化与宏观应力变形之间的关系，但对于复杂的真实土体则只有通过实验观察才能揭示它们之间的联系。有关微结构定量分析的研究虽然已取得一些进展，但要求把试验停下来并剖开试样进行观测，试验过程中的动态观测尚难进行定量研究。我们认为微观研究的基本目标是建立微结构变化与宏观应力应变之间的定性规律，或者说揭示宏观变形的微观机理。现有的试验资料离开弄清这些机理尚有很大差距，但可以总结出一些基本规律，下面几条正是这方面的初步总结。

(1) 最小孔隙率原理。土体在一定的围压下工作，受到力学扰动后其孔隙率将减小，并向最小孔隙率趋近，这是最小势能原理的反映。

(2) 稳定孔隙率原理。土粒之间的胶结力或吸力丧失时，其孔隙率将逐步向扰动土所特有的稳定孔隙率靠近。

(3) 孔隙匀化原理。也可称为大孔隙优先改变原理，即体积收缩过程中大孔隙减少多，小孔隙变化小，孔隙分布逐步均匀化（图 2-62, a）。

(4) 接触面偏向原理。接触张量的主方向随着偏应力的增大逐步偏向大主应力方向，其椭圆度随之增大。图 2-64 用三个颗粒受水平力后左边两个颗粒之间的接触面相互脱开来解释此原理，图中 φ 为土粒表面摩擦角。

(5) 颗粒定向原理。定向张量的主方向趋向与大主应力垂直的方向，但当出现剪切带时，颗粒定向将趋向与剪切带平行，图 2-65 用片状粘土颗粒的定向解释这一原理，假定试样加荷以前的颗粒排列完全是随机的。

(6) 颗粒破损原理。颗粒间的胶结随粒间作用力的增大而逐渐破损，而粒间作用力与平均压应力和主剪应力成正比。此外可以设想，破损总是从最薄弱环节开始。

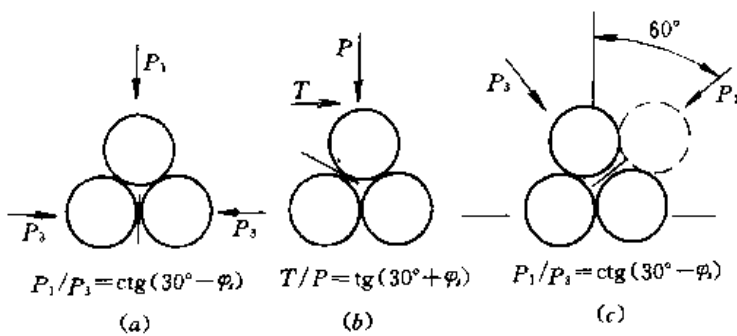


图 2-64 接触面的变化

(a) 压缩; (b) 剪切; (c) 应力轴旋转

(7) 硬化机理。孔隙比的减小和孔隙分布的均化是引起等向硬化的原因, 接触面的偏向是引起不等向硬化的原因。

(8) 软化机理。剪胀引起的密实度减小是软化的一个原因, 出现剪切带后颗粒的定向角的转向是软化的又一个机理(图 2-65), 而粘土颗粒间胶结的破损当然也是软化的原因。

(9) 流动规律。塑性应变由颗粒

的滑动和滚动共同引起, 由滑动引起的塑性应变方向决定于应力总量的方向, 由滚动引起的塑性应变方向决定于应力增量, 而且随着偏应力的增加滑动成分增大, 滚动成分减小。

(10) 剪胀规律。剪切引起的体积变化由普遍的剪缩和临时的剪胀两部分组成, 前者受最小孔隙率原理支配, 是不可逆的, 后者受接触面偏向原理支配, 随偏应力增大而增大, 且是可逆的, 即荷载反向时变为剪缩。

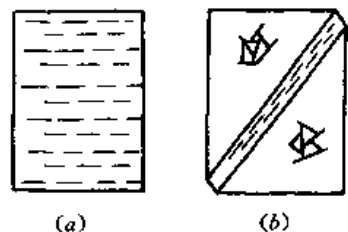


图 2-65 粘土颗粒的定向
(a) 均匀变形; (b) 局部变形

根据以上规律建立带有若干待定参数的应力应变关系, 并通过拟合试验曲线的办法确定这些系数。这一建模思路与传统的“先假设, 后检验和修改”的思路有着根本的不同, 但它并不要求对每一颗粒的运动进行追踪, 微结构研究只是必须经过的桥梁, 定量的关系仍通过宏观的研究确定。

四、多滑移机构模型

早期企图从微结构变化机理出发建立本构模型的努力可以追溯到Rowe的剪胀理论。但是单一的只有剪胀的滑移机构显然不能反映土的真实变形特性^[3,109]。后来, 一些学者发展了多滑移机构的概念, 宏观塑性应变正是这些滑移面上产生的滑移的累加结果。但这类模型对滑移的认识完全是虚构的, 而不是建立在微观考虑的基础上的, 所以实质上是前面介绍的多重屈服面模型的另一种表达方式, 因而不是真正意义上的结构性模型。

松冈元最先考察了沿三个主应力平面上的滑动, 但他只把三个面上滑移的影响综合起来提出空间滑移面(Spatial mobilized plane)理论^[110]。比较典型的多滑移机构理论由Aubry和Hujeux建议^[111]。他们的模型由三个滑移机构组成, 即

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \sum_{k=1}^3 \{\Delta\varepsilon^{pk}\} \quad (2-262)$$

相应的三个屈服面为

$$f_k = \left| \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right| - h^k \sin\varphi \left(1 - b \ln \frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} \right) \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \quad (k = 1, 2, 3, i = 2, 3, 1, j = 3, 1, 2) \quad (2-263)$$

并假定塑性应变增量的方向与应力主轴重合, 且由下式计算

$$\Delta \epsilon_i^t = \lambda^t \left[\text{sign}(\sigma_i - \sigma_j) + \sin \varphi - \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j} \right] \quad (2-264)$$

由此剪胀率将等于

$$\frac{\Delta \epsilon_i + \Delta \epsilon_j}{\Delta \epsilon_i - \Delta \epsilon_j} = \frac{1}{2} \left(\sin \varphi - \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j} \right) \quad (2-265)$$

上述式中: $\text{sign}(\cdot)$ 代表括号内表达式的符号; λ^t 和 h^t 为两个参数。近来, Kabilamany 等进一步发展了这一模型^[112]。

与此同时, Pande 等则提出了类似的所谓多薄片模型, 即把塑性应变增量写为^[113]

$$\{\Delta \epsilon^p\} = \sum_{i=1}^k w_i [C^p]_i [\Delta \sigma] \quad (2-266)$$

$[C^p]$ 为相应于 i 个滑移面的柔度矩阵, w_i 为该面对塑性应变贡献的权系数。与第 i 个滑移面相应的屈服面和塑性势分别取为

$$f_i = \tau_i - h_i \sigma_{ni} \quad (2-267)$$

$$g_i = \tau_i + \eta_i \ln \left(\frac{\sigma_{ni}}{\sigma_{ni_0}} \right) \quad (2-268)$$

式中: τ_i 和 σ_{ni} 分别为 i 面上切向和法向应力; h_i 是硬化参数; η_i 为临界状态时 $\tau - \sigma_n$ 的倾角。滑移面数可多达 13 个, 相当于沿单位球面选用 13 个积分点。

Iai 等则在应变空间上定义了一个多机构模型, 建议的应力应变关系为^[114]

$$\{\Delta \sigma\} = K \{n^0\} \{n^0\}^T (\{\Delta \epsilon^p\} - \{\Delta \epsilon^d\}) + \sum_{i=1}^k H_{L/u} \{n^i\} \{n^i\}^T \{\Delta \epsilon\} \quad (2-269)$$

此式适用于二维状态的液化分析, $\{n^0\} = \{1 \ 1 \ 0\}^T$, K 为体积回弹模量, $\{\Delta \epsilon^d\}$ 为剪胀应变, $H_{L/u}$ 为塑性模量, 加荷时为 H_L , 卸荷时为 H_u , $\{n^i\}$ 为与应力空间上塑性应变增量方向相对应的应变空间上应力增量方向, 并由下式计算

$$\{n^i\}^T = \{\cos \theta_i, -\cos \theta_i, \sin \theta_i\} \quad (2-270)$$

θ_i 为与 x 轴相交 $\frac{\theta_i}{2} + \frac{\pi}{4}$ 的滑移面。

五、散粒体模型

1. 基本假设

以圆球和椭圆颗粒集合的微结构研究为基础, 沈珠江在下列假设下提供一个适合中密到松散的砂土在低围压下的本构模型^[115,116]。

- (1) 颗粒之间无胶结且忽略颗粒的破碎。
- (2) 颗粒之间的滑动和滚动均可产生塑性变形, 滑动服从 Coulomb 摩擦定律。
- (3) 颗粒集合体的变形可以通过接触张量和定向张量两个内变量描述。

2. 初次加荷

假定总应变由等 σ_m 下的剪切和等 η 下的的压缩两部分组成, 并各自服从下列规律。

等 σ_m 下双曲线剪切规律

$$\epsilon_{sd} = \frac{a\tau}{1-r} \quad (2-271)$$

等 η 下对数压缩规律

$$\epsilon_{vc} = c_c \ln \frac{\sigma_m}{\sigma_{m0}} \quad (2-272)$$

与压缩同时产生的剪切应变为

$$\epsilon_x = \frac{\eta}{\eta_0} \epsilon_{vc} \quad (2-273)$$

η_0 为侧限条件下压缩时的 η 值。

线性剪胀规律

$$\frac{\Delta \epsilon_{vd}}{\Delta \epsilon_{sd}} = c_0 - c_d \eta \quad (2-274)$$

以上式中 $r = \eta/\eta_f$ 。假定破坏应力比 η_f 随体积压缩而增大，并存在下列线性关系

$$\eta_f = \eta_{f0} + c_f \epsilon_v \quad (2-275)$$

则由以上各式可得下列应变增量关系式

$$\Delta \epsilon_v = c_c \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{a(c_0 - c_d \eta) \Delta r}{g} \quad (2-276a)$$

$$\Delta \epsilon_x = c_c \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{a}{g} (c_0 - c_d \eta) \quad (2-276b)$$

其中

$$g = (1 - r)^2 + c_f \frac{ar}{\eta_f} (c_0 - c_d \eta) \quad (2-277)$$

当 $r \rightarrow 1$ 时， g 可能因剪胀而变成负值，即上式可以反映应变软化现象。

3. 复杂加荷

(1) 弹塑性应变的分离。设 c_s 是回弹指数，并把剪胀应变看成是一种可逆的似弹性应变，则式 (2-276a) 可以分离成以下两部分

$$\Delta \epsilon_v^e = c_s \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} - \frac{ac_d \eta}{g} \Delta r \quad (2-278a)$$

$$\Delta \epsilon_v^p = (c_c - c_s) \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{ac_0}{g} \Delta r \quad (2-278b)$$

剪应变也分为与颗粒滚动有关的似弹性应变及颗粒滑移有关的塑性应变两种。前者的方向与应力增量方向一致，后者则服从流动法则，即决定于应力总量，设 W 为前者所占的权重， $1-W$ 为后者所占的权重，则在 $W=g$ 的假定下可得

$$\Delta \epsilon_x^e = c_s \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + a \Delta r \quad (2-279a)$$

$$\Delta \epsilon_x^p = (c_c - c_s) \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + a \frac{1-g}{g} \Delta r \quad (2-279b)$$

(2) 应力路线转折。弹性应变不受应力路线改变的影响，塑性应变的公式 (2-278b) 和式 (2-279b) 推广如下

$$\Delta \epsilon_v^e = (c_c - c_s) \frac{\sigma_m^*}{\sigma_{mf}} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{ac_0}{g^*} \Delta r^* \quad (2-280a)$$

$$\Delta \epsilon_x^p = (c_c - c_s) \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\sigma^*}{\sigma_{mf}} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + a \frac{1-g^*}{g^*} \Delta r^* \quad (2-280b)$$

其中 $\Delta r^* = \Delta \eta^* / \eta_f^*$ ，且

$$g^* = (1 - r^*)^2 + c_f \frac{ar^*}{\eta_f^*} (c_0 - c_d \eta)$$

$$\sigma_m^* = |\sigma_m - \sigma_{m1}|$$

$$\sigma_{mf} = (\sigma_m)_{\max} - \text{sign}(\sigma_m - \sigma_{m1}) \sigma_{m1}$$

$$\eta^* = \bar{\eta} + \eta_l \cos \frac{\delta}{2}$$

$$\eta_f^* = \bar{\eta}_f + \eta_{lf} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$\Delta \eta^* = c_a \Delta \eta + c_i \Delta \rho \quad (2-281)$$

$$c_a = [\eta - \bar{\eta}_l \cos(\rho - \rho_l)] / \bar{\eta}$$

$$c_i = \eta \eta_l \sin(\rho - \rho_l) / \bar{\eta}$$

$$\bar{\eta} = \sqrt{\eta^2 - 2\eta\eta_l \cos(\rho - \rho_l) + \eta_l^2}$$

$$\bar{\eta}_f = \sqrt{\eta_f^2 - 2\eta_f \eta_{lf} \cos(\rho - \rho_l) + \eta_{lf}^2}$$

而
其中

式中： δ 为应力路线转折角； ρ_l 和 η_l 分别为转折时的 Lode 角和 η 值（图 2-66）。

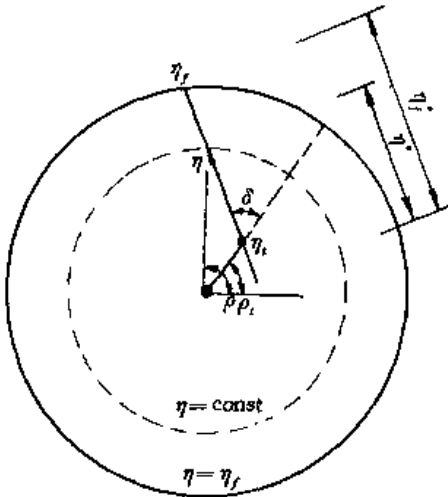


图 2-66 应力路线转折

当应力路线转折 180° 时， σ_m^* 和 $r^* = 0$ ，只剩下弹性应变。

(3) 主应力轴旋转。按前面的解释，接触张量的主轴随应力主轴的旋转而旋转，这是因主轴旋转而产生塑性应变的第一个原因。由于颗粒沉积时的定向，应力主轴由垂直向水平旋转时将因咬合力的降低而引起软化，这是主轴旋转产生塑性应变的第二个原因。对第一个原因引起的塑性变形，可假定主轴旋转 90° 与 Lode 角转动 60° 相当，而第二个原因引起的塑性变形可由下列强度各向异性公式推得

$$\eta_f = \frac{1}{2} (\eta_{fM} + \eta_{fm}) + \frac{1}{2} (\eta_{fM} - \eta_{fm}) \cos^2 \alpha \quad (2-282)$$

其中 η_{fM} 和 η_{fm} 分别为 $\alpha = 0^\circ$ （垂直向）和 $\alpha = 90^\circ$ （水平向）破坏应力比（图 2-67）。这时，式（2-280）中的 Δr^* 可由下式计算

$$\Delta r^* = \frac{1}{\eta_f^*} (c_b |\Delta \alpha| + c_r^* (\Delta \alpha)) \quad (2-283a)$$

其中 $c_b = 2\eta/3$ ， $c_r^* = \frac{\eta_{fM} - \eta_{fm}}{2\eta_f^*} \sin \alpha$ 。（ $\Delta \alpha$ 表示 α 从 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$

变化时取 $\Delta \alpha$ ， α 从 $90^\circ \rightarrow 0^\circ$ 时取 0。

计算似弹性应变时，相应的公式应为

$$\Delta r = \frac{1}{\eta_f} (\Delta \eta + c_r \Delta \alpha) \quad (2-283b)$$

其中 $c_r = \frac{\eta_{fM} - \eta_{fm}}{2\eta_f} \sin \alpha$ 。

(4) 最终表达式。综合以上公式，在似弹性应变增量与 $\Delta s_{ij} / \Delta \sigma$ ，或成比例，而塑性应变与 $\frac{\partial \eta}{\partial s_{ij}} / N$ ， $N =$

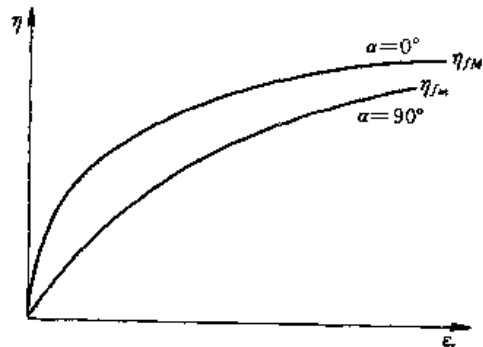


图 2-67 强度各向异性

$\left[\frac{\partial \eta}{\partial s_{ij}} \frac{\partial \eta}{\partial s_{ij}}\right]^{1/2}$, 成比例的假设下, 可以推得应变增量公式如下

$$\Delta \epsilon_v^c = c_s \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} - \frac{arc_d}{g} (\Delta \eta + c_r \Delta \alpha) \quad (2-284a)$$

$$\Delta e_{ij}^c = \left[c_s \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{a}{\eta_f} (\Delta \eta + c_r \Delta \alpha) \right] \frac{\Delta s_{ij}}{\Delta \sigma_s} \quad (2-284b)$$

$$\Delta \epsilon_v^p = (c_c - c_s) \frac{\sigma_m^*}{\sigma_{mf}} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + \frac{ac_0}{g\eta_f^*} (c_a \Delta \eta + c_t \Delta \rho + c_b |\Delta \alpha| + c_r^* \langle \Delta \alpha \rangle) \quad (2-285a)$$

$$\Delta e_{ij}^p = \left[(c_c - c_s) \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\sigma_m^*}{\sigma_{mf}} \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} + a \frac{1 - g^*}{g^* \eta_f^*} (c_a \Delta \eta + c_t \Delta \rho + c_b |\Delta \alpha| + c_r^* \langle \Delta \alpha \rangle) \right] \frac{1}{N} \frac{\partial \eta}{\partial s_{ij}} \quad (2-285d)$$

以上公式中压缩参数 c_c 和剪切参数 a 均应随孔隙比的减小而减小, 其变化规律可以下列指数函数表示

$$c_c = c_{c_0} \exp(-b \epsilon_v) \quad (2-286)$$

$$a = a_0 \exp(-d \xi) \quad (2-287)$$

式中: c_{c_0}, a_0 和 b, d 为常数; $\xi = \int |d\epsilon_s|$ 为剪切应变的累加值, 与内时模量中的内时量度相当。

六、复合体模型

从开始加荷到最后破坏, 土体的微结构将遭受很大的改变。如果把初始状态的原状土当作一种材料, 完全破坏以后的土体 (损伤土) 当作另一种材料, 则变形过程中的土体可以看作原状土和损伤土两种材料的复合体。如果引入损伤力学的概念, 把损伤土所占的比重 ω 称为损伤比, 则土体变形过程中的微结构变化可以用损伤演化规律来描述。显然, 这样的描述方法是比较粗糙的, 因为它没有深入探究微结构的具体变化过程。

沈珠江首先提出了胶结杆元件的概念, 见图 2-1, 图 2-2 和图 2-8, 并在此基础上建议了一个双弹簧模型^[117, 118]。这一模型把原状土和损伤土各自看作一个弹簧, 共同承担外荷载 (图 2-68) 即

$$\{\sigma\} = (1 - \omega)\{\sigma_s\} + \omega\{\sigma_d\} \quad (2-288)$$

式中: $\{\sigma_s\}$ 和 $\{\sigma_d\}$ 分别为原状土和损伤土内的应力, 其增量形式为

$$\{\Delta\sigma\} = (1 - \omega)[D_i]_i \{\Delta\epsilon\} + \omega[D_d]_i \{\Delta\epsilon\} - (\{\sigma_s\} - \{\sigma_d\})\Delta\omega \quad (2-289)$$

$[D_i]_i$ 和 $[D_d]_i$ 分别是原状土和损伤土的切线刚度矩阵。如果假定 ω 是应变的函数, 则上式可简写为

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{epd} \{\Delta\epsilon\} \quad (2-290)$$

其中

$$[D]_{epd} = (1 - \omega)[D_i]_i + \omega[D_d]_i - (\{\sigma_s\} - \{\sigma_d\}) \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon} \right\}^T \quad (2-291)$$

可以称为弹塑性损伤矩阵, 损伤演化规律曾经采用过下列指数函数和双曲函数

$$\omega = 1 - \exp(-a\epsilon_s - b\epsilon_t) \quad (2-292a)$$

$$\omega = \frac{a\varepsilon_v + b\varepsilon_s}{1 + a\varepsilon_v + b\varepsilon_s} \quad (2-292b)$$

以上模型适用于有胶结强度的土类，此时原状土可以按理想弹性材料考虑，损伤土可以采用任一种适用于重塑土的本构模型，例如剑桥模型或 Duncan-张模型。也可应用于易破碎颗粒组成的砂土或堆石体，此时原状土可以认为是一种高 φ 角的材料，损伤土则是 φ 角较小的细颗粒材料，因此，加权平均得出的内摩擦角将随 ω 增大而减小。

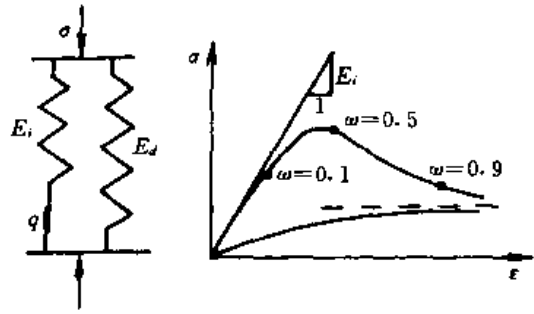


图 2-68 双弹簧模型

近年来，Desai 等也提出了类似的复合体模型的概念，但他们把这类模型称之为扰动状态模型^[119]。

七、砌块体模型

结构性粘土的三轴试验结果表明，低围压下的试样有明显的应变软化现象，并伴随有一定的剪胀性，也即其性状与砂土十分类似。蒋明镜等还发现，破坏后剪切带内外及边缘处的微结构有很大的不同，显示出团粒逐渐变小的过程^[120,121]。根据这些研究结果，沈珠江建议了一个砌块体模型^[122]。这一模型认为，原状的结构性粘土类似于块石砌成的不均质结构，在外力较小时，砌块之间的薄弱连接先受到破坏，形成微裂缝，裂缝之间为尚保持完整的大块。随着荷载的增大，裂缝逐渐扩展连通，把大块分割为小土块和团粒，破坏严重的地方形成剪切带，带内的团粒进一步被粉碎。

设 f 为描述颗粒滑移的屈服函数， g 为描述颗粒破损的损伤函数，并采用正交流动法则，则相应的应变增量可以写为

$$\langle \Delta \varepsilon \rangle = [C] \langle \Delta \sigma \rangle + A_p \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \Delta f + A_d \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \Delta g \quad (2-293)$$

f 和 g 建议采用下列函数

$$f = \frac{\sigma_m}{1 - \left(\frac{\eta}{\alpha} \right)^n} \quad (2-294)$$

$$g = \frac{\sigma_m}{1 - \left(\frac{\eta}{\beta} \right)^n} \quad (2-295)$$

像剑桥模型一样硬化参数等于塑性体应变 ε_v^p ，而损伤参数 ω 则建议取为

$$\omega = \frac{e_0 - e}{e_0 - e_s} \quad (2-296)$$

其中 e 为现有应力条件下的孔隙比， e_s 为同一应力条件下的稳定孔隙比，可由重塑土的压缩曲线求得。相应的硬化规律和损伤规律建议为

$$f = f_0 \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{c_c - c_s} \right) \quad (2-297)$$

$$g = g_0 + (g_m - g_0) \sqrt{2 \ln \frac{1}{1 - \omega}} \quad (2-298)$$

则最后可以推导得出下列塑性系数 A_p 和损伤系数 A_d 的表达式

$$A_p = \frac{c_c - c_s}{f \frac{\partial f}{\partial \sigma_m}} \quad (2-299)$$

$$A_d = \frac{e_0 - e_s}{1 + e_0} \frac{1}{g \ln \frac{g_m}{g_0} \frac{\partial g}{\partial \sigma_m}} + \frac{\omega c_{c1} - c_c}{g \frac{\partial g}{\partial \sigma_m}} \quad (2-300)$$

式中: g_0 为门槛损伤力; g_m 为峰值损伤力, 此处的压缩曲线下降最陡 (图 2-69)。

如果把柔度矩阵 $[C]$ 中的弹性参数假定为常数, 颗粒土的回弹指数 c_c 也取为常数, 则尚有三个参数 α 、 β 和 c_c 有待确定。设 ψ 为剪胀角, 则 α 与 ψ 之间有下列关系

$$\alpha = \sqrt[3]{1 + n} \sin \psi \quad (2-301)$$

式中: ψ 和 c_c 应当随颗粒变细而变化, 建议采用下列线性公式计算

$$\psi = \psi_0 + \omega(\psi_1 - \psi_0) \quad (2-302)$$

$$c_c = c_{c0} + \omega(c_{c1} - c_{c0}) \quad (2-303)$$

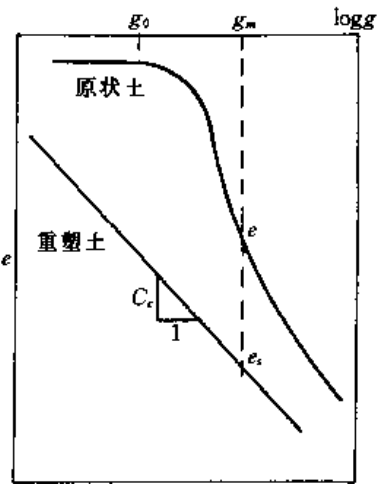


图 2-69 结构性土的压缩曲线

式中: ψ_1 和 c_{c1} 即相当于重塑土 ($\omega=1$) 的剪胀角 (此时应等于内摩擦角) 和压缩指数, ψ_0 和 c_{c0} 为 $\omega=0$ 时的初始值。颗粒破

碎引起的体应变不应有膨胀, 为了保证这一点, 式 (2-295) 中的 β 应取较大的值, 例如取 $\beta=1.2\alpha$ 。

参 考 文 献

- 1 蒋彭年. 土的本构关系. 北京: 科学出版社, 1982
- 2 沈珠江. 土体变形特性的损伤力学模拟. 见: 第五届全国岩土力学数值分析及解析方法讨论会论文集. 武汉测绘科技大学出版社, 1994: 1~8
- 3 黄文熙主编. 土的工程性质. 第 5 章. 北京: 水利电力出版社, 1983
- 4 Iwan W. D., On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite system, J. of Appl Mech. ASME, 1967, 34 (3)
- 5 俞茂镛. 双剪应力强度理论研究. 西安: 西安交通大学出版社, 1988
- 6 沈珠江. A stress-strain model for sands under complex loading. In: Fan & Murakami. Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials. 1989. 1: 303~308
- 7 Matsuoka. H.. On the significance of the "Spatial mobilized plane". Soils & Foundations. 1976. 6 (1): 91~100
- 8 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989
- 9 沈珠江. 三种硬化理论比较. 岩土力学, 1994. 15 (2): 13~19
- 10 范镜泓, 高艺晖. 非线性连续介质力学基础. 重庆: 重庆大学出版社, 1989
- 11 杨德品, 扶名福. 连续介质力学. 南昌: 江西高校出版社, 1992
- 12 Hvorslev M. J. Uber die Festigkeitseigen schaften gestorten bindiger Boden, Ingeniorvidenskabelige Skrifter, A. 45, Copenhagen, 1937.

- 13 Janbu N. Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial test. In: European Conf. SMFE, Wiesbaden, 1963. 1: 19~25
- 14 Casagrande A. Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills, J. Boston Soc. Civil Engrs, 1936
- 15 Rendulic L. Ein Grundgesetz der Tonmechanik und Sein Experimenteller Beweis, Bauingenieur, 1937. 18
- 16 Skempton A W. The pore pressure coefficients A and B, Geotechnique, 1954. 4 (4): 143~147
- 17 魏汝龙. 论土的剪胀性. 水利学报, 1963 (6): 31~40
- 18 沈珠江, 左元明. 堆石料的流变特性试验研究. 见: 第6届土力学及基础工程学术会议论文集. 上海: 同济大学出版社, 1991: 443~446
- 19 沈珠江, 盛树馨. 土的应力应变理论中的唯一性假设. 水利水运科学研究, 1982 (1): 31~42
- 20 Lade P V. and Duncan J M. Stress—path dependent behavior of cohesionless soil. J. Geot. Eng. Division. ASCE. 1976, 102 (GT1): 51~68
- 21 魏汝龙. 软粘土的强度和变形. 人民交通出版社, 1987
- 22 Balasubramanian A S. Behaviour of a normally consolidated clay in stress ratio strain space. In: Symp. Recent Development in the Analysis of Soil Behaviour and their Application to Geotechnical Structure, July, 1975: 275~287
- 23 陈生水, 冯铁群, 郗能惠. 粉煤灰变形特性的试验研究. 水利水运科学研究, 1993 (2): 151~156
- 24 李广信, 郭瑞平. 土的卸载体缩与可恢复剪胀. 岩土工程学报, 2000, 22 (2): 158~161
- 25 Duncan J. M. et al., Strength, stress—strain and bulk modulus parameters for FEA of stress and movements in soil masses, 1980, Report No. UCB/GT/80~01
- 26 张启岳, 司兴洋. 粗粒土大型三轴压缩试验与应力应变特性. 水利学报, 1982 (9): 22~31
- 27 Krey H. Rutschgefährliche und flissende Bondenarten, Bautechnik, 1927 (5)
- 28 Rutledge P C. Review of the cooperative triaxial research program of the Corps of Engineers, WES, 1947
- 29 沈珠江. 饱和粘土抗剪强度的变化规律及其在土工建筑稳定分析中的应用. 土木工程学报, 1963, 9 (2): 29~36
- 30 Terzaghi K. The shearing resistance of saturated soil and the angle between the planes of shear, In: Proc. 1st IC SMFE, 1936, 1: 54~56
- 31 Skempton A W. and Bishop A W. Soils, Building Materials—Their Elasticity and Plasticity, ed. Rein-er M, Amsterdam, 1954
- 32 Tavenes F and Leroudeil S. Effects of stress and time on yielding of clays, In: 9 ICSMFE, 1977, 1: 319~326
- 33 Skempton A W. Long term stability of clay slopes, Geotechnique, 1964, 14 (2): 75~102
- 34 廖济川. 硬粘土抗剪强度的研究现状. 岩土工程学报, 1990. 12 (4): 89~99
- 35 卢肇均等. 非饱和土的抗剪强度与膨胀压力. 岩土工程学报, 1992, 14 (3): 1~8
- 36 Bishop A W. et al., Factors controlling the shear strength of partly saturated cohesive soils, ASCE Reasrch Conference on Shear Strength of Cohesive Soils, 1960: 503~532
- 37 Fredlund D G et al. The shear strength of unsaturated soil, Can. Geot. J. 1978, 15: 313~321
- 38 刘国楠, 冯满. 一种击实膨胀土抗剪强度的试验研究. 见: 岩土力学与工程的理论与实践. 杭州: 浙江大学出版社, 1992: 312~315
- 39 Yang D. and Shen Z J. Laboratory investigation on the strength and stress—strain relationship of an unsaturated compacted clay. In: Proc. 7th IC Expensive Soils, Texas, 1992
- 40 刘祖典. 黄土力学与工程. 西安: 陕西科学技术出版社, 1997

- 41 关德斌. 土的格里菲斯—莫尔联合抗裂强理论. 见:第四届土力学及基础工程学术会议论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986; 124~131
- 42 Naylor D J. Stress—strain law for soils. In: *Development in Soil Mechanics*, edited by C R Scott., 1978
- 43 Duncan J M and Chang C. Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils, *J. SMFD, ASCE*, 1970. 96 (SM5): 1629~1653
- 44 Al—shawaf T and Powell G H. Variable modulus model for nonlinear analysis of soils. In: *Symp. on Application of Computer Methods in Enging*, 1977. 1: 423
- 45 Byrne P M and Eldridge T L. A three parameter dilatant elastic stress—strain model for sand. In: *Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, 1982: 73~79
- 46 沈珠江. 考虑剪胀性的土和石料的非线性应力应变模式. *水利水运科学研究*, 1986 (4): 1~14
- 47 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式. *岩土工程学报*, 1980, 2 (2): 11~19
- 48 沈珠江. 当前土力学研究中的几个问题. *岩土工程学报*, 1986, 8 (5): 1~8
- 49 周正明. 土坝蓄水期变形特性和土的本构关系研究. 南京水利科学研究院硕士论文, 1987
- 50 Darve F. An incrementally non—linear constitutive law : Assumption and predictions, In: *Int. Workshop on Constitutive Relation for Soils*, Grenolbe, 1982; 385~404
- 51 Robinet J C et al. A non linear constitutive law for soil, *Ibid*, 1982; 405~418
- 52 沈珠江. 土体弹塑性变形分析中的几个基本问题. *江苏力学*, 1993 (9): 1~10
- 53 沈珠江. 土体应力应变分析中的一种新模型. 见:第五届土力学及基础工程学术讨论会论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990; 101~105
- 54 史述昭, 杨光华. 岩体常用屈服函数的改进. *岩土工程学报*, 1987, 9 (4): 60~69
- 55 邢义川等. 黄土的弹塑性模型试验研究. 见: 第二届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 珠海, 1988, 1: 193~199
- 56 Lade D. V. and Duncan J M. Elasto—plastic stress—strain theory for cohesionless soil, *J. GED, ASCE*, 1975, 101 (10): 1037~1064
- 57 Chen W F and Baladi G Y. *Soil plasticity—theory and Implementation*, Elsevier, 1985
- 58 Drucker D C, Gibson R E and Henkel D J. Soil mechanics and work—hardening theory of plasticity, *Trans., ASCE*, 1957, 122 (338)
- 59 Roscoe K H, Schofield M A and Thurairajah A. Yield of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, 1963, 13 (3): 211~240
- 60 魏汝龙. 正常压密粘土的塑性势. *水利学报*, 1964 (6) .
- 61 Roscoe K H and Burland J B. On the generalized stress—strain behaviour of ‘wet’ clay, In: *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ., 1968; 535~608
- 62 黄文熙, 濮家骝, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数. *岩土工程学报*, 1981, 3 (3): 19~26
- 63 Di Maggio F L and Sandler I S. Material models for granular soils, *J. EMD, ASCE*, 1971, 97 (EM3): 935~950
- 64 Houlsby G T et al. Prediction of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model, In: *Int. Workshop, on Constitutive Relations for Soils*, Grenoble, 1982; 99~122
- 65 Nova R. A model of soil behaviour in plastic and hysteretic range, In: *Int. Workshop on Constitutive Relations for Soils*, Grenoble, (289), 1982: 289~330
- 66 马正明. 大地材料应变硬化及软化模型研究. 见:第五届大地工程学术研究讨论会. 台湾龙门, 1993, 1: 183~193
- 67 Desai C S and Faruque M O. Constitutive model for geological materials, *J. EMD, ASCE*, 1984, 110 (9): 1391~1408

- 68 任放, 盛谦, 常燕庭. 岩土类工程材料的蛋形屈服函数. 岩土工程学报, 1993, 15 (4): 33~39
- 69 Li Boqiao, An elastoplastic stress-strain model for nonassociated behavior of soil. Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials, by Fan J. and Murakami S., 1989, I; 276~281
- 70 沈珠江. 土的重屈服面应力应变模式. 固体力学学报, 1982 (2): 163~174
- 71 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变模型. 岩土工程学报, 1988, 10 (4): 64~71
- 72 郑颖人, 严德俊. 基于试验拟合的土的多重屈服面模型. 见: 第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 武汉测绘大学出版社, 1994: 9~14
- 73 Mroz Z. On the description of anisotropic hardening, J. Mech. & Physics of Solids, 1967, 15: 163~175
- 74 Prevost J H. Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behavior, Int. J. Num. Ana. Meth. in Geomech. 1977, 1 (1): 195~216
- 75 Mroz Z, Norris V A and Zienkiewicz O C. Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, Geotechnique, 1979, 29 (1): 1~34
- 76 Dafalias Y F and Herrmann L R. A bounding surface soil plasticity model. In: Soils under Cyclic and Transient Loading, 1980, 1: 335~346
- 77 Bardet J P. Bounding Surface plasticity model for sands, J. GED, ASCE, 1986, 112 (11): 1198~1217
- 78 Wang Z L, Dafalias Y F and Shen C K. Bounding surface hypoplasticity model for sand, J. EMD, ASCE, 1990, 116 (5): 983~1001
- 79 陈生水, 沈珠江, 顾能惠. 复杂应力路径下无粘性土的弹塑性数值模拟. 岩土工程学报, 1995, 17 (2): 20~28
- 80 Bazant Z P and Krizek R J. Endochronic constitutive law for liquefaction of sand, Proc. ASCE, 1976, 102 (EM2): 331~344
- 81 王建国. 土的剪胀性分析及内时本构模型. 见: 第六届土力学及基础工程学术会议论文集. 上海: 同济大学出版社, 1991: 199~202
- 82 Wu H C and Aboutorati M R Endochronic model of sand with circular stress path, J. GED, ASCE, 1988, 114 (1): 93~103
- 83 Kolymbas D. An outline of hypoplasticity, Archive of Applied Mechanics, 1991, 61: 143~151
- 84 Wu W and Bauer E. A simple hypoplastic constitutive model for sand, Int. J. Num. Ana. Meth. in Geomech., 1994, 18: 833~862
- 85 Gudehus G. A comprehensive constitutive equation for granular materials. Soils and Foundations, 1996, 36 (1): 1~12
- 86 Bauer E. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. Soils and Foundations, 1996, 36 (1): 13~26
- 87 Zhang L. Updated hypoplastic analysis of the behavior of soils under cyclic loading. In: 9th Int. Conf. Computer Method and Advances in Geomechanics, Wuhan, 1997, I: 929~934
- 88 Pastor M, Zienkiewicz O C and Chan A H C. Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour, Int. J. Num. Ana. Meth. Geom. 1990, 14 (3): 151~190
- 89 Singh A and Mitchell J K. General stress-strain-time function for soils, J. Soil Mech. Found. Div, ASCE, 1968, 94 (1): 21~46
- 90 Mesri G et al. Shear stress-strain-time behaviour of clays, Geotechnique, 1981, 31 (4): 37~552
- 91 [俄] ВЯЛОВ С С. 土力学的流变原理. 杜余培译. 北京: 科学出版社, 1987
- 92 Hardin B O and Draevich V P, Shear modulus and damping in soil. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, 1972, 98 (7): 667~692

- 93 Martin G R et al. Fundamentals of liquefaction under cyclic loading, *J. Geot. Eng. Div. , ASCE*, 1975, 101 (5): 423~438
- 94 沈珠江. 一个计算砂土液化变形的等价粘弹性模式, In: 11 Int. Conf. SMFE, San Francisco, 1985; 659~662
- 95 Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in App. Mech. , 9*: 243~377, 1966
- 96 Zienkiewicz O C and Humpheson C. Viscoplasticity — a generalized model for description of soil behavior. *Numerical Methods in Geot. Eng. , Chapter 3*, 1979; 116~147
- 97 Adachi T and Oka F. Constitutive equation for normally consolidated clay based on elasto — viscoplasticity, *Soils & Foundations*, 1982, 22 (4): 57~70
- 98 Sekiguchi H, Rheological characteristics of clay, In: 9 ICSMFE, 1977, 1: 289~292
- 99 Matsui T and Abe N, Elasto- viscoplastic constitutive equation of normally consolidated clays based on flow surface theory, In: 5 Int. Conf. Num. Methods in Geomech. , Nagoya, 1985, 1: 307~413
- 100 沈珠江. 土石料的流变模型及其应用. *水利水运科学研究*. 1994 (4): 335~342
- 101 Borja R I and Kavazanjian E. A constitutive model for the stress — strain — time behavior of 'wet' clays, *Geotechnique*, 1985, 35 (3): 283~298
- 102 Morsy M M, Chan D H and Morgensten N R. An effective stress model for creep of clay, *Can. Geot. J. , 1995*, 32 (5): 819~834
- 103 袁建新. 土的粘弹塑性关系. *岩土工程学报*, 1982, 4 (4): 39~44
- 104 谢宁, 孙钧. 土体非线性流变的有限元解析及其工程应用. *岩土工程学报*, 1995, 17 (4): 95~99
- 105 Chang C S. Numerical and analytical modeling of granulates, In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomechanics, Wuhan, 1997, 1: 105~114
- 106 Lin X and Ng T T. A three — dimensional discrete element model using arrays of ellipsoids, *Geotechnique*, 1997 47, (7): 319~329
- 107 Oda M, Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular materials, *Soils & Foundations*, 1972, 12 (1): 17~36
- 108 Shi Bin, Quantitative analysis of the microstructural changes of remoulded clayey soil in the process of compaction. In: Int. Conf. on Unsaturated soils, Paris, 1995, 1: 23~30
- 109 Rowe P W. The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc. Royal Society, London, Series A*, 1962; 500~527
- 110 Matsuoka H. Stress — strain relationships of sands based on the mobilized plane, *Soils & Foundations*, 1974, 14 (2): 45~61
- 111 Aubry D, Hujeux J C. A double memory model with multiple mechanisms for cyclic soil behaviour, In: Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, 1982; 3~13
- 112 Kabilamany K, Ishihara K. Cyclic behaviour of sand by the multiple shear mechanism model, *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, 1991, 10 (2): 24~83
- 113 Pande G N and Sharma K G. Multilaminate model of clays — A numerical evaluation of the influence of rotation of principal stress axes, *Int. J. for Num. Anal. Meth. in Geomech. , 1983*
- 114 Iai S, Matsunaga Y, Kameoka T. Strain space plasticity model for cyclic mobility, *Soils & Foundations*, 1992, 32 (2): 1~15
- 115 沈珠江. 砂土本构理论的检讨与重建, 见: 第六届在全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 广州: 1998, 1: 1~10
- 116 沈珠江. A granular medium model for liquefaction analysis of sands. *岩土工程学报*, 1999, 21 (6): 742~748
- 117 沈珠江. 结构性粘土的非线性损伤力学模型. *水利水运科学研究*, 1993 (4): 247~255

- 118 沈珠江. 土体变形特性的损伤力学模拟. 见: 第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 重庆, 1994, I: 1~8
- 119 Desai C S, Shao C and Park I J. Disturbed state modeling of cyclic behavior of soils and interface in dynamic soils structure interaction. In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech., Wuhan 1997, I: 31~42
- 120 蒋明镜, 沈珠江. Behaviour of artificially prepared structured samples and numerical simulation. In: 14 ICSMFE, Hambourg, 1997, I: 319~322
- 121 蒋明镜, 沈珠江. Microscopic analysis of shear band in structured clay. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 102~108
- 122 沈珠江. 结构性粘土的堆砌体模型. 岩土力学, 2000, 21(1): 1~4

第三章 弹性应力理论

第一节 弹性理论的基本方程

本章介绍古典土力学理论中把土当作弹性介质所取得的主要研究成果。为此，首先把弹性理论的基本方程式列出如下^[1]。

1. 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \ddot{u}_x = 0 \quad (3-1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \ddot{u}_y = 0 \quad (3-1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \ddot{u}_z = 0 \quad (3-1c)$$

2. 广义虎克定律

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

3. 变形的几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \epsilon_y &= -\frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \epsilon_z &= -\frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zx} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

把式 (3-3) 代入式 (3-2) 后再代入式 (3-1)，可得以变位 u_x , u_y , u_z 为变量的方程式如下

$$G \left[\nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \rho \ddot{u}_x \quad (3-4a)$$

$$G \left[\nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \rho \ddot{u}_y \quad (3-4b)$$

$$G \left[\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \rho \ddot{u}_z \quad (3-4c)$$

对式(3-4a)~式(3-4c)分别乘以 $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$,考虑到 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\epsilon_v$,相加后可得

$$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \epsilon_v = \rho \frac{\partial^3 \epsilon_v}{\partial t^2} \quad (3-5a)$$

或考虑到 $\sigma_m = \frac{E}{3(1-2\nu)} \epsilon_v$,得

$$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \sigma_m = \rho \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial t^2} \quad (3-5b)$$

另一方面,如果把式(3-1)和式(3-2)代入式(3-3),可得以应力为变量的方程式如下

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial x^2} &= -\rho \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial y^2} &= -\rho \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial z^2} &= -\rho \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right] \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial x \partial y} &= -\rho(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial y \partial z} &= -\rho(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial z \partial x} &= -\rho(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

在静力条件下,上式简化为

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial x^2} &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial y^2} &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial z^2} &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial x \partial y} &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial y \partial z} &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + 3 \frac{\partial^3 \sigma_m}{\partial z \partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

第二节 弹性地基中的应力

一、集中力作用下的有限厚地基

设土层厚为 H ,底面与基岩或坚实土层接触,表面为自由面,则边界条件为

$$\tau_{zx}|_{z=0} = 0; \quad \tau_{yz}|_{z=0} = 0 \quad (3-8a)$$

$$u_x|_{z=H} = 0; \quad u_y|_{z=H} = 0; \quad u_z|_{z=H} = 0 \quad (3-8b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z|_{z=0} dx dy = P \quad (3-8c)$$

式中：P 为集中力。静力条件下式 (3-5b) 简化为

$$\nabla^2 \sigma_m = 0 \quad (3-9)$$

设 σ_m 满足下列边界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m|_{z=0} &= p_1(x, y) = p_1(r) \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial z}|_{z=H} &= p_2(x, y) = p_2(r) \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则满足式 (3-9) 及边界条件式 (3-10) 的解将为

$$\sigma_m = \frac{2(1+\nu)P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{\text{ch}(H-z)}{\text{ch}Hr} S_1(r) + \frac{\text{sh}zr}{\text{ch}Hr} S_2(r) \right] \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (3-11)$$

$$\text{其中} \quad \left. \begin{aligned} S_1(r) &= \frac{1+\nu}{2P} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_1(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \\ S_2(r) &= \frac{1+\nu}{2P} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_2(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

式中： p_1 和 p_2 是待定函数； S_1 和 S_2 也是待定函数。

把式 (3-11) 代入式 (3-7)，即可得下列应力表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\left(2 + 2\nu \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \text{ch}(H-z)r - zr \text{sh}(H-z)r - A \text{sh}zr \right] S_1(r) \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(2 + 2\nu \frac{\beta^2}{\alpha^2} + B \right) \text{sh}zr + zr \text{ch}zr \right] S_2(r) - \frac{\text{ch}(H-z)r}{\text{ch}Hr} \right\} \\ &\quad \times \frac{\alpha^2}{r^2} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \\ \sigma_y &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\left(2 + 2\nu \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \text{ch}(H-z)r - zr \text{sh}(H-z)r - A \text{sh}zr \right] S_1(r) \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(2 + 2\nu \frac{\alpha^2}{\beta^2} + B \right) \text{sh}zr + zr \text{ch}zr \right] S_2(r) - \frac{\text{ch}(H-z)r}{\text{ch}Hr} \right\} \\ &\quad \times \frac{\beta^2}{r^2} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \\ \sigma_z &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left[(zr \text{sh}(H-z)r + A \text{sh}zr) S_1(r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [zr \cos zr + B \text{sh}zr] S_2(r) + \frac{\text{ch}(H-z)r}{\text{ch}Hr} \right] \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \right. \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ (zr \text{sh}(H-z)r - 2(1-\nu) \text{ch}(H-z)r + A \text{sh}zr) S_1(r) \right. \\ &\quad \left. - [(2-2\nu+B) \text{sh}zr + zr \text{ch}zr] S_2(r) + \frac{\text{ch}(H-z)r}{\text{ch}Hr} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ [zr \operatorname{ch}(H-z)r - \operatorname{sh}(H-z)r - Achzr] \right. \\ &\quad \times S_1(r) + [(1+B)\operatorname{chzr} + zr \operatorname{shzr}] S_2(r) + \frac{\operatorname{sh}(H-z)r}{\operatorname{ch}Hr} \left. \right\} \\ &\quad \times \frac{\beta}{r} \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \\ \tau_{zx} &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ [zr \operatorname{ch}(H-z)r - \operatorname{sh}(H-z)r - Achzr] S_1(r) \right. \\ &\quad + [(1+B)\operatorname{chzr} + zr \operatorname{shzr}] S_2(r) + \frac{\operatorname{sh}(H-z)r}{\operatorname{ch}Hr} \left. \right\} \frac{a}{r} \\ &\quad \times \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \right\}$$

另一方面，从 σ_m 可得出 ϵ_v ，把 ϵ_v 代入式 (3-4) 中即可得出三个位移分量的表达式如下

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1+\nu}{E} \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ [zr \operatorname{sh}(H-z)r - 2(1-\nu)\operatorname{ch}(H-z)r + Ashzr] S_1(r) \right. \\ &\quad - [(2-2\nu+B)\operatorname{shzr} + zr \operatorname{chzr}] S_2(r) + \frac{\operatorname{ch}(H-z)r}{\operatorname{ch}Hr} \left. \right\} \\ &\quad \times \frac{a}{r^2} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \\ u_y &= \frac{1+\nu}{E} \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ [zr \operatorname{sh}(H-z)r - 2(1-\nu)\operatorname{ch}(H-z)r + Ashzr] S_1(r) \right. \\ &\quad - [(2-2\nu+B)\operatorname{shzr} + zr \operatorname{chzr}] S_2(r) + \frac{\operatorname{ch}(H-z)r}{\operatorname{ch}Hr} \left. \right\} \\ &\quad \times \frac{\beta}{r^2} \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \\ u_z &= \frac{1+\nu}{E} \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty [zr \operatorname{ch}(H-z)r + (1-2\nu)\operatorname{sh}(H-z)r - Achzr] S_1(r) \\ &\quad + [zr \operatorname{shzr} + (B-1+2\nu)\operatorname{chzr}] S_2(r) + \frac{\operatorname{sh}(H-z)r}{\operatorname{ch}Hr} \left. \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{r} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \right\} (3-14)$$

上述式中 $A = \frac{Hr}{\operatorname{ch}Hr}$ ， $B = 1 - 2\nu - Hr \operatorname{th}Hr$ 。但式中均包含未知函数 S_1 和 S_2 。把 $z=0$ 代入式 (3-13)，再把 $z=H$ 代入式 (3-14)，根据边界条件式 (3-8) 可求出 S_1 和 S_2 如下

$$\left. \begin{aligned} S_1(r) &= \frac{2(1-\nu) + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 Hr}{4(1-\nu)^2 + (Hr)^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 Hr} \frac{1}{\operatorname{ch}Hr} \\ S_2(r) &= \frac{Hr \operatorname{ch}Hr - (1-2\nu)\operatorname{sh}Hr}{4(1-\nu)^2 + (Hr)^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 Hr} \frac{1}{\operatorname{ch}Hr} \end{aligned} \right\} (3-15)$$

把它们代回到式 (3-13) 和式 (3-14) 中，即是最终解答。

以上解答由黄传志得出^[2], 求解过程中未用到 Bessel 函数和 Henkel 变换, 比 Burmister 最早求得的解简单^[3]。

作为特例, $H \rightarrow \infty$ 时, 上述解答即简化为 Boussinesq 解。

二、集中力及线性荷载作用下的若干解答

下面不加推导列出若干重要解答, 更详细地介绍参见文献 [4]。

1. Boussinesq 解 (垂直集中力 P)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - \frac{(1-2\nu)R}{R+z} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_z &= \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \\ \tau_{rz} &= \frac{3Prz^2}{2\pi R^5} \\ u_r &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right] \\ u_z &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

其中

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. Cerutti 解 (切向力 Q 沿 x 向作用)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(r^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[\frac{3y^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(3r^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_z &= \frac{3Qxz^2}{2\pi R^5} \\ \tau_{xy} &= \frac{Qy}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} + \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \tau_{yz} &= \frac{3Qxyz}{2\pi R^5} \\ \tau_{xz} &= \frac{3Qx^2z}{2\pi R^5} \\ u_x &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi ER} \left[1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{(1-2\nu)}{R+z} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] \\ u_y &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi ER} \left[\frac{xy}{R^2} - \frac{(1-2\nu)xy}{(R+z)^2} \right] \\ u_z &= \frac{(1+\nu)Q}{2\pi ER} \left[\frac{xz}{R^2} + \frac{(1-2\nu)x}{R+z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

3. Mindlin 解之一 (垂直力作用于距表面 c 的一点)

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{3\nu^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)(z+7c)}{R_2^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(3-4\nu)c^2(z-c) - 6c(z+c)[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R_2^5} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{30cx^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left[1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right] \right\} \\
 \sigma_\theta &= \frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{z-c}{R_1^3} - \frac{(3-4\nu)(z+c) - 6c}{R_2^3} - \frac{6c(z+c)^2}{R_2^5} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6c^2(z+c)}{(1-2\nu)R_2^3} + \frac{4(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right] \\
 \sigma_z &= \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(3-4\nu)z(z+c)^2 - 3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right] \\
 \tau_{rz} &= \frac{Pr}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-2\nu}{R_2^3} + \frac{3(3-4\nu)z(z+c) - 3c(3z+c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right] \\
 u_r &= \frac{Pr}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \\
 u_z &= \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right]
 \end{aligned} \tag{3-18}$$

式中 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}$, $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}$

4. Mindlin 解之二 (水平力)

水平集中力作用于距地面 c 处 x 方向

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{Qx}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6c}{R_2^5} \left[3c - (3-2\nu)(z+c) + \frac{5x^2z}{R_2^2} \right] \right\} \\
 \sigma_y &= \frac{Qx}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R_2^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(3-4\nu)y^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[1 - \frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6c}{R_2^5} \left[c - (1 - 2\nu)(z + c) + \frac{5yz^2}{R_2^2} \right] \\
\sigma_x = & \frac{Qx}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ - \frac{(1 - 2\nu)}{R_1^3} + \frac{3(z - c)^2}{R_1^5} \right. \\
& + \frac{(1 - 2\nu)}{R_2^3} + \frac{3(3 - 4\nu)(z + c)^2}{R_2^5} \\
& \left. - \frac{6c}{R_2^5} \left[c + (1 - 2\nu)(z + c) + \frac{5z(z + c)^2}{R_2^2} \right] \right\} \\
\tau_{xy} = & \frac{Qy}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{1 - 2\nu}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{1 - 2\nu}{R_2^3} \right. \\
& + \frac{3(3 - 4\nu)x^2}{R_2^5} + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + c)^2} \\
& \left. + \left[1 - \frac{x^2(3R_2 + z + c)}{R_2^2(R_2 + z + c)} \right] + \frac{6cz}{R_2^5} \left[1 - \frac{5x^2}{R_2^2} \right] \right\} \\
\tau_{yx} = & \frac{Qxy}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{3(z - c)}{R_1^5} \right. \\
& \left. + \frac{3(3 - 4\nu)(z + c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left[1 - 2\nu + \frac{5z(z + c)}{R_2^2} \right] \right\} \\
\tau_{xz} = & \frac{Q}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)(z - c)}{R_1^3} + \frac{3x^2(z - c)}{R_1^5} \right. \\
& - \frac{(1 - 2\nu)(z - c)}{R_2^3} + \frac{3(3 - \nu)x^2(z + c)}{R_2^5} \\
& \left. + \frac{6c}{R_2^5} \left[z(z + c) - (1 - 2\nu)x^2 - \frac{5x^2z(z + c)}{R_2^2} \right] \right\} \\
u_x = & \frac{Q}{16\pi G(1 - \nu)} \left\{ \frac{(3 - 4\nu)}{R_1} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{1}{R_2} \right. \\
& + \frac{(3 - 4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) \\
& \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2 + z + c} \left[1 - \frac{x^2}{R_2(R_2 + z + c)} \right] \right\} \\
u_y = & \frac{Qxy}{16\pi G(1 - \nu)} \left\{ \frac{1}{R_1^3} + \frac{3 - 4\nu}{R_2^3} \right. \\
& \left. - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + c)^2} \right\} \\
u_z = & \frac{Qx}{16\pi G(1 - \nu)} \left\{ \frac{z - c}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(z - c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z + c)}{R_2^5} \right. \\
& \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + x)} \right\}
\end{aligned} \tag{3-19}$$

5. 地表线性垂直荷载

p 为单位长度上沿 y 方向分布的垂直荷载

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2p}{\pi} \frac{x^2 z}{r^4} \\ \sigma_y &= \frac{2p\nu}{\pi} \frac{z}{r^2} \\ \sigma_z &= \frac{2p}{\pi} \frac{z^3}{r^4} \\ \tau_{xz} &= \frac{2p}{\pi} \frac{xz^2}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

6. 地表线性水平荷载

q 为沿 y 向分布的单位荷载

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2qx^3}{\pi r^4} \\ \sigma_y &= \frac{2q}{\pi} \frac{xz^2}{r^4} \\ \sigma_z &= \frac{2q}{\pi} \frac{xz^2}{r^4} \\ \tau_{xy} &= \frac{2q}{\pi} \frac{x^2 z}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

7. 地表作用的环形线性垂直荷载

设 p 为单位垂直荷载, 圆环半径为 a , 坐标原点在地表环形中心, 则沿坐标轴 z 的应力和变位

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{pza}{2(a^2 + z^2)^{5/2}} [2(1 + \nu)(a^2 + z^2) - 3z^2] \\ \sigma_z &= \frac{3pz^3 a}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \\ \tau_{rz} &= 0 \\ u_r &= 0 \\ u_z &= \frac{p(1 + \nu)a}{E(a^2 + z^2)^{1/2}} \left[2(1 - \nu) + \frac{z^2}{a^2 + z^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

8. Melan 解之一

p 为距地表 d 处沿 y 向分布的单位垂直荷载, $r_1 = \sqrt{x^2 + (z-d)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + (z+d)^2}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(z-d)x^2}{r_1^4} + \frac{(z+d)(x^2 + 2d^2) - 2dx^2}{r_2^4} + \frac{8dz(d+x)x^2}{r_2^6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2\nu}{2} \left[-\frac{z-d}{r_1^2} + \frac{z+3d}{r_2^2} + \frac{4zx^2}{r_2^4} \right] \right\} \\ \sigma_z &= \frac{p}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(z-d)^3}{r_1^4} + \frac{(z+d)[(z+d)^2 + 2dz]}{r_2^4} - \frac{8dz(d+x)x^2}{r_2^6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2\nu}{2} \left[\frac{z-d}{r_1^2} + \frac{3z+d}{r_2^2} - \frac{4zx^2}{r_2^4} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

$$\tau_{xz} = \frac{px}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(z-d)^2}{r_1^4} + \frac{z^2 - 2dz - d^2}{r_2^4} + \frac{8dz(d+z)^2}{r_2^6} + \frac{1-2\nu}{2} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{4z(d+z)}{r_2^4} \right] \right\}$$

9. Melan 解之二

q 为距地表 d 处沿 y 向分布和沿 x 向作用的单位水平荷载

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{qx}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{x^2}{r_1^4} + \frac{x^2 + 8dz + 6d^2}{r_2^4} + \frac{8dz(d+z)^2}{r_2^6} + \frac{1-2\nu}{2} \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_2^2} - \frac{4z(d+z)}{r_2^4} \right] \right\} \\ \sigma_z &= \frac{qx}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(z-d)^2}{r_1^4} - \frac{d^2 - z^2 + 6dz}{r_2^4} + \frac{8dzx^2}{r_2^6} - \frac{1-2\nu}{2} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1-2\nu}{r_2^2} - \frac{4z(d+z)}{r_2^4} \right] \right\} \\ \tau_{xz} &= \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(z-d)x^2}{r_1^4} + \frac{(2dz + x^2)(d+z)}{r_2^4} - \frac{8dz(d+z)x^2}{r_2^6} + \frac{1-2\nu}{2} \left[\frac{z-d}{r_1^2} + \frac{3z+d}{r_2^2} - \frac{4z(d+z)}{r_2^4} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

三、分布荷载及刚性压板问题的若干解答

1. 条形垂直均布荷载 Flamant 解 (图 3-1, a)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} [a - \sin\alpha \cos(\alpha + 2\delta)] \\ \sigma_y &= \frac{2p}{\pi} \nu \alpha \\ \sigma_z &= \frac{p}{\pi} [a + \sin\alpha \cos(\alpha + 2\delta)] \\ \tau_{xz} &= \frac{p}{\pi} \sin\alpha \sin(\alpha + 2\delta) \\ \sigma_1 &= \frac{p}{\pi} (a + \sin\alpha) \\ \sigma_3 &= \frac{p}{\pi} (a - \sin\alpha) \\ u_x(x, 0) &= \frac{2p(1-\nu^2)}{\pi E} [2b + (x-b)\ln|x-b| - (x+b)\ln(x+b)] \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

2. 条形水平均布荷载

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{\pi} \left[\ln \frac{r_1^2}{r_2^2} - \sin\alpha \sin(\alpha + 2\delta) \right] \\ \sigma_z &= \frac{q}{\pi} \sin\alpha \sin(\alpha + 2\delta) \\ \tau_{xz} &= \frac{q}{\pi} [a - \sin\alpha \cos(\alpha + 2\delta)] \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

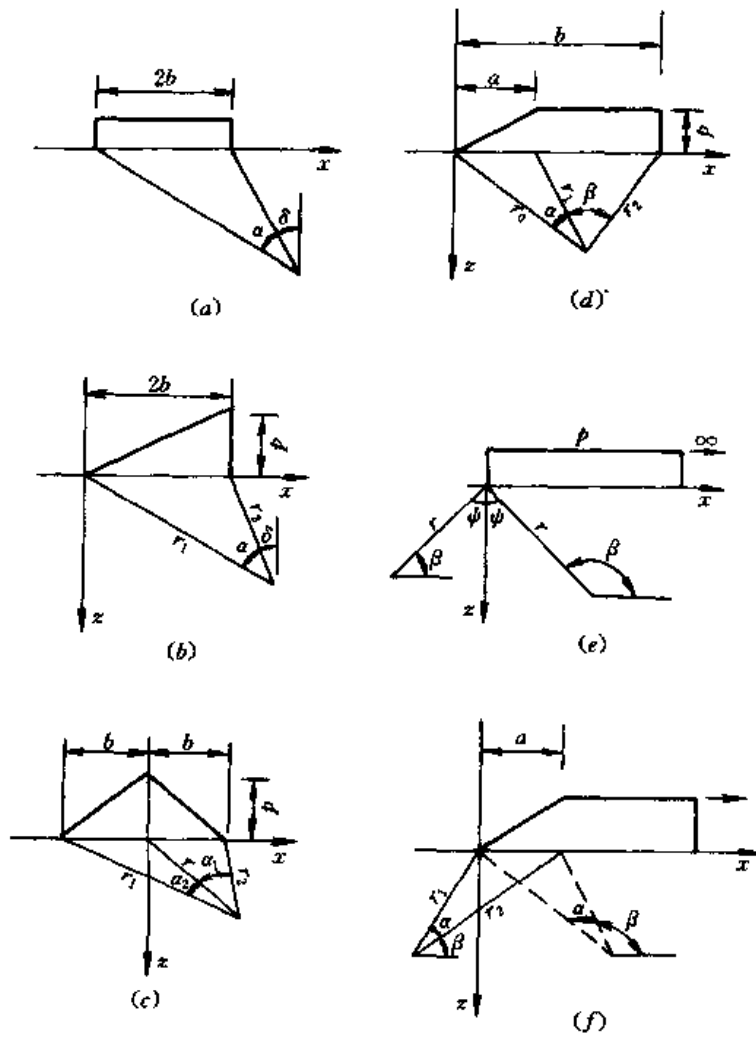


图 3-1 分布荷载

3. 条形垂直线性递增荷载 (图 3-1, b)

p 为最大荷载强度

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{2\pi} \left(\frac{x}{b} a - \frac{z}{b} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + \sin 2\delta \right) \\ \sigma_z &= \frac{p}{2\pi} \left(\frac{x}{b} a - \sin 2\delta \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{p}{2\pi} \left(1 + \cos 2\delta - \frac{za}{b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

4. 条形水平线性递增荷载

q 为最大荷载强度

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{3za}{b} + \frac{x}{b} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} - \cos 2\delta - 5 \right) \\ \sigma_z &= \frac{q}{2\pi} \left(1 + \cos 2\delta - \frac{za}{b} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{xa}{b} - \frac{z}{b} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + \sin 2\delta \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

5. 条形对称三角荷载 (图 3-1, c)

p 为最大荷载强度

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{b} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{2\pi}{b} \ln \frac{r_1 r_2}{r_0^2} \right] \\ \sigma_z &= \frac{p}{\pi} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{b} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \\ \tau_{xz} &= \frac{pz}{\pi b} (\alpha_1 - \alpha_2) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{p}{\pi} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{b} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{z}{b} \ln \frac{r_1 r_2}{r_0^2} \pm \frac{pz}{\pi b} \left[\ln^2 \frac{r_1 r_2}{r_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \right\} (3-29)$$

6. 条形“堤坝”荷载 (图 3-1, d)

p 为均布荷载

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} \left[\beta + \frac{x\alpha}{a} + \frac{z}{r_2^2} (x - b) + \frac{2z}{a} \ln \frac{r_1}{r_0} \right] \\ \sigma_z &= \frac{p}{\pi} \left[\beta + \frac{x\alpha}{a} - \frac{z}{r_2^2} (x - b) \right] \\ \tau_{xz} &= -\frac{p}{\pi} \left(\frac{z\alpha}{a} - \frac{z^2}{r_2^2} \right) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{p}{\pi} \left\{ \beta + \frac{x\alpha}{a} + \frac{z}{a} \ln \frac{r_1}{r_2} \pm \frac{z}{a} \left[\left(\frac{\alpha(x-b)}{r_2^2} + \ln \frac{r_1}{r_0} \right)^2 + \left(\alpha - \frac{az}{r_2^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \right\} (3-30)$$

7. 半无限垂直均布荷载 (图 3-1, e)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} \left(\beta - \frac{xz}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{p}{\pi} \left(\beta + \frac{xz}{r^2} \right) \\ \tau_{xz} &= -\frac{p}{\pi} \sin^2 \beta \\ \left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{p}{\pi} (\beta \pm \sin \beta) \end{aligned} \right\} (3-31)$$

8. 半无限垂直线性递增荷载

荷载强度 $p = \bar{p}x$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\bar{p}}{\pi} (x\beta - z - 2z \ln r) \\ \sigma_z &= \frac{\bar{p}}{\pi} (x\beta + z) \\ \tau_{xz} &= \frac{\bar{p}}{\pi} z\beta \\ \left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{\bar{p}}{\pi} (x\beta - z \ln r) \pm \frac{\bar{p}z}{\pi} [(1 + \ln r)^2 + \beta^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} (3-32)$$

9. 半无限“堤坝”荷载 (图 3-1, f)

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{p}{\pi a} \left(a\beta + xa + 2z \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{p}{\pi a} (a\beta + xa) \\
 \tau_{xy} &= -\frac{p}{\pi a} xa \\
 \sigma_1 \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{aligned}} \right\} &= \frac{p}{\pi a} \left[a\beta + xa + z \ln \frac{r_2}{r_1} \pm z \left(\ln^2 \frac{r_2}{r_1} + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]
 \end{aligned} \right\} (3-33)$$

10. 圆形垂直均布荷载

加载面积的半径为 a ，荷载强度 p ，则中轴线上的应力和变

位为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left[(1 + 2\nu) - \frac{2(1 + \nu)z}{r_0} \right] \\
 \sigma_z &= p \left[1 - \left(\frac{z}{r_0} \right)^3 \right] \\
 u_z &= \frac{2p(1 - \nu^2)}{E} (r_0 - z) \left[1 + \frac{z}{2(1 - \nu)r_0} \right]
 \end{aligned} \right\} (3-34)$$

式中

$$r_0 = \sqrt{z^2 + a^2}$$

11. 矩形垂直均布荷载

设 l 和 b 分别为矩形的长和宽，且 x 为长轴方向，则角点处的

的应力和变位如下 (图 3-2, a)

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{p}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} - \frac{lbz}{R_1^2 R_3} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{p}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} - \frac{lbz}{R_2^2 R_3} \right) \\
 \sigma_z &= \frac{p}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{b}{zR_3} + \frac{lbz}{R_3} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi} \left[1 + \frac{z}{R_3} - z \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \\
 \tau_{yx} &= \frac{p}{2\pi} \left(\frac{l}{R_1} - \frac{z^2 l}{R_2^2 R_3} \right) \\
 \tau_{xz} &= \frac{p}{2\pi} \left(\frac{b}{R_2} - \frac{z^2 b}{R_1^2 R_3} \right) \\
 u_z &= \frac{p(1 - \nu^2)}{2\pi E} \left(b \ln \frac{R_3 + l}{R_3 - l} + l \ln \frac{R_3 + b}{R_3 - b} - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} z \tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} \right)
 \end{aligned} \right\} (3-35)$$

其中 $R_1 = \sqrt{l^2 + z^2}$, $R_2 = \sqrt{b^2 + z^2}$, $R_3 = \sqrt{l^2 + b^2 + z^2}$ 。

12. 矩形水平均布荷载

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{q}{2\pi} \left[2 \ln \frac{R_1(b+R_2)}{z(b+R_3)} - \frac{l^2 b}{R_1^2 R_3} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{R_1(b+R_2)}{z(b+R_3)} - b \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] \\
 \sigma_z &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{b}{R_2} - \frac{z^2 b}{R_1^2 R_3} \right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{(R_1+l)(R_3-l)}{zb} + l \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \\
 \tau_{yx} &= \frac{q}{2\pi} \left[1 + \frac{z}{R_3} - z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \\
 \tau_{xz} &= \frac{q}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} - \frac{lbz}{R_1^2 R_3} \right) \\
 u_x &= \frac{(1+\nu)q}{\pi E} \left[(1-\nu) l \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}+b}{l} + b \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}+l}{b} \right] \\
 u_y &= \frac{\nu(1+\nu)q}{\pi E} (l+b-R_2) \\
 u_z &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)q}{2\pi E} \left(l \tan^{-1} \frac{b}{l} + b \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}}{b} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

13. 矩形垂直递增荷载

设荷载强度从 $-p$ 递增到 $+p$ ，则角点处的沉降为（图 3-2, b）

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)p}{\pi E} \left(\frac{b^2}{l} + \frac{b\sqrt{l^2+b^2}}{l} + b \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}+l}{b} \right) \quad (3-37)$$

14. 矩形水平递增荷载

设荷载强度沿 x 方向从 $-q$ 递增到 $+q$ ，则角点处的变位为（图 3-2, c）

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= -\frac{(1+\nu)q}{\pi E} \left(b \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}+l}{b} - (1-\nu) \frac{b}{l} (\sqrt{l^2+b^2}-b) \right) \\
 u_y &= -\frac{\nu(1+\nu)q}{\pi E} \left(b - \frac{b^2}{l} \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}+l}{b} \right) \\
 u_z &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)q}{2\pi E} \left(-b + \frac{b^2}{l} \tan^{-1} \frac{l}{b} + \ln \frac{\sqrt{l^2+b^2}}{b} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

15. 扇形垂直均布荷载

当在半径 r 和角度 2θ 扇形区域内作用均布荷载 p 时，坐标原点的径向和垂直变位为

$$\left. \begin{aligned}
 u_r &= \frac{p}{\pi E} (1+\nu)(1-2\nu)r\theta \\
 u_z &= \frac{2p}{\pi E} (1-\nu^2)r\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

16. 地面下矩形垂直均布荷载

当矩形垂直荷载作用于地面下深度 d 处时，角点的垂直应力和沉降公式为

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{p}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-\nu) \left[\tan^{-1} \frac{lb}{(z-d)R_1} + \tan^{-1} \frac{lb}{(z+d)R_2} \right] + \frac{(z-d)bR_1}{2lr_1^2} - \frac{l(z-d)^3}{2lr_3^2 R_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{[(3-4\nu)z(z+d) - d(5z-d)]bR_2}{2(z+d)lr_2^2} - \frac{[(3-4\nu)z(z+d)^2 - d(z+d)(5z-d)]b}{2lr_1^2 R_2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2dz(x+d)bR_2^3}{l^3r_2^3} + \frac{3dzbR_2r_2^2}{(z+d)l^3r_2^2} - \frac{dz(z+d)^3b}{lr_2^3R_2} \left[\frac{2l^2 - (z+d)^2}{l^2} - \frac{l^2}{R_2^2} \right] \\
u_z = & \frac{(1+\nu)p}{8\pi(1-\nu)E} \left\{ (3-4\nu) \left[l \ln \frac{b + \sqrt{l^2 + b^2}}{l} + b \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2}}{b} \right] \right. \\
& + (5-12\nu+8\nu^2) \left[b \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2 + 4d^2}}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} + l \ln \frac{b + \sqrt{l^2 + b^2 + 4d^2}}{\sqrt{l^2 + 4d^2}} - 2d \tan^{-1} \left(\frac{2b}{d} \right) \right. \\
& \left. \left. + 4d \tan^{-1} \frac{(l - \sqrt{l^2 + 4d^2})(\sqrt{l^2 + 4d^2} - \sqrt{l^2 + b^2 + 4d^2})}{2bd} \right] + (3-4\nu) 2d \tan^{-1} \frac{lb}{2d \sqrt{l^2 + b^2 + 4d^2}} \right. \\
& \left. + 8 \frac{bd^4 \sqrt{l^2 + b^2 + 4d^2}}{(l^2 + 4d^2)[(l^2b^2 + 4d^2)(l^2 + b^2 + 4d^2)]} \left(2 + \frac{l^2}{4d^2} - \frac{b^2}{l^2 + b^2 + 4d^2} \right) \right\} \quad (z=d \text{ 处})
\end{aligned} \tag{3-40}$$

其中 $R_1 = l^2 + b^2 + (z-d)^2, R_2 = l^2 + b^2 + (z+d)^2, r_1^2 = b^2 + (z-d)^2$
 $r_2^2 = b^2 + (z+d)^2, r_3^2 = l^2 + (z-d)^2, r_4^2 = l^2 + (z+d)^2$
 $r_5^2 = l^2 - (z+d)^2$

17. 地面下圆形垂直均匀荷载

均布荷载作用于深度 d 处半径为 a 的圆形区域, 则荷载中心线上的垂直应力和垂直变位公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_{z_0} = & \frac{p}{4(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)(z-d) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{z-d} - \frac{1}{z+d} \right] \right. \\
& - \frac{3(3-4\nu)z(z+d)^2 - 3d(z+d)(z-d) \left[\left(\frac{z+d}{r_1} \right)^3 - 1 \right]}{3(z+d)^3} \\
& \left. + 1 - \left(\frac{z-d}{r_2} \right)^3 + \frac{6dz}{(z+d)^2} \left[1 - \left(\frac{z+d}{r_2} \right)^3 \right] \right\} \\
u_{z_0} = & \frac{p(1+\nu)}{4E(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)[r_2 - (z-d)] + (5-12\nu+8\nu^2)[r_1 - (z+d)] \right. \\
& + (z-d) \left[1 - \frac{z-d}{r_2} \right] + \frac{(3-4\nu)(z+d)^2 - 2dz}{z+d} - \frac{2dz(z+d)^2}{r_1^3} \\
& \left. + \frac{2dz}{z+d} - \frac{(3-4\nu)(z+d)^2 - 2dz}{r_1} \right\}
\end{aligned} \tag{3-41}$$

其中 $r_1^2 = a^2 + (z+d)^2, r_2^2 = a^2 + (z-d)^2$

18. 条形光滑刚性压板 (垂直荷载)

设 \bar{p} 为平均压力, $2b$ 为条宽, 则接触压力公式为

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \frac{\bar{p}b}{\sqrt{b^2 - x^2}} \tag{3-42}$$

19. 条形光滑刚性压板 (转动荷载)

设作用的转动力矩为 M , 则接触压力及转角公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \frac{M}{\pi b^3} \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} \\
\phi = & \frac{2(1-\nu^2)M}{\pi E b^3}
\end{aligned} \tag{3-43}$$

20. 条形粗糙刚性压板 (垂直荷载)

接触压力公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2\bar{p}b}{\pi \sqrt{b^2 - x^2}} \frac{4(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \cos \left[\frac{\ln(3-4\nu)}{2\pi} \ln \frac{b+x}{b-x} \right] \\ \tau_{xz} &= \frac{2\bar{p}b}{\pi \sqrt{b^2 - x^2}} \frac{4(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \sin \left[\frac{\ln(3-4\nu)}{2\pi} \ln \frac{b+x}{b-x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$

21. 条形粗糙刚性压板 (转动荷载)

转角公式为

$$\phi = \frac{\pi(1-\nu^2)}{[\pi^2 + \ln^2(3-4\nu)]E} \frac{M}{b^3} \quad (3-45)$$

22. 圆形光滑刚性压板 (垂直荷载)

a 为圆板半径, 则接触压力及压板沉降公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\bar{p}a}{2 \sqrt{a^2 - r^2}} \\ u_r &= \frac{\pi(1-\nu^2)}{2} \frac{\bar{p}a}{E} \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

对于上述公式和其它更复杂问题的解答, 许多作者编制了相关的图表。这方面的主要工作参见文献 [5] ~ [12]。

四、任意分布荷载问题

1. 矩形分割法

复杂的荷载区可以分割成几个矩形块, 然后根据叠加原理, 利用式 (3-35) ~ 式 (3-38) 所提供的图表, 算出各块对考察点的影响系数 K_i , 总和以后即得。

例如对均布荷载 p , 当考察点位于荷载区内部时 (图 3-3, a)

$$\sigma = p(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \quad (3-47a)$$

而当考察点位于荷载区外部时 (图 3-3b)

$$\sigma = p(K_{1+2+3+4} - K_{2+4} - K_{3+4} + K_4) \quad (3-47b)$$

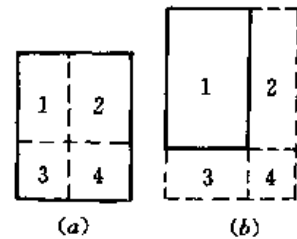


图 3-3 矩形分割
(a) 内点; (b) 外点

2. 扇形分割法

如式 (3-39) 所示, 扇形区域的积分公式比矩形区更简单。因此, 如果以考察点为坐标原点, 把荷载区分割成若干扇形块, 即可

利用叠加原理求出相应的解答。如图 3-4 所示, 设 K_i 为 i 块的影响系数, p_i 为该块上的荷载强度, 则对内点

$$\sigma = \sum p_i K_i(r) \quad (3-48a)$$

而对外点

$$\sigma = \sum p_i [K_i(r_2) - K_i(r_1)] \quad (3-48b)$$

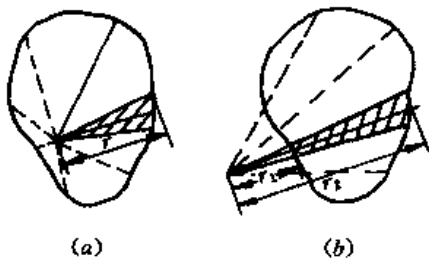


图 3-4 扇形分割
(a) 内点; (b) 外点

这一方法最早由 Poulos 建议^[11], 后来宰金珉进一步推导了实用的公式^[13]。

此外, Newmark 建议的感应图法也曾经是解决这

类问题的一个广泛流行的方法^[14]。但是，随着电子计算技术的发展，对稍为复杂一些的问题，直接得出数值解可能更为方便。

第三节 其它弹性应力问题

一、土楔内应力

1. 顶部承受线荷载的无限楔体

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2p}{r} \left(\frac{\cos\beta\cos\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin\beta\sin\theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

式中符号见图 3-5。

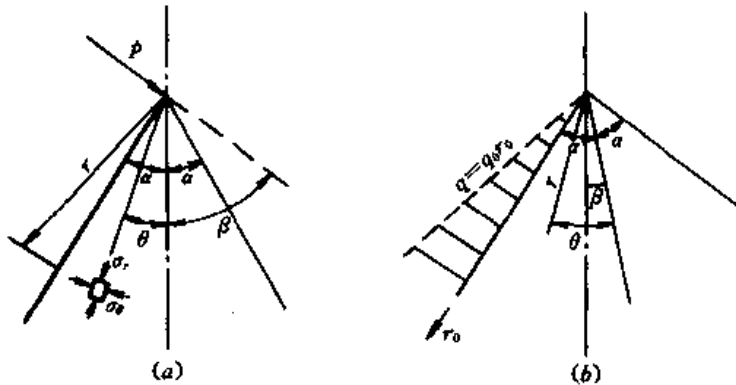


图 3-5 土楔应力

2. 侧面承受递增荷载的无限楔体

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q_0 r (a \cos\theta - b \sin\theta + c \cos 3\theta - d \sin 3\theta) \\ \sigma_\theta &= q_0 r (3a \cos\theta - 3b \sin\theta - c \cos 3\theta + d \sin 3\theta) \\ \tau_{r\theta} &= q_0 r (a \sin\theta + b \cos\theta - (\sin 3\theta - d \cos 3\theta)) \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

其中

$$a = \frac{\sin 3\alpha}{16 \sin \alpha \cos 3\alpha}, b = \frac{\cos 3\alpha}{16 \cos \alpha \sin 3\alpha}$$

$$c = \frac{1}{16 \cos 3\alpha}, d = \frac{1}{16 \sin 3\alpha}$$

3. 无限楔体的自重应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \rho g r [(a + \cos\beta)\cos\theta + (b + \sin\beta)\sin\theta - c \cos 3\theta - d \sin 3\theta] \\ \sigma_\theta &= \rho g r [(3a + \cos\beta)\cos\theta + (3b + \sin\beta)\sin\theta + c \cos 3\theta + d \sin 3\theta] \\ \tau_{r\theta} &= \rho g r (a \sin\theta - b \cos\theta + c \sin 3\theta - d \cos 3\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

其中

$$a = -\frac{\cos\beta\sin 3\alpha}{2(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}, b = \frac{\sin\beta\cos 3\alpha}{2(\cos\alpha - \cos 3\alpha)}$$

$$c = \frac{\cos\beta}{8\cos^2\alpha}, d = -\frac{\sin\beta}{8\sin^2\alpha}$$

4. 土坡自重应力

当右坡为水平时，直角坐标下的自重应力为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\rho g}{\left(2\alpha + \frac{1}{m}\right)(1+m^2)^2} \left\{ [2\alpha(1+m^2) + m](1+m^2)z + m^2(x+mx) \ln \frac{x^2+z^2}{(x+mx)^2} \right. \\
 &\quad \left. - [z(1+3m^2) + mx(1-m^2)] \sin^{-1} \left(\frac{z^2}{x^2+z^2} \right)^{1/2} \right\} \\
 \sigma_z &= \rho g z - \frac{\rho g}{\left(2\alpha + \frac{1}{m}\right)(1+m^2)^2} \left\{ mx(1+m^2) - (x+mx) \ln \frac{x^2+z^2}{(x+mx)^2} \right. \\
 &\quad \left. + [z(1-m^2) - mx(3+m^2)] \sin^{-1} \left(\frac{z^2}{x^2+z^2} \right)^{1/2} \right\} \\
 \tau_{xz} &= - \frac{\rho g}{\left(2\alpha + \frac{1}{m}\right)(1+m^2)^2} \left\{ z(1+m^2) + m(x+mx) \ln \frac{x^2+z^2}{(x+mx)^2} \right. \\
 &\quad \left. + (m^2-1)(x+mx) \sin^{-1} \left(\frac{z^2}{x^2+z^2} \right)^{1/2} \right\}
 \end{aligned} \right\} (3-52)$$

式中 $m = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$ 为左坡坡比。

5. 挡土墙后应力 (图 3-6)

当墙身向前平移距离 d 时^[15]：

$$\text{光滑墙} \quad \sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z + \frac{4zh}{(x+h)^3(x-h)} \frac{dhE}{\pi(1-\nu^2)} \quad (3-53a)$$

$$\text{粗糙墙} \quad \sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z + \frac{4dhE}{\pi(3-\nu-4\nu^2)} \left[\frac{(1-\nu)}{z^2-h^2} - \frac{(1-\nu^2)h - \nu(1+\nu)z}{E(h+z)^3} \right] \quad (3-53b)$$

当墙上端不动，底端向前转动距离 d 时：

光滑墙

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z - \frac{dE}{4\pi(1-\nu^2)h} \ln \frac{z^4}{(z^2-h^2)^2} + \frac{dhE}{\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{(z^2-h^2)} \\
 &\quad + \frac{2dhE}{\pi(1-\nu^2)} \frac{h+2z}{(h+z)^3}
 \end{aligned} \quad (3-54a)$$

粗糙墙

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z - \frac{4(1-\nu^2)^2}{(3-\nu-\nu^2)(1+\nu)} \left[\frac{dE}{4\pi(1-\nu^2)h} \ln \frac{z^4}{(z^2-h^2)^2} - \frac{dhE}{\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{(z^2-h^2)} \right] \\
 &\quad - \frac{dE}{(3-\nu-\nu^2)\pi} \left[-\frac{4\nu h}{(h+z)^2} + \frac{z(2h+z)}{h(h+z)^2} - \frac{4hz}{(h+z)^3} - \frac{2}{h} \right]
 \end{aligned} \quad (3-54b)$$

二、孔周围应力

二维的孔洞周边应力，最好用复变函数求解。令

$$\sigma_x = \frac{\partial U}{\partial x^2}, \sigma_y = \frac{\partial U}{\partial y^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial U}{\partial x \partial y} \quad (3-55)$$

则静力平衡方程将自动满足，根据应变相容条件，应力函数 U 将为下列方程的通解

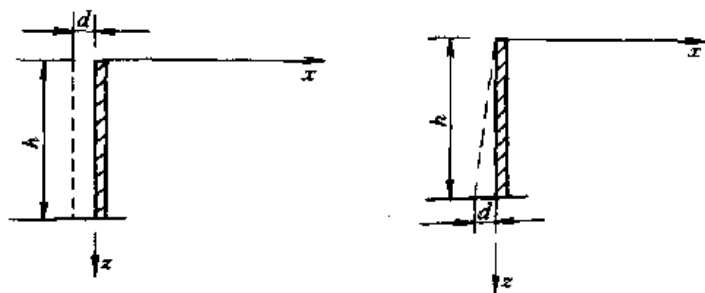


图 3-6 挡土墙后应力

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^4} = 0 \quad (3-56)$$

或简写为

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0 \quad (3-57)$$

设 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 为复变数, 则下列复变函数将是上式的通解

$$U = \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \theta(z) + \overline{\theta(z)}] \quad (3-58)$$

式中: $\varphi(z)$ 和 $\theta(z)$ 为两个任意函数, 需根据边界条件确定。

应力和位移与 φ 和 θ 之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}] \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (3-59)$$

$$2G(u_x + iu_y) = k\varphi(z) - \bar{z}\overline{\varphi(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (3-60)$$

式中: $\psi = \theta$, k 对平面应变为 $3-4\nu$, 对平面应力为 $(3-\nu)/(1+\nu)$ 。设 p_x, p_y 为边界上 x 和 y 方向的荷载强度, 则由上式可得边界 Γ 上的关系式

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \psi(z)]_r &= i \int (p_x + ip_y) d\Gamma \\ [k\varphi(z) - z\overline{\varphi(z)}]_r &= 2G(u_x + iu_y)_r \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

由此可以确定 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 。

上述各式可以直接应用于圆孔的求解, 但对其它形状的孔洞, 则需先进行保角变换再求解。下面只列出最后结果, 有关求解的详细过程另见文献 [16]。

1. 圆孔

在内压 p 作用下, 半径为 r_0 的圆孔扩张问题的解为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= p \frac{1+\nu}{E} \frac{r_0^2}{r} \\ \sigma_r &= p \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \\ \sigma_\theta &= -p \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

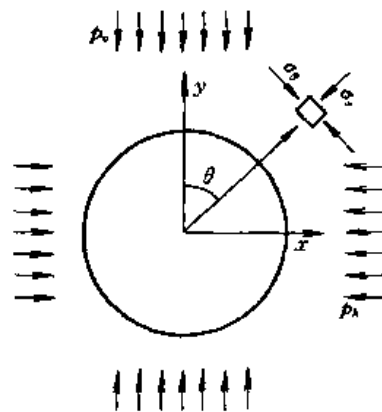


图 3-7 圆孔应力

如果 p_v 和 p_h 分别为地层中的初始垂直和水平应力, 则挖洞后地层中的应力将变为(图 3-7)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_h + p_v}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{p_h - p_v}{2} \left(1 - \frac{4r_0^2}{r^2} + \frac{3r_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{p_h + p_v}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{p_h - p_v}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p_h - p_v}{2} \left(1 + \frac{2r_0^2}{r^2} - \frac{3r_0^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-63)$$

当 $p_r = p_h = p_0$ 时, 上式简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) p_0 \\ \sigma_\theta &= \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) p_0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-64)$$

2. 椭圆孔

对椭圆孔需先通过下列映射函数把 z 平面映射到 ζ 平面上

$$z = c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (3-65)$$

式中: $c = \frac{1}{2}(a+b)$; $m = (a-b)/(a+b)$; a 和 b 分别为椭圆的长轴和短轴半径。设与水平交角为 α 方向上作用的初始地应力为 p_0 (图3-8), 可得相应的应力函数为^[17]

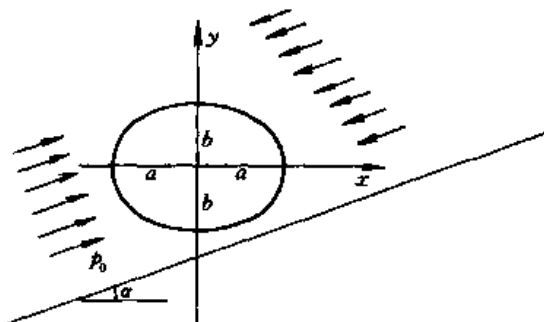


图 3-8 椭圆孔应力

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{p_0 c}{4} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta \right] \\ \psi(\zeta) &= -\frac{p_0 c}{2} \left[\frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (3-66)$$

代入式 (3-59), 但改用极坐标表示, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{p_0}{2} \left[\frac{(2e^{2i\alpha} - m)\zeta^2 - 1}{m\zeta^2 - 1} + \frac{(2e^{2i\alpha} - m)r^4 - \zeta^2}{mr^4 - \zeta^2} \right] \\ \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= \frac{p_0 \zeta^2 (\zeta^2 + mr^4)}{(mr^4 - \zeta^2)(m\zeta^2 - 1)^2} \left\{ (m\zeta^2 - 1)(2e^{2i\alpha} - m) - [(2e^{2i\alpha} - m)\zeta^2 - 1]m \right\} \\ &\quad + \frac{p_0 (m\zeta^2 - 1)r^2}{mr^4 - \zeta^2} \left\{ -\frac{e^{-2i\alpha}}{m\zeta^2 - 1} + \frac{\zeta^2 [3e^{2i\alpha}\zeta^2 + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)]}{(m\zeta^2 - 1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m\zeta^3 [\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta]}{(m\zeta^2 - 1)^3} \right\} \end{aligned} \quad (3-67)$$

针对 $\alpha=0$ 的情况, 沿水平轴的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= p_0 \frac{(2-m)R_1^2 - 1}{mR_1^2 - 1} \\ \sigma_\theta &= p_0 \frac{R_1^6(2m^2 - m^3 - m) + R_1^4(3 - m^3 + 5m^2 - 7m) + R_1^2(2m - m^2 - 1)}{2(mR_1^2 - 1)^3} \end{aligned} \quad (3-68a)$$

其中 $R_1 = (x - \sqrt{x^2 - 4c^2m}) / 2cm$ 。而沿垂直轴的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= p_0 \frac{(2-m)R_2^2 + 1}{mR_2^2 + 1} \\ \sigma_\theta &= p_0 \frac{R_2^6(2m^2 - m^3 + m) + R_2^4(3 - m^3 - m^2 + 5m) + R_2^2(4m + m^2 + 1) + 2}{2(mR_2^2 + 1)^3} \end{aligned} \quad (3-68b)$$

其中 $R_2 = (y - \sqrt{y^2 - 4c^2m}) / 2cm$ 。当 $R_1 = R_2 = 1$ 时，可得孔壁处的切向应力为：

$$\left. \begin{array}{l} \text{洞侧} \\ \text{洞顶} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_\theta = \sigma_y = -p_0 \\ \sigma_\theta = \sigma_x = p_0 \frac{3-m}{1+m} \end{array} \quad (3-69)$$

同样可得 $\alpha = 90^\circ$ 时的应力场。两者相加，即得各向等压情况下挖洞后的应力场。而洞内承受均布压力时的应力场只要在上述解答基础上叠加一个均匀应力场 $\sigma_x = \sigma_y = -p_0$ 即可。如此得出的沿孔壁的应力分布为

$$\sigma_r = -p; \quad \sigma_\theta = p \frac{1 - 3m^2 + 2m\cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta} \quad (3-70)$$

其中 $p = -p_0$ 。对于圆孔， $m = 0$ ，此式即退化为式 (3-62)。

第四节 弹性地基上的梁和板

一、地基模型

1. Winkler 模型

此模型假定地基的反力 q 与地面变位 w 成正比，即

$$q = kw \quad (3-71)$$

比例系数 k 常称为基床系数。

2. 双参数模型

以上模型相当于把地基看作由一系列的弹簧组成，各弹簧之间互不联系，故只需一个弹簧参数 k 。这一假设与实际不符。为此，不少人提出了改进的办法，下面介绍其中的两个。

Пастернак 假定弹簧之间可以传递剪力，建议了下列模型

$$q = kw - G\nabla^2 w \quad (3-72)$$

G 为另一个参数，相当于剪切模量。

Власов 把地基看作弹性介质，假设其水平位移可以忽略不计，且垂直位移可以简化为 $w(x, z) = w(x)h(z)$ ，推导得出下列公式

$$q = kw - t\nabla^2 w \quad (3-73)$$

$$\text{其中} \quad k = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \int_0^H \left(\frac{dh}{dz}\right)^2 dz; \quad t = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \int_0^H h^2 dz \quad (3-74)$$

式中， H 为地基厚度； $E_0 = \frac{E_s}{(1-\nu_s)^2}$ ； $\nu_0 = \nu_s(1-\nu_s)$ ； E_s 和 ν_s 为地基土的弹性常数。当 $h(z)$ 为线性变化时

$$k = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)}; \quad t = \frac{E_0 H}{6(1+\nu_0)} \quad (3-75)$$

式 (3-75) 也就是解释式 (3-72) 中 k 与 G 的物理含义。

3. 三参数模型

Ривкин 把反力系数 k 看作是计算点位置的变量，即

$$q(x, y) = k \left[1 + \beta e^{-\alpha \frac{(a-x)(b-y)}{ab}} \right] w(x, y) \quad (3-76)$$

式中： a 和 b 为基础板的长和宽； k_1 ， α 和 β 为三个参数。 $\beta=0$ 时式 (3-76) 退化为式 (3-71)。

4. 弹性半空间模型

按照弹性半空间理论，某点的地面沉降与地面荷载之间不再有直接的关系，而需要利用第二节的弹性应力分布公式积分得出。

对于二维问题，可以把梁底反力看作由一连串条形荷载组成。由于条形荷载 q 而引起的地表沉降公式已如式 (3-25) 所示，即

$$w(x) = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} [2b + (x-b)\ln|x-b| - (x+b)\ln|x+b|] \quad (3-77)$$

对于三维问题，可以假定底板的反力由一系列的圆形荷载组成，相应的沉降公式为

$$\left. \begin{aligned} r > a & \quad w(r) = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \frac{r}{a} \left[\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2\theta \right)^{1/2} d\theta \right] \\ r < a & \quad w(r) = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2\theta \right)^{1/2} d\theta \\ r = 0 & \quad w(0) = \frac{2(1-\nu^2)qa}{E} \end{aligned} \right\} \quad (3-78)$$

a 为圆板半径。上式已无法获得封闭解。实际应用时，把底板划分成矩形块更为方便，但矩形块的封闭解更难求得。为此，宰金珉通过把矩形块改换为等面积扇形块的办法求得下列有足够精度的近似封闭解^[20] (图 3-9)

$$w_i = \frac{4abq(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} \quad (3-79a)$$

$$w_j = \frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[a \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right] \quad (3-79b)$$

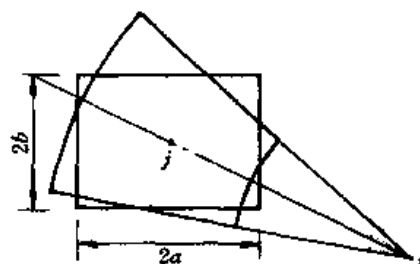


图 3-9 等积变换

本节只简单介绍弹性地基上梁和板计算的要点，细节参见有关专著^[18,19]。

二、梁

1. 基本方程式

在外力 p 和地基反力 q 的作用下，弹性地基上梁的基本方程式为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E_b I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = b [p(x) - q(x)] \quad (3-80)$$

式中： b 为梁的宽度； E_b 为梁材料的弹性模量； I 为梁的惯性矩。以上公式是按平面应变条件推导的，即变形只发生在 $x-z$ 平面内。对于 Winkler 地基，上式对有限宽的梁仍适用，但对双参数地基模型及弹性半空间模型，则必须考虑地基三维变形的影响。通常采用的方法假定沿梁宽方向不发生挠曲，即 w 沿 y 方向是常量。

2. Winkler 地基上的梁

把 $q = kw$ 代入式 (3-80) 可得

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + bkw = bp(x) \quad (3-81)$$

其中 $D=E_s I$ 代表梁的刚度。对无荷载区段, $p=0$, 上式简化为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (3-82)$$

其中 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{bk}{4D}}$ 为表征梁的相对柔度的特征值。此式的通解为

$$w(x) = e^{\lambda x}(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x}(C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (3-83)$$

式中: C_1, C_2, C_3 和 C_4 是待定参数。

(1) 集中力作用下的无限长梁。设 $x=0$ 处作用集中力 p_0 , 则根据 $x \rightarrow \infty$ 时 $w \rightarrow 0$ 及 $x=0$ 时 $\theta_0 = \frac{dw}{dx} = 0$ 和 $Q_0 = \pm \frac{P_0}{2}$ 的边界条件, 可得 $C_1 = C_2 = 0, C_3 = C_4 = \frac{\lambda P_0}{2kb}$, 故最终得挠度、转角、弯矩和剪力的解答为

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \frac{P_0}{4kb\lambda} e^{-\lambda x} \cos \lambda x \begin{Bmatrix} 2\lambda^2(1 + \tan \lambda x) \\ -4\lambda^3 \tan \lambda x \\ kb(1 - \tan \lambda x) \\ -2kb\lambda \end{Bmatrix} \quad (3-84)$$

(2) 集中力偶作用下的无限长梁。力偶 M_0 作用于 $x=0$ 处, 相应的解答为

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \frac{M_0}{2kb} e^{-\lambda x} \cos \lambda x \begin{Bmatrix} 2\lambda^2 \tan \lambda x \\ 2\lambda^3(1 - \tan \lambda x) \\ kb \\ -kb\lambda(1 + \tan \lambda x) \end{Bmatrix} \quad (3-85)$$

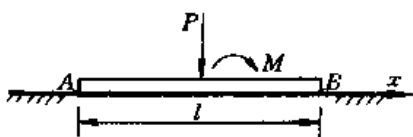


图 3-10 有限长梁

(3) 有限长梁的叠加法。设 A 和 B 为有限长梁的两端点, l 为梁长, P 和 M 为梁上的作用力和力偶 (图 3-10)。假想此梁为无限长梁的一部分, 如利用无限长梁的公式计算, 两端点处必须出现弯矩和剪力, 从而不符合端部的边界条件。在端点上加上 4 个未知力和力偶 P_A, P_B, M_A, M_B , 仍按无限长梁计算各点内力。令这些力和力偶

在 A 点和 B 点产生的弯矩的剪力与原 P 和 M 产生的弯矩和剪力相互抵消。由此可以建立 4 个方程式, 解出未知数 P_A, P_B, M_A 和 M_B 。然后把 P_A, P_B, M_A, M_B 作用下的解答与 P, M 作用下的解答叠加起来, 即可得出最后的解答。针对单个集中力 P 的作用问题, Hetenyi 得出具体解答如下

$$w = \frac{2P\lambda}{kbH_1} [H_2 F_1(\lambda x) + H_3 F_2(\lambda x)] \quad (3-86a)$$

$$M = \frac{2P}{\lambda H_1} [H_2 F_3(\lambda x) + H_3 F_4(\lambda x)] \quad (3-86b)$$

$$Q = \frac{2P}{H_1} [H_2 F_2(\lambda x) + H_3 F_3(\lambda x)] \quad (3-86c)$$

其中

$$F_1(\lambda x) = \text{ch} \lambda x \cos \lambda x$$

$$F_2(\lambda x) = \frac{1}{2} (\text{ch} \lambda x \sin \lambda x + \text{sh} \lambda x \cos \lambda x)$$

$$F_3(\lambda x) = \frac{1}{2} \text{sh} \lambda x \sin \lambda x$$

$$F_4(\lambda x) = \frac{1}{4} (\text{ch} \lambda x \sin \lambda x - \text{sh} \lambda x \cos \lambda x)$$

$$H_1 = \text{sh}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l$$

$$H_2 = \text{sh} \lambda l \cos \lambda a \text{ch} \lambda b - \sin \lambda l \text{ch} \lambda a \cos \lambda b$$

$$H_3 = \text{sh} \lambda l [\sin \lambda a \text{ch} \lambda b - \cos \lambda a \text{sh} \lambda b] + \sin \lambda l [\text{sh} \lambda a \cos \lambda b - \text{ch} \lambda a \sin \lambda b]$$

(4) 有限长梁的初参数法。设 $x=0$ 端的弯矩、剪力、挠度和转角分别为 M_0 , Q_0 , w_0 和 θ_0 , 它们与待定参数 C_1 , C_2 , C_3 和 C_4 之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= C_1 + C_3 \\ \theta_0 &= \lambda(C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \\ M_0 &= 2\lambda^2 D(-C_2 + C_4) \\ Q_0 &= 2\lambda^3 D(C_1 - C_2 - C_3 - C_4) \end{aligned} \right\} \quad (3-87)$$

解出 C_1 , C_2 , C_3 和 C_4 后代入式 (3-83), 可得以初参数表示的无荷载情况下的挠曲方程如下

$$w = w_0 F_1(\lambda x) + \frac{\theta_0}{\lambda} F_2(\lambda x) - \frac{M_0}{D\lambda^2} F_3(\lambda x) - \frac{Q_0}{D\lambda^3} F_4(\lambda x) \quad (3-88)$$

3. 双参数地基上的梁

把双参数模型公式 (3-72) 代入式 (3-80), 当 $D=E_b I$ 为常量时可得梁的基本方程式如下

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - Gb \frac{d^2 w}{dx^2} + bkw = bp \quad (3-89)$$

式 (3-89) 适用于平面应变问题, b 为从无限长梁中切出的条带宽。对于有限宽梁, 式 (3-89) 中的 b 和 D 应改为 $b^* = b(1 + \sqrt{G/b^2 k})$, $D^* = E_b h^3 b / 12(1 - \nu_b^2)$, b 为实际梁宽。

上式的通解为

$$w(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta \lambda x + C_2 \sin \beta \lambda x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \beta \lambda x + C_4 \sin \beta \lambda x) \quad (3-90)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} = \sqrt{1 \pm \frac{G\lambda^2}{k}} \quad (3-91)$$

且假定 $G\lambda^2/k < 1$ 。当 $G \rightarrow 0$ 时, $\alpha = \beta = 1$, 上式退化为式 (3-83)。

与前面一样, 式 (3-90) 的具体解可以用叠加法或初参数法求得。以初参数法为例。设 M_0 , Q_0 , w_0 和 θ_0 分别为 $x=0$ 处的弯矩、剪力、挠度和转角, 则由 $M_0 = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0}$, $Q_0 = -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0}$, $\theta_0 = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0}$ 和 $w_0 = (w)_{x=0}$, 所建立的 4 个方程式可以解出待定参数 C_1 , C_2 , C_3 和 C_4 , 并最终得出下列挠度公式

$$w(x) = w_0 \left[\Phi_2 - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \right) \Phi_4 \right] + \frac{\theta_0}{2\lambda} \left[\frac{\Phi_1}{\alpha} + \frac{\Phi_3}{\beta} \right] - \frac{M_0}{\lambda^2 D} \left[\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta} \right] + \frac{Q_0}{4\lambda^3 D} \left[\frac{\Phi_1}{\alpha} - \frac{\Phi_3}{\beta} \right] \quad (3-92)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \cos(\beta\lambda x)\text{sh}(\alpha\lambda x) \\ \Phi_2 &= \cos(\beta\lambda x)\text{ch}(\alpha\lambda x) \\ \Phi_3 &= \sin(\beta\lambda x)\text{ch}(\alpha\lambda x) \\ \Phi_4 &= \sin(\beta\lambda x)\text{sh}(\alpha\lambda x) \end{aligned} \right\} \quad (3-93)$$

4. 弹性半空间上的梁

弹性半空间上的梁，原则上是空间问题。但在一定条件下可以简化为平面应力和平面应变问题。当梁的宽度大大小于长度时，沿宽度方向的荷载变化可以忽略，则可以从地基中沿梁长方向切出与梁等宽的薄片，按平面应力问题计算。反之，当梁的长度很大，且沿长度方向的荷载变化可以忽略时，则可以从地基和梁本身中沿梁宽方向切出单位厚度的薄片，按平面应变问题计算。按照弹性理论，求解平面应力问题的解后，只要把相关公式中的 E 换成 $E/(1-\nu^2)$ ，即可得平面应变问题的解。

弹性半空间上梁的变位问题可以通过式(3-77)与式(3-80)联立求解，两式中包含 $q(x)$ 和 $w(x)$ 两个未知变量。求解的方法可分级数解法和数值解法两类。

(1) 级数解法。设 $q(x)$ 用下列多项式近似

$$q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3-94)$$

上式中有 a_0, a_1, \dots, a_n 共 $n+1$ 个待定系数。但 $q(x)$ 和梁上作用荷载 $p(x)$ 之间总量和总力矩应相等，即

$$\int_{-l}^l q(x)dx = \int_{-l}^l p(x)dx; \int_{-l}^l q(x)x dx = \int_{-l}^l p(x)x dx \quad (3-95)$$

因此，为了求解 $n+1$ 个未知数，还需补充 $n-1$ 个方程式。这 $n-1$ 个方程可由 $n-1$ 点处梁和地基的变形协调条件得来，即由式(3-91)算出的沉降与按式(3-80)算出的梁的挠度应当相等。Горбонов-Посадов 曾用这一方法进行过大量计算，并编制了许多表格备查。

(2) 数值解法。数值解法有有限差法、有限元法、链杆法和加权残数法几种。其中链杆法早年由 Жемочкин 提出，近来已少用。随着计算机的普及，有限元法得到最广泛的应用。有关这方面的专著很多，此处不再介绍。

三、水平承载桩

承受水平荷载的桩和板桩，可以看作垂直放置的梁。唯一不同之处是，这里必须考虑 Winkler 系数 k 沿深度的变化。 k 的一般变化规律可以写为

$$k = mz^n \quad (3-96)$$

$n=0$ 时， $k=\text{const}$ ，即为通常的 Winkler 假设。 $n=1$ 时， $k=mz$ ，运用此假设求解的方法常称 m 法，而 $n=0.5$ 时的解法则简称为 C 法。

水平承载桩一般不会再受到另外的分布荷载。把 x 换成 z ，并把 $p=0$ 和 $q=mz^n w$ 代入式(3-80)中，可得下列基本方程式

$$EI \frac{d^4 w}{dz^4} = -bmz^n w \quad (3-97)$$

1. 解析解法

当桩顶端变位、转角、弯矩和剪力已知时, $k=\text{const}$ 的解答已见前面的初参数法, 即式(3-88)。对于任意 m 和 n , 吴恒立求得了下列普遍解^[22]

$$w = w_0 A(ax) + \frac{\theta_0}{a} B(ax) + \frac{M_0}{a^2 EI} C(ax) + \frac{Q_0}{a^3 EI} D(ax) \quad (3-98)$$

其中 $a = \sqrt[4+n]{\frac{mb}{EI}}$, 且

$$\left. \begin{aligned} A(ax) &= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{R_0^1 R_0^2 \cdots R_0^s} (ax)^{(4+n)s} \\ B(ax) &= ax + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{R_1^1 R_1^2 \cdots R_1^s} (ax)^{(4+n)s+1} \\ C(ax) &= \frac{1}{2} [(ax)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{R_2^1 R_2^2 \cdots R_2^s} (ax)^{(4+n)s+2} \\ D(ax) &= \frac{1}{6} [(ax)^3 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{R_3^1 R_3^2 \cdots R_3^s} (ax)^{(4+n)s+3} \end{aligned} \right\} \quad (3-99)$$

上述式中

$$R_s^r = [(4+n)s+r][(4+n)s+r-1][(4+n)s+r-2][(4+n)s+r-3]$$

相应的转角、弯矩和剪力公式为

$$\frac{\theta}{a} = w_0 A'(ax) + \frac{\theta_0}{a} B'(ax) + \frac{M_0}{a^2 EI} C'(ax) + \frac{Q_0}{a^3 EI} D'(ax) \quad (3-100a)$$

$$\frac{M}{a^2 EI} = w_0 A''(ax) + \frac{\theta_0}{a} B''(ax) + \frac{M_0}{a^2 EI} C''(ax) + \frac{Q_0}{a^3 EI} D''(ax) \quad (3-100b)$$

$$\frac{Q}{a^3 EI} = w_0 A'''(ax) + \frac{\theta_0}{a} B'''(ax) + \frac{M_0}{a^2 EI} C'''(ax) + \frac{Q_0}{a^3 EI} D'''(ax) \quad (3-100c)$$

水平承载桩计算中一般只知道桩顶的作用力 M_0 和 Q_0 , 然后要求根据桩底的约束条件求出 w_0 和 θ_0 。例如假定桩底自由时 $M_b=Q_b=0$, 则在式(3-100b)和(3-100c)中代入 $z=l$ 和 $M=0, Q=0$, 即可解出两个未知量 w_0 和 θ_0 。

对于桩侧还受到已知的梯形分布荷载的更一般的情况, 张耀年也求得了相应的通解^[21]。由于此解难以用简洁的公式表达, 此处不再列出。

2. 半解析解法

(1) 连续梁解法。周铭建议把桩分成若干等分, 每一段中点设一弹性支座, 然后按连续梁求解^[23]。设支座处的反力系数 k 等于 k_i , h 和 b 为桩段长度和宽度, 则支座的柔度系数将为

$$C_i = \frac{1}{k_i h b} \quad (3-101)$$

当 $h=1$ 时, 由于桩顶 o 点作用一单位水平力或单位力矩而在桩以下 $1 \sim n$ 点产生的弯矩公式如下

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{M}_1 &= \frac{-\left[\frac{\Delta_1}{\delta_{1,1}} - (K_1 - K'_1 \bar{K}_3) \frac{\Delta_2 \bar{K}_2}{\delta_{2,0}}\right]}{1 - K'_1 \bar{K}_3 - \bar{K}_2 (K_1 - K'_1 \bar{K}_3)} \\
 \bar{M}_2 &= -\bar{K}_2 \bar{M}_1 - \frac{\Delta_2 \bar{K}_2}{\delta_{2,0}} \\
 \bar{M}_3 &= -\bar{K}_3 \bar{M}_2 - \bar{K}_3 \bar{M}_1 \\
 &\quad \vdots \\
 \bar{M}_{n-1} &= -\bar{K}_{n-1} \bar{M}_{n-2} - \bar{K}_{n-1} \bar{M}_{n-3}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-102)$$

其中

水平力作用时 $\Delta_1 = C_0$, $\Delta_2 = 0$; 力矩作用时 $\Delta_1 = \frac{1}{6EI} - C_0 - 2C_1$, $\Delta_2 = C_1$

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}}, K'_1 = \frac{\delta_{1,3}}{\delta_{1,1}} \\
 \bar{K}_i &= \frac{\delta_{i,i-1} - \delta_{i+1,i-1} \bar{K}_{i+1}}{\delta_{i,i} - \frac{\bar{K}_{i+1}^2}{\bar{K}'_{i+1}} \delta_{i+1,i-1} - \delta_{i,i+2} \bar{K}'_{i+2}} \\
 \bar{K}_i &= \frac{\delta_{i,i-2}}{\delta_{i,i} - \frac{\bar{K}_{i+1}^2}{\bar{K}'_{i+1}} \delta_{i+1,i-1} - \delta_{i,i+2} \bar{K}'_{i+2}}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-103)$$

$\delta_{i,j}$ 为 j 支座处作用一单位力矩在 i 支座产生的角变位, 即

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{0,1} &= \frac{1}{6EI} - C_0 - 2C_1 \\
 \delta_{i,i} &= \frac{2}{3EI} + C_{i-1} + 4C_i + C_{i+1} \\
 \delta_{i,i+1} &= \frac{1}{6EI} - 2C_i - 2C_{i+1} \\
 \delta_{i,i+2} &= C_{i+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-104)$$

在桩顶水平力 H 和力矩 M 共同作用下, 各支座处弯矩 M_i 即可按下列叠加公式计算

$$M_i = H\bar{M}_i^H + M\bar{M}_i^M \quad (3-105)$$

相应的支座反力为

$$R_i = R_i^0 + M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} \quad (3-106)$$

R_i^0 为简支梁支座反力。

(2) 指数级数解法。沈珠江建议用指数级数求解桩的挠曲问题^①。先假定地基反力系数公式为

$$k = k_0 + mz \quad (3-107)$$

设桩长为 l , 先把梁的方程式 (3-80) 改写成下列无因次形式

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dz^4} + (\bar{k}_0 + \bar{m}z)\bar{w} = 0 \quad (3-108)$$

① 沈珠江, 板和板桩的挠曲问题及其变分解法, 南京水利科学研究所报告, 土技 6404, 1964。

相应的边界条件为： $\bar{z}=0$ 时， $\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{z}^2}=M_0=\frac{Ml}{E\lambda}$ ， $\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{z}^3}=\bar{H}_0=\frac{Hl^2}{EI}$ ； $\bar{z}=1$ 时， $\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{z}^2}=0$ ， $\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{z}^3}=0$ ， M 和 H 为桩顶作用的力矩和水平力。其中 $\bar{z}=\frac{z}{l}$ ， $\bar{w}=\frac{w}{l}$ ， $\bar{k}_0=k_0\frac{bl^4}{EJ}$ ， $\bar{m}=m\frac{bl^5}{EJ}$ 。由于桩的变位总是随深度逐步减少的，所以下列指数级数能较好地满足式 (3-108)

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i \bar{z}) e^{-i\bar{z}} \quad (3-109)$$

通过变分原理，可得下列求解待定系数 a_i 和 b_i ($i=0, 1, \dots, n$) 的代数方程组

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n [(i^2 j^2 + \bar{k}_0) N_{i+j}^1 + \bar{m} N_{i+j}^2] a_i + \sum_{i=0}^n [-2ij N_{i+j}^1 + (i^2 j^2 + \bar{k}_0) N_{i+j}^2 + \bar{m} N_{i+j}^3] b_i &= \bar{Q}_0 + \bar{M}_0 j \\ \sum_{i=0}^n [-2i^2 j N_{i+j}^1 + (i^2 j^2 + \bar{k}_0) N_{i+j}^2 + \bar{m} N_{i+j}^3] a_i + \sum_{i=0}^n [4ij N_{i+j}^1 - 2ij(i+j) N_{i+j}^2 + (i^2 j^2 + \bar{k}_0) N_{i+j}^3 + \bar{m} N_{i+j}^4] b_i &= -\bar{M}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-110)$$

$j = 0, 1, \dots, n$

其中

$$\begin{aligned} N_{i+j}^1 &= \frac{1 - e^{-(i+j)}}{i+j}, N_{i+j}^2 = \frac{1 - [(i+j) + 1]e^{-(i+j)}}{(i+j)^2} \\ N_{i+j}^3 &= \frac{2 - [(i+j)^2 + 2(i+j) + 2]e^{-(i+j)}}{(i+j)^3} \\ N_{i+j}^4 &= \frac{6 - [(i+j)^3 + 3(i+j)^2 + 6(i+j) + 6]e^{-(i+j)}}{(i+j)^4} \end{aligned}$$

它们都是常数，可以事先算出。由以上 $2(n+1)$ 个代数方程组即可以解出 $2(n+1)$ 个未知系数 a_i 和 b_i 。

四、板

1. 板的基本方程式

假设板的中面只有垂直方向变位 $w(x, y)$ ， $p(x, y)$ 为板上荷载， $q(x, y)$ 为底面反力，则板的基本方程式可以写为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p - q \quad (3-111)$$

其中 $D = E_b h^3 / 12 (1 - \nu_b^2)$ 为板的挠曲刚度。对直角坐标， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ；对圆柱坐标， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 。相应的弯矩和剪力公式为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= D(1 - \nu_b) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (3-112a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_b \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ M_{r\theta} &= D(1 - \nu_b) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w; Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (3-112b)$$

上述公式被称为薄板理论。当板的厚度较大时，挠度 w 和转角 ϕ_r, ϕ_θ 沿板厚方向的变化不可忽略^[18,24]。此时，把 w 理解为厚度方向的平均挠度，Reissner 推导了下列厚板理论的挠度公式

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p - q - \frac{h^3}{10} \left(\frac{2 - \nu_b}{1 - \nu_b} \right) \nabla^2 (p - q) \quad (3-113)$$

直角坐标下相应的弯矩和剪力公式为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu_b h^2}{10(1 - \nu_b)} (p - q) \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu_b h^2}{10(1 - \nu_b)} (p - q) \\ M_{xy} &= D(1 - \nu_b) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right] \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial \psi}{\partial y}; Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3-114)$$

其中应力函数 ψ 是下列方程的解

$$\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0 \quad (3-115)$$

2. 无限板

对于承受轴对称荷载的无限板，式 (3-111) 简化为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(r) + q(r) = p(r) \quad (3-116)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ 。

(1) Winkler 地基。把 $q = kw$ 代入上式，Hertz 和 Hyman 求得集中力作用下的挠度公式如下

$$w(r) = -\frac{Pl^2}{2\pi D} kei_0 \left(\frac{r}{l} \right) \quad (3-117)$$

式中 $l = (D/k)^{1/4}$ ， kei_0 为 0 阶 Kelvin 函数。在荷载作用点

$$w(0) = \frac{P}{8kl^2} \quad (3-118)$$

对于任意分布荷载 $p(r, \theta)$ ，可令上式中 $P = pr dr d\theta$ ，然后对 p 作用区域进行积分求得相应解。例如，对半径 r_0 内作用均布荷载 p_0 的情况，相应的解为

$$w(r) = -\frac{p_0}{2\pi(kD)^{1/2}} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} kei_0 \left(\frac{R}{l} \right) r' dr' d\theta \quad (3-119)$$

式中：\$R\$ 为荷载作用点 \$r'\$, \$\theta'\$ 到计算点 \$r, \theta\$ 的距离。Reissner 得出上述情况下的具体解为

$$w(r) = \frac{p_0}{k} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\pi}{2} I_m[\mu H_1^{(1)}(\mu) J_0(\lambda r)] \quad r \leq r_0 \\ \frac{\pi}{2} I_m[\mu J_1(\mu) H_0^{(1)}(\lambda r)] \quad r > r_0 \end{array} \right\} \quad (3-120)$$

其中 \$\lambda = \sqrt{i} (k/D)^{1/4}\$, \$\mu = \lambda r_0\$, \$J_0, J_1\$ 和 \$H_0^{(1)}, H_1^{(1)}\$ 分别为 0 阶和 1 阶 Bessel 函数和第一类 Henkel 函数。

(2) 双参数地基。Власов 和 Льюнтьев 求得了双参数地基上集中力作用下的挠度公式如下

$$w(r) = \frac{P}{8(kD)^{1/2} \sin 2\phi} [H_0^{(1)}(a\rho r) + H_0^{(2)}(a\rho r)] \quad (3-121)$$

其中 \$a = [-b + i(1-b^2)^{1/2}]^{1/2}\$, \$b = G/2 (kD)^{1/2}\$, \$\rho = (k/D)^{1/4}\$, \$\phi = \frac{1}{2} \arccos(-b)\$。针对圆形均布荷载的情况, Reissner 得出的相应解为

$$w(r) = \frac{p_0}{k} \left\{ \begin{array}{l} 1 + C_1 J_0(\lambda r) + \bar{C}_1 J_0(\bar{\lambda} r) \quad r \leq r_0 \\ C_2 H_0^{(1)}(\lambda r) + \bar{C}_2 H_0^{(2)}(\bar{\lambda} r) \quad r > r_0 \end{array} \right\} \quad (3-122)$$

其中 \$\lambda = \rho e^{i\phi}\$, \$\bar{\lambda} = \rho e^{-i\phi}\$, \$\mu = \lambda r_0\$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} = \frac{\pi \mu}{4i[1 + (G/2D\lambda^2)]} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(\mu) \\ J_1(\mu) \end{array} \right.$$

式中：\$C_1\$ 和 \$\bar{C}_1\$ 与 \$C_2\$ 和 \$\bar{C}_2\$ 为共轭复数。当 \$G=0\$, \$\cos 2\phi=0\$, 上式将与式 (3-120) 一致。

(3) 弹性半空间地基。设外加荷载和接触应力具有下列形式

$$p(r) = p_0 J_0\left(\xi \frac{r}{a}\right), q(r) = q_0 J_0\left(\frac{\xi r}{a}\right) \quad (3-123)$$

则由于 Bessel 函数的性质, 满足式 (3-116) 的解将具有下列形式

$$w(r) = -\frac{p_0 a^4 J_0(\xi r/a)}{D \xi^4 + C a^3} \quad (3-124)$$

式中：\$C\$ 为常数；\$a\$ 为参考半径。现在把集中力 \$P\$ 展开成下列 Bessel 积分

$$p(r) = \frac{P}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{\xi}{a} J_0\left(\frac{\xi r}{a}\right) d\xi \quad (3-125)$$

则相应的挠度也将是式 (3-124) 的积分形式, 即

$$w(r) = \frac{P a^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\xi J_0(\xi r/a)}{[\xi^3 + \Delta]} d\xi \quad (3-126a)$$

其中 \$\Delta = G a^3 \xi / (1-\nu) D\$。取 \$a = [D(1-\nu/G)]^{1/3}\$, 并令 \$b=r/a\$, \$\lambda=\xi b\$, 上式可简写为

$$w(r) = \frac{P a^2 b^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda)}{\lambda^3 + b^3} d\lambda \quad (3-126b)$$

3. 圆板

(1) Winkler 地基。式 (3-116) 代入 \$q=k w\$ 后可得

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(r) + k w(r) = p(r) \quad (3-127)$$

上式满足 \$p(r)=0\$ 的齐次解为

$$w_0(r) = C_1 R_0 J_0\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) + C_2 I_m J_0\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right)$$

$$+ C_3 R_e H_0^{(1)}\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) + C_4 I_m H_0^{(1)}\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) \quad (r_0 < r \leq a_0) \quad (3-128)$$

式中 $l = (D/k)^{1/4}$ 。对于 $r \leq r_0$ 范围内承受均布荷载 p_0 的情况，上述齐次解加上特解 p_0/k 后可得

$$w_1(r) = \frac{p_0}{k} + C_5 R_e J_0\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) + C_6 I_m J_0\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) \\ + C_7 R_e H_0^{(1)}\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) + C_8 I_m H_0^{(1)}\left(\sqrt{i} \frac{r}{l}\right) \quad (r \leq r_0) \quad (3-129)$$

两式中包含 C_1, C_2, \dots, C_8 共 8 个待定系数，可从下列 8 个条件求得

$$\text{圆板中心 } r=0 \quad \frac{dw_1}{dr} = 0, \quad Q_{r1} = 0$$

$$\text{荷载边界 } r=r_0 \quad w_0 = w_1, \quad \frac{dw_0}{dr} = \frac{dw_1}{dr}, \quad M_{r0} = M_{r1}, \quad Q_{r0} = Q_{r1}$$

$$\text{圆板边缘 } r=a_0 \quad M_{r1} = 0, \quad Q_{r1} = 0$$

当全板承受均布荷载时，以上 8 个系数全为 0，故其解即为

$$w = \frac{p_0}{k} \quad (3-130)$$

(2) 双参数地基。把 $q = kw - G_p \nabla^2 w$ 代入式 (3-116) 中可得

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - G_p \nabla^2 w + kw = p \quad (3-131)$$

此式 $p=0$ 时的齐次解为

$$w_0(r) = C_1 R_e J_0\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) + C_2 I_m J_0\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) \\ + C_3 R_e H_0^{(1)}\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) + C_4 I_m H_0^{(1)}\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) \quad (3-132)$$

其中

$$\left. \begin{matrix} a \\ -a \end{matrix} \right\} = \frac{l^2}{2} \left\{ -\frac{G}{D} \pm \left[\left(\frac{G}{D} \right)^2 - \frac{4k}{D} \right]^{1/2} \right\}$$

对于 $r \leq r_0$ 范围承受均布荷载 p_0 的情况，齐次解以外再加特解 p_0/k 后可得

$$w_1(r) = \frac{p_0}{k} + C_5 R_e J_0\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) + C_6 I_m J_0\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) \\ + C_7 R_e H_0^{(1)}\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) + C_8 I_m H_0^{(1)}\left(\sqrt{a} \frac{r}{l}\right) \quad (3-133)$$

但对双参数地基，板以外地面沉降不再为 0，而必须满足下式

$$G_p \nabla^2 w - kw = 0 \quad (3-134)$$

其相应的解将为

$$w_2(r) = C_9 I_0\left[\sqrt{\frac{k}{G}} r\right] + C_{10} K_0\left[\sqrt{\frac{k}{G}} r\right] \quad (3-135)$$

式中： I_0 和 K_0 分别为第一和第二类修改 Bessel 函数。式 (3-132)、式 (3-133) 和式 (3-135) 中共有 10 个待定系数，可以由下列 10 个条件决定。

$$\text{圆板中心 } r=0 \quad \frac{dw_1}{dr} = 0, \quad Q_{r1} = 0$$

荷载边缘 $r=r_0$ $w_0=w_1, \frac{dw_0}{dr}=\frac{dw_1}{dr}, M_{r_0}=M_{r_1}, Q_{r_0}=Q_{r_1}$

圆板边缘 $r=a_0$ $w_0=w_2, M_{r_0}=0, Q_{r_0}=G\left[\frac{dw_2}{dr}-\frac{dw_0}{dr}\right]$

无穷远处 $r\rightarrow\infty$ $w_2=0$

当全板承受均布荷载时, $r_0=a_0, w_0(r)=w_1(r)$, 剩下 6 个待定系数 $C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}$ 。由 $r=0$ 处两个条件得 $C_7=C_8=0$, 由 $w_2(\infty)=0$ 得 $C_9=0$ 。剩下 3 个系数可由 $M_{r_1}(a_0)=0, Q_{r_1}(a_0)=G\left[\frac{dw_2}{dr}-\frac{dw_1}{dr}\right]_{r=a_0}$ 和 $w_1(a_0)=w_2(a_0)$ 3 个条件确定。可见此时的解与式 (3-130) 将有较大差别。

(3) 弹性半空间地基。对于弹性半空间上的圆板, 式 (3-116) 将无法简化。此时, 与弹性半空间上的梁一样需要联立求解式 (3-116) 和 $w(r)=f(q(r))$ 两个方程式。后一方程与式 (3-77) 类似, 但要把条形荷载引起的沉降公式积分改为环形荷载引起的沉降公式积分, 即

$$w(r) = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} \left[\frac{1}{r} \int_0^r q(\xi) d\xi F\left(\frac{\xi}{r}, \frac{\pi}{2}\right) + \int_r^{r_0} q(\xi) d\xi F\left(\frac{r}{\xi}, \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3-136)$$

其中椭圆积分 $F(x, \frac{\pi}{2})$ 的表达式为

$$F(x, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1-x^2\sin^2\theta]^{1/2}}$$

式 (3-116) 和式 (3-136) 的联立求解可以用级数法或数值法。

4. 矩形板

(1) Winkler 地基。Winkler 地基上板的基本方程为

$$D\nabla^2\nabla^2w(x,y) + kw(x,y) = p(x,y) \quad (3-137)$$

此式包含 w 的 4 阶微分, 求解颇为不便。为此宜改用 Ritz 变分法。与上式相当的势能公式为

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\nu_s) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \frac{1}{2} \iint kw^2 dx dy - \iint p w dx dy \quad (3-138)$$

现在把挠度公式表示为下列双重级数

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \Phi_i\left(\frac{x}{l}\right) \Phi_j\left(\frac{y}{b}\right) \quad (3-139)$$

式中: l 和 b 分别为板长和宽; A_{ij} 为待定系数。基函数 Φ_i 宜选用满足边界条件的正交函数。例如

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \Phi_1 = \xi \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \Phi_i(\xi) &= \frac{\text{ch}(g_i)\cos(g_i\xi) + \cos(g_i)\text{ch}(g_i\xi)}{[\text{ch}^2(g_i) + \cos^2(g_i)]^{1/2}} \quad (i = 2, 4, \dots) \\ \Phi_i(\xi) &= \frac{\text{sh}(g_i)\sin(g_i\xi) + \sin(g_i\xi)\text{sh}(g_i\xi)}{[\text{sh}^2(g_i) - \sin^2(g_i)]^{1/2}} \quad (i = 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (3-140)$$

式中 $g_0 = g_1 = 0$, $g_i = (2i-1)\pi/4$ 。式 (3-140) 可以满足自由边弯矩为 0 的条件, 但剪力为 0 的条件只能近似地满足。把式 (3-139) 代入式 (3-138), 然后根据最小势能原理对 U 进行变分, 可得以下 $(n+1)^2$ 个方程式

$$\frac{\partial U}{\partial A_{ij}} = 0 \quad (3-141)$$

解上式求得 A_{ij} 后再代回到式 (3-139) 中, 即得 w 的级数解。

(2) 双参数地基。双参数地基上板的基本方程式为

$$D\nabla^2\nabla^2w(x,y) - G\nabla^2w(x,y) + kw(x,y) = p(x,y) \quad (3-142)$$

此式可用 Galerkin 法求解。先把 w 表示为下列级数形式

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_{ij} \Phi_{ij}(x,y) \quad (3-143)$$

选用的基函数需满足边界条件。例如, 当 x 轴和 y 轴均为对称轴时可选用

$$\begin{aligned} w(x,y) = & C_{\infty} + \sum_{i=1}^m C_{i0} \cos \frac{i\pi x}{2l} + \sum_{j=1}^n C_{0j} \cos \frac{j\pi y}{2b} \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cos \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{j\pi y}{2b} \\ & (i = 1, 3, 5 \dots; j = 1, 3, 5 \dots) \end{aligned} \quad (3-144a)$$

或当只有 y 轴是对称轴时

$$\begin{aligned} w(x,y) = & C_{\infty} \frac{x}{l} + \sum_{i=2}^m C_{i0} \sin \frac{i\pi x}{2l} + \frac{x}{l} \sum_{j=1}^n C_{0j} \cos \frac{j\pi y}{2b} \\ & + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{j\pi y}{2b} \\ & (i = 2, 4, 6 \dots; j = 1, 3, 5 \dots) \end{aligned} \quad (3-144b)$$

上式中 l 和 b 分别为板的半长和半宽。现在把式 (3-143) 代入式 (3-142), 并以基函数作为权函数, 乘以式 (3-142) 的残余项后进行积分, 可以得到下列 $(m+1) \times (n+1)$ 个方程式

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_{ij} \iint \Phi_{ik} L \Phi_{ij} dx dy = \iint p \Phi_{ik} dx dy \quad (3-145)$$

其中算子 L 代表 $D\nabla^2\nabla^2 - G\nabla^2 + k$ 。解式 (3-145) 求得系数 C_{ij} 后, 再代回式 (3-143) 中, 即得 w 的级数解。

(3) 弹性半空间地基。利用式 (3-35) 矩形均布荷载下的沉降公式, 当 $z=0$, 并把长和宽改为微分量 dx 、 dy 后进行积分, 可得任意分布荷载 $q(x,y)$ 作用下地面沉降的积分公式如下

$$w(x,y) = \frac{(1-\nu)lb}{2\pi G} \int_{-l}^l \int_{-b}^b \frac{q(\xi,\eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}} \quad (3-146)$$

弹性半空间上矩形板的问题需要联立求解式 (3-111) 和式 (3-146)。Горбунов-Посадов 建议了幂级数法求解。更一般的方法为数值解法。当采用数值解法时, 最好把板中切出的矩形小块改为等面积的扇形小块, 然后利用式 (3-79) 的封闭解。

第五节 桩与土的共同作用

一、单桩

在侧阻力的作用下，由轴向力的平衡条件 $\frac{\partial P}{\partial z} = U_p p$ 和弹性压缩条件 $P = -A_p E_p \frac{\partial w}{\partial z}$ 可得轴的变位方程如下

$$A_p E_p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - U_p p = 0 \quad (3-147)$$

式中： w 为桩的轴向变位； P 为轴向力； p 为侧壁阻力； E_p 为桩材模量； $A_p = \pi r_0^2$ 和 $U_p = 2\pi r_0$ 分别为桩面积和周长（ r_0 为桩的半径）。求解上述方程之前必须先建立 w 与 p 之间的关系。Poulos 建议利用弹性半空间的 Mindlin 解求取 p 作用下土的位移 u_r ，然后根据侧壁处 $w = u_r$ 的相容条件建立了 p 与 w 的关系^[26]。以后，Randolph 提出简化的剪切位移法求得 w 与 p 之间的线性关系^[27]。而此前 Seed 和 Reese 已经建议通过实测确定 w 与 p 之间的非线性关系^[29]，下面介绍这些方法的基本思想。

1. 弹性理论法

把桩切成几段，则在 j 段作用环形分布力 p_j 后在 i 段引起的变位 $(u_{ri})_j$ 可以写为（图 3-11）

$$(u_{ri})_j = \frac{\delta}{E} A_{ij} p_j \quad (3-148)$$

其中 $\delta = l/n$ 为桩段长。同样，桩底荷载 p_b 作用下 i 点的变位可以写为

$$(u_{ri})_b = \frac{r_b^2}{E} A_{ib} p_b \quad (3-149)$$

式中： r_b 为桩底直径。把桩与土接触面上所有影响力累加起来，可得

$$u_{ri} = \frac{\delta}{E} \sum_{j=1}^n A_{ij} p_j + \frac{r_b^2}{E} A_{ib} p_b \quad (i = 1, n) \quad (3-150a)$$

相应地桩底变位可以写为

$$u_{rb} = \frac{\delta}{E} \sum_{j=1}^n A_{bj} p_j + \frac{r_b^2}{E} A_{bb} p_b \quad (3-150b)$$

上述式中 A_{ij} 、 A_{ib} 和 A_{bj} 、 A_{bb} 代表 j 点和桩底分布力作用下在桩侧 i 点和桩底面引起的无量纲变位，可由下列 Mindlin 解式（3-18）中 u_r 公式的积分得出，即

$$A_{ij} = 2\pi \int_{j-1}^j u_r dz; A_{ib} = 2\pi \int_0^{r_b} u_r r dr \quad (3-151a)$$

$$A_{bj} = 2\pi \int_{j-1}^j u_r dz; A_{bb} = 2\pi \int_0^{r_b} u_r r dr \quad (3-151b)$$

u_r 如式（3-18），但代人 $P=1$ ， $r=r_0$ ，式（3-151a）或 $r=r_b$ ，式（3-151b）， $z = \left(i - \frac{1}{2}\right) \delta$ 。

另一方面，由式（3-147）可得下列桩变位方程

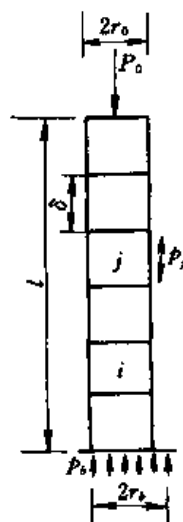


图 3-11 Mindlin 解用于单桩分析

$$w_i = \frac{\delta^2}{E_p r_0} \sum_{j=1}^n B_{ij} p_j + u_{zb} + \frac{\delta P_0}{A_p E_p} (i - 0.5) \quad (i = 1, n) \quad (3-152)$$

其中

$$B_{ij} = \begin{cases} 2i - 1 & i \leq j \\ 2j - 1 & i > j \end{cases} \quad (3-153)$$

把式 (3-150b) 的 u_{zb} 代入式 (3-152), 并令 $w_i = u_{zi}$, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[\frac{\delta}{E} (A_{ij} - A_{bj}) - \frac{\delta^2}{E_p r_0} B_{ij} \right] p_j + \frac{r_0^2}{E} (A_{ib} - A_{bb}) p_b \\ & = \frac{\delta P_0}{A_p E_p} (i - 0.5) \quad (i = 1, n) \end{aligned} \quad (3-154)$$

再从全桩轴力平衡条件可得

$$\sum_{j=1}^n U_p \delta p_j + P_0 = \pi r_0^2 p_b \quad (3-155)$$

由以上两式即可解出 p_j ($j=1, n$) 和 p_b 。

2. 剪切位移法

Rondolph 等假定单桩作用下周围土只发生环形剪切变形, 可以近似地按一维问题处理, 而桩端变位则按刚性圆板下的无限弹性地基沉降公式 (3-46) 计算。

设 τ_0 为桩侧剪应力, 则桩周围土体单元的平衡方程可以写为 (图 3-12)

$$\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (3-156a)$$

或略去 σ_z 的影响后

$$\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0 \quad (3-156b)$$

其解为

$$\tau = \frac{\tau_0 r_0}{r} \quad (3-157)$$

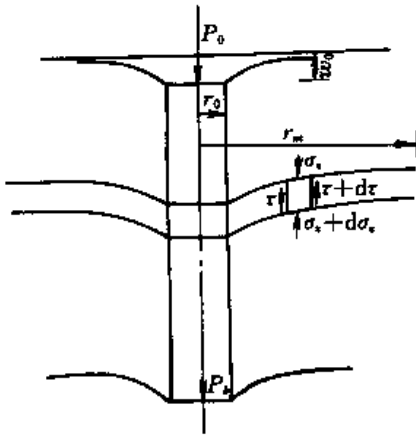


图 3-12 桩侧土的剪切位移

相应的剪切变形为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (3-158)$$

同样地略去 u_r 的影响后, 积分可得

$$u_z = \frac{\tau_0 r_0}{G} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \quad (3-159)$$

假定 r_m 为最大影响半径, 上式可写为

$$\begin{aligned} u_z(r, z) &= \frac{\tau_0 r_0}{G} \ln \frac{r_m}{r} & r_0 \leq r \leq r_m \\ u_z(r, z) &= 0 & r > r_m \end{aligned} \quad (3-160)$$

r_m 可取 $0.5(1-\nu)l$ 。根据相容条件, $r=r_0$ 处土的位移 $u_z(r_0, z)$ 即为桩位移 w , 则考虑到 $\tau_0 = p$, 由上式可得 p 与 w 之间的关系为

$$U_p p = k_1 w \quad (3-161a)$$

其中

$$k_1 = \frac{2\pi G}{\ln(r_m/r_0)} \quad (3-162a)$$

从而 $p \sim w$ 之间为线性关系, k_1 相当于弹簧系数。另一方面, 式 (3-46) 可以改写为

$$P_b = k_2 w_b \quad (3-161b)$$

其中

$$k_2 = \frac{4r_0 G}{1-\nu} \quad (3-162b)$$

把式 (3-161a) 代入式 (3-147) 后可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu^2 w = 0 \quad (3-163)$$

其中 $\mu = \sqrt{k_1/E_p A_p}$ 。此式的通解为

$$w(z) = C_1 e^{\mu z} + C_2 e^{-\mu z} \quad (3-164)$$

相应的轴力为

$$P(z) = -A_p E_p \mu (C_1 e^{\mu z} - C_2 e^{-\mu z}) \quad (3-165)$$

代入 $z=l$, 可得桩底沉降和轴力公式为

$$\begin{aligned} w_b &= C_1 e^{\mu l} + C_2 e^{-\mu l} \\ P_b &= -A_p E_p \mu (C_1 e^{\mu l} - C_2 e^{-\mu l}) \end{aligned} \quad (3-166)$$

考虑到 $P_b = k_2 w_b$, 由以上两式解出 C_1 和 C_2 后再代回到 (3-164), 可得

$$w(z) = \frac{1}{2} P_b \left[\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{\pi E_p \mu} \right) e^{-\mu(l-z)} + \left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{\pi E_p \mu} \right) e^{\mu(l-z)} \right] \quad (3-167a)$$

由于 $\frac{1}{\pi \mu E_p}$ 与 $\frac{1}{k_2}$ 相比很小, 上式可简化为

$$w(z) = \frac{P_b}{k_2} \cosh[\mu(l-z)] \quad (3-167b)$$

而轴力公式为

$$P(z) = P_b \left\{ \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sh}[\mu(l-z)] + \operatorname{ch}[\mu(l-z)] \right\} \quad (3-168)$$

把 $z=0$ 代入上式两式并消去 P_b , 可得桩顶荷载和沉降之间关系式如下

$$w_0 = P_0 \left[1 + \frac{k_2}{A_p E_p} \frac{\operatorname{th}(\mu l)}{\mu} \right] \left[k_2 + k_1 \frac{\operatorname{th}(\mu l)}{\mu} \right]^{-1} \quad (3-169)$$

罗惟德进行了类似工作, 但他在推导弹簧系数 k_1 的公式时假定了剪切位移曲线为抛物线, 相应的公式为^[28]

$$k_1 = \frac{2\pi G(2+\lambda)}{3\lambda} \quad (3-170)$$

其中 $\lambda = (r_m - r_0) / 2r_0$, r_m 的定义同前。另外, 他还对桩上部 l_f 范围内侧壁阻力 τ_0 达到某一极限值 $\tau_f = k_1 w_f$ 后不再随位移而增大的情况求得相应的解为

$$w(z) = \begin{cases} \frac{g}{2} z^2 - c_1 z + w_0 & 0 \leq z \leq l_f \\ c_2 (\operatorname{ch} b_1 z - h \operatorname{sh} b_1 z) & l_f < z \leq l \end{cases} \quad (3-171)$$

其中

$$g = \frac{\tau_f}{A_p E_p}, b = \sqrt{\frac{k_1}{A_p E_p}}, h = \frac{1 + \zeta \operatorname{cth} bl}{\zeta + \operatorname{cth} bl}, \zeta = \frac{k_2}{U_p E_p b}$$

$$c_1 = \frac{gl_f^2/2 + c_3 gl_f + w_0}{l_f + c_3}, c_2 = \frac{gl_f - c_1}{b(\operatorname{sh} bl_f - h \operatorname{ch} bl_f)}, c_3 = \frac{\operatorname{ch} bl_f - h \operatorname{sh} bl_f}{b(h \operatorname{ch} bl_f - \operatorname{sh} bl_f)}$$

此时桩顶轴力和位移均与 l_f 有关, 即

$$w_0 = w_f \left(1 + \frac{l_f}{c_3} + \frac{g}{2} l_f^2 \right) \quad (3-172a)$$

$$P_0 = A_p E_p \left(gl_f + \frac{w_f}{c_3} \right) \quad (3-172b)$$

$w_f = \tau_f / k_1$ 为达到极限剪应力时的桩位移。

3. 荷载传递法

式 (3-161) 代表力和位移之间的线性关系, 本质上与 Winkler 模型类似。Seed 等在更早以前已经建议根据试验结果直接推定 $p-w$ 之间的非线性关系, 并称之为传递函数^[29]。此后, Coyle & Reese 针对这一非线性问题提出了迭代解法, 即所谓的荷载传递法^[30]。此法先把桩分成若干段, 然后按以下顺序迭代求解。

- ① 选定一个较小的桩底位移 w_b ;
- ② 由式 (3-161b) 计算 P_b ;
- ③ 假定各段桩的中点位移 w_i 等于桩底位移 w_b , 从 $p(w)$ 曲线查得各段侧向阻力 p_i ;
- ④ 根据 P_b 和 p_i , 由下向上逐段计算桩的压缩量, 得出各段中点位移 w_i 和桩顶位移 w_0 ;
- ⑤ 比较两次中点位移之差, 若超过允许值, 则重复③和④两步计算;
- ⑥ 根据 P_b 和 p_i 计算桩顶荷载 P_0 ;
- ⑦ 选定一个新的桩底位移, 重复以上步骤, 即可得出一组 P_0-w_0 关系。

以上迭代方法直接得出 P_0 与 w_0 总量之间关系。曹汉志则建议了另一种增量迭代

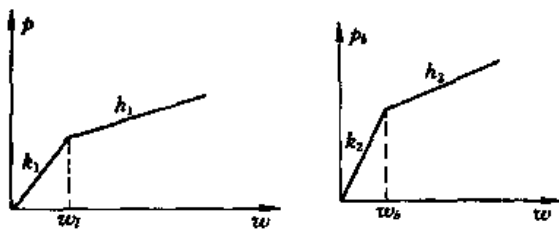


图 3-13 双线性传递函数

法^[31], 即先假定一个桩顶荷载增量 ΔP_0 , 通过迭代得出位移增量 Δw_0 。此时当然不宜直接用 $p(w)$ 曲线, 而要改用切线模量。曹对 $p(w)$ 曲线采用了分段线性化的办法, 具体建议用两段直线拟合该曲线。

针对上述双线性传递函数, 设 w_1 和 w_b 分别为桩侧和桩底的屈服位移, k_1 和 k_2 为屈服前

桩侧和桩底的抗力系数, h_1 和 h_2 为屈服后的硬化参数 (图 3-13), 陈龙珠等^[32]求得这一问题的解析解。适用于 $w_b < w_1$ 情况的相应解如下。

(1) $w_0 < w_{\sigma_1}$

$$P = w_0 \mu_1 E_p A_p \frac{k_2 + \mu_1 E_p A_p \operatorname{th}(\mu_1 l)}{\mu_1 E_p A_p + k_2 \operatorname{th}(\mu_1 l)} \quad (3-173a)$$

其中 w_{σ_1} 为桩底变位达到屈服状态时的桩顶沉降, 由下式计算

$$w_{\sigma_1} = \left[\operatorname{ch}(\mu_1 l) + \frac{k_2}{\mu_1 E_p A_p} \operatorname{sh}(\mu_1 l) \right] w_b$$

$\mu_1 = \sqrt{k_1/E_p A_p}$ 。此解与式 (3-169) 一致。

$$(2) \quad w_{cr_1} < w_0 < w_{cr_2}$$

$$P_0 = w_0 \mu_1 E_p A_p \eta_{12} + (k_2 - h_2) [\text{ch}(\mu_1 l) - \eta_{12} \text{sh}(\mu_1 l)] w_b \quad (3-173b)$$

其中

$$\eta_{12} = \frac{h_2 + \mu_1 E_p A_p \text{th}(\mu_1 l)}{\mu_1 E_p A_p + h_2 \text{th}(\mu_1 l)}$$

$w_{cr_2} = w_l$ 为达到屈服值时的桩顶位移。

$$(3) \quad w_{cr_2} < w_0 < w_{cr_3}$$

$$P_0 = w_0 \mu_2 E_p A_p \frac{w_l \mu_2 E_p A_p k_1 \text{sh}(\mu_2 l_f) + P_c h_1 \text{ch}(\mu_2 l_f)}{w_l \mu_2 E_p A_p [k_1 \text{ch}(\mu_2 l) + (h_1 - k_1)] + P_c h_1 \text{sh}(\mu_2 l_f)} \quad (3-173c)$$

其中 $\mu_2 = \sqrt{h_1/E_p A_p}$ 。 l_f 为从桩顶算起的屈服段长度, P_c 为屈服段底部桩的轴力, 可由根据此点位移 $w(l_f)$ 正好等于 w_l 算出, 即令式 (3-173b) 中 $w_0 = w_l$, $l = l_f$, 如此得出的 P_0 即为所需的 P_c 值。 w_{cr_3} 为 $l = l_f$, 即全桩达到屈服时的桩顶位移。

$$(4) \quad w_0 > w_{cr_3}$$

$$P_0 = w_0 \mu_2 E_p A_p \eta_{22} + (k_2 - h_2) [\text{ch}(\mu_2 l) - \eta_{22} \text{sh}(\mu_2 l)] w_b + \left(\frac{k_1}{h_1} - 1 \right) \mu_2 E_p A_p [\text{sh}(\mu_2 l) - \eta_{22} \text{ch}(\mu_2 l) + \eta_{22}] w_l \quad (3-173d)$$

其中

$$\eta_{22} = \frac{h_2 + \mu_2 E_p A_p \text{th}(\mu_2 l)}{\mu_2 E_p A_p + h_2 \text{th}(\mu_2 l)}$$

二、群桩

1. 弹性理论法

如果假定 Mindlin 解在土中存在许多桩的情况下仍旧适用, 则前面针对单桩的分析方法很容易推广到群桩^[32]。设群桩由 m 根单桩组成, 每根桩再分 n 段, 则式 (3-154) 和式 (3-155) 可以改写为

$$\sum_{\beta=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{\delta}{E} (A_{ij}^{\alpha\beta} - A_{bj}^{\alpha\beta}) - \frac{\delta^2}{E_p r_0} B_{ij}^{\alpha\beta} \right] p_{j\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{r_0^2}{E} (A_{ib}^{\alpha\beta} - A_{bb}^{\alpha\beta}) = \frac{\delta P_{0\alpha}}{A_p E_p} (i - 0.5) \quad \begin{matrix} (\alpha = 1, m) \\ (i = 1, n) \end{matrix} \quad (3-174)$$

$$\sum_{j=1}^n U_p \delta p_{j\alpha} + P_{0\alpha} = \pi r_b^2 p_{b\alpha} \quad (\alpha = 1, m) \quad (3-175)$$

由以上方程可解出 $p_{j\beta}$ (mn 个) 和 $p_{b\alpha}$ (m 个) 未知数。上述式中对同一根桩 $\alpha = \beta$, 系数 $A_{ij}^{\alpha\beta}$ 等仍可用式 (3-151) 计算, 但对 $\alpha \neq \beta$ 的情况, 需要另外应用式 (3-18) 进行积分。

以上方法适用于桩顶荷载 $P_{0\alpha}$ 已知的问题。如果群桩顶上为一刚性桩台, 其上作用的总荷载 P_t 已知, 桩台整体位移 w_t 也是未知量, 则未知数将增加 $m+1$ 个, 相应的 $m+1$ 个补充方程为

$$\sum_{\beta=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta^2}{E_p r_0} B_{ij}^{\alpha\beta} + \frac{\delta}{E} A_{bj}^{\alpha\beta} \right) p_{j\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{r_0^2}{E} A_{bb}^{\alpha\beta} p_{b\beta} - w_t = 0 \quad (\alpha = 1, m) \quad (3-176)$$

$$\sum_{\alpha=1}^m P_{0\alpha} = P_t \quad (3-177)$$

显然, $\alpha = \beta$ 时, $B_{ij}^{\alpha\beta} = B_{ij}$, 而 $\alpha \neq \beta$ 时 $B_{ij}^{\alpha\beta} = 0$ 。

2. 剪切位移法^[33]

式 (3-169) 可以简写为

$$w_o = fP_o \quad (3-178)$$

其中
$$f = \left[1 + \frac{k_2}{A_p E_p} \frac{\text{th}(\mu l)}{M} \right] \left[k_2 + k_1 \frac{\text{th}(\mu l)}{M} \right]^{-1} \quad (3-179)$$

即为柔度系数。如果 m 是群桩的桩数, f_{ii} 代表 i 桩承受单位荷载时自身的沉降, f_{ij} 为 j 桩承受单位荷载时在 i 桩引起的沉降, 则根据线性问题的叠加原理可得 i 桩的桩顶沉降公式如下

$$w_{oi} = \sum_{j=1}^m f_{ij} P_{oj} \quad (3-180)$$

当 $i=j$ 时, $f_{ii}=f(k_1, k_2)$ 可由式 (3-179) 计算。至于对两根相邻的桩, $i \neq j$, 建议令 $f_{ij}=f(k'_1, k'_2)$ 即把下列 k'_1 和 k'_2 代入式 (3-179) 计算 f

$$k'_1 = k_1 \ln \frac{r_m}{r_o} / \ln \frac{r_m}{R} \quad (3-181a)$$

$$k'_2 = k_2 \frac{\pi R}{2r_o} \quad (3-181b)$$

其中 R 为两桩的中心距。以上公式表明, k'_1 和 k'_2 随着两桩距离增大而增大, 从而相互影响随着两桩距离增大而减小。式 (3-181a) 直接来源于式 (3-160) 的位移对数减小规律。当 $R=r_m$ 时 $k'_1=\infty$, 即两桩之间不再有影响。

对于刚性桩台, 式 (3-180) 可以写为

$$\sum_{j=1}^m f_{ij} P_{oj} - w_i = 0 \quad (i = 1, m) \quad (3-182)$$

而桩台的力矢平衡条件为

$$\sum_{i=1}^m P_{oi} = P_t \quad (3-183)$$

当系数 f_{ij} 已知时, 上述方程联立求解即可解得出 P_{oj} ($j=1, m$) 和 w_i 。

Nogami 在上述思路基础上再把每根桩分成若干段以考虑地基土的不均匀性和成层土^[34]。此时将得到类似式 (3-174) 的代数方程组。这里系数 A_{ij}^o 可以按式 (3-179) 类似的方法得出, 显然比用 Mindlin 公式积分大为简化。

3. 荷载传递法

传递函数建立了桩侧一点的土阻力与桩身位移的关系, 没有对离开桩侧一定距离的土将产生多少位移作出回答, 因而无法直接用于群桩的计算。但荷载传递法可以考虑 $p(w)$ 之间的非线性关系是其突出的优点。为此, 田美存建议把剪切位移法与荷载传递法结合起来, 即在假定土中位移按对数规律减小的基础上建立相关的方程式, 而在计算柔度系数时考虑 $p(w)$ 之间的非线性^[35]。为了考虑桩间土与桩顶共同承担桩台的荷载, 他把桩间土当作等效的土桩看待。具体的算法这里不再介绍。

第六节 弹性应力波的传播

一、弹性波的传播特性

1. 波的分解

弹性体的位移场可以分解为两部分。一部分为只引起体积应变的无旋位移, 另一部分

是只引起剪切应变的等容位移^[1,37]。前者可以通过引入一个膨胀势函数 φ 描述

$$u_{x1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; u_{y1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; u_{z1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3-184)$$

后者可以通过旋转矢量势 $\{\psi\} = \{\psi_x \ \psi_y \ \psi_z\}^T$ 表达

$$u_{x2} = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}; u_{y2} = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}; u_{z2} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (3-185)$$

不难证明, 前者满足旋转量 $\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} \right) = 0$ 和 $\theta_y = 0, \theta_z = 0$, 而后者满足 $\epsilon_v = \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} = 0$ 。

由式 (3-184), $\epsilon_v = \nabla^2 \varphi$, 从而 $\frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} = \nabla^2 u_{x1}, \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} = \nabla^2 u_{y1}, \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} = \nabla^2 u_{z1}$ 。把它们代入式 (3-4) 后可得

$$\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2} = v_p^2 \nabla^2 u_{x1}; \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial x^2} = v_p^2 \nabla^2 u_{y1}; \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial x^2} = v_p^2 \nabla^2 u_{z1} \quad (3-186a)$$

其中 $v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ 。而从 $\epsilon_v = 0$ 的条件, 由式 (3-4) 可得

$$\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2} = v_s^2 \nabla^2 u_{x2}; \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial x^2} = v_s^2 \nabla^2 u_{y2}; \frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial x^2} = v_s^2 \nabla^2 u_{z2} \quad (3-186b)$$

其中 $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 。以上两式可以统一写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (3-187)$$

对无旋波, $c = c_1 = v_p$, 对等容波 $c = c_2 = v_s$, 分别称为压缩波速和剪切波速。

波动方程式 (3-187) 具有一个重要特性, 即当 u_0 为该方程的特解时, 其导数也将为该方程的特解, 而且其传播的速度相同。由于应力和应变均是位移的导数, 所以它们将与位移相同的方式和速度传播。

2. 平面波

在离开扰动源较远的地方, 可以假定波只沿某一固定方向传播, 即平面波。设波的传播方向和振动方向均在 $x-z$ 平面内, 并与 y 轴无关, 则两个势函数可分别简化为

$$\varphi = \varphi(x, z), \psi_y = \psi(x, z) \quad (3-188)$$

相应地

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}; u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-189)$$

把此式代入式 (3-186) 中还可得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c_1^2 \nabla^2 \varphi \quad (3-190a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = c_2^2 \nabla^2 \psi \quad (3-190b)$$

此式的通解可以写为

$$\varphi = f_1(l - c_1 t) + f_2(l + c_1 t) \quad (3-191a)$$

$$\psi = g_1(l - c_2 t) + g_2(l + c_2 t) \quad (3-191b)$$

l 代表波传播方向长度。考虑到 $u_1 = \sqrt{u_{x1}^2 + u_{z1}^2}$ 和 $\sqrt{(\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial z})^2} = 1$, 上式可写为

$$u_1 = f'_1(l - c_1 t) + f'_2(l + c_1 t) \quad (3-192a)$$

$$u_2 = g'_1(l - c_2 t) + g'_2(l + c_2 t) \quad (3-192b)$$

其中 $f'_1 = \frac{\partial f_1}{\partial l}$, 余类推。 u_1 常称纵波或 P 波, 其传播速度 $c_1 = v_p$, u_2 常称横波或 S 波, $c_2 = v_s$ 。 f_1 和 g_1 代表 l 随 t 的增加而增大的正向传播函数; f_2 和 g_2 则代表相反方向的传播函数 (图 3-14)。

上述横波中 $u_{y2} = 0$, u_{x2} 和 y_{z2} 沿 y 坐标保持常量, 这种波称为 SV 波。如果旋转势具有下列特性

$$\phi_x = \phi_y = 0, \phi_z = \phi(x, z) \quad (3-193)$$

图 3-14 平面波的传播

则由式 (3-185) $u_{xz} = u_{zx} = 0$, $u_{y2} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, 即振动发生在 y 方向, 且 u_{y2} 沿深度 z 可变化, 这样的横波称 SH 波。

3. 球面波

当动荷载为球对称时, 相应的变位只剩下径向变位 u_r , 式 (3-4) 可以改写为

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \quad (3-194)$$

引入势函数 $\varphi(r, t)$, 使 $u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, 上式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} (r\varphi) = c_1^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} \quad (3-195)$$

此式与式 (3-187) 形式上完全一致, 它的通解可以写为

$$r\varphi = f_1(r - c_1 t) + f_2(r + c_1 t) \quad (3-196)$$

式中: f_1 代表由球形空洞向外传播的波, f_2 代表由球面向心传播的波。

4. Rayleigh 波

弹性波在半空间传播时, 可能会出现表面附近波动明显, 但沿深度迅速衰减的表面波。

取 x 为水平向, z 为深度方向, 则考虑沿深度衰减的特点, 简谐波的势函数一般可以写为

$$\varphi = A \exp[-az + ik(x - ct)] \quad (3-197a)$$

$$\psi = B \exp[-bz + ik(x - ct)] \quad (3-197b)$$

式中: $k = \omega/c$ 为波数; ω 为振动频率; c 是待定的波速; A 、 B 和 a 、 b 是待定的实参数。把

$u_{x1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $u_{z1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ 和 $u_{x2} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $u_{z2} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ 分别代入式 (3-186a) 和式 (3-186b), 可得 a 和 b 必须满足下列条件

$$a = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \quad b = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \quad (3-198)$$

另外, 自由面上 $\sigma_z = 0$ 和 $\tau_{xz} = 0$ 的条件可以写为

$$\left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{z=0} = 0; \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

把式 (3-197) 代入上式后得

$$\left. \begin{aligned} \left(a^2 - \frac{\nu}{1-\nu} k^2\right) A + \frac{1-2\nu}{1-\nu} b k B &= 0 \\ 2akA + (b^2 + k^2) B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-199)$$

A 和 B 要有非零解, 其系数行列式必须为 0, 即

$$2(1-2\nu)abk^2 = (b^2 + k^2)[(1-\nu)a^2 - \nu k^2]$$

或代入式 (3-198) 后得

$$\left(\frac{c}{c_2}\right)^6 - 8\left(\frac{c}{c_2}\right)^4 + 8\frac{2-\mu}{1-\mu}\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (3-200)$$

此式要有解, 待定的波速必须满足下列条件

$$c_2 < c < c_1 \quad (3-201)$$

满足这样条件的波称为 Rayleigh 波。Rayleigh 波的质点运动落在波的前进方向与深度方向构成的平面内, 由 P 波和 SV 波组成 (图 3-15)。

5. Love 波

当地基表面存在模量较低的土层时, 还可能出现质点运动为水平向的 SH 波, 即 Love 波。对于简谐运动, 上层和下层土中的质点位移 u'_y 和 u_y 可分别假定为 (图 3-16)。

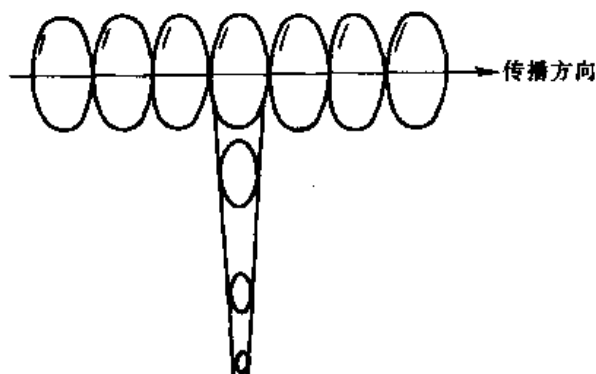


图 3-15 Rayleigh 波的质点运动

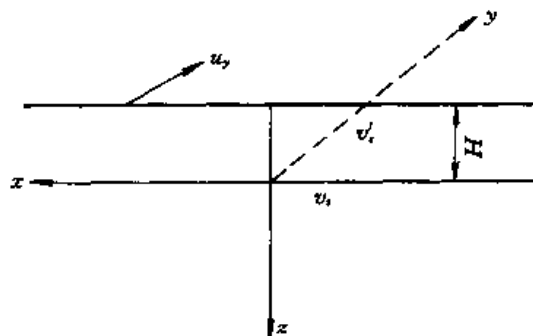


图 3-16 Love 波的传播

$$u'_y = D_1(z) \exp[ik(x - ct)] \quad (3-202a)$$

$$u_y = D_2(z) \exp[ik(x - ct)] \quad (3-202b)$$

式中: D_1 和 D_2 是待定的函数; c 是待定的波速。设 v_1' 和 v_1 分别为上层土和下层土的剪切波速, 则把上面两式分别代入式 (3-186a) 和式 (3-186b) 中第二式后可得 D_1 和 D_2 必须满足的条件如下

$$\frac{d^2 D_1}{dz^2} + (a^2 - k^2) D_1 = 0 \quad (3-203a)$$

$$\frac{d^2 D_2}{dz^2} - (k^2 - b^2) D_2 = 0 \quad (3-203b)$$

其中 $a = kc/c_2'$, $b = kc/c_2$ 。当 $c_2' < c < c_2$ 时, 上式有相应的解如下

$$D_1(z) = A \cos m' kz + B \sin m' kz \quad (3-204a)$$

$$D_2(z) = C \exp(-mkz) \quad (3-204b)$$

其中
$$m' = \sqrt{\left(\frac{c}{c_2'}\right)^2 - 1}; \quad m = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_2}\right)^2} \quad (3-205)$$

3个参数 A 、 B 和 C 根据下列边界条件求解：① $x = -H$, $\tau'_{yx} = 0$ ；② $x = 0$, $u'_y = u_y$ ；③ $x = 0$, $\tau'_{yz} = \tau_{yz}$ 。由②得 $C = A$ 。由①和③并代入 $C = A$ 后得

$$\begin{aligned} A \sin m' k H + B m' k H &= 0 \\ A G m k + B G' m' k &= 0 \end{aligned} \quad (3-206)$$

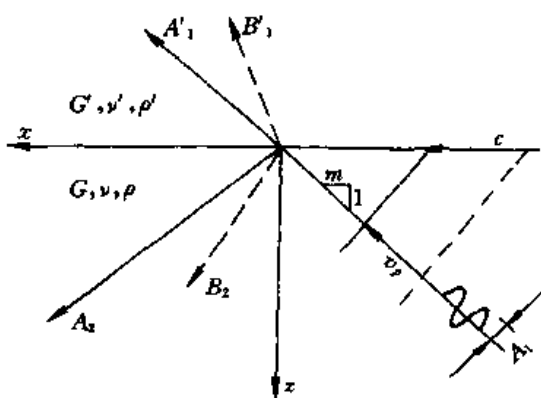
此式要有非零解，其系数行列式必须为 0，即

$$\tan m' k H = \frac{G m}{G' m'} \quad (3-207)$$

把式 (3-205) 和 $k = \omega/c$ 代入上式后，即可得 Love 波速 c 。但上式的解具有多值性，因此 Love 波具有不同的振动模态。

6. 波的折射与反射

平面波传播到两种不同介质的分界面时将会产生反射和折射。设以 $x = 0$ 为分界面， G' 、 ν' 、 ρ' 和 G 、 ν 、 ρ ，分别为界面上下两种土的参数，



则对简谐运动而言，两种介质内的波函数可以分别写为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= f'(z) \exp[ik(x - ct)] \\ \psi &= g'(z) \exp[ik(x - ct)] \\ \varphi &= f(z) \exp[ik(x - ct)] \\ \psi &= g(z) \exp[ik(x - ct)] \end{aligned} \right\} (3-208)$$

c 代表沿分界面的波速 (图 3-17)。把上式代入式 (3-184) 和式 (3-185) 后再代入式 (3-186) 中，可以解出 f' 、 g' 和 f 、 g 如下

图 3-17 波的反射和折射

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= A'_1 \exp(a'z) + A'_2 \exp(-a'z) \\ g'(z) &= B'_1 \exp(b'z) + B'_2 \exp(-b'z) \\ f(z) &= A_1 \exp(az) + A_2 \exp(-az) \\ g(z) &= B_1 \exp(bz) + B_2 \exp(-bz) \end{aligned} \right\} (3-209)$$

其中 $a' = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1'^2}}$, $b' = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2'^2}}$, $a = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}$, $b = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}$

令
$$\left. \begin{aligned} m'_1 &= \sqrt{\frac{c^2}{c_1'^2} - 1}, \quad m'_2 = \sqrt{\frac{c^2}{c_2'^2} - 1} \\ m_1 &= \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} \end{aligned} \right\} (3-210)$$

把上式代入式 (3-209) 后，式 (3-208) 可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A'_1 \exp[ik(x + m'_1 z - ct)] + A'_2 \exp[ik(x - m'_1 z - ct)] \\ \psi &= B'_1 \exp[ik(x + m'_2 z - ct)] + B'_2 \exp[ik(x - m'_2 z - ct)] \\ \varphi &= A_1 \exp[ik(x + m_1 z - ct)] + A_2 \exp[ik(x - m_1 z - ct)] \\ \psi &= B_1 \exp[ik(x + m_2 z - ct)] + B_2 \exp[ik(x - m_2 z - ct)] \end{aligned} \right\} (3-211)$$

上述式中含 $+mz > 0$ 者代表向边界前进的入射波，反之为离开边界的反射和折射波。参数 A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 和 A_1, A_2, B_1, B_2 根据具体条件确定。例如，只考虑从下面入射的 P 波，则入射波波幅中 A_1 已知， $B_1 = A'_2 = B'_2 = 0$ 。剩下 4 个反射和折射波的波幅 A_2, B_2, A'_1 和 B'_1 可由下列分界面上连续条件确定

$$z = 0 \quad u_x = u'_x, u_z = u'_z; \sigma_z = \sigma'_z, \tau_{xz} = \tau'_{xz}$$

即它们必须满足下列方程式

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 - m_2 B_2 - A'_1 - m'_2 B'_1 &= 0 \\ m_1 (A_1 - A_2) - B_2 - m'_1 A'_1 + B'_1 &= 0 \\ G[(1 - m_2^2)(A_1 + A_2) - 2m_2 B_2] - G'[(1 - m'^2_2)A'_1 + 2m'_2 B'_1] &= 0 \\ G[(1 - m_2^2)B_2 - 2m_1(A_1 - A_2)] - G'[-2m'_1 A'_1 + (1 - m'^2_2)B'_1] &= 0 \end{aligned} \right\} (3-212)$$

最终的解为

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{A_1}{D} [(a_1 - a_3)(b_2 + b_4) - (a_2 + a_4)(b_1 - b_3)] \\ B_2 &= \frac{A_1}{D} [a_4 b_2 - a_2 b_4] \\ A'_1 &= \frac{A_1}{D} [2(b_2 + b_4)] \\ B'_1 &= \frac{A_1}{D} [-2(a_2 + a_4)] \end{aligned} \right\} (3-213)$$

其中 $D = (a_1 + a_3)(b_2 + b_4) - (a_2 + a_4)(b_1 + b_3)$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2G - G'(1 - m'^2_2)}{G(1 + m^2_2)} & b_1 &= \frac{2(G - G')m'_2}{G(1 + m'^2_2)} \\ a_2 &= \frac{-G(1 - m^2_2) + G'(1 - m'^2_2)}{G(1 + m^2_2)m_2} & b_2 &= \frac{2G'm'_2 - G(1 - m^2_2)m'_2}{G(1 + m^2_2)m_2} \\ a_3 &= \frac{2G'm'_2 - G(1 - m^2_2)m'_2}{G(1 + m^2_2)m_1} & b_3 &= \frac{G(1 - m^2_2) - G'(1 - m'^2_2)}{G(1 + m^2_2)m_1} \\ a_4 &= \frac{-2Gm'_1 + 2G'm'_1}{G(1 + m^2_2)} & b_4 &= a_1 \end{aligned}$$

如果 $z=0$ 为自由面， $G'=0$ ，则只剩下两种反射波的波幅 A_2 和 B_2 如下

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= A_1 \frac{4m_1 m_2 - (1 - m^2_2)^2}{4m_1 m_2 + (1 - m^2_2)^2} \\ B_2 &= A_1 \frac{4m_1 (1 - m^2_2)}{4m_1 m_2 + (1 - m^2_2)^2} \end{aligned} \right\} (3-214)$$

二、半空间轴对称动力荷载问题

对轴对称问题，波函数可以写为

$$\varphi = \varphi(r, z), \psi = \psi(r, z) \quad (3-215)$$

与式 (3-190) 相当的波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-216)$$

变位方程为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r \partial z} \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3-217)$$

应力公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u_r + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-218)$$

边界条件为

$$\sigma_z(r, 0, t) = p(r, t); \tau_{rz}(r, 0, t) = 0 \quad (3-219)$$

设 $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, \bar{u}_r , \bar{u}_z , $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{rz}$ 和 \bar{p} 为上述变量的 Laplace 变换, 例如

$$\bar{\varphi}(r, z, s) = \int_0^\infty \varphi(r, z, t) e^{-sz} dt$$

而 $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$... 等为 $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$... 等的 Henkel 变换, 例如

$$\bar{\varphi}(\xi, z, s) = \int_0^\infty \bar{\varphi}(r, z, s) J_0\left(\frac{r}{a}\xi\right) r dr$$

其中 a 为 r 方向的参考长度。反变换按相反的顺序进行, 例如

$$\bar{u}_r(r, z, s) = \int_0^\infty \bar{u}_r(\xi, r, s) J_0\left(\frac{r}{a}\xi\right) \xi d\xi$$

$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{w}(r, z, s) e^{sz/a} ds$$

式 (3-216) 经过两次变换后可以写为

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} - (\xi^2 + \lambda^2 s^2) \bar{\varphi} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} - (\xi^2 + s^2) \bar{\psi} = 0 \quad (3-220)$$

其中 $\lambda = c_2/c_1$ 。上式的解为

$$\bar{\varphi} = A(\xi, s) e^{-\alpha z}, \quad \bar{\psi} = B(\xi, s) e^{-\beta z} \quad (3-221)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2 s^2}$, $\beta = \sqrt{\xi^2 + s^2}$ 。参数 A 和 B 由边界条件式 (3-219) 确定, 即

$$\left. \begin{aligned} a(\xi^2 + \frac{1}{2}s^2)A - \xi^2 \beta B &= -\frac{a^3}{2G} \bar{p} \\ a\alpha A - \left(\xi^2 + \frac{1}{2}s^2\right)B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-222)$$

相应的解为

$$\left. \begin{aligned} A(\xi, s) &= -\frac{a^2}{G} \frac{2\xi^2 + s^2}{F(\xi, s)} \bar{p}(\xi, s) \\ B(\xi, s) &= -\frac{2a^3}{G} \frac{\alpha}{F(\xi, s)} \bar{p}(\xi, s) \end{aligned} \right\} \quad (3-223)$$

其中

$$F(\xi, s) = (2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta$$

把 A 和 B 代回到式 (3-221), 经过两次反变换后再代回到式 (3-217) 中, 即可得相应的变位, 而 $z=0$ 处的表面变位为

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i G} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^\infty \frac{2\xi^2 + s^2 - 2\alpha\beta}{F(\xi, s)} \bar{p}(\xi, s) J_1\left(\frac{r}{a}\xi\right) e^{s c_2/a} \xi^2 d\xi ds \\ u_z(r, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i G} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^\infty \frac{\alpha}{F(\xi, s)} \bar{p}(\xi, s) J_0\left(\frac{r}{a}\xi\right) e^{s c_2/a} s^2 \xi d\xi ds \end{aligned} \right\} \quad (3-224)$$

下面列出几个问题的解答

1. 集中冲击荷载

地面荷载的条件为

$$P = \begin{cases} P_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-225)$$

严人觉等求得了各种 ν 情况下地面沉降的普遍解答^[36]。其中 $\nu=0.25$ 的解为

$$\begin{aligned} u_z(r, 0, t) &= 0 & t < \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{c_2} \\ &= \frac{P}{16\pi G} \left[\frac{3}{r} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4c_2^2 t^2 - r^2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{3+5}}{\sqrt{(3+\sqrt{3})r^2 - 4c_2^2 t^2}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3-5}}{\sqrt{4c_2^2 t^2 - (3-\sqrt{3})r^2}} \right] & \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{c_2} < t < \frac{r}{c_2} \\ &= \frac{P}{8\pi G} \left[\frac{3}{r} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{3+5}}{\sqrt{(3+\sqrt{3})r^2 - 4c_2^2 t^2}} \right] & \frac{r}{c_2} < t < \frac{1}{2} \sqrt{3+\sqrt{3}} \frac{r}{c_2} \\ &= \frac{3P}{8\pi G} & t > \frac{1}{2} \sqrt{3+\sqrt{3}} \frac{r}{c_2} \end{aligned} \quad (3-226)$$

2. 集中谐和荷载

在地面荷载 $P=P_0 e^{i\omega t}$ 的作用力, Lamb 求得积分解如下

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, 0, t) &= \frac{P_0 e^{i\omega t}}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{\xi^2 (2\xi^2 - k_2^2 - 2\sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{\xi^2 - k_2^2})}{F(\xi)} J_1(\xi r) d\xi \\ u_z(r, 0, t) &= \frac{P_0 e^{i\omega t}}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{k_2^2 \xi \sqrt{\xi^2 - k_1^2}}{F(\xi)} J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3-227)$$

其中 $F(\xi) = (2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{\xi^2 - k_2^2}$, $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$ 。

3. 圆形谐和荷载

当在半径 $r \leq r_0$ 范围内作用均布谐和荷载 $p e^{i\omega t}$ 时, Miller 求得的解如下

$$\left. \begin{aligned} u_r(r, z, t) &= \frac{i p r_0^2 \cos\theta}{2GR} \left\{ \frac{\sin 2\theta \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} \sin^2\theta - 1}}{\lambda^3 F\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)} e^{-i k_2 R} + \frac{i \sin\theta \left(\frac{1}{\lambda^2} - 2\sin^2\theta\right)}{F(\sin\theta)} e^{-i k_1 R} \right\} e^{i\omega t} \\ u_z(r, z, t) &= \frac{i p r_0^2 \cos\theta}{2GR} \left\{ \frac{2\sin^2\theta \sqrt{\frac{1}{\theta^2} \sin^2\theta - 1}}{\lambda^3 F\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)} e^{-i k_2 R} + \frac{i \cos\theta \left(\frac{1}{\lambda^2} - 2\sin^2\theta\right)}{F(\sin\theta)} e^{-i k_1 R} \right\} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3-228)$$

其中 $F(x) = (2x^2 - \frac{1}{\lambda^2})^2 - 4x^2 \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x^2 - \frac{1}{\lambda^2}}$,

$\lambda = c_2/c_1$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, θ 为计算点与垂直坐标的夹角。

4. 刚性圆盘的谐和振动

对底面光滑的刚性圆盘, Lucio 求得了下列接触压力与刚体位移 w 之间的积分解

$$\sigma_z(r) = \frac{2Gw}{\pi r_0(1-\nu)} \left[\frac{D(1)}{\sqrt{1 - (\frac{r}{r_0})^2}} - \int_{r/r_0}^1 \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - (\frac{r}{r_0})^2}} \frac{dD(\xi)}{d\xi} d\xi \right] \quad (3-229)$$

而总荷载 P 与位移之间关系为

$$P = \frac{4Gr_0\omega}{1-\nu} \int_0^1 D(\xi) d\xi \quad (3-230)$$

函数 $D(\xi)$ 须满足下列 Fredholm 积分方程

$$D(\xi) + \int_0^1 K(\xi, \eta) D(\zeta) d\zeta = 1 \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

三、土层地震运动

1. 水平土层

当水平运动 u_x 只是深度 z 的函数时, 式 (3-186b) 的第一式可简化为

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (3-231)$$

如果在惯性力 $\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ 之外再考虑与速度成正比的阻尼力 $\eta \frac{\partial u_x}{\partial t}$, 上式应改写为

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial t} = v_s^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (3-232)$$

η 为粘滞系数。设地震波 u_g 从 $z=H$ 处向上传播, 地面为自由表面, 相应的边界条件为

$$z=0, \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0; \quad z=H, u_x = u_g \quad (3-233)$$

令 $u = u_x - u_g$ 为土层对于地震波传入处的相对运动, 并且假定阻尼力只与相对运动速度有关, 上式可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - v_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{d^2 u_g}{dt^2} \quad (3-234)$$

相应的边界条件为

$$z=0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad z=H, u = 0 \quad (3-235)$$

采用分离变量法求解, 可得最终的解为

$$u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\omega_n'} S_n(t) \varphi_n(z) \quad (3-236)$$

而相应的加速度为

$$\ddot{u} = -\ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{\omega_n(-2\lambda_n^2)}{\sqrt{1-\lambda_n^2}} S_n(t) + 2\lambda_n \omega_n C_n(t) \right] \Phi_n(z) \quad (2-237a)$$

其中

$$\Phi_n(z) = \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2H} z$$

$$S_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g e^{-\lambda_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n (t-\tau) d\tau$$

$$C_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g e^{-\lambda_n \omega_n (t-\tau)} \cos \omega_n (t-\tau) d\tau$$

其中 $\omega'_n = \omega_n \sqrt{1-\lambda_n^2}$, $\omega_n = \frac{n\pi}{2H} v_s$ 代表无阻尼时的自由振动频率, $\lambda = \eta/\eta_c$ 为阻尼比, $\eta_c = 2\rho\omega_n$ 为临界粘滞系数, 即当 $\eta = \eta_c$ 时 $\lambda_n = 1$, $\omega'_n = 0$, 此时 u 只随时间单调衰减。通常 λ 很小, 此时上式可简化为

$$\ddot{u} = -\ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \omega_n S_n(t) \Phi_n(z) \quad (3-237b)$$

$\Phi_n(z)$ 常称振型函数, 前面 3 个振型, 即 $n=1, n=3$ 和 $n=5$ 时, 振型曲线如图 3-18 所示。

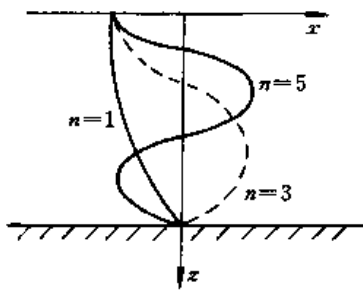


图 3-18 振型曲线

2. 三角形土楔

对于三角形土楔, 其几何尺寸随深度增加而增加, 与轴对称问题随半径而增大的情况十分相似。此时, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 应改为 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +$

$\frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z}$, 即相应的振动方程式 (3-234) 应改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - v_s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{d^2 u_g}{dt^2} \quad (3-238a)$$

上式仍可用分离变量法求解, 最后结果仍可以表示为式 (3-236) 和式 (3-237a) 的形式, 但有关坐标的函数 $\Phi(z)$ 应改用 Bessel 函数代替三角函数, 即

$$\Phi_n(z) = \frac{2J_0\left(\beta_{0n} \frac{z}{H}\right)}{\beta_{0n} J_1(\beta_{0n})} \quad (3-239a)$$

其中 β_{0n} 为 0 阶 Bessel 函数第 n 个零点值。

以上有关公式的推导的详细介绍参见张克绪的专著^[38]。

3. 土坝的三维地震响应

假定土坝的横断面和沿坝轴线方向的纵剖面均为理想的三角形, 并且振动方向只限于沿横断面的上下游方向(图 3-19 中的 y 方向), 则与式 (3-238) 相当的三维振动方程式将为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - v_s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{d^2 u_g}{dt^2} \quad (3-238b)$$

$\frac{d^2 u_g}{dt^2}$ 代表河谷基岩的整体运动。此时, 相应的边界条件为

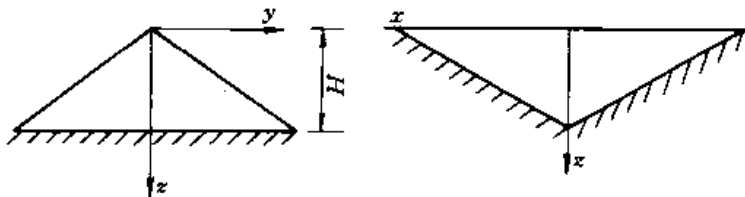


图 3-19 土坝的水平振动

$$\begin{aligned}
 z = 0 & & G \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \\
 x = 0 & & G \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\
 z = mx & & u &= 0
 \end{aligned}$$

徐志英求得这一问题的第一频率（基频）及相关的振型函数如下^[39]

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{v_s}{H} \sqrt{11.25 + 5m^2} \\
 \Phi(x, z) &= \frac{(H - z - mx)(H - z + mx)(H + z - mx)(H + z + mx)}{H^4}
 \end{aligned} \tag{3-239b}$$

如果只考虑第一振型，相应的位移和加速度近似解为

$$\begin{aligned}
 u &\approx \Phi(x, z) \frac{1.839}{\omega'} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\lambda\omega'(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \\
 \ddot{u} &\approx -\ddot{u}_g(t) + 1.839\Phi(x, z) \frac{(1 - 2\lambda^2)\omega'}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\lambda\omega'(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3-240}$$

其中 $\omega' = \omega \sqrt{1 - \lambda^2}$ ，1.839 为第一振型参与系数。

四、打桩动力学

1. 自由桩

圆桩可以按式 (2-216) 轴对称问题的波动方程进行分析。艾智勇等假定波函数可用下列分离变量法求解^[40]

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, z, t) &= Af(r) \exp[ik(z - ct)] \\
 \psi(r, z, t) &= Bg(r) \exp[ik(z - ct)]
 \end{aligned} \tag{3-241}$$

代入式 (2-216) 后得

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + m_1^2 k^2 f &= 0 \\
 \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + m_2^2 k^2 g &= 0
 \end{aligned} \tag{3-242}$$

其中 $m_1 = \sqrt{c^2/c_1^2 - 1}$ ， $m_2 = \sqrt{c^2/c_2^2 - 1}$ 。上式为 0 阶 Bessel 方程，其解为

$$f(r) = J_0(m_1 kr), g(r) = J_0(m_2 kr) \tag{3-243}$$

桩侧面为自由面的边界条件可以写为

$$r = r_0 \quad \sigma_r = 0 \quad \tau_{rz} = 0$$

由此可得确定 (3-241) 中待定参数 A 和 B 的公式为

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \frac{c^2}{c_1^2} k^2 J_0(m_1 kr) + 2G \frac{d^2 J_0(m_1 kr)}{dr^2} \right]_{r=r_0} A + \left[2iGk \frac{d^2 J_0(m_2 kr)}{dr^2} \right]_{r=r_0} B &= 0 \\
 \left[2ik \frac{dJ_0(m_1 kr)}{dr} \right]_{r=r_0} A - \left[k^2 \frac{dJ_0(m_2 kr)}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_0(m_2 kr)}{dr} \right) \right) \right]_{r=r_0} B &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{3-244}$$

相应的非 0 解条件为

$$(1 - m_2^2) \frac{m_1 k r_0 J_0(m_1 k r_0)}{J_1(m_1 k r_0)} + 4m_1^2 k^2 \frac{m_2 k r_0 J_0(m_2 k r_0)}{J_1(m_2 k r_0)} = 2m_1^2 k^2 (m_2^2 + 1) \quad (3-245)$$

由此可以解出 k 和 $c = \omega/k$ 。根据 Bessel 函数的性质，他们得出的近似解为

$$c \approx c_0 \left[1 - \pi^2 v^2 \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^2 - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^2 (1 - 2v - v^2 + 2v^3) \right] \quad (3-246)$$

其中 $c_0 = \sqrt{E_p/\rho_p}$ 为桩内一维传播的波速， $\lambda = c_0/f$ 为其波长， f 为振动频率。当 $\lambda/r_0 > 5.3$ 时，令 $c = c_0$ 造成的误差不超过 5%。对于 $c_0 = 4000\text{m/s}$ 的混凝土桩，只要激振频率 $f < 1744\text{Hz}$ ，或 $\lambda > 2.26\text{m}$ ，即可满足上述要求，从而可以把桩当作一维杆件处理。

杆件的一维振动方程式为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (3-247)$$

解的一般形式可以写为

$$w = f_1(z - c_0 t) + f_2(z + c_0 t) \quad (3-248)$$

式中 f_1 代表下行波， f_2 代表上行波。设桩顶受到强迫振动力 $Pe^{i\omega t}$ ，下端支承在反力系数为 K 的弹簧上（图 3-20），则相应的边界条件为

$$z = 0, \quad E_p A \frac{\partial w}{\partial z} = Pe^{i\omega t}$$

$$z = l, \quad E_p A \frac{\partial w}{\partial z} = -Kw$$

设满足式 (3-247) 的解为

$$w(z, t) = (D_1 \sin kz + D_2 \cos kz) e^{i\omega t} \quad (3-249)$$

图 3-20
桩的一
维振动

则 $k = \omega/c_0$ ，而从边界条件可解出 D_1 和 D_2 如下

$$D_1 = \frac{P}{E_p A k}$$

$$D_2 = D_1 \frac{E_p A k + k \operatorname{tg} kl}{E_p A k \operatorname{tg} kl - K} \quad (3-250)$$

对于 $K = \infty$ 和 $K = 0$ 两种极端情况， D_2 将分别简化为 $D_2 = D_1 \operatorname{tg} kl$ 和 $D_2 = D_1 / \operatorname{tg} kl$ 。

2. 土中桩

当桩侧存在侧壁阻力时，再考虑桩身的阻尼，则结合式 (3-147) 和式 (3-247)，桩的振动方程应改为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{U_p}{\rho A_p} p = 0 \quad (2-251)$$

如果土对桩的阻力除弹性阻力外还存在粘滞阻力，并按照类似剪切位移法的办法进行分析，可得下列阻力 p 与变位之间的关系式

$$p = \frac{G}{U_p} (S_1 + iS_2) w \quad (3-252)$$

其中 S_1 和 S_2 分别为弹性和粘性阻力系数

$$S_1 = 2\pi k_0 \frac{J_1(k_0)J_0(k_0) + Y_1(k_0)Y_0(k_0)}{J_0^2(k_0) + Y_0^2(k_0)}$$

$$S_2 = \frac{4}{J_0^2(k_0) + Y_0^2(k_0)}$$

式中: J_0, J_1 为 0 阶和 1 阶第一类 Bessel 函数; Y_0, Y_1 为 0 阶和 1 阶第二类 Bessel 函数; $k_0 = r_0\omega/c_0$ 。其次, 考虑粘滞性后桩的端阻力可以从弹性地基上刚性圆盘的振动解得出, 并可写为

$$P_b = G_b r_0 (R_1 + iR_2) w(l) \quad (3-253)$$

式中: G_b 为桩底土的剪切模量; R_1 和 R_2 可以表示为 k_0 的幂函数; 例如当 $\nu=0.25$ 时

$$R_1 = 5.53 + 0.364k_0 - 1.141k_0^2$$

$$R_2 = 5.06k_0$$

现在把式 (3-252) 代入式 (3-251), 并在下列边界条件下求解

$$z = 0, P_0 = P e^{i\omega t}; z = l, P = P_b$$

Novak 求得此问题的解为^[41]

$$w(z, t) = P \left[\cos \lambda \frac{z}{l} + C(\lambda) \sin \lambda \frac{z}{l} \right] e^{i\omega t} \quad (3-254)$$

其中

$$C(\lambda) = \frac{K' \lambda \sin \lambda - (R_1 + iR_2) \cos \lambda}{K' \lambda \cos \lambda + (R_1 + iR_2) \sin \lambda}$$

$$K = \frac{E_p A}{G_b l r_0}, \lambda = l \sqrt{\frac{1}{E_p A} [\rho A \omega^2 - G S_1 + i(\eta A \omega + G S_2)]}$$

上述解只适用于特定 ω 的谐和振动, 参数 S_1, S_2 和 R_1, R_2 均是 k_0 或 ω 的函数。

当桩顶承受任意动荷载 $P_0(t)$ 时, Van Koten 针对无限长桩求得下列理论解^[42]

$$w(z, t) = \frac{c_0}{E_p A} \int_0^{t-z/c_0} J_0 \left\{ \left[K_1 - \left(\frac{K_2}{2} \right)^2 \right] [c_0^2 (t - \tau)^2 - z^2] \right\}^{1/2} e^{-\frac{K_2}{2} c_0 (t - \tau)} Q(\tau) d\tau \quad (3-255)$$

式中: $K_1 = k_1 U_p / E_p A$, $K_2 = c_0 k_2 U_p / E_p A$; k_1 和 k_2 分别为弹性和粘性阻力系数。

参 考 文 献

- 1 徐芝纶. 弹性力学. 人民教育出版社, 1982
- 2 黄传志, 肖原. 二维固结理论的解析解. 岩土工程学报, 1996, 18 (3): 47~54
- 3 Burmister D. M. The general theory of stress and displacements in layered soil systems, J. Appl. Phys., 1945, 16 (2), 16 (3), 16 (5)
- 4 Poulos H G & Davis E H. Elastic solutions for soil and rock mechanics, John Wiley & Sons, Inc. 1974
- 5 Grag H. Stress distribution in elastic solids. In: Proc. 1st Int. Conf. SMFE, 1936, 2: 157
- 6 Holl D C. Stress transmission in earths. Proc. High. Res. Board, 1940, 20: 409~422
- 7 Fodum R E. Influence values for estimating stress in elastic foundations, In: Proc. 2nd Int. Conf. SMFE, 1948, 3: 77~84
- 8 Foster C R and Ahlvin R C. Stress and deflections induced by a uniform circular load. Proc. High.

- Res. Board, 1954, 33: 467~470
- 9 Skopek J. The influence of foundation depth on stress distribution, In: Proc. 5th Int. Conf. SMFE, 1961, 1: 815
 - 10 Muskhelishvili N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, 1963
 - 11 Poulos H, G. The use of the sector method for calculating stresses and displacements in an elastic mass, In: Proc. 5th Aust—New Zealand Conf. SMFE, 1967: 198~204
 - 12 Giround J P. Stresses under linearly loaded rectangular area, J. SMFD, ASCE, 1967, 96: 263~268
 - 13 辛金珉. 利用弹性半空间理论建立地基刚度矩阵的一个简化方法. 见: 第四届土力学及基础工程学术会议论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986: 244~253
 - 14 钱家欢. 地基中应力和变形图解法. 土木工程学报, 1955, 2 (1): 33~42
 - 15 Finn W D L. Boundary value problems of soil mechanics, J. SMFD, ASCE, 1963, 89 (5): 39~72
 - 16 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法. 煤炭工业出版社, 1994
 - 17 张芝琪. 坝体内孔洞的应力分析. 水利水电建设, 1959, 14: 21~27
 - 18 [加] Selvadurai A P S. 土与基础相互作用的弹性分析 (范文田等译). 北京: 中国铁道出版社, 1984
 - 19 丁大钧, 刘仲德. 弹性地基梁计算理论和方法. 南京工学院出版社, 1986
 - 20 辛金珉, 辛金璋. 高层建筑基础分析与设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
 - 21 张耀年. 横向受荷桩的通解. 岩土工程学报, 1998, 20 (1): 84~86
 - 22 吴恒立. 推力桩双参数法微分方程的通解. 重庆交通学院学报, 1985, 4 (3): 19~27
 - 23 周铭. 弹性桩与弹性梁通解. 岩土工程学报, 1982, 4 (1): 1~15
 - 24 [美] 杰拉德. 板的理论和分析. 北京: 中国铁道出版社, 1984
 - 25 Poulos H G and Davis E H. The settlement behaviour of single axially loaded in compressible piles and piers, Geotechnique, 1968, 18 (3): 351~371
 - 26 Mattes N S and Poulos H G. Settlement of single compressible piles, J. SMFD, ASCE, 1969, 95 (1): 189~207
 - 27 Randolph M F and Worth C P. Analysis of deformation of vertically loaded pile. J. GED, ASCE, 1978, 104 (12): 1465~1488
 - 28 罗惟德. 单桩承载机理分析与荷载—沉降曲线的理论推导. 岩土工程学报, 1990, 12 (1): 36~44
 - 29 Seed H B and Reese L C. The action of soft clay along frictional piles, Trans. ASCE, 1955, 22: 731~746
 - 30 Coyle H M and Reese L C. Load transfer for axially loaded piles in clay. J. SMFD, ASCE, 1960, 92 (2): 1~26
 - 31 曹汉志. 桩的轴向荷载传递及荷载—沉降曲线的数值计算方法. 岩土工程学报, 1986, 8 (6): 37~49
 - 32 陈龙珠等. 桩轴向荷载—沉降曲线的一种解析算法. 岩土工程学报, 1994, 16 (6): 30~38
 - 32 Poulos H G. Analysis of the settlement of pile group. Geotechnique, 1968, 18 (4): 449~471
 - 33 Randolph M F and Wroth C P. An analysis of the vertical deformation of pile group. Geotechnique, 1979, 29 (4): 423~439
 - 34 Nogami T and Chen H L. Simplified approach for axial pile group response analysis, J. GED, ASCE, 1984, 110 (9): 1239~1255
 - 35 田美存. 高层建筑群桩基础的计算方法及理论研究. 河海大学博士论文, 1997
 - 36 严人觉, 王贻荪, 韩清宇. 动力基础半空间理论概论. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981
 - 37 吴世明. 土介质中的波. 北京: 科学出版社, 1997

- 38 张克绪, 谢君斐. 土动力学. 北京: 地震出版社, 1989
- 39 Xu Zhiying. Approximate analysis of transversal vibration of rockfill dam in 3-D, In: Proc. Int. Symp. on Application of Computer Methods in Rock Mech. & Eng., Xian; 1993; 561~565
- 40 Ai Z Y, Zhang J D and Zhao F M, Condition for simplification of 3-dimensional rod to 1-d rod in theory of dynamic test of pile, In: Proc. 2nd Int. Conf. on Soft Soil Eng., Nanjing; 1996, 2; 1046~1052
- 41 Norvak M. Vertical vibration of floating pile, J. Eng. Mech., ASCE, 1977, 103 (1): 153~168
- 42 徐攸在, 刘兴满. 桩的动测新技术. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989

第四章 饱和土固结理论

第一节 有效应力原理

本章介绍饱水或基本饱水(饱和度大于0.9)状态下多孔介质的固结和变形理论。饱和土体的强度和变形只取决于有效应力,这一有效应力原理在土力学发展中曾经起到关键作用,为此先要弄清它的意义。

有效应力原理是K. Terzaghi在发表渗透固结理论时同时提出的^[1]。当时他认为,加在土体上的压应力可以分为两部分,一部分由孔隙水承受,称为超静水压力或中和压力;另一部分由土体骨架承受,称为粒间压力。根据他的意见,总压应力中只有粒间压力那一部分才能有效地影响土体的密度和强度,这就是有效应力概念的由来。但是应当指出,现在理解的有效应力仅仅是一个唯象的概念,是像离心力一样的虚构的东西,不应把它等同于颗粒之间的接触应力。饱和土体承受外荷载时,土体中将同时出现总应力和孔隙压力,把这两种应力归并成一种等效应力,使土体的强度和应力应变关系仍旧可以用无孔隙压力时适用的公式来表达,这就是有效应力原理的基本思想。

土体的强度和压缩公式不同,从强度等效推算的有效应力公式和从变形等效推算的自然不一样。下面遵照Skempton的方法推导有关的公式^[2]。

完全排水条件下的抗剪强度公式为

$$\tau_f = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi \quad (4-1)$$

当存在孔隙水压力 u_w 时,法向总应力 σ_n 可以人为地分解为两部分,即 $\sigma_n - u_w$ 和 u_w 。相应的强度亦将由两部分组成,一部分为无孔隙压力条件下产生的,仍可用前面公式表示,另一部分由孔隙水压力的作用而产生,即

$$\tau_f = c(\sigma_n - u_w) \operatorname{tg} \varphi + (1 - \alpha) u_w \operatorname{tg} \varphi \quad (4-2)$$

式中: α 为滑裂面的表面孔隙率; φ 为接触面上固体材料的内摩擦角。定义对强度等效的有效应力 σ'_n 为

$$\sigma'_n = (\sigma_n - u_w) + (1 - \alpha) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} u_w \quad (4-3)$$

则式(4-2)可以简化为

$$\tau_f = c + \sigma'_n \operatorname{tg} \varphi \quad (4-4)$$

即有孔隙压力时的强度公式将与无孔隙压力时的强度公式形式上完全一致。

由于接触点所占面积很小, $1 - \alpha \approx 0$,而且固体材料的 φ 值往往也不大,尤其当土颗粒之间的接触点可能由水化膜构成时,接触点的强度将不受周围压力 u_w 的影响,因此,式(4-3)右边第二项实际上可视为0,从而可得下列熟知的有效应力公式

$$\sigma'_n = \sigma_n - u_w \quad (4-5)$$

对于变形问题,设排水条件下的应力增量与应变增量之间的关系可以写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C_1]\{\Delta s\} + C_0\Delta\sigma_m\{\delta\} \quad (4-6)$$

式中： $[C_1]$ 为与偏应力 $\{\Delta s\}$ 有关的柔度矩阵； C_0 为等向压缩系数。当总应力和孔隙压力同时存在时，把 $\Delta\sigma_m$ 分成 $\Delta\sigma_m - \Delta u_w$ 和 Δu_w 两部分。第一部分引起的应变应当与排水条件下的应变一样，第二部分则等于孔隙压力增加引起的土体压缩，即

$$\{\Delta\epsilon\} = [C_1]\{\Delta s\} + C_0(\Delta\sigma_m - \Delta u_w)\{\delta\} + C_s\Delta u_w\{\delta\} \quad (4-7)$$

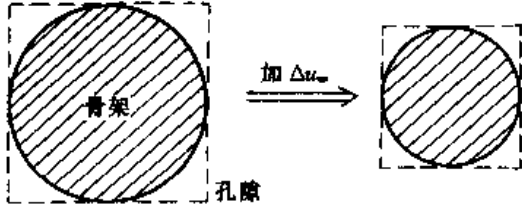


图 4-1 骨架的压缩和土体的应变

式中： C_s 为固体颗粒的压缩系数。在孔隙率为 n 的单位土体中，骨架的体积压缩量应为 $(1-n) \times C_s\Delta u_w$ ，但由于骨架收缩而引起的土体体积应变为 $C_s\Delta u_w$ ，即上式右边第三项（图 4-1）。如令

$$\Delta\sigma'_m = \Delta\sigma_m - \left(1 - \frac{C_s}{C_0}\right)\Delta u_w \quad (4-8)$$

则式（4-7）可以写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C_1]\{\Delta s\} + C_0\Delta\sigma'_m\{\delta\} \quad (4-9)$$

即当同时存在总应力和孔隙压力时，只要把总应力增量 $\Delta\sigma_m$ 换成有效应力增量 $\Delta\sigma'_m$ ，式（4-6）仍然可用。

对于压缩系数 C_0 随 σ'_m 而变的非线性材料，一般说来无法从式（4-8）积分得出总量意义上的有效应力 σ'_m 。好在对土体而言， $C_s \ll C_0$ ，故式（4-8）可简化为 $\Delta\sigma'_m = \Delta\sigma_m - \Delta u_w$ ，这时，有效应力的总量公式就可以写为

$$\sigma'_m = \sigma_m - u_w \quad (4-10)$$

式（4-5）和式（4-10）可以统一写为

$$\sigma' = \sigma - u_w \quad (4-11)$$

这就是常见的有效应力公式。

第二节 孔隙流体的压缩和流动

第二章中所讨论的本构模型都是针对土骨架而言，其实，孔隙流体也应当有自己的本构模型。本节所要讨论的正是这一问题。

一、含气孔隙水的压缩性

对于饱和度较高的情况，孔隙气体以分散的小气泡形式存在于孔隙水中。随着孔隙压力的增高，孔隙气泡逐渐变小，达到一定值以后，孔隙气全部溶解于水中，土体就变成完全饱和土。不排水条件下饱和度的这种变化，可以用气体压缩的波义耳定律描述。设 v_w 为孔隙水体积， v_{a0} 和 v_a 为大气压 p_a 和加孔隙气压力 u_a 后的孔隙气体积，则根据波义耳定律

$$(u_a + p_a)(v_a + c_h v_w) = p_a(v_{a0} + c_h v_w)$$

c_h 为亨利溶解系数，20℃下 $c_h \approx 0.02$ 。代入 $\frac{v_{a0}}{v_w} = \frac{1-S_{r0}}{S_r}$ ， $\frac{v_a}{v_w} = \frac{1-S_r}{S_r}$ ， S_{r0} 和 S_r 分别为加压前后的饱和度，可得下列 Hilf 公式^[3]

$$S_r = S_{r0} \frac{u_a + p_a}{p_a + (1 - c_h)u_a S_{r0}} \quad (4-12)$$

此式表明，当 S_r 分别等于 0.8 和 0.9 时， u_a 等于 1.25Pa 和 0.55Pa 即可使土体达到饱和，因此，如果制备试样的饱和度超过 0.9，加一个大气压的反压力即可使其达到饱和。

对于饱和度为 S_r 的含气水，在孔隙气压力和孔隙水压力增量 Δu_a 和 Δu_w 的作用下，其体积压缩量将由下列三部分组成

$$\Delta v = S_r C_w \Delta u_w + \frac{1 - S_r}{p_a + u_a} \Delta u_a + \frac{c_h S_r}{p_a + u_a} \Delta u_w$$

式中第一项为无气水的压缩量， $C_w = 4.7 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{kN}$ 为其压缩系数，第二项为气泡的压缩量，第三项为溶解于水中的气体压缩量。由此可得下列含气水的压缩系数公式^[4]

$$C_f = S_r C_w + B_{aw} \frac{1 - S_r}{p_a + u_a} + B_{aw} \frac{c_h S_r}{p_a + u_a} \quad (4-13)$$

其中 $B_{aw} = \Delta u_a / \Delta u_w$ 。在气泡封闭条件下， $B_{aw} \approx 1$ ， $u_a \approx u_w$ ，并略去无气水的压缩性，上式可简化为

$$C_f = \frac{1 - S_r + c_h S_r}{p_a + u_w} \quad (4-14)$$

20°C 时不同气压下的压缩系数如图 4-2 所示。

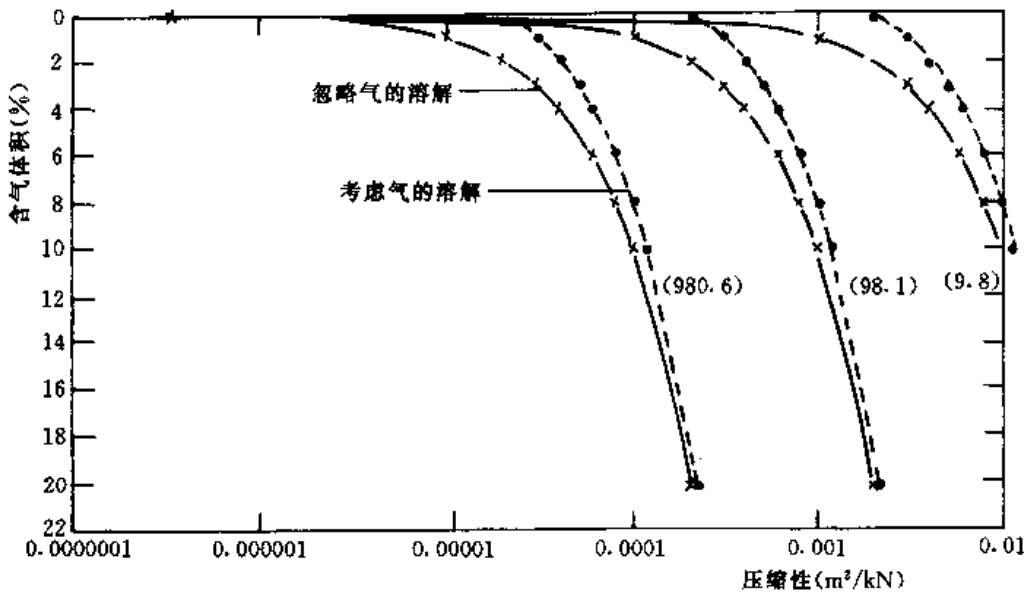


图 4-2 含气水的压缩系数

二、不排水压缩时的孔隙压力

在三轴应力状态下用 $\Delta \sigma_s = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3$ 代表偏应力 (Δs)， C_d 为相应的剪缩系数，则式 (4-9) 中的体应变部分可以写为

$$\Delta \epsilon_v = C_d \Delta \sigma_s + C_0 (\Delta \sigma_m - \Delta u_w)$$

另一方面，略去固体颗粒的压缩性时，不排水条件下的体积压缩量将为

$$\Delta \epsilon_v = n C_f \Delta u_w$$

由此可得孔隙压力增量公式

$$\Delta u_w = \frac{C_0}{C_0 + n C_f} \Delta \sigma_m + \frac{C_d}{C_0 + n C_f} \Delta \sigma_s \quad (4-15a)$$

在三轴试验条件下, $\Delta\sigma_m = \Delta\sigma_3 + \frac{1}{3}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$, $\Delta\sigma_s = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$, 代入上式后

$$\Delta u_w = \frac{C_0}{C_0 + nC_f} \left[\Delta\sigma_3 + \frac{C_0 + 3C_d}{3C_0} (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \right] \quad (4-15b)$$

比较 Skempton 公式^[5]

$$\Delta u_w = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]$$

可得

$$B = \frac{C_0}{C_0 + nC_f}, A = \frac{C_0 + 3C_d}{3C_0} \quad (4-16)$$

三、渗流规律

在基本饱和条件下, 孔隙水的渗流规律仍可以用下列 Darcy 定律表示

$$q = -ki \quad (4-17)$$

式中: q 为比流量, 即通过单位面积土体的渗流量; $i = \text{grad}h$ 为水力梯度; k 即为渗透系数。比流量也可以看作孔隙水对土骨架的相对流速 \dot{w} 。如果把水头 h 换成孔隙水压力, $h = \frac{u_w}{\rho_f g} + z$, 则上式可改写为

$$\frac{du_w}{dl} + \rho_f g \cos\theta + \frac{\rho_f g}{k} \dot{w} = 0 \quad (4-18)$$

式中: l 为流线方向尺度; θ 为 l 方向与 z 方向夹角。式 (4-18) 可看作孔隙流体在 l 方向的平衡方程, 第一和第二项分别为作用在流体上的压力及体积力, 第三项代表土骨架对流体流动的阻力。

不同饱和度下的含气水密度可用下式计算^[4]

$$\rho_f = \rho_w \frac{S_r(\rho_a + u_a)}{(1 + c_h S_r)\rho_a + S_r u_a} \quad (4-19)$$

第三节 固结方程

Terzaghi (1925) 最早提出一维固结理论^[1], Rendulic (1936) 在固结过程中总应力不变的假设下把它推广到三维情况^[6]。上述理论没有考虑骨架与孔隙水运动之间的相互作用, 最后得出的固结方程只含孔隙压力一个变量, 其形式与热传导方程或扩散方程一致。Biot (1941) 考虑了骨架和孔隙水的相互作用, 建立了严格的固结理论^[7], 1956 年又把这一理论推广到动力问题, 从而完成了弹性孔隙介质变形理论的基本框架^[8]。以后的发展除了考虑骨架变形的流变性、非线性和大变形等复杂化的因素外, 并无实质性的不同。

但是, 从 1957 年开始, 一批力学家提出了所谓的混合物理论, 并把饱水多孔介质看作混合物的一种, 重新推导了固结方程^[9,10]。近年来, 这一理论又被广泛引用于土力学文献中^[11,12]。应当指出, Trusdell 的混合物理论与 Biot 固结理论相比并没有实质性不同。Biot 固结理论把土体整体作为研究的对象, 孔隙液体则是土中流动的介质, 而混合物理论则把固体颗粒和孔隙流体分别作为考察对象, 然而再合起来成为土体。通俗地说, 两种理论研究问题的思路可以表述为:

混合物理论

骨架固体+孔隙流体⇒土体

Biot 理论

土体-孔隙流体⇒骨架固体

由此可见，两种理论的不同仅仅在于思考问题的先后不同，所得的结果自然不会有实质性的差别。工程上关心的是土体整体，首先考虑土体整体的平衡和运动，这符合工程师们的习惯。其次，对骨架和孔隙流体分别考察时，它们之间的相互作用力变成外力，有关的表达式显然要复杂一些。因此，对土工工程师来说，混合物理论并没有多少实际意义。

一、Biot 固结方程

本节先讨论小应变情况下的 Biot 固结方程。设 u_x, u_y 及 u_z 为微分体土骨架的位移分量，而 w_x, w_y 及 w_z 为土中液相相对于土骨架的位移分量(图 4-3 中只标出 x 和 z 方向的分量)。

土体平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \ddot{u}_x + \rho_f \dot{w}_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \ddot{u}_y + \rho_f \dot{w}_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \ddot{u}_z + \rho_f \dot{w}_z + \rho g &= 0 \end{aligned} \quad (4-20)$$

有效应力原理

$$\sigma_x = \sigma'_x + u_w, \sigma_y = \sigma'_y + u_w, \sigma_z = \sigma'_z + u_w \quad (4-21)$$

土体应力应变关系

$$\{\sigma'\} = f(\{\epsilon\}) \quad (4-22a)$$

或

$$\{\sigma'\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (4-22b)$$

式中 $\{\epsilon_0\}$ 为考虑非线性引入的初应变。

变形几何关系

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= -\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \epsilon_y &= -\frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= -\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \epsilon_z &= -\frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zx} &= -\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (4-23a)$$

或记作

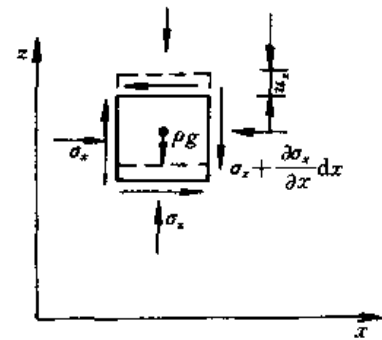
$$\{\epsilon\} = -[B]\{u\} \quad (4-23b)$$

土孔隙中流体的平衡方程

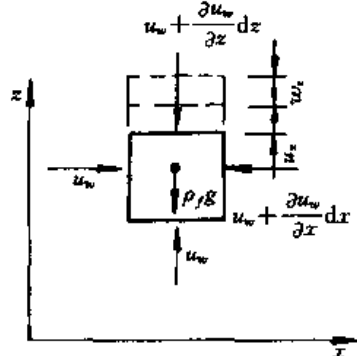
$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_w}{\partial x} &= \frac{\rho_f g}{k_x} \dot{w}_x + \rho_f \ddot{u}_x + \rho_f \dot{w}_x/n \\ -\frac{\partial u_w}{\partial y} &= \frac{\rho_f g}{k_y} \dot{w}_y + \rho_f \ddot{u}_y + \rho_f \dot{w}_y/n \\ -\rho_f g - \frac{\partial u_w}{\partial z} &= \frac{\rho_f g}{k_z} \dot{w}_z + \rho_f \ddot{u}_z + \rho_f \dot{w}_z/n \end{aligned} \quad (4-24)$$

此式略去右端加速度项，便是著名的 Darcy 定律。

渗流连续方程



(a)



(b)

图 4-3 微分体的平衡
(a) 土体平衡；(b) 流体平衡

$$-\frac{\partial \dot{w}_x}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}_y}{\partial y} - \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \frac{n}{K_f} \dot{u}_w \quad (4-25)$$

K_f 为流体压缩模量，即式 (4-14) 中 C_f 的倒数。

根据 Zienkiewicz 的分析，除高频振动的情况外，可以将流体相对于土骨架运动的惯性力 $\rho_f \ddot{w}$ 略去不计^[3]。在此情况下把式 (4-24) 代入式 (4-25)，可把渗流连续性方程写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial u_w}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \frac{\partial u_w}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial u_w}{\partial z} + \frac{\partial k_x}{\partial z} - \frac{n}{K_f} \dot{u}_w \\ & - \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{g} \left(k_x \frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + k_y \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4-26a)$$

把式 (4-23) 代入式 (4-22) 和式 (4-21) 后再代入式 (4-20) 可得

$$\begin{aligned} & d_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + d_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + d_{66} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (d_{14} + d_{41}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (d_{46} + d_{64}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \\ & + (d_{16} + d_{61}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + d_{14} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + d_{42} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + d_{65} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (d_{12} + d_{44}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \\ & + (d_{45} + d_{62}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + (d_{15} + d_{64}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + d_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + d_{45} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + d_{63} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ & + (d_{15} + d_{45}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + (d_{43} + d_{65}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \\ & - \frac{\partial u_w}{\partial x} + X^0 = \rho \ddot{u}_x \end{aligned} \quad (4-26b)$$

$$\begin{aligned} & d_{41} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + d_{24} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + d_{56} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (d_{21} + d_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (d_{26} + d_{54}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \\ & + (d_{46} + d_{51}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + d_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + d_{22} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + d_{55} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (d_{24} + d_{42}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \\ & + (d_{25} + d_{52}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + (d_{45} + d_{54}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + d_{46} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + d_{25} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + d_{53} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ & + (d_{26} + d_{45}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + (d_{23} + d_{55}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + (d_{43} + d_{56}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \\ & - \frac{\partial u_w}{\partial y} + Y^0 = \rho \ddot{u}_y \end{aligned} \quad (4-26c)$$

$$\begin{aligned} & d_{61} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + d_{54} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + d_{36} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (d_{51} + d_{64}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (d_{34} + d_{56}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \\ & + (d_{31} + d_{66}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + d_{64} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + d_{52} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + d_{35} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (d_{54} + d_{62}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \\ & + (d_{32} + d_{55}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + (d_{34} + d_{65}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} \\ & + d_{66} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + d_{55} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + d_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ & + (d_{56} + d_{65}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + (d_{35} + d_{53}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + (d_{36} + d_{63}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \\ & - \frac{\partial u_w}{\partial z} + Z^0 = \rho(\ddot{u}_z + g) \end{aligned} \quad (4-26d)$$

式中: X^0 、 Y^0 和 Z^0 为初应变 $\{\epsilon_0\}$ 引起的等价结点力; d_{11} , d_{12} , d_{13} , d_{14} , d_{15} , d_{16} , d_{21} , d_{22} ... d_{66} 为式 (4-22a) 中 $[D]_{6 \times 6}$ 矩阵的元素。对于渗透系数为常量的线弹性介质, 上式将简化为

$$\frac{k}{\rho_f g} \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right) + \frac{k}{g} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) - \frac{n}{K_f} \dot{u}_w = 0 \quad (4-27a)$$

$$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial u_w}{\partial x} = \rho \bar{u}_x \quad (4-27b)$$

$$G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial u_w}{\partial y} = \rho \bar{u}_y \quad (4-27c)$$

$$G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial u_w}{\partial z} = \rho(\bar{u}_z + g) \quad (4-27d)$$

上式即为常见的 Biot 动力固结方程, 相应的边界条件有:

位移边界 $u_x = \bar{u}_x, u_y = \bar{u}_y, u_z = \bar{u}_z \quad (4-28a)$

应力边界 $\{\sigma\}^T \{n\} = \{\bar{t}\} \quad (4-28b)$

孔压边界 $u_w = \bar{u}_w \quad (4-28c)$

流量边界 $\frac{-k \partial u_w}{\rho_f g \partial n} + k \frac{\partial z}{\partial n} = \bar{q} \quad (4-28d)$

对于常见的不透水边界 $\frac{\partial u_w}{\partial n} = \rho_f g \frac{\partial z}{\partial n} \quad (4-28e)$

n 为边界法向。

二、Terzaghi—Rendulic 固结方程

对于静力问题和不可压缩流体 $K_f = \infty$, 式 (4-27a) 将简化为

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = - \frac{\rho_f g}{k} \dot{\epsilon}_v \quad (4-29)$$

其中 $\epsilon_v = - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$ 为体应变。设土的压缩公式为 $\epsilon_v = m_v (\sigma_m - u_w)$, 上式可进一步改为

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = - C_v (\dot{\sigma}_m - \dot{u}_w) \quad (4-30)$$

式中: $C_v = \rho_f g m_v / k$ 即为固结系数。当总应力 σ_m 不变时, 即得下列 Terzaghi—Rendulic 扩散方程

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = C_v \dot{u}_w \quad (4-31)$$

此式只含一个变量 u_w ，可以不依赖于土体变形而独立求解。

对于一维和二维问题，如果定义 $m_{v1} = \frac{\epsilon_v}{\sigma_1 - u_w}$ 和 $m_{v2} = \frac{\epsilon_v}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - u_w}$ ，则在 σ_1 和 σ_1

+ σ_3 不变的假设下，式 (4-31) 仍将是正确的，但三种情况下的压缩系数各不相同，即

$$m_{v1} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; m_{v2} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}; m_{v3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4-32)$$

式 (4-31) 的边界条件同式 (4-28c) 和式 (4-28d)。但式 (4-28d) 应用不方便。为此可以把 u_w 分解为静水压力 u_{w0} 和超静水压力 u_{w1} 两部分。对静水压力 $\dot{u}_{w0} = 0$ ，故式 (4-31) 可以分列为

$$\frac{\partial^2 u_{w1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{w1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{w1}}{\partial z^2} = C_v \dot{u}_{w1} \quad (4-33a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{w0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{w0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{w0}}{\partial z^2} = 0 \quad (4-33b)$$

令 u_{w0} 满足边界条件式 (4-28c) 和式 (4-28d)，则 u_{w1} 只需满足 0 边界条件，也即上述两式的边界条件分别为

$$u_{w1} = 0; \frac{\partial u_{w1}}{\partial n} = 0 \quad (4-34a)$$

$$u_{w0} = \bar{u}_w; -\frac{k}{\rho_f g} \frac{\partial u_{w0}}{\partial n} + k \frac{\partial z}{\partial n} = \bar{q} \quad (4-34b)$$

上述把孔隙水压力分解为静水压力和超静水压力的办法对于地基固结问题是十分方便的，因为此时如果坐标点取在土面上 $u_{w0} = -\rho_f g z$ 。但对土坝等计算域形状复杂的问题，求解 u_{w0} 就不是一个简单的问题。对于这种情况，用水头势 $h = \frac{u_w}{\rho_f g} + z$ 代替 u_w 作为变量可能更为方便，因为此时边界条件式 (4-28d) 将简化为

$$-k \frac{\partial h}{\partial n} = \bar{q} \quad (4-34c)$$

本章的讨论只限于地基固结问题，下面提到的孔隙压力均指超静孔隙压力。

第四节 Terzaghi 固结方程的求解

一、一般解法

如果式 (4-30) 中 $\dot{\sigma}_m = f(x, y, z, t)$ 仅仅由外荷载改变而引起，而且是一个已知量，则 Terzaghi 固结方程的最一般形式可以写为

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = C_v \left[\frac{\partial u_w}{\partial t} + f(x, y, z, t) \right] \quad (4-35)$$

满足上述方程和下列初始条件

$$u_w|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (4-36)$$

的普遍解为

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4C_v t}\right] d\xi d\eta d\zeta \\ + \frac{1}{(4\pi C_v)^{n/2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{(t-\tau)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4C_v(t-\tau)}\right] d\xi d\eta d\zeta d\tau \quad (4-37)$$

式中： n 为维数，即一维问题 $n=1$ ，二维问题 $n=2$ ，三维问题 $n=3$ 。当然，对于二维和一维问题，上式中的积分重数相应地减为二重积分和一重积分。此式右端由两部分组成，第一部分即为外荷载不变 $f=0$ 时的解 u_w ，第二部分则为初始孔隙压力函数 $\varphi=0$ 时的解 u_{w_2} 。由于线性方程的可叠加性，具体求解时总是可分两步进行，即先求 u_{w_1} ，再求解 u_{w_2} 。

下面先讨论外荷载不变的问题。式 (4-37) 只适用于计算域为无限的情况。黄传志研究了 x 和 y 方向计算域无限，但 z 方向的计算域只局限于一定厚度时的一般解^[14]，现介绍如下。

求解这一问题的思路有两种。第一是把初值函数 $\varphi(x, y, z)$ 分解为下列 Fourier 级数

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x, y) \sin \frac{m\pi}{2H} z \quad (4-38)$$

代入式 (4-37) 后可得

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(x, y) \exp\left[1 - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4C_v t}\right] d\xi d\eta \\ \times \int_0^{2H} \sin \frac{m\pi}{2H} z \exp\left[1 - \frac{(z-\zeta)^2}{4C_v t}\right] d\zeta \\ = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(x, y) \exp\left[1 - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4C_v t}\right] d\xi d\eta \\ \times \exp\left[-\left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 C_v t\right] \sin \frac{m\pi}{2H} z \quad (4-39)$$

由此可见，这一求解的思路就是利用正弦函数的可积性把 z 方向的无穷积分化作无穷项的级数。由于正弦函数的特点，所求的解将能满足 $z=0, u_w=0$ ； $z=2H, u_w=0$ 或 $z=0, u_w=0$ ； $z=H, \frac{\partial u_w}{\partial z}=0$ 的边界条件。

第二种思路是 $\varphi(x, y, z)$ 沿 z 方向直接扩展成周期函数 (图 4-4)。为便于理解，假定先把 φ 离散为

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y) \varphi_1(z) \quad (4-40a)$$

或
$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y) \varphi_2(z) \quad (4-40b)$$

式中： φ_1 为奇函数； φ_2 为偶函数。然后把 $0 \sim 2H$ 中有定义的 φ_1 或 $0 \sim H$ 中有定义的 φ_2 扩展到 $-\infty < z < \infty$ 领域中。把上式代入 (4-37) 中，可得

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4C_v t}\right] \\ \times \int_0^{2H} \varphi_1(\zeta) f_1(z, \zeta, t) d\zeta d\eta d\xi \quad (4-41a)$$

或

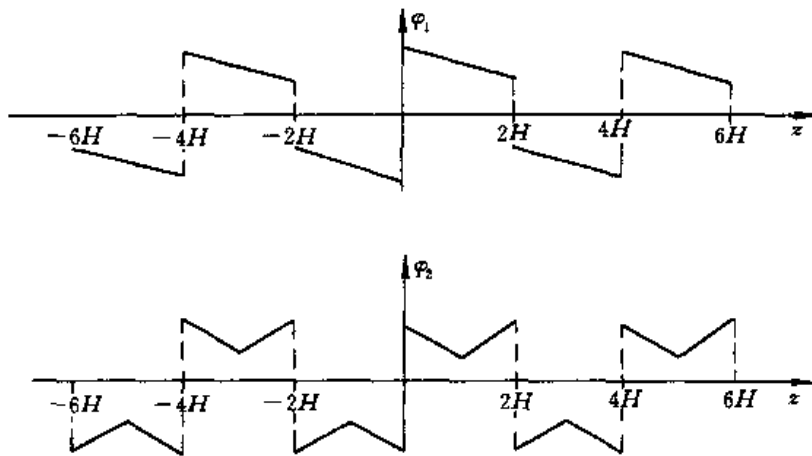


图 4-4 周期函数

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi, \eta) \exp\left[1 - \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4C_v t}\right] \times \int_0^H \varphi_2(\zeta) f_2(z, \zeta, t) d\zeta d\eta d\xi \quad (4-41b)$$

其中

$$f_1(z, \zeta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - 4mH + 4H - \zeta)^2}{4C_v t}\right] - \exp\left[-\frac{(z + 4mH - 4H + \zeta)^2}{4C_v t}\right] + \exp\left[-\frac{(z + 4mH - \zeta)^2}{4C_v t}\right] - \exp\left[-\frac{(z - 4mH + \zeta)^2}{4C_v t}\right] \right\} \quad (4-42a)$$

$$f_2(z, \zeta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - 2mH + 2H - \zeta)^2}{4C_v t}\right] - \exp\left[-\frac{(z + 2mH - 2H + \zeta)^2}{4C_v t}\right] + \exp\left[-\frac{(z - 2mH + \zeta)^2}{4C_v t}\right] - \exp\left[-\frac{(z + 2mH - \zeta)^2}{4C_v t}\right] \right\} \quad (4-42b)$$

或分解为 Fourier 级数后

$$f_1(z, \zeta, t) = \frac{1}{H} \sqrt{4\pi C_v t} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 C_v t}{4H^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2H} \zeta\right) \quad (4-43a)$$

$$f_2(z, \zeta, t) = \frac{2}{H} \sqrt{4\pi C_v t} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 C_v t}{4H^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2H} \zeta\right) \quad (4-43b)$$

函数 f_1 满足 $z=0, f_1=0; z=2H, f_1=0$, 而函数 f_2 满足 $z=0, f_2=0; z=H, \frac{\partial f_2}{\partial z}=0$. 它们分别是双面排水和单面排水边值问题的解。式 (4-41) 中 $\varphi_0(\xi, \eta)$ $\varphi_1(\zeta)$ 和 $\varphi_0(\xi, \eta)$ $\varphi_2(\zeta)$ 可以还原为 $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, 亦即式 (4-40) 的分解并不是必要的。

利用同样的方法, 可以得出荷载变化情况下 0 初值问题的解 [即式 (4-37) 右端第二项] 如下:

双面排水

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2H} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4C_v(t - \tau)}\right]$$

$$\times f_1(z, \zeta, t - \tau) d\zeta d\eta d\xi d\tau \quad (4-44a)$$

单面排水

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^H \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4C_v(t - \tau)}\right] \\ \times f_2(z, \zeta, t - \tau) d\zeta d\eta d\xi d\tau \quad (4-44b)$$

二、单向固结问题

1. 单层地基

对于单向问题，式 (4-38) 简化为

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{2H} z \quad (4-45)$$

系数 A_m 变为常量。按照 Fourier 级数的分解方法，其值由下式确定

$$A_m = \frac{1}{H} \int_0^{2H} \varphi(x) \sin \frac{m\pi}{2H} x dz \quad (4-46)$$

代入式 (4-39) 并去掉 x 和 y 方向的积分，可得

$$u_w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{2H} z \exp\left[-\left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 C_v t\right] \quad (4-47a)$$

当 $\varphi(z) = u_{w0}$ 为常数时， $A_m = \frac{4u_{w0}}{m\pi}$ ($m=1, 3, 5, \dots$)，或 $A_m = 0$ ($m=2, 4, 6, \dots$) 上式可再简化为

$$u_w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4u_{w0}}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \exp\left[-\left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 C_v t\right] \quad (4-47b)$$

而相应的固结度为

$$U = 1 - \frac{1}{u_{w0}} \int_0^{2H} u_w dz = 1 - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8}{m^2 \pi^2} \exp\left[-\left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 C_v t\right] \quad (4-47c)$$

这就是大家熟知的 Terzaghi 给出的解答。

对于单向固结问题，荷载变化引起的应力变化只与时间有关，此时式 (4-37) 的第二项简化为

$$u_w = \frac{1}{(4\pi C_v)^{1/2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(z - \zeta)^2}{4C_v(t - \tau)}\right] d\zeta d\tau \quad (4-48)$$

如果 $f(t)$ 可以写成 $f(t) = r_0 t$ ，并同样分解为 Fourier 级数

$$f(t) = \left(\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4r_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \right) t \quad (4-49)$$

则由上式积分可得

$$u_w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{16r_0 H^2}{C_v m^3 \pi^3} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left[1 - \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2}{4H^2} C_v t\right) \right] \quad (4-50)$$

这一解答最早由 Schiffman 给出^[15]。

2. 双层地基

Gray 最早求解了双层地基的固结问题，但设定的条件比较简单^[16]。谢康和研究了更一般情况下的解答^[17]，其结果如下。

设 H 为双层土总厚度, h_1 和 h_2 分别为第一层和第二层土厚, 各层中的孔隙压力、渗透系数、固结系数分别为 u_{w1} , k_{v1} , C_{v1} 和 u_{w2} , k_{v2} , C_{v2} , 则双层土的固结方程将为

$$\frac{\partial u_{w1}}{\partial t} = C_{v1} \frac{\partial^2 u_{w1}}{\partial z^2} + r(t) \quad (4-51a)$$

$$\frac{\partial u_{w2}}{\partial t} = C_{v2} \frac{\partial^2 u_{w2}}{\partial z^2} + r(t) \quad (4-51b)$$

$r(t)$ 为外荷载的变化率。而边界条件和界面连续条件分别为

$$\textcircled{1} u_{w1}|_{z=0} = 0; \quad \textcircled{2} u_{w1}|_{z=h_1} = u_{w2}|_{z=h_1}$$

$$\textcircled{3} k_{v1} \frac{\partial u_{w1}}{\partial z} = k_{v2} \frac{\partial u_{w2}}{\partial z};$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial u_{w2}}{\partial z}|_{z=H} = 0 \text{ (底面不透水) 或 } u_{w2} = 0 \text{ (底面透水)}$$

初始条件

$$\textcircled{5} u_{w1}|_{t=0} = u_{10}(z); \quad u_{w2}|_{t=0} = u_{20}(z)$$

下列级数解将满足边界条件①和④

$$u_{w1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_m \frac{z}{h_1}\right) e^{-\beta_m t} [B_m + C_m T_m(t)] \quad (4-52)$$

单面排水 (底面不透水)

$$u_{w2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) e^{-\beta_m t} [B_m + C_m T_m(t)] \quad (4-53a)$$

双面排水 (底面透水)

$$u_{w2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) e^{-\beta_m t} [B_m + C_m T_m(t)] \quad (4-53b)$$

式中: β_m , μ , λ_m , A_m , B_m 和 C_m 为待定系数; $T_m(t)$ 为待定函数, 由荷载变化项 $r(t)$ 引起。为了满足流量连续条件③, 上式中的 λ_m 必须为下式的特征根

单面排水 (底面不透水)

$$\sqrt{\frac{k_{v2} m_{v2}}{k_{v1} m_{v1}}} \operatorname{tg}(\lambda_m) \operatorname{tg}\left(\mu \frac{h_2}{h_1} \lambda_m\right) = 1 \quad (4-54a)$$

双面排水 (底面透水)

$$\sqrt{\frac{k_{v2} m_{v1}}{k_{v1} m_{v1}}} \operatorname{tg}(\lambda_m) \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu h_2}{h_1} \lambda_m\right) = -1 \quad (4-54b)$$

根据孔隙压力连续条件②可得

单面排水 (底面不透水)

$$A_m = \sin(\lambda_m) / \cos\left(\frac{\mu h_2}{h_1} \lambda_m\right) \quad (4-55a)$$

双面排水 (底面透水)

$$A_m = \sin(\lambda_m) / \sin\left(\frac{\mu h_2}{h_1} \lambda_m\right) \quad (4-55b)$$

代入原方程式中, 可得

$$\mu = \sqrt{\frac{C_{v1}}{C_{v2}}} \quad (4-56)$$

$$\beta_m = \frac{C_{v1}}{h_1^2} \lambda_m^2 \quad (4-57)$$

$$T_m = \int_0^t e^{\beta_m \tau} r(\tau) d\tau \quad (4-58)$$

最后根据荷载变化引起的孔隙压力均匀分布和初始孔隙压力引起的解必须满足初始条件⑤的原则分别求得 C_m 和 B_m 如下:

单面排水

$$C_m = \frac{2}{\lambda_m \left[1 + \frac{m_{v2} h_2}{m_{v1} h_1} A_m^2 \right]} \quad (4-59a)$$

双面排水

$$C_m = \frac{2 \left[1 + \sqrt{\frac{k_{v2} m_{v2}}{k_{v1} m_{v1}}} A_m \right]}{\lambda_m \left[1 + \frac{m_{v2} h_2}{m_{v1} h_1} A_m^2 \right]} \quad (4-59b)$$

单面排水

$$B_m = \frac{2 \left[\int_0^{h_1} u_{01}(z) \sin\left(\lambda_m \frac{z}{h_1}\right) dz + \frac{m_{v2}}{m_{v1}} \int_{h_1}^{h_2} u_{02}(z) A_m \cos\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) dz \right]}{h_1 \left[1 + \frac{m_{v2} h_2}{m_{v1} h_1} A_m^2 \right]} \quad (4-60a)$$

双面排水

$$B_m = \frac{2 \left[\int_0^{h_1} u_{01}(z) \sin\left(\lambda_m \frac{z}{h_1}\right) dz + \frac{m_{v2}}{m_{v1}} \int_{h_1}^{h_2} u_{02}(z) A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) dz \right]}{h_1 \left[1 + \frac{m_{v2} h_2}{m_{v1} h_1} A_m^2 \right]} \quad (4-60b)$$

对于瞬时荷载 $u_{01}(z) = u_{02}(z) = q_0$, $r(t) = 0$, 上式简化为

$$u_{w1} = q_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\lambda_m \frac{z}{h_1}\right) e^{-\frac{\lambda_m^2}{h_1^2} C_{v1} t} \quad (4-61)$$

单面排水

$$u_{w2} = q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m \sin(\lambda_m)}{\cos\left(\mu \frac{h_2}{h_1} \lambda_m\right)} \cos\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) e^{-\frac{\lambda_m^2}{h_1^2} C_{v1} t} \quad (4-62a)$$

双面排水

$$u_{w2} = q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m \sin(\lambda_m)}{\sin\left(\mu \frac{h_2}{h_1} \lambda_m\right)} \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{h_1}\right) e^{-\frac{\lambda_m^2}{h_1^2} C_{v1} t} \quad (4-62b)$$

其中:

单面排水

$$C_m = \frac{2\cos^2\left(\mu \frac{h_2}{h_1}\lambda_m\right)}{\lambda_m \left[\cos^2\left(\mu \frac{h_2}{h_1}\lambda_m\right) + \frac{m_{v_2}h_2}{m_{v_1}h_1}\sin^2(\lambda_m) \right]} \quad (4-63a)$$

双面排水

$$C_m = \frac{2\sin^2\left(\mu \frac{h_2}{h_1}\lambda_m\right) + \sqrt{\frac{k_{v_2}m_{v_2}}{k_{v_1}m_{v_1}}}\sin(\lambda_m)\sin\left(\mu \frac{h_2}{h_1}\lambda_m\right)}{\lambda_m \left[\sin^2\left(\mu \frac{h_2}{h_1}\lambda_m\right) + \frac{m_{v_2}h_2}{m_{v_1}h_1}\sin^2(\lambda_m) \right]} \quad (4-63b)$$

上式即为 Gray 初始给出的解。

图 4-5 表示瞬时荷载下双层土固结问题的典型计算结果。左图表明，尽管两层土的固结系数相同， $k_{v_1}/m_{v_1}=k_{v_2}/m_{v_2}$ ，但当 $k_{v_2}>k_{v_1}$ ，且 $m_{v_2}>m_{v_1}$ 时，即下层土较软且上层土较不透水时，孔隙压力的消散将显著减慢。图 4-5 表明，在渗透系数相同情况下，压缩性较大的土层内孔隙水压力较高。

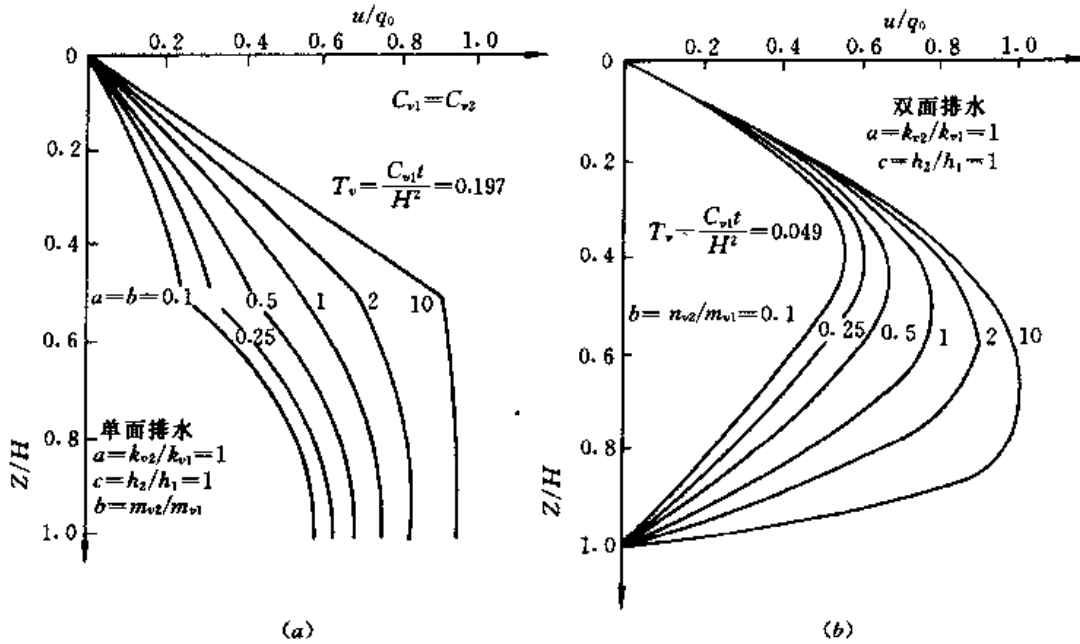


图 4-5 双层地基中的孔隙压力
(a) 固结系数相同；(b) 渗透系数相同

三、砂井固结问题

砂井固结是一个轴对称问题，此时的 Terzaghi 固结方程可以写为

$$C_v \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u_w}{\partial t} \quad (4-64)$$

如果初始孔隙压力可以写为 $u_{w0}(r, z, t) = u_{wr0}(r, t) \times u_{wz0}(z, t)$ 则不难证明其解将可以表达为

$$u_w(r, z, t) = u_{wr}(r, t) \times u_{wz}(z, t) \quad (4-65)$$

且 u_{wr} 和 u_{wz} 将分别满足下列方程及初始条件和边界条件

$$C_v \left(\frac{\partial^2 u_{wr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} \right) = \frac{\partial u_{wr}}{\partial t} \quad (4-66a)$$

$$C_v \frac{\partial^2 u_{wz}}{\partial z^2} = \frac{\partial u_{wz}}{\partial t} \quad (4-66b)$$

初始条件

$$u_{wr} |_{t=0} = u_{wr0}; u_{wz} |_{z=0} = u_{wz0}$$

边界条件

$$u_{wr} |_{r=r_w} = 0; \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} |_{r=r_r} = 0$$

$$u_{wz} |_{z=0} = 0; u_{wz} |_{z=H} = 0$$

r_w 和 r_r 分别为砂井半径和单井影响范围的等效半径(图 4-6)。

如果定义固结度为

$$U = 1 - \frac{\bar{u}_w}{u_{w0}} \quad (4-67)$$

和
$$U_r = 1 - \frac{\bar{u}_{wr}}{u_{wr0}}; U_z = 1 - \frac{u_{wz}}{u_{wz0}}$$

式中: \bar{u}_w 为计算域的平均孔隙压力, 则式 (4-65) 除以 u_{w0} 并对整个计算域积分后可得

$$1 - U = (1 - U_r) \times (1 - U_z) \quad (4-68)$$

此式曾由 Carrillo 推导过^[18]。

按照以上分析, 砂井固结问题可以分解为垂直向固结和水平向固结问题分别研究之。但这一结论并不是任何情况下都是正确的。

1. 自由应变解

先假定初始孔隙压力 u_{w0} 一定, 则式 (4-66a) 可用下列分离变量法求解。

令 $u_{wr}(r, t) = R(r) \times T(t)$, 代入此式并两边除以 $R \times T$ 后可得

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-69)$$

此式左边只是 r 的函数, 右边只是 t 的函数, 因此两者均必须等于同一常数。令此数为 $\frac{\alpha^2}{r_w^2}$, 则上式可分解为

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{r_w^2} R = 0 \quad (4-70a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{r_w^2} C_v T = 0 \quad (4-70b)$$

满足上述两式的解为

$$R_\alpha(r) = A_\alpha V_\alpha \left(\frac{ar}{r_w} \right) = A_\alpha \left[J_0 \left(\frac{ar}{r_w} \right) - \frac{J_1(an)}{N_1(an)} N_0 \left(\frac{ar}{r_w} \right) \right] \quad (4-71a)$$

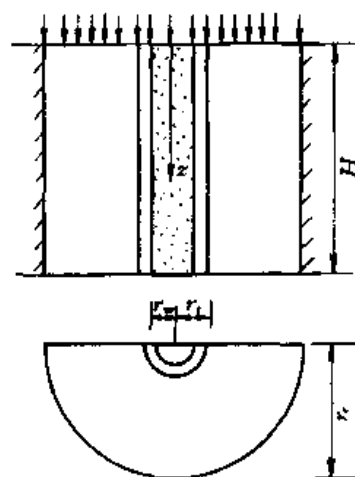


图 4-6 砂井固结问题

$$T_a(t) = e^{-\frac{\alpha^2}{r_w^2} C_v t} \quad (4-71b)$$

式中: $n=r_s/r_w$, J_0 和 J_1 分别为 0 阶和 1 阶 Bessel 函数, N_2 和 N_1 分别为 0 阶和 1 阶 Norman 函数。特征值 α 由边界条件确定。例如, 对于有涂抹作用而无井阻的情况, $R_w(r)$ 已经满足了 $r=r_s=nr_w$, $\frac{\partial R_w}{\partial r}=0$ 和 $r=r_w$, $R_w=0$ 的边界条件, 因此, α 值应由涂抹区边界的流量连续条件确定。假定涂抹区不可压缩, 即

$$\frac{k_s}{\rho_w g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-72)$$

式中: k_s 为涂抹区中的渗透系数, 满足此式的解为

$$r \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} = \frac{u_{wrs} - u_{wrw}}{\ln(s)} \quad (4-73)$$

$s=r_s/r_w$, u_{wrs} 和 u_{wrw} 分别为 $r=r_s$ 和 r_w 时的孔隙压力。当 $u_{wrw}=0$ 时, k_h 为水平向渗透系数, 考虑到流量连续条件 $k_h \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} \Big|_s = k_s \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} \Big|_s$, 由式 (4-73) 可得 $r=r_s$ 时左侧的边界条件为

$$u_{wr} \Big|_{r=r_s} = \frac{k_h}{k_s} r_s \ln(s) \frac{\partial u_{wr}}{\partial r} \Big|_{r=r_s} \quad (4-74)$$

把式 (4-71a) 代入式 (4-74) 即可得出特征值 α 必须满足的方程式为

$$\frac{k_s}{ak_h s \ln(s)} V_0(\alpha s) + V_1(\alpha s) = 0 \quad (4-75)$$

其中 $V_1(\alpha s) = J_1(\alpha s) - \frac{J_1(\alpha n)}{N_1(\alpha n)} N_1(\alpha s)$

因此, 满足式 (4-66a) 的解可以表达为下列无穷级数

$$u_{wr} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i V_0 \left(\frac{\alpha_i r}{r_w} \right) e^{-\frac{\alpha_i^2}{r_w^2} C_v t} \quad (4-76)$$

α_i 是式 (4-75) 的特征根。剩下一步是根据初始孔隙压力 u_{w0} 求上式中的系数 A_i 。如果 u_{w0} 为常量, 则当 $t=0$ 时, 由上式可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i r_0 \left(\frac{\alpha_i r}{r_w} \right) = u_{w0} \quad (4-77)$$

利用 Bessel 函数的正交性质求出 A_i 后代回到式 (4-76), 可得最终解答如下

$$u_{wr}(r, t) = u_{w0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2V_1(\alpha_i s) V_0 \left(\frac{\alpha_i r}{r_w} \right)}{\alpha_i s \left[\frac{n^2}{s^2} V_0^2(\alpha_i n) - V_0^2(\alpha_i s) - V_1^2(\alpha_i s) \right]} e^{-\frac{\alpha_i^2}{r_w^2} C_v t} \quad (4-78a)$$

经积分后的平均孔隙压力为

$$\bar{u}_{wr}(t) = u_{w0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4V_1^2(\alpha_i s)}{\alpha_i^2 (n^2 - s^2) \left[\frac{n^2}{s^2} V_0^2(\alpha_i n) - V_0^2(\alpha_i s) - V_1^2(\alpha_i s) \right]} e^{-\frac{\alpha_i^2}{r_w^2} C_v t} \quad (4-78b)$$

此式曾由 Barron 得出^[19], 因没有对变形加以限制, 常被称为自由应变解。

2. 等应变解

由于靠砂井处孔隙压力消散快, 在荷载均布的假设下, 其垂直变形将大于外围处的变形, 从而引起应力重分布, 即砂井处应力将降低, 而外围处应力将提高, 迫使变形趋向均

匀化。作为一种极端情况，可以假定同一水平面上的垂直应变均相等，这就是所谓的等应变解。等应变解也由 Barron 求得，但对有井阻的情况，他的解是错误的。下面介绍赵维炳的求解结果^[20]。

考察厚度 dz 和外径 r_c ，内径 r 的圆环薄片，则流出的水量 $2\pi r dz \frac{k_h}{\rho_w g} \frac{\partial u_w}{\partial r}$ 应等于其体积压缩量 $\pi(r_c^2 - r^2) dz \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t}$ 。设 $\bar{u}_w = \frac{2}{r_c^2 - r^2} \int_r^{r_c} u_w r dr$ 为砂井以外某一水平面的平均孔隙压力，则代入 $\frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} = -m_v \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t}$ 后可得

$$-2r \frac{k_h}{m_v \rho_w g} \frac{\partial u_w}{\partial r} = (r_c^2 - r^2) \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} \quad (4-79)$$

对上式积分两次，并利用 $r=r_c$ 处孔隙压力和流量的连续条件，可得

$$\frac{2k_h}{m_v \rho_w g \mu r_c^2} (u_{wz} - \bar{u}_w) = \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} \quad (4-80)$$

其中 u_{wz} 为井内孔隙压力，

$$\mu = \frac{n^2}{n^2 - s^2} \ln \frac{n}{s} - \frac{3n^2 - s^2}{4n^2} + \frac{n^2 - s^2}{n^2} \frac{k_h}{k_s} \ln s \quad (4-81)$$

当砂井内只考察垂直向渗流时，流入 dz 段内砂井的流量为 $2\pi r k_s \frac{\partial u_w}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 2\pi r k_h \frac{\partial u_w}{\partial r} \Big|_{r=r}$ ，则根据流量平衡条件可得

$$2k_h r_s \frac{\partial u_w}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = -k_w r_w^2 \frac{\partial^2 u_{wz}}{\partial z^2} \quad (4-82)$$

式中 k_w 为砂井内的渗透系数。代入式 (4-79) 后可得

$$\frac{k_w}{m_v \rho_w g (n^2 - s^2)} \frac{\partial^2 u_{wz}}{\partial z^2} = \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} \quad (4-83)$$

再代入式 (4-80) 后

$$\frac{k_w}{n^2 - s^2} \frac{\partial^2 u_{wz}}{\partial z^2} = \frac{2k_h}{\mu r_c^2} (u_{wz} - \bar{u}_w) \quad (4-84)$$

联立求解式 (4-80) 和式 (4-84)，可得 u_{wz} 和 \bar{u}_w 。设其解的形式可用下列级数表示

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_w &= u_{w0} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi z}{2H} T_m(t) \\ u_{wz} &= u_{w0} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi z}{2H} T_m^w(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-85)$$

此式已满足边界条件

$$u_{wz} \Big|_{z=0} = 0; \frac{\partial u_{wz}}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (4-86)$$

和

$$\bar{u}_w \Big|_{z=0} = 0; \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (4-87)$$

且当 $T_m(0) = 1$ 时，将满足初始条件

$$\bar{u}_w \Big|_{t=0} = u_{w0} \quad (4-88)$$

把式 (4-85) 代入式 (4-80) 和式 (4-84) 后可得

$$\frac{dT_m}{dt} + K_{mw}T_m^w + K_{mv}T_m = 0 \quad (4-89)$$

$$K_{mw}T_m^w + K_h(T_m^w - T_m) = 0 \quad (4-90)$$

其中

$$K_{mv} = \frac{m^2 \pi^2 k_v}{4m_v \rho_w g H^2}$$

$$K_{mw} = \frac{m^2 \pi^2 k_w}{4m_v \rho_w g (n^2 - s^2) H^2}$$

$$K_h = \frac{2k_h}{m_v \rho_w g \alpha r_e^2} \quad (4-91)$$

把式 (4-90) 代入式 (4-89) 后得

$$\frac{dT_m}{dt} + K_m T_m = 0 \quad (4-92)$$

其中

$$K_m = K_{mv} + \frac{K_h}{1 + K_h/K_{mw}} \quad (4-93)$$

由式 (4-92) 和式 (4-90) 解出 T_m 和 T_m^w 后代回到式 (4-85), 可得最终解答如下

$$\bar{u}_w = u_{w0} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{-K_m t} \quad (4-94a)$$

$$u_{wz} = u_{w0} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \frac{K_h}{K_{mw} + K_h} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{-K_m t} \quad (4-94b)$$

不考虑井阻时 $k_w = \infty$, $K_{mw} = \infty$, $K_m = K_h$, 式 (4-94a) 将简化为

$$\bar{u}_w = u_{w0} e^{K_h t} \quad (4-95)$$

代入式 (4-79) 后可得 u_w 的解为

$$u_w = \frac{1}{\mu} \left[\ln \left(\frac{r}{sr_w} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{nr_w} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{s^2}{n^2} \right] e^{-2 \frac{C_v t}{nr_w^2}} \quad (4-96)$$

以上求解中假设涂抹区不可压缩, 谢康和进一步求得涂抹区可压缩的解答^[21]。图 4-7

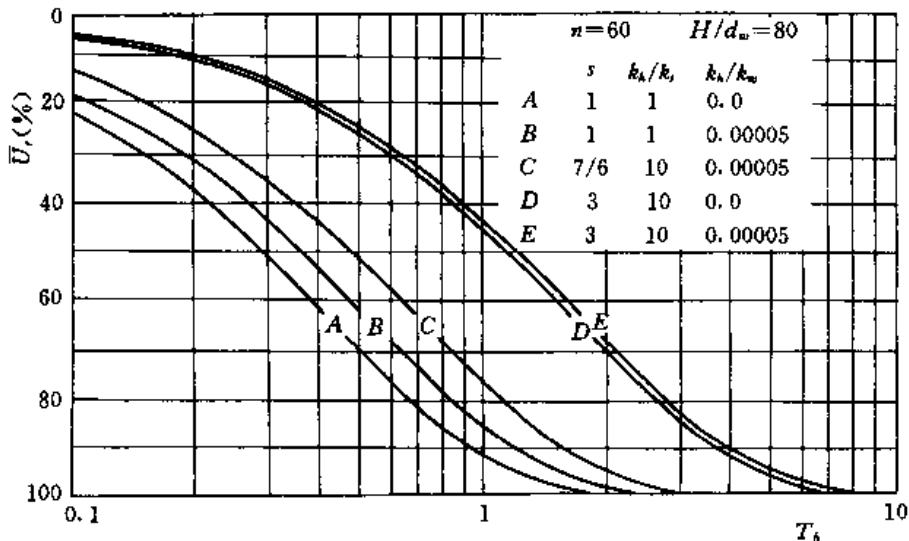


图 4-7 砂井固结度曲线

是他求得的部分解答，已纠正了 Barron 解的错误。

四、有限土层在局部荷载下的固结情况

有限厚土层固结问题的一般解答已见式 (4-41) 和式 (4-43)，对于具体问题，只要把初值函数 $\varphi(x, y, z)$ 和荷载变化率 $f(x, y, z, t)$ 代入即可。

1. 集中荷载下的解答

对于 $\nu=0.5$ 的饱水弹性介质，集中荷载 P 作用下有限厚内的平均应力分布为

$$\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{P}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4-97)$$

此式即为地基内初始力分布。如果 P 以下列规律变化

$$P = P_0 + rt$$

则式 (4-35) 和式 (4-36) 中的函数 f 和 φ 将分别为

$$f(x, y, z, t) = \frac{r}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4-98)$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{P_0}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4-99)$$

把它们代入式 (4-41a) 和式 (4-43a) 中相加后可得荷载线性递增下的孔隙压力解答为

$$\begin{aligned} u_w = & \frac{P_0}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2H} \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4C_v t}\right] \\ & \times f_1(z, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta \\ & + \frac{r}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2H} \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4C_v(t-\tau)}\right] f_1(z, \zeta, t, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau \end{aligned} \quad (4-100)$$

上式满足双面排水条件。对底面不排水问题，只须把积分域 $0 \sim 2H$ 改为 $0 \sim H$ 并把函数 $f_1(x, y, z, t)$ 改为 $f_2(x, y, z, t)$ 即可，见式 (4-42)。

对半无限土层 $H \rightarrow \infty$ ，上式变为

$$\begin{aligned} u_w = & \frac{P_0}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4C_v t}\right) \right. \\ & \left. - \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}{4C_v t}\right) \right] d\eta d\xi \\ & + \frac{r}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \\ & \times \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4C_v(t-\tau)}\right) \right. \\ & \left. - \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}{4C_v(t-\tau)}\right) \right] d\eta d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4-101)$$

此式曾由 Флорин 得出^[22]。

2. 分布荷载下的解答

对于下列地基表面作用的分布荷载

$$p(x, y) = p_0(x, y)(1 + \tau t) \quad (4-102)$$

则由式 (4-100) 积分可得下列孔隙压力的解答

$$\begin{aligned} u_w = & \frac{1}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2H} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \frac{p_0(\alpha, \beta) \zeta d\alpha d\beta}{[(\xi^2 - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4C_v t}\right] f_1(z, \zeta, t) d\zeta d\eta d\alpha d\beta \\ & + \frac{\tau}{2\pi(4\pi C_v t)^{3/2}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2H} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \frac{p_0(\alpha, \beta) \zeta d\alpha d\beta}{[(\xi^2 - \alpha)^2 + (\zeta - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}} \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4C_v(t - \tau)}\right] f_1(z, \zeta, t - \tau) d\zeta d\eta d\alpha d\beta d\tau \end{aligned} \quad (4-103)$$

二维问题的解答可以按照上述思路代入有关公式直接求出，也可以对上式沿 y 方向积分求得，此处不再介绍。

图 4-8 为均布荷载下当基础宽度为土层厚度的一半时荷载中心的孔隙压力分布，显示初始时一维、二维和三维问题的孔隙压力相差不远，但后期随着维数的增加，上部的孔隙压力消散明显加快。图 4-9 为二维问题荷载边缘处孔隙水压力消散过程。

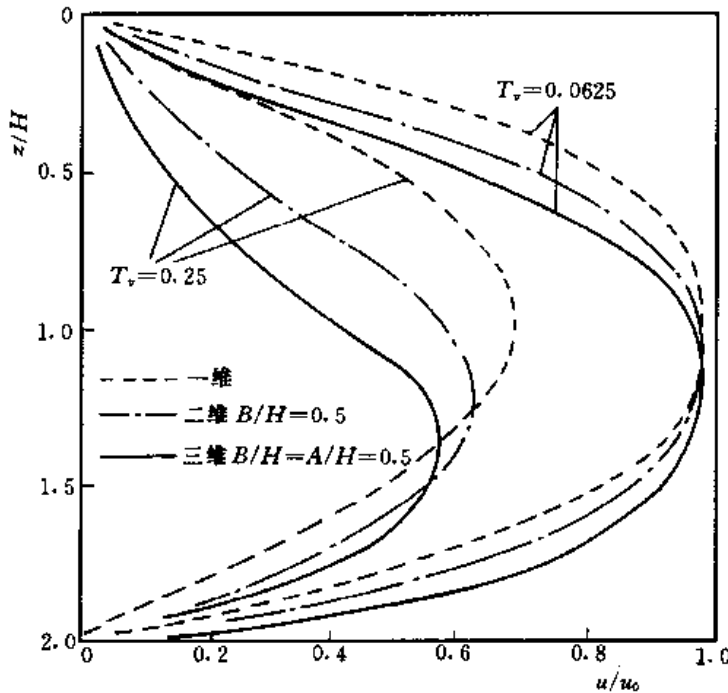


图 4-8 均布荷载下荷载中心的孔隙压力

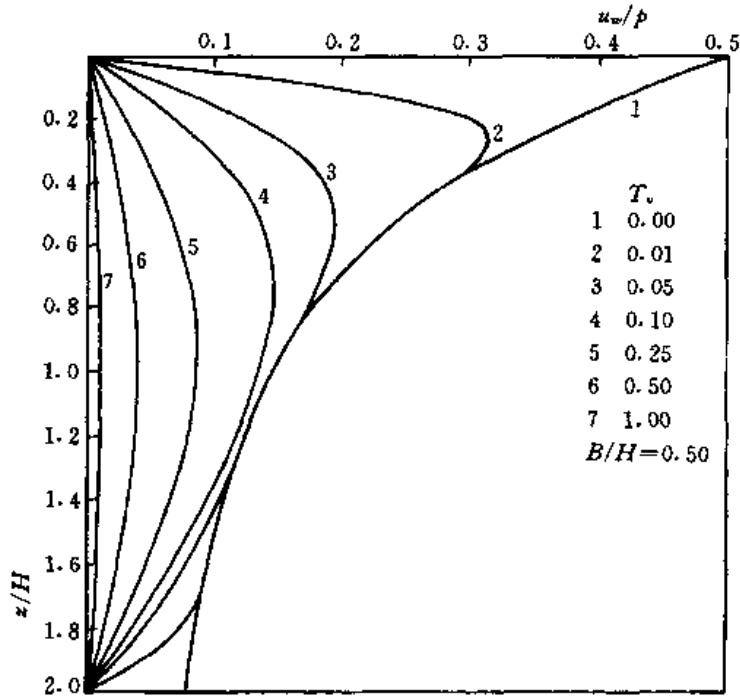


图 4-9 条形荷载下边缘处的孔隙压力

第五节 Biot 固结方程的求解

一、一般解法

对于完全饱和土的静力固结问题，考虑到 $\epsilon_v = -\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$ ，式 (4-27) 可改写为

$$\frac{k}{\rho_f g} \nabla^2 u_w = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (4-104a)$$

$$G \nabla^2 u_x - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} - \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0 \quad (4-104b)$$

$$G \nabla^2 u_y - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} - \frac{\partial u_w}{\partial y} = 0 \quad (4-104c)$$

$$G \nabla^2 u_z - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} - \frac{\partial u_w}{\partial z} = \rho g \quad (4-104d)$$

把后面三式分别乘以 $\frac{\partial}{\partial x}$ ， $\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$ ，相加后可得

$$\nabla^2 u_w = -2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \epsilon_v \quad (4-105)$$

代入式 (4-104a) 后可得

$$\bar{C}_v \nabla^2 \epsilon_v = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (4-106)$$

或考虑到 $\epsilon_v = m_v \sigma'_m$ 后

$$\bar{C}_v \nabla^2 \sigma'_m = \frac{\partial \sigma'_m}{\partial t} \quad (4-107)$$

其中 $\bar{C}_v = kG(1-\nu) / (1-2\nu) \rho_f g$ 。式 (4-106) 和式 (4-107) 亦是扩散方程, 可以与前面的 Terzaghi 固结方程一样地求解。把解出的 ϵ_v 代入式 (4-105) 中, 即可得孔隙压力 u_w , 再把 u_w 和 ϵ_v 代入式 (4-104) 中, 即可得出位移 u_x , u_y 和 u_z 。

但是, Terzaghi 方程的未知量是 u_w , 其边界条件容易确定, 而体应变 ϵ_v 和平均应力 σ'_m 的边界条件都事先未知。这是求解 Biot 固结方程的难点。当时 Biot 曾求得条形荷载下半无限地基固结问题的解答^[23], 后来 Mc Namee 和 Gibson 等虽然进一步求得若干特殊问题的解答^[24, 25], 近期 Зарецкий 还求得集中荷载下半无限地基的解答^[26], 但始终缺乏普遍有效的一般解法。最近黄传志的工作是这方面的一个较大进展^[27], 下面介绍他建议的求解有限厚土层固结问题的方法。

二、线荷载

荷载刚作用时, 有效应力 $\sigma'_m = 0$, 完全消散后 $\sigma'_m = \sigma'_{mf}$ 。所以 σ'_m 的变化规律刚好与一般初值问题相反。为了能运用一般初值问题的求解方法, 先把 σ'_m 写为

$$\sigma'_m = \sigma'_{mf} - u_m \quad (4-108)$$

u_m 满足 $u_m|_{t=0} = \sigma'_{mf}$, $u_m|_{t=\infty} = 0$ 。代入式 (4-107) 后可得下列两式

$$\nabla^2 \sigma'_{mf} = 0 \quad (4-109)$$

$$\bar{C}_v \nabla^2 u_m = \frac{\partial u_m}{\partial t} \quad (4-110)$$

先求解式 (4-109)。设土层厚为 $2H$, 顶面和底面的边界条件为

$$\sigma'_{mf}|_{z=0} = p_1(x); \sigma'_{mf}|_{z=2H} = p_2(x) \quad (4-111)$$

p_1 和 p_2 是暂时未知的待定函数, 则线性荷载 p 作用下满足此式的解答为

$$\sigma'_{mf} = \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(2H-z)\lambda}{\text{ch}2H\lambda} S_1(\lambda) + \frac{\text{sh}z\lambda}{\text{ch}2H\lambda} S_2(\lambda) \cos\lambda x d\lambda \quad (4-112)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{p} \int_0^\infty p_1(x) \cos x \lambda d\lambda \\ S_2 &= \frac{1}{p\lambda} \int_0^\infty p_2(x) \cos x \lambda d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (4-113)$$

考虑到 $\epsilon_v = m_v \sigma'_{mf}$, 把式 (4-112) 代入式 (4-104b) 和式 (4-104d) 后可得

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[z\lambda \text{ch}(2H-z)\lambda - 2(1-\nu)\text{sh}(2H-z)\lambda - \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{sh}z\lambda \right] S_1(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - [z\lambda \text{ch}z\lambda - 2H\lambda \text{cth}2H\lambda \text{sh}z\lambda] S_2(\lambda) + \text{sh}(2H-z)\lambda \right\} \frac{\sin x\lambda}{\lambda \text{sh}2H\lambda} d\lambda \quad (4-114a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[z\lambda \text{sh}(2H-z)\lambda + (1-2\nu)\text{ch}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{ch}z\lambda \right] S_1(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + [z\lambda \text{sh}z\lambda - (3-4\nu+2H\lambda \text{cth}2H\lambda)\text{ch}z\lambda] S_2(\lambda) + \text{ch}(2H-z)\lambda \right\} \frac{\cos x\lambda}{\lambda \text{sh}2H\lambda} d\lambda \quad (4-114b) \end{aligned}$$

代入到 $\tau_{xz} = -G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$ 中, 进一步得到下列剪应力公式

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[z\lambda \operatorname{sh}(2H-z)\lambda - \operatorname{ch}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\operatorname{sh}2H\lambda} \operatorname{ch}z\lambda \right] S_1(\lambda) \right. \\ \left. + [z\lambda \operatorname{sh}z\lambda - (1-2\nu + 2H\lambda \operatorname{cth}2H\lambda) \operatorname{ch}z\lambda] S_2(\lambda) + \operatorname{ch}(2H-z)\lambda \right\} \frac{\sin x\lambda}{\operatorname{sh}2H\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (4-114c)$$

针对双面排水情况下 $u_z|_{z=2H}=0$ 和 $\tau_{xz}|_{z=0}=0$ 的边界条件, 联合求解式 (4-114b) 和式 (4-114c) 可得待定函数 S_1 和 S_2 如下

$$S_1(\lambda) = \frac{2(1-\nu) + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2H\lambda}{4(1-\nu)^2 + (2H\lambda)^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2H\lambda} \quad (4-115a)$$

$$S_2(\lambda) = \frac{2(1-\nu)\operatorname{ch}2H\lambda + 2H\lambda \operatorname{sh}2H\lambda}{4(1-\nu)^2 + (2H\lambda)^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2H\lambda} \quad (4-115b)$$

现在求解式 (4-110)。因 $t=0$ 时 $\sigma'_m=0$, 故 u_m 的初始条件就是 $u_m|_{t=0}=\sigma'_{mf}$, 亦即式 (4-112)。式 (4-110) 与前面的 Terzaghi 方程完全一样, 因而 u_m 可用同样方法求解。把 σ'_{mf} 和 u_m 代入式 (4-108) 中, 即可得最终解答如下

$$\begin{aligned} \sigma'_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}(2H-z)\lambda}{\operatorname{sh}2H\lambda} f_1(\lambda, t) + \frac{\operatorname{sh}z\lambda}{\operatorname{sh}2H\lambda} f_2(\lambda, t) \right] \cos x\lambda d\lambda \\ - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} \sin z\beta f_s(\beta) f_1(\lambda, t) \cos x\lambda d\beta d\lambda \\ + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^t \beta f_s(\beta) \sin z\beta \cos x\lambda \int_0^{\tau} \bar{C}_v \exp[-\bar{C}_v(t-z)(\lambda^2 + \beta^2)] f_1(\lambda, \tau) d\tau d\beta d\lambda \\ - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} \sin(2H-z)\beta f_s(\beta) f_2(\lambda, t) \cos x\lambda d\beta d\lambda \\ + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^t \beta f_s(\beta) \sin(2H-z)\beta \cos x\lambda \int_0^{\tau} \bar{C}_v \exp[-\bar{C}_v(t-\tau)(\lambda^2 + \beta^2)] f_2(\lambda, z) d\tau d\beta d\lambda \end{aligned} \quad (4-116)$$

其中

$$f_s(\beta) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos 4mH\beta \quad (4-117)$$

$$f_1(\lambda, t) = 2 \int_0^{\infty} p_1(\alpha, t) \cos \lambda \alpha d\alpha \quad (4-118a)$$

$$f_2(\lambda, t) = 2 \int_0^{\infty} p_2(\alpha, t) \cos \lambda \alpha d\alpha \quad (4-118b)$$

p_1 和 p_2 是土层上下面的边界条件, 即

$$\sigma'_m|_{z=0} = p_1(x, t); \sigma'_m|_{z=2H} = p_2(x, t) \quad (4-119)$$

它们是待定的函数。

下一步是把 $\varepsilon_v = m_v \sigma'_m$ 代入式 (4-104a) 中。此式是泊松方程, 其解为

$$\begin{aligned} u_w = \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} f_s(\beta) \sin z\beta f_1(\lambda, t) \cos x\lambda d\beta d\lambda \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \int_0^t \beta f_s(\beta) \sin z\beta \cos x\lambda \int_0^{\tau} \bar{C}_v \exp[-\bar{C}_v(t-\tau)(\lambda^2 + \beta^2)] f_1(\lambda, \tau) d\tau d\beta d\lambda \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} \sin(2H-z)\beta f_s(\beta) f_2(\lambda, t) \cos x\lambda d\beta d\lambda \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \int_0^t \beta f_s(\beta) \sin(2H-z)\beta \cos x\lambda \int_0^{\tau} \bar{C}_v \exp[-\bar{C}_v(t-\tau)(\lambda^2 + \beta^2)] f_2(\lambda, z) d\tau d\beta d\lambda \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} \sin(2H - z) \beta f_1(\beta) f_2(\lambda, t) \cos x \lambda d\lambda d\beta \\
& - \int_0^\infty \int_0^\infty \beta f_1(\beta) \sin(2H - z) \beta \cos x \lambda \int_0^t \bar{C}_v \exp[-\bar{C}_v(t - \tau)(\lambda^2 + \beta^2)] f_2(\lambda, \tau) d\tau d\beta d\lambda
\end{aligned} \tag{4-120}$$

接着把 ϵ_v 和 u_w 代入式(4-104b)和式(4-104d)中,求得 u_x 和 u_z ,再代入 $\tau_{xy} = -G\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$ 中求出 τ_{xy} 。现在可以根据顶面和底面的边界条件

$$\tau_{xy}|_{z=0} = 0; u_z|_{z=2H} = 0$$

解出未知函数 f_1 和 f_2 如下

$$f_1(\lambda, t) = pS_1(\lambda) + \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \varphi_1(\lambda, \alpha, t) d\alpha \tag{4-121a}$$

$$f_2(\lambda, t) = pS_2(\lambda) + \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \varphi_2(\lambda, \alpha, t) d\alpha \tag{4-121b}$$

式中 S_1 和 S_2 见式(4-115)

$$\varphi_1(\lambda, \alpha, t) = \frac{1}{\alpha(R_1^2 + R_2^2)} (Q_1 \sin \alpha \bar{C}_v t + Q_2 \cos \alpha \bar{C}_v t)$$

$$\varphi_2(\lambda, \alpha, t) = \frac{1}{\alpha(R_1^2 + R_2^2)} (Q_3 \sin \alpha \bar{C}_v t + Q_4 \cos \alpha \bar{C}_v t)$$

$$R_1 = g_1^2 - h_1^2 + g_2 g_3 + h_2^2$$

$$R_2 = 2h_1 g_1 + h_2 g_3 - h_2 g_2$$

$$Q_1 = (R_1 g_2 + R_2 h_2) \operatorname{cth} 2H\lambda - (R_1 g_1 + R_2 h_1) \frac{1}{\operatorname{sh} 2H\lambda}$$

$$Q_2 = (R_2 g_2 - R_1 h_2) \operatorname{cth} 2H\lambda - (R_2 g_1 - R_1 h_1) \frac{1}{\operatorname{sh} 2H\lambda}$$

$$Q_3 = (R_1 g_1 + R_2 h_1) \operatorname{cth} 2H\lambda + (R_1 g_3 - R_2 h_2) \frac{1}{\operatorname{sh} 2H\lambda}$$

$$Q_4 = (R_2 g_1 - R_1 h_1) \operatorname{cth} 2H\lambda + (R_2 g_3 + R_1 h_2) \frac{1}{\operatorname{sh} 2H\lambda}$$

$$g_1 = (1 - \nu) \frac{2H\lambda}{\operatorname{sh} 2H\lambda} \operatorname{cth} 2H\lambda + (1 - 2\nu) \frac{2\lambda}{\alpha C_0} (B_0 \operatorname{sh} 2HA_0 \cos 2HB_0 - A_0 \operatorname{ch} 2HA_0 \sin 2HB_0)$$

$$h_1 = (1 - 2\nu) \frac{\lambda}{\alpha} \left[\frac{2}{C_0} (A_0 \operatorname{sh} 2HA_0 \cos 2HB_0 + B_0 \operatorname{ch} 2HA_0 \sin 2HB_0) - \frac{\lambda}{\operatorname{sh} 2H\lambda} \right]$$

$$g_2 = (1 - \nu) \left(\operatorname{cth} 2H\lambda + \frac{2H\lambda}{\operatorname{sh}^2 2H\lambda} \right) + (1 - 2\nu) \frac{\lambda}{\alpha C_0} (B_0 \operatorname{sh} 4HA_0 - A_0 \sin 4HB_0)$$

$$h_2 = (1 - 2\nu) \frac{\lambda}{\alpha} \left[\frac{1}{C_0} (A_0 \operatorname{sh} 4HA_0 + B_0 \sin 4HB_0) - \lambda \operatorname{cth} 2H\lambda \right]$$

$$g_3 = (1 - 2\nu) \left(\operatorname{cth} 2H\lambda - \frac{2H\lambda}{\operatorname{sh}^2 2H\lambda} \right) - (1 - 2\nu) \frac{\lambda}{\alpha C_0} (B_0 \operatorname{sh} 4HA_0 - A_0 \sin 4HB_0)$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^4} + \lambda^2}{2}}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^4} - \lambda^2}{2}}$$

$$C_0 = \text{ch}4HA_0 - \cos4HB_0$$

将 $f_1(\lambda, t)$ 、 $f_2(\lambda, t)$ 代回到解的表达式，经过整理，就可得出精确解如下

$$\begin{aligned} u_w = & \frac{p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \left[\left(\frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_b \right) \varphi_1 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_d \right) \varphi_2 - f_a \psi_1 - f_c \psi_2 \right] d\alpha d\lambda \end{aligned} \quad (4-122a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x + u_w = & \frac{1}{2}\sigma_x^* + \frac{p}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \cos\lambda x d\lambda \\ & + \frac{p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left[z\lambda \text{ch}(2H-z)\lambda - \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{sh}z\lambda \right] \varphi_1 \right. \\ & \left. - [z\lambda \text{ch}z\lambda - (1+2H\lambda \text{cth}2H\lambda)\text{sh}2\lambda] \varphi_2 \right\} \frac{1}{\text{sh}2H\lambda} d\alpha d\lambda \\ & - \frac{p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\alpha} \left[f_a \varphi_1 + f_c \varphi_2 + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_b \right) \psi_1 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_d \right) \psi_2 \right] d\alpha d\lambda \end{aligned} \quad (4-122b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x + u_w = & \frac{1}{2}\sigma_x^* - \frac{p}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \cos\lambda x d\lambda \\ & + \frac{p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left[2\text{sh}(2H-z)\lambda - z\lambda \text{ch}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{sh}z\lambda \right] \varphi_1 \right. \\ & \left. + [z\lambda \text{ch}z\lambda + (1-2H\lambda \text{cth}2H\lambda)\text{sh}2\lambda] \varphi_2 \right\} \frac{1}{\text{sh}2H\lambda} d\alpha d\lambda \\ & - \frac{p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left(f_b - \frac{\lambda^2}{\alpha} f_a \right) \varphi_1 + \left(f_d - \frac{\lambda^2}{\alpha} f_c \right) \varphi_2 \right. \\ & \left. + \left[f_a - \frac{\lambda^2}{\alpha} \left(\frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_b \right) \right] \psi_1 + \left[f_c - \frac{\lambda^2}{\alpha} \left(\frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_d \right) \right] \psi_2 \right\} d\alpha d\lambda \end{aligned} \quad (4-122c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{1}{2}\tau_{xz}^* + \frac{p}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \sin\lambda x d\lambda \\ & + \frac{p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \sin\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left[z\lambda \text{sh}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{ch}z\lambda - \text{ch}(2H-z)\lambda \right] \varphi_1 \right. \\ & \left. + [z\lambda \text{sh}z\lambda - 2H\lambda \text{cth}2H\lambda \text{ch}z\lambda] \varphi_2 \right\} \frac{1}{\text{sh}2H\lambda} d\alpha d\lambda \\ & - \frac{p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \sin\lambda x \int_0^\infty \frac{\lambda}{\alpha} \left\{ (A_0 g_a - B_0 g_b) \varphi_1 - (A_0 g_c - B_0 g_d) \varphi_2 \right. \\ & \left. + \left[\lambda \frac{\text{ch}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - A_0 g_b - B_0 g_a \right] \psi_1 - \left[\lambda \frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - A_0 g_d - B_0 g_c \right] \psi_2 \right\} d\alpha d\lambda \end{aligned} \quad (4-122d)$$

$$\begin{aligned}
u_x = & \frac{1}{2}u_x^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \frac{\text{ch}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \cos\lambda x d\lambda \\
& + \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^2} (1-\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \cos\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left[z\lambda \text{sh}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{ch}z\lambda \right] \varphi_1 \right. \\
& + \left. [z\lambda \text{sh}z\lambda - (1+2H\lambda \text{cth}2H\lambda) \text{ch}z\lambda] \varphi_2 \right\} \frac{1}{\text{sh}2H\lambda} d\alpha d\lambda \\
& - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^2} (1-2\nu) \int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty \left\{ (A_0 g_a - B_0 g_b) \varphi_1 - (A_0 g_c - B_0 g_d) \varphi_2 \right. \\
& + \left. \left[\lambda \frac{\text{ch}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - A_0 g_b - B_0 g_a \right] \psi_1 - \left[\lambda \frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - A_0 g_d - B_0 g_c \right] \psi_2 \right\} \frac{1}{\alpha} d\alpha d\lambda
\end{aligned} \tag{4-122e}$$

$$\begin{aligned}
u_x = & \frac{1}{2}u_x^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \sin\lambda x d\lambda \\
& - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^2} (1-\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \sin\lambda x \int_0^\infty \left\{ \left[\text{sh}(2H-z)\lambda - z\lambda \text{ch}(2H-z)\lambda + \frac{2H\lambda}{\text{sh}2H\lambda} \text{sh}z\lambda \right] \varphi_1 \right. \\
& + \left. [z\lambda \text{sh}z\lambda - 2H\lambda \text{cth}2H\lambda \text{sh}z\lambda] \varphi_2 \right\} \frac{1}{\text{sh}2H\lambda} d\alpha d\lambda \\
& - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^2} (1-2\nu) \int_0^\infty \sin\lambda x \int_0^\infty \left\{ f_a \varphi_1 + f_c \varphi_2 + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_b \right) \psi_1 \right. \\
& + \left. \left(\frac{\text{sh}z\lambda}{\text{sh}2H\lambda} - f_d \right) \psi_2 \right\} \frac{\lambda}{\alpha} d\alpha d\lambda
\end{aligned} \tag{4-122f}$$

其中 σ_x^* , σ_z^* , τ_{xz}^* , u_x^* , u_z^* 为有限厚地基的弹性理论解

$$\psi_1 = \frac{1}{\alpha(R_1^2 + R_2^2)} (Q_2 \sin \alpha \bar{C}_1 t - Q_1 \cos \alpha \bar{C}_1 t)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\alpha(R_1^2 + R_2^2)} (Q_4 \sin \alpha \bar{C}_1 t - Q_3 \cos \alpha \bar{C}_1 t)$$

$$f_a = \frac{1}{C_0} [\text{sh}(4H-z)A_0 \sin B_0 z - \text{sh}A_0 z \sin(4H-z)B_0]$$

$$f_b = \frac{1}{C_0} [\text{ch}(4H-z)A_0 \cos B_0 z - \text{ch}A_0 z \cos(4H-z)B_0]$$

$$f_c = \frac{1}{C_0} [\text{sh}(2H+z)A_0 \sin(2H-z)B_0 - \text{sh}(2H-z)A_0 \sin(2H+z)B_0]$$

$$f_d = \frac{1}{C_0} [\text{ch}(2H+z)A_0 \cos(2H-z)B_0 - \text{ch}(2H-z)A_0 \cos(2H+z)B_0]$$

$$g_a = \frac{1}{C_0} [\text{ch}(4H-z)A_0 \sin B_0 z + \text{ch}A_0 z \sin(4H-z)B_0]$$

$$g_b = \frac{1}{C_0} [\text{sh}(4H-z)A_0 \cos B_0 z + \text{sh}A_0 z \cos(4H-z)B_0]$$

$$g_c = \frac{1}{C_0} [\text{ch}(2H+z)A_0 \sin(2H-z)B_0 + \text{ch}(2H-z)A_0 \sin(2H+z)B_0]$$

$$g_d = \frac{1}{C_0} [\text{sh}(2H+z)A_0 \cos(2H-z)B_0 + \text{sh}(2H-z)A_0 \cos(2H+z)B_0]$$

对于单面排水的问题，可以用同样方法求解。

对半无限地基，上式简化为

$$u_w = \frac{2p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty [\varphi \sin z\beta + \psi(\cos z\beta - e^{-z\lambda})] \cos \lambda x d\beta d\lambda \quad (4-123a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_z + u_w = \sigma'_z - \frac{2p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \psi z \lambda e^{-z\lambda} \cos \lambda x d\beta d\lambda \\ + \frac{2p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \beta^2} [\varphi \sin z\beta + \psi(\cos z\beta - e^{-z\lambda})] \cos \lambda x d\beta d\lambda \end{aligned} \quad (4-123b)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_x + u_w = \sigma'_x - \frac{2p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(z - z\lambda) e^{-z\lambda} \cos \lambda x d\beta d\lambda \\ + \frac{2p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + \beta^2} [\varphi \beta^2 \sin z\beta + \psi(\beta^2 \cos z\beta + \lambda^2 e^{-z\lambda})] \cos \lambda x d\beta d\lambda \end{aligned} \quad (4-123c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau'_{xz} + \frac{2p}{\pi^2}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(1 - z\lambda) e^{-z\lambda} \sin \lambda x d\beta d\lambda \\ - \frac{2p}{\pi^2}(1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} [\varphi \beta \cos z\beta - \psi(\sin z\beta - \lambda e^{-z\lambda})] \sin \lambda x d\beta d\lambda \end{aligned} \quad (4-123d)$$

式中： σ'_z 、 σ'_x 、 τ'_{xz} 是半无限地基的弹性理论解

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[\frac{\beta}{\lambda^2 + \beta^2} + \frac{(1-\nu)\nu\beta}{\nu^2\lambda^2 + (1-\nu)^2\beta^2} \right] \exp[-\overline{C}_t t(\lambda^2 + \beta^2)] \\ \psi &= \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} - \frac{\nu^2\lambda}{\nu^2\lambda^2 + (1-\nu)^2\beta^2} \right] \exp[-\overline{C}_t t(\lambda^2 + \beta^2)] \end{aligned}$$

三、集中荷载

集中荷载作用下有限厚土层的固结问题可以用前面相同的方法求解。但求解过程过于复杂，下面只列出双面排水条件下的最后结果。

$$\begin{aligned} u_w = \frac{p}{\pi^3}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left[\left(\frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - f_b \right) \varphi_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} - f_d \right) \varphi_2 - f_a \varphi_1 - f_c \varphi_2 \right] d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-124a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_z + u_w = \frac{1}{2}\sigma'_z + \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \cos x a \cos y \beta d\lambda d\beta da \\ + \frac{p}{\pi^3}(1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh}2Hr} \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ \left[z r \text{ch}(2H-z)r - \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \varphi_1 \right. \\ \left. - [z r \text{ch}zr - (1 + 2Hr \text{ch}2Hr) \text{sh}zr] \varphi_2 \right\} d\lambda d\beta da \\ - \frac{p}{\pi^3}(1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \frac{r^2}{\lambda} \left[f_a \varphi_1 + f_c \varphi_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - f_b \right) \varphi_1 + \left(\frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} - f_d \right) \varphi_2 \right] d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-124b)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x + u_w &= \frac{1}{2}\sigma_x^* - \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \cos x \alpha \cos y \beta d\beta d\alpha \\
&+ \frac{p}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{r^2} \cos x \alpha \cos y \beta \cdot \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
&\times \left\{ \left[\left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \text{sh}(2H-z)r - z \text{rch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\
&+ \left. \left[\left(\frac{r^2}{\alpha^2} - 2Hr \text{cth}Hr \right) \text{sh}zr + z \text{rch}zr \right] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta d\alpha \\
&- \frac{p}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x \alpha \cos y \beta \int_0^\infty \left[\left(f_b - \frac{\alpha^2}{\lambda} f_a \right) \varphi_1 + \left(f_d - \frac{\alpha^2}{\lambda} f_c \right) \varphi_2 \right. \\
&+ \left. \left(f_a + \frac{\alpha^2}{\lambda} f_b - \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \right) \psi_1 + \left(f_c + \frac{\alpha^2}{\lambda} f_d - \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} \right) \psi_2 \right] d\lambda d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{4-124c}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y + u_w &= \frac{1}{2}\sigma_y^* - \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta^2}{r^2} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \cos x \alpha \cos y \beta d\beta d\alpha \\
&+ \frac{p}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta^2}{r^2} \cos x \alpha \cos y \beta \cdot \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
&\times \left\{ \left[\left(1 + \frac{r^2}{\beta^2} \right) \text{sh}(2H-z)r - z \text{rch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\
&+ \left. \left[\left(\frac{r^2}{\beta^2} - 2Hr \text{cth}Hr \right) \text{sh}zr - z \text{rch}zr \right] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta d\alpha \\
&- \frac{p}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x \alpha \cos y \beta \int_0^\infty \left[\left(f_b - \frac{\beta^2}{\lambda} f_a \right) \varphi_1 + \left(f_d - \frac{\beta^2}{\lambda} f_c \right) \varphi_2 \right. \\
&+ \left. \left(f_a + \frac{\alpha^2}{\lambda} f_b - \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \right) \psi_1 + \left(f_c + \frac{\alpha^2}{\lambda} f_d - \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} \right) \psi_2 \right] d\lambda d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{4-124d}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}\tau_{xy}^* + \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \sin x \alpha \sin y \beta d\beta d\alpha \\
&- \frac{p}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin x \alpha \sin y \beta \cdot \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
&\times \left\{ \left[\text{sh}(2H-z)r - z \text{rch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda + \left[(z \text{rch}zr \right. \right. \\
&- \left. \left. 2Hr \text{cth}Hr) \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta d\alpha - \frac{p}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \sin x \alpha \sin y \beta \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\lambda} \\
&\times \left[f_a \varphi_1 + f_c \varphi_2 + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - f_b \right) \psi_1 + \left(\frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} - f_d \right) \psi_2 \right] d\lambda d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{4-124e}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz} = & \frac{1}{2} \tau_{yz}^* + \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \cos x \sin y \beta d\beta da \\
& + \frac{\rho}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r} \cos x \sin y \beta \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
& \times \left\{ \left[zr \text{sh}(2H-z)r - \text{ch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{ch}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\
& \left. + [zr \text{sh}zr - 2Hr \text{ch}Hr \text{ch}zr] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta da \\
& - \frac{\rho}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x \sin y \beta \int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda} \\
& \left[(A_0 g_a - B_0 g_b) \varphi_1 - (A_0 g_c - B_0 g_d) \varphi_2 + \left(r \frac{\text{ch}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_b - B_0 g_a \right) \psi_1 \right. \\
& \left. - \left(r \frac{\text{ch}zr}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_d - B_0 g_c \right) \psi_2 \right] d\lambda d\beta da \tag{4-124f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zx} = & \frac{1}{2} \tau_{zx}^* + \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{r} \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \sin x \cos y \beta d\beta da \\
& + \frac{\rho}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{r} \sin x \cos y \beta \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
& \times \left\{ \left[zr \text{sh}(2H-z)r - \text{ch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{ch}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\
& \left. + [zr \text{sh}zr - 2Hr \text{ch}Hr \text{ch}zr] \int_0^\infty \varphi_2 d\theta \right\} d\beta da - \frac{\rho}{\pi^3} (1-2\nu) \\
& \int_0^\infty \int_0^\infty \sin x \cos y \beta \int_0^\infty \frac{\alpha}{\lambda} \left[(A_0 g_a - B_0 g_b) \varphi_1 - (A_0 g_c - B_0 g_d) \varphi_2 \right. \\
& \left. + \left(r \frac{\text{ch}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_b - B_0 g_a \right) \psi_1 - \left(r \frac{\text{ch}zr}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_d - B_0 g_c \right) \psi_2 \right] d\lambda d\beta da \tag{4-124g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \frac{1}{2} w_z^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\text{ch}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} \cos x \cos y \beta d\beta da \\
& + \frac{1+\nu}{E} \frac{\rho}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{r} \cos x \cos y \beta \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\
& \times \left\{ \left[zr \text{sh}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{ch}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\
& \left. + [zr \text{sh}zr - (1+2Hr \text{ch}2Hr) \text{ch}zr] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta da \\
& - \frac{1+\nu}{E} \frac{\rho}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x \cos y \beta \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \left[(A_0 g_a - B_0 g_b) \varphi_1 \right. \\
& \left. - (A_0 g_c - B_0 g_d) \varphi_2 + \left(r \frac{\text{ch}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_b - B_0 g_a \right) \psi_1 \right.
\end{aligned}$$

$$- \left(r \frac{\text{ch}zr}{\text{sh}2Hr} - A_0 g_a - B_0 g_c \right) \psi_2 \Big] d\lambda d\beta da \quad (4-124h)$$

$$\begin{aligned} u_x = & \frac{1}{2} u_x' + \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a}{r^2} \sin x a \cos y \beta \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} d\beta da \\ & - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a}{r^2} \sin x a \cos y \beta \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\ & \times \left\{ \left[\text{sh}(2H-z)r - z \text{rch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\ & \left. + [z \text{rch}zr - 2Hr \text{cth}2Hr - \text{sh}zr] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta da \\ & - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \sin x a \cos y \beta \int_0^\infty \frac{\alpha}{\lambda} [f_a \varphi_1 + f_c \varphi_2 \\ & + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - f_b \right) \psi_1 + \left(\frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} - f_d \right) \psi_2] d\lambda d\beta da \quad (4-124i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y = & \frac{1}{2} u_y' + \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r^2} \cos x a \sin y \beta \frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} d\beta da \\ & - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^3} (1-\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r^2} \cos x a \sin y \beta \frac{1}{\text{sh}2Hr} \\ & \times \left\{ \left[\text{sh}(2H-z)r - z \text{rch}(2H-z)r + \frac{2Hr}{\text{sh}2Hr} \text{sh}zr \right] \int_0^\infty \varphi_1 d\lambda \right. \\ & \left. + [z \text{rch}zr - 2Hr \text{cth}2Hr - \text{sh}zr] \int_0^\infty \varphi_2 d\lambda \right\} d\beta da \\ & - \frac{1+\nu}{E} \frac{p}{\pi^3} (1-2\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \sin y \beta \int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda} [f_c \varphi_1 + f_a \varphi_2 \\ & + \left(\frac{\text{sh}(2H-z)r}{\text{sh}2Hr} - f_b \right) \psi_1 + \left(\frac{\text{sh}zr}{\text{sh}2Hr} - f_d \right) \psi_2] d\lambda d\beta da \quad (4-124j) \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_1 = \frac{1}{R_1} (Q_1 \sin \lambda C_{,t} + Q_2 \cos \lambda C_{,t})$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{R_1} (Q_3 \sin \lambda C_{,t} + Q_4 \cos \lambda C_{,t})$$

$$\psi_1 = \frac{1}{R_2} (Q_2 \sin \lambda C_{,t} - Q_1 \cos \lambda C_{,t})$$

$$\psi_2 = \frac{1}{R_2} (Q_4 \sin \lambda C_{,t} - Q_3 \cos \lambda C_{,t})$$

$$R_1 = \lambda (R_1^2 + R_2^2)$$

$$R_1 = g_1^2 - h_1^2 + g_2 g_3 + h_2^2$$

$$R_2 = 2h_1 g_1 + h_2 g_3 - h_2 g_2$$

$$Q_1 = (R_1 g_2 + R_2 h_2) \text{cth}2Hr - (R_1 g_1 + R_2 h_1) \frac{1}{\text{sh}2Hr}$$

$$Q_2 = (R_2 g_2 - R_1 h_2) \text{cth}2Hr - (R_2 g_1 - R_1 h_1) \frac{1}{\text{sh}2Hr}$$

$$Q_3 = (R_1 g_1 + R_2 h_1) \operatorname{cth} 2Hr + (R_1 g_1 - R_2 h_2) \frac{1}{\operatorname{sh} 2Hr}$$

$$Q_4 = (R_2 g_1 - R_1 h_1) \operatorname{cth} 2Hr + (R_2 g_3 + R_2 h_2) \frac{1}{\operatorname{sh} 2Hr}$$

$$g_1 = (1 - \nu) \frac{2Hr}{\operatorname{sh} 2Hr} (\operatorname{th} 2Hr + 2(1 - 2\nu) \frac{r}{\lambda C_0})$$

$$\times (B_0 \operatorname{sh} 2HA_0 \cos 2HB_0 - A_0 \operatorname{ch} 2HA_0 \sin 2HB_0)$$

$$h_1 = (1 - 2\nu) \frac{r}{\lambda} \left[\frac{2}{C_0} (A_0 \operatorname{sh} 2HA_0 \cos 2HB_0 + B_0 \operatorname{ch} 2HA_0 \sin 2HB_0) - \frac{r}{\operatorname{sh} 2Hr} \right]$$

$$g_2 = (1 + \nu) \left(\operatorname{cth} 2Hr + \frac{2Hr}{\operatorname{sh}^2 2Hr} \right) + (1 - 2\nu) \frac{r}{\lambda C_0} (B_0 \operatorname{sh} 4HA_0 - A_0 \sin 4HB_0)$$

$$h_2 = (1 - 2\nu) \frac{r}{\lambda} \left[\frac{1}{C_0} (A_0 \operatorname{sh} 4HA_0 + B_0 \sin 4HB_0) - r \operatorname{cth} 2Hr \right]$$

$$g_3 = (1 - \nu) \left(\operatorname{cth} 2Hr - \frac{2Hr}{\operatorname{sh}^2 2Hr} \right) - (1 - 2\nu) \frac{r}{\lambda C_0} (B_0 \operatorname{sh} 4HA_0 - A_0 \sin 4HB_0)$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + r^4} + r^2}{2}}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + r^4} - r^2}{2}}$$

$$C_0 = \operatorname{ch} 4HA_0 - \cos 4HB_0$$

$$r = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$

$f_a, b_b, f_c, f_d, g_a, g_b, g_c, g_d$ 仍如二维问题中的式 (4-122) 后面各式所示, 只是其中的 A_0, B_0 有所不同。

对半无限地基, 上面各式将简化为

$$u = \frac{2p}{\pi^3} (1 - \nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta [\varphi \sin z \lambda + \psi (\cos z \lambda - e^{-\sigma})] d\lambda d\beta da \quad (4-125a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_x + u = \sigma'_x + \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ \frac{r^2}{\lambda^2 + r^2} (1 - 2\nu) [\varphi \sin z \lambda + \psi (\cos z \lambda - e^{-\sigma})] \right. \\ \left. - \psi (1 - \nu) z r e^{-\sigma} \right\} d\lambda d\beta da \quad (4-125b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{x+a} = \sigma'_x + \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\lambda^2 + \beta^2}{\lambda^2 + r^2} (\varphi \sin z \lambda + \psi \cos z \lambda) \right. \\ \left. + \psi \left[(1 - 2\nu) \frac{a^2}{\lambda^2 + r^2} - (1 - \nu) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2 z r}{r^2} \right) \right] e^{-\sigma} \right\} d\lambda d\beta da \quad (4-125c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{y+a} = \sigma'_y + \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\lambda^2 + a^2}{\lambda^2 + r^2} (\varphi \sin z \lambda + \psi \cos z \lambda) \right. \\ \left. + \psi \left[(1 - 2\nu) \frac{\beta^2}{\lambda^2 + r^2} - (1 - \nu) \left(1 + \frac{\beta^2}{r^2} - \frac{\beta^2 z r}{r^2} \right) \right] e^{-\sigma} \right\} d\lambda d\beta da \quad (4-125d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{xy}^* + \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin x a \sin y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r^2}{\lambda^2 + r^2} [\varphi \sin z \theta + \psi (\cos z \lambda - e^{-zr})] \right. \\ \left. + (1-\nu) \psi (1-zr) e^{-zr} \right\} d\theta d\beta da \end{aligned} \quad (4-125e)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx} = \tau_{yx}^* - \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r} \cos x a \sin y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r\beta}{r^2 + \lambda^2} (\varphi \cos z \lambda - \psi \sin z \lambda) \right. \\ \left. + \psi \left[(1-2\nu) \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} - (1-\nu)(1-zr) \right] e^{-zr} \right\} d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-125f)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = \tau_{zx}^* - \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{r} \sin x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r\alpha}{r^2 + \lambda^2} (\varphi \cos z \lambda - \psi \sin z \lambda) \right. \\ \left. + \psi \left[(1-2\nu) \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} - (1-\nu)(1-zr) \right] e^{-zr} \right\} d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-125g)$$

$$\begin{aligned} u_x = u_x^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{r} \cos x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r\lambda}{r^2 + \lambda^2} (\varphi \cos z \lambda - \psi \sin z \lambda) \right. \\ \left. + \psi \left[(1-2\nu) \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} - (1-\nu)zr \right] e^{-zr} \right\} d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-125h)$$

$$\begin{aligned} u_x = u_x^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{r^2} \sin x a \cos y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} \right. \\ \left. \times [\varphi \sin z \lambda + \psi (\cos z \lambda - e^{-zr})] - (1-\nu) \psi (1-zr) e^{-zr} \right\} d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-125i)$$

$$\begin{aligned} u_y = u_y^* + \frac{1+\nu}{E} \frac{2p}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{r^2} \cos x a \sin y \beta \int_0^\infty \left\{ (1-2\nu) \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} \right. \\ \left. \times [\varphi \sin z \lambda + \psi (\cos z \lambda - e^{-zr})] - (1-\nu) \psi (1-zr) e^{-zr} \right\} d\lambda d\beta da \end{aligned} \quad (4-125j)$$

以上各式中的 σ_x^* 、 σ_x^* 、 σ_y^* 、 τ_{xy}^* 、 τ_{yx}^* 、 τ_{zx}^* 、 u_x^* 、 y_y^* 和 u_z^* 是半无限弹性地基的理论解，而

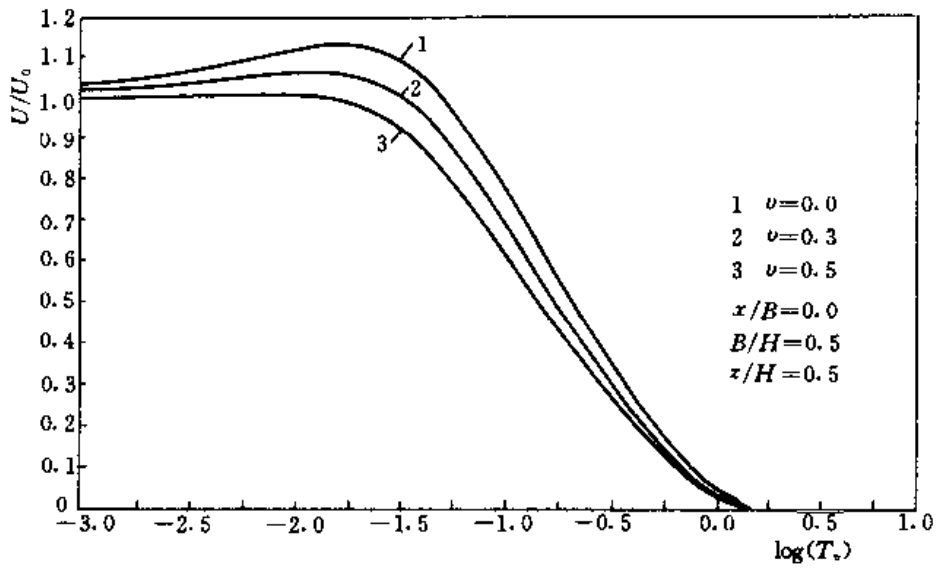
$$\varphi = \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2} + \frac{(1-\nu)\nu\lambda}{(1-\nu)^2\lambda^2 + \nu^2r^2} \right] \exp[-C_{vt}(\lambda^2 + r^2)]$$

$$\psi = \left[\frac{r}{\lambda^2 + r^2} - \frac{\nu^2r}{(1-\nu)^2\lambda^2 + \nu^2r^2} \right] \exp[-C_{vt}(\lambda^2 + r^2)]$$

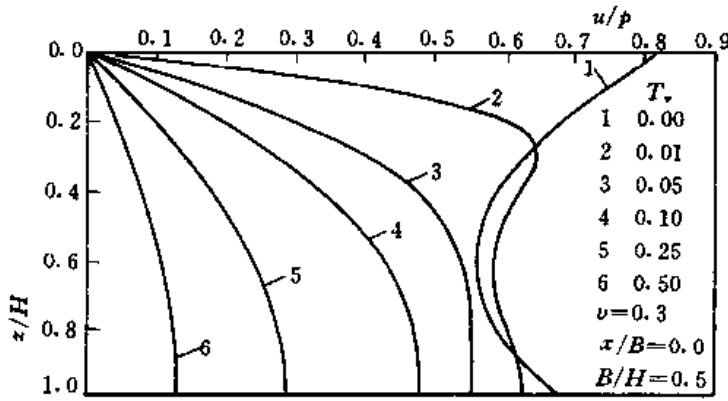
$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

荷载变化情况下的相应解答亦可用以上办法求得。对于分布荷载，则可以通过对上述解答进行积分的办法求得解答。

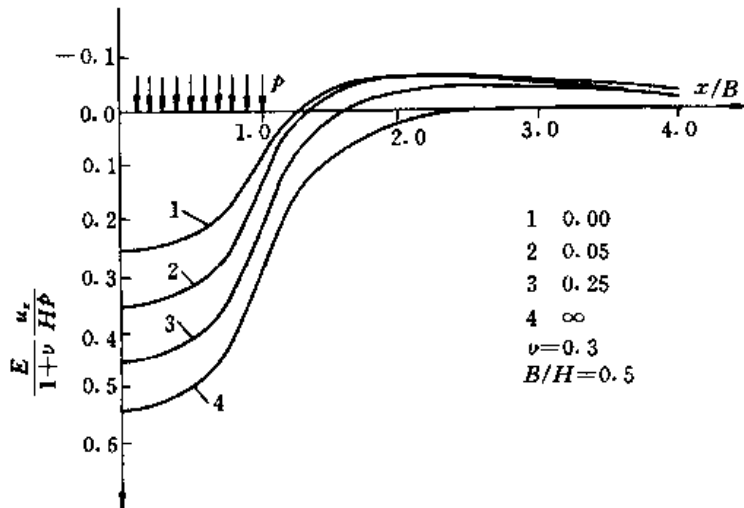
作为算例，图 4-10 给出了条形荷载下单面排水问题的若干计算结果。该图 a 是土层中心点的孔隙压力变化过程线，明显地反映了固结初期孔隙压力反而上升的 Mandel-Crayer 效应，且泊松比愈小，此效应愈明显。该图 b 为荷载中线上各点孔隙压力的消散过程，曲线 1 和 2 的交叉说明 Model 效应有相当范围内存在。该图 c 则是地面沉降，显示荷载外侧地面先是隆起，以后又随孔隙压力消散面回落的过程。



(a)



(b)



(c)

图 4-10 条形均布荷载下的有限厚土厚的固结过程
 (a) 孔隙压力消散曲线; (b) 孔隙压力分布; (c) 地面沉降

第六节 动力固结方程的求解

一、动力作用问题的分类

当作用的荷载变化比较快时,方程式(4-26)中的加速度项不能忽略。属于这类荷载的有周期性或不规则的振动荷载及冲击荷载,如:①机器基础;②运动的车辆;③地震;④风浪;⑤爆炸;⑥冲击等。

但是,对固结问题来说,有关动荷载的速度,除了从土体整体出发考虑外,还应从孔隙水与土骨架的相对运动进行考察。就土整体来说,动荷载作用的速度可分三类:①缓慢;②中速;③快速。对缓慢作用荷载,惯性力可以忽略。对中速作用荷载,总的惯性项不能忽略,但水对土骨架相对运动的惯性项,即式(4-24)中的 \ddot{w}_x 、 \ddot{w}_y 和 \ddot{w}_z 可以忽略。而对于爆炸和冲击等高速荷载,则 \ddot{w}_x 、 \ddot{w}_y 和 \ddot{w}_z 也不能忽略。而从孔隙水与骨架的相对运动出发,则又可把问题分别为三类:完全排水、部分排水和完全不排水。对于完全排水和完全不排水问题,土体可以当作单相介质看待,也就是说这是前面第三章讨论的范围,只有第二类问题,才是本章所要讨论的。

对于承受周期荷载的均质土层,Zienkewicz等建议用下列两个准则判别荷载作用的快慢^[28]

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho k}{\rho_f g} \frac{T}{T_0^2}; \Pi_2 = \pi^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \quad (4-126)$$

式中: T 为作用荷载的周期; T_0 为土层的自振周期。 Π_1 用于判断土骨架与孔隙水相对运动的快慢, $\Pi_1 < 10^{-2}$ 为快速加荷,可以按不排水情况计算; $\Pi_1 > 10^2$ 为缓慢加荷,可以按完全排水情况计算。 Π_2 用于判断土的整体运动的快慢, $\Pi_2 < 10^{-3}$ 可以判为慢速荷载,既无须进行动力分析。例如风浪作用下的海底土层的运动情况就属于这一类,因海浪的周期一般超过10s,而10m厚土层的自振周期约为 10^{-2} s,故 $\Pi_2 \approx 10^{-5}$ 。图4-11清楚地显示了以这两个准则划分的各种假设的适用范围。

对于快速作用荷载,除了求助于数值分析外,目前还没有好的求解方法。下面只讨论中速周期荷载作用下的固结问题,即图4-11中标明I区的荷载作用范围。

二、半无限地基周期集中荷载下的解答

对于集中荷载,应用圆柱坐标较为方便。如果忽略孔隙水的压缩性且只考虑动力作用下的附加应力并考虑到 $\epsilon_v = - \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$,则此时的Biot固结方程式(4-27)可以改写为

$$\frac{k}{\rho_f g} \nabla^2 u_m = - \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} - \frac{k}{g} \frac{\partial^2 \epsilon_v}{\partial t^2} \quad (4-127a)$$

$$G \nabla^2 u_r - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial r} - G \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial u_w}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (4-127b)$$

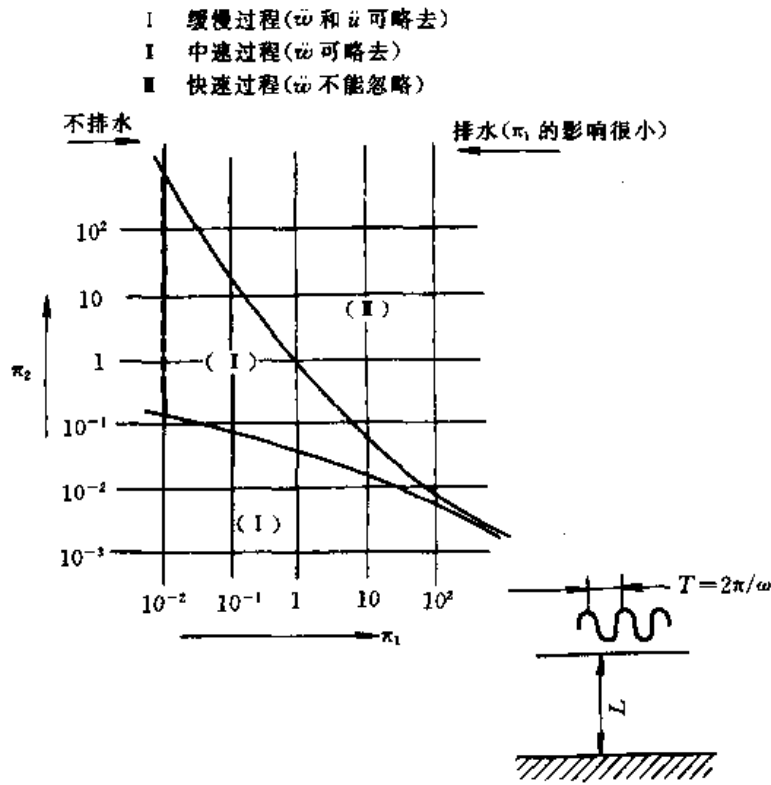


图 4-11 动力作用问题的分类

$$G \nabla^2 u_z - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} - \frac{\partial u_w}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4-127c)$$

由上式可得类似式 (4-106) 的方程如下

$$\bar{C}_v \nabla^2 \epsilon_v = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} - \left(\frac{\rho}{\rho_f} - 1 \right) \frac{\partial^2 \epsilon_v}{\partial t^2} \quad (4-128)$$

此式可以独立求解, 然后代回到前式后即可解出 u_w 、 u_r 和 u_z 。下面介绍王立忠等人的求解方法^[29]。

对于周期荷载, 变量 ϵ_v 等也可以表示为下列周期函数

$$\begin{aligned} \epsilon_v(r, z, t) &= \bar{\epsilon}_v(r, z) e^{i\omega t}; & u_w(r, z, t) &= \bar{u}_w(r, z) e^{i\omega t}; \\ u_r(r, z, t) &= \bar{u}_r(r, z) e^{i\omega t}; & u_z(r, z, t) &= \bar{u}_z(r, z) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4-129)$$

把它们代入式 (4-128) 和式 (4-127) 后可得

$$\nabla^2 \bar{\epsilon}_v = \eta \bar{\epsilon}_v \quad (4-130a)$$

$$\nabla^2 \bar{u}_w = \zeta \bar{\epsilon}_v \quad (4-130b)$$

$$G \nabla^2 \bar{u}_z - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \bar{\epsilon}_v}{\partial z} - G \frac{\bar{u}_r}{r^2} - \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} + \rho \omega^2 \bar{u}_z = 0 \quad (4-130c)$$

$$G \nabla^2 \bar{u}_z - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \bar{\epsilon}_v}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} + \rho \omega^2 \bar{u}_z = 0 \quad (4-130d)$$

式中

$$\eta = \left[\frac{\rho_f g \omega i}{k} - (\rho - \rho_f) \omega^2 \right] \frac{1-2\nu}{G}$$

$$\zeta = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \eta + \rho \omega^2$$

由于式(4-128)是从式(4-127)得来的,故上面4式中只有3个是独立的。对 $\bar{\epsilon}_v$ 等函数进行 Henkel 变换,即令

$$\bar{\epsilon}_v = \int_0^r r \cdot \tilde{\epsilon}_v J_0(\xi r) dr;$$

$$\bar{u}_w = \int_0^r r \cdot \tilde{u}_w J_0(\xi r) dr;$$

$$\bar{u}_r = \int_0^r r \cdot \tilde{u}_r J_1(\xi r) dr;$$

$$\bar{u}_z = \int_0^r r \cdot \tilde{u}_z J_0(\xi r) dr$$

可得

$$\frac{d^2 \bar{\epsilon}_v}{dz^2} - q^2 \bar{\epsilon}_v = 0 \quad (4-131a)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_w}{dz^2} - \xi^2 \bar{u}_w = \zeta \bar{\epsilon}_v \quad (4-131b)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_r}{dz^2} - s^2 \bar{u}_r = \frac{1}{1-2\nu} \xi \bar{\epsilon}_v - \frac{1}{G} \xi \bar{u}_w \quad (4-131c)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_z}{dz^2} - s^2 \bar{u}_z = -\frac{1}{1-2\nu} \frac{d\bar{\epsilon}_v}{dz} + \frac{1}{G} \frac{d\bar{u}_w}{dz} \quad (4-131d)$$

其中

$$q^2 = \xi^2 + \eta, \quad s^2 = \xi^2 - \rho\omega^2/G_0$$

针对半无限体 $z \rightarrow \infty$ 时所有变量都应趋近于 0 的情况,选用 $R_+(q) < 0$, 则式(4-131a)的解将为

$$\bar{\epsilon}_v = -A_1 \exp(qz) \quad (4-132a)$$

把上式代入式(4-131b)后

$$\frac{d^2 \bar{u}_w}{dz^2} - \xi^2 \bar{u}_w = A_1 \xi \exp(qz)$$

应用算子法可得此式的解为

$$\bar{u}_w = A_1 \frac{\xi}{\eta} \exp(qz) + A_2 G \exp(-\xi z) \quad (4-132b)$$

代入式(4-131c)和(4-131d)后可得

$$\bar{u}_r = -\frac{\xi}{\eta} A_1 \exp(qz) - \frac{G\xi}{\rho\omega^2} A_2 \exp(-\xi z) + \frac{A_3}{s} \exp(sz) \quad (4-132c)$$

$$\bar{u}_z = \frac{q}{\eta} A_1 \exp(qz) - \frac{G\xi}{\rho\omega^2} A_2 \exp(-\xi z) + \frac{A_4}{s} \exp(sz) \quad (4-132d)$$

考虑到 $\bar{\epsilon}_v = -\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)$, 或经过 Henkel 变换后 $\bar{\epsilon}_v = \left(\xi \bar{u}_r + \frac{d\bar{u}_z}{dz}\right)$, 可得 A_3 与 A_4 间的关系为

$$A_4 = -\frac{\xi}{s} A_3 \quad (4-133)$$

下一步是根据边界条件求待定系数 A_1 , A_2 和 A_3 , 为此,先写出经 Henkel 变换后的应力应变关系式如下

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{G} = -\frac{d\bar{u}}{dz} + \xi\bar{u}_r; \quad \frac{\bar{\sigma}_z}{G} = -2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{d\bar{u}_z}{dz} - \frac{2\nu}{1-2\nu}\xi\bar{u}_r$$

或代入式 (4-132c) 和式 (4-132d) 后

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{G} = -\frac{2\xi q}{\eta}A_1\exp(qz) + \frac{2G\xi^2}{\rho\omega^2}A_2\exp(-\xi z) + \left(1 + \frac{\xi^2}{s^2}\right)A_3\exp(sz) \quad (4-134a)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{G} = \left(\frac{2q^2}{\eta} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right)A_1\exp(qz) + \frac{2G\xi^2}{\rho\omega^2}A_2\exp(-\xi z) - \frac{2\xi}{s}A_3\exp(sz) \quad (4-134b)$$

由边界条件

$$\bar{u}_w|_{z=0} = 0; \quad \bar{\tau}_{rz}|_{z=0}; \quad \bar{\sigma}_z|_{z=0} = \bar{p}_0$$

\bar{p}_0 为给定的表面垂直荷载。代入式 (4-132b)、式 (4-134a) 和式 (4-134b) 后

$$A_1\frac{\xi}{\eta} + A_2G = 0 \quad (4-135a)$$

$$-\frac{2\xi q}{\eta}A_1 + \frac{2G\xi^2}{\rho\omega^2}A_2 + \left(1 + \frac{\xi^2}{s^2}\right)A_3 = 0 \quad (4-135b)$$

$$\left(\frac{2q^2}{\eta} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right)A_1 + \frac{2G\xi^2}{\rho\omega^2}A_2 - \frac{2\xi}{s}A_3 = \frac{\bar{p}_0}{G} \quad (4-135c)$$

由此可解出系数 A_1 、 A_2 和 A_3 如下

$$A_1 = \frac{\bar{p}_0}{4G} \frac{(s^2 + \xi^2)\eta}{(-\xi q - \xi^2/\rho\omega^2)(s + \xi)^2 + (s^2 + \xi^2)\left(q^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\eta + \xi q\right)} \quad (4-136a)$$

$$A_2 = -\frac{\xi}{\eta G}A_1 \quad (4-136b)$$

$$A_3 = \frac{1}{(s + \xi)^2} \left(\frac{2q^2}{\eta} + \frac{2\nu}{1-2\nu} + \frac{2\xi q}{\eta}\right)A_1 - \frac{1}{(s + \xi)^2} \frac{\bar{p}_0}{G} \quad (4-136c)$$

把它们代回到前面各式，即可得出全部解答。

下面只给出地表处竖向幅值的具体解答。代入 $z=0$ ，由式 (4-132d) 可得地表位移的公式

$$\bar{u}_{z0} = \frac{q}{\eta}A_1 - \frac{G\xi}{\rho\omega^2}A_2 - \frac{\xi}{s^2}A_3 \quad (4-137)$$

进行 Henkel 反变换可得位移幅值为

$$\tilde{u}_{z0} = \int_0^\infty \xi \cdot \bar{u}_{z0} J_0(\xi r) d\xi$$

或代入系数 A_1 、 A_2 和 A_3 后得

$$\tilde{u}_{z0} = -\int_0^\infty \frac{(\xi q \rho \omega^2 + \xi^2) J_0(\xi r)}{2\left(2\xi^2 - \frac{\rho \omega^2}{G}\right)\left(\xi^2 + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\eta\right) - 4\xi^2 q s - \frac{2\xi^2 \xi^2}{\rho \omega^2}(s + \xi)^2} \frac{\bar{p}_0}{G^2} d\xi \quad (4-138)$$

针对集中荷载 $P_0=100\text{N}$ ， $\omega=10\text{Hz}$ ， $G=6\text{MPa}$ ， $\nu=0.35$ 的情况，计算出 3 种渗透系数和 3 种孔隙比的地表振幅如图 4-12 所示。

三、波浪作用下海床的反应

动力固结方程只有在简单的情况下才能求得解析解。波浪作用下海床的反应问题就是

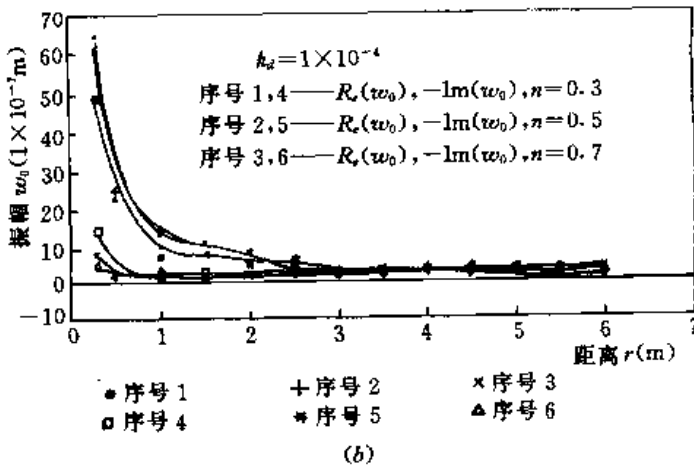
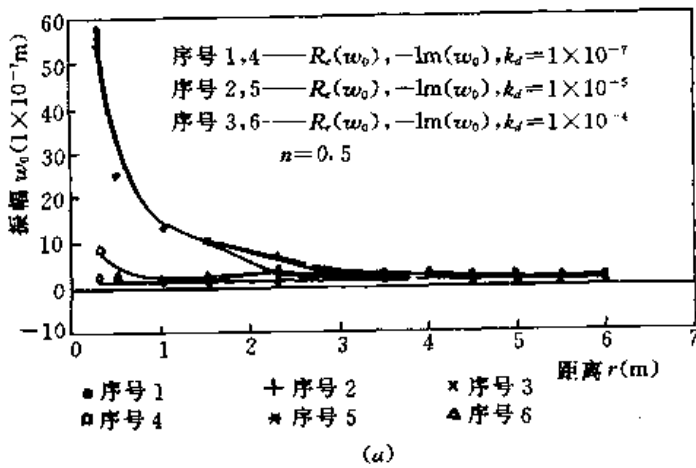


图 4-12 集中荷载下地表的振幅

足上式的普遍解为

$$u = A_1 \exp(-\eta z) \cos(\eta x) \exp(i\omega t) \quad (4-141)$$

把它代入式 (4-139a) 后可得

$$\frac{k}{\rho_f g} \nabla^2 u_w = \frac{1 + \theta + m\theta}{G(1+m)} \frac{\partial u_w}{\partial x} - \frac{1}{G(1+m)} A_1 i\omega \times \exp(-\eta z) \cos(\eta x) \exp(i\omega t) \quad (4-142)$$

其中 $m = \frac{1}{1-2\nu}$, $\theta = nG/K_f$ 。由此可求得 u_w , u_x 和 u_z 如下^[30]

$$u_w = -G \{ 2\eta A_1 \exp(-\eta z) + (1+m)(\xi^2 - \eta^2) A_3 \exp(-\xi z) \} \times \cos(\eta x) \exp(i\omega t) \quad (4-143a)$$

$$u_x = \{ (A_2 - A_1(1+m\theta)\eta z) \exp(-\eta z) + \eta A_3 \exp(-\xi z) \} \times \cos(\eta x) \exp(i\omega t) \quad (4-143b)$$

$$u_z = \{ (A_2 - A_1(1+2\theta+m\theta) - A_1(1+m\theta)\eta z) \exp(-\eta z) + \xi A_3 \exp(-\xi z) \} \cos(\eta x) \exp(i\omega t) \quad (4-143c)$$

相应的应力公式为

近期研究得比较多的一个。

前面讲过, 对风浪荷载惯性力一般可以略去, 即仍可用静力固结方程进行计算。但如考虑孔隙流体的可压缩性, 式 (4-104a) 应改写为

$$\frac{k}{\rho_f g} \nabla^2 u_w = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \frac{n}{K_f} \frac{\partial u_w}{\partial x} \quad (4-139a)$$

其它 3 式不变。如果只考虑二维问题和外荷载引起的应力, 则可简化为

$$G \nabla^2 u_x - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} - \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0 \quad (4-139b)$$

$$G \nabla^2 u_z - G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} - \frac{\partial u_w}{\partial z} = 0 \quad (4-139c)$$

式 (4-105) 仍不变, 并可写为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4-140)$$

其中 $u = u_w + 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v$ 。对半无限地基, 如外荷载的变化满足 $\cos(\eta x) \exp(i\omega t)$ 的周期规律, 则满

$$\tau_{xy} = 2G\eta\{(A_1\theta - A_2 + A_1(1+m\theta)\eta z)\exp(-\eta z) - \xi A_3\exp(-\xi z)\}\cos(\eta x)\exp(i\omega t) \quad (4-143d)$$

$$\sigma_z = 2G\eta\{(A_1(1+\theta+m\theta) - A_2 + A_1(1+m\theta)\eta z)\exp(-\eta z) - \eta A_3\exp(-\xi z)\}\cos(\eta x)\exp(i\omega t) \quad (4-143e)$$

上式中

$$\xi^2 = \eta^2 + \frac{i\omega(1+\theta+m\theta)\rho_f g}{kG(1+m)} \quad (4-144)$$

把下列边界条件

$$u_w|_{z=0} = p_0\cos(\eta x)\exp(i\omega t)$$

$$\sigma_z|_{z=0} = q_0\cos(\eta x)\exp(i\omega t)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = 0$$

代入式 (4-143a)、式 (4-143d) 和式 (4-143e) 中, 可解出待定系数 A_1 , A_2 和 A_3 如下

$$A_1 = \frac{q_0(1+m)(\xi+\eta) + 2p_0\eta}{2G\eta\{(1+m)(1+m\theta)(\xi+\eta) - 2\eta\}} \quad (4-145a)$$

$$A_2 = \frac{q_0\{(1+m)(\xi^2 - \eta^2)\theta + 2\xi\eta\} + 2p_0\eta\{\xi(1+m\theta) + \theta(\xi - \eta)\}}{2G\eta(\xi - \eta)\{(1+m)(1+m\theta)(\xi + \eta) - 2\eta\}} \quad (4-145b)$$

$$A_3 = \frac{-p_0(1+m\theta) - q_0}{G(\xi - \eta)\{(1+m)(1+m\theta)(\xi + \eta) - 2\eta\}} \quad (4-145c)$$

Mei 则提出了海床反应的边界层理论^[31]。他把半无限海床分成深层和表面边界层两部分, 深层可以按不排水条件考虑, 只有边界层需要用 Biot 固结理论计算。在这一理论基础上求得了海床表面有无限长圆管的二维问题的解答^[32]。图 4-13 为应用这一理论算出的半宽为 B 的刚性基础在垂直强迫谐振下的孔隙压力反应。

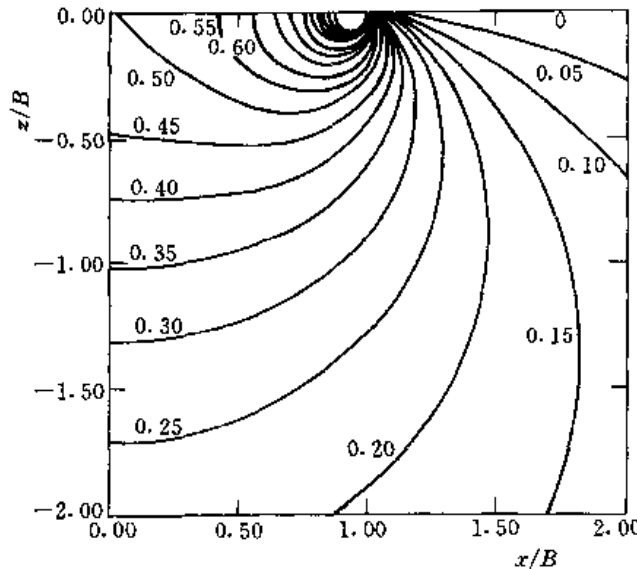


图 4-13 动孔隙压力幅值等值线

第七节 粘弹性固结方程的求解

一、粘弹性多孔介质的固结方程

前面的讨论中均假定土骨架为理想弹性介质，本节重新假定土骨架为粘弹性介质，粘弹性模型的最一般形成为广义 Kelvin 模型和广义 Maxwell 模型，如图 2-5 和图 2-6 所示。下面将从广义 Kelvin 模型（也称 Voigt 模型）出发进行讨论。

常应力作用下广义 Kelvin 模型的应力应变关系可以写为

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[\left(\frac{1}{E_0} + \frac{t}{K_0} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\frac{E_i}{K_i} t}) \right] \quad (4-146)$$

$$\text{令} \quad J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = a_0 \left[1 + \eta_0 t + \sum_{i=1}^N a_i (1 - e^{-\eta_i t}) \right] \quad (4-147)$$

为蠕变函数，其中 $a_0 = \frac{1}{E_0}$ ， $\eta_0 = \frac{E_0}{K_0}$ ， $a_i = \frac{E_0}{E_i}$ ， $\eta_i = \frac{E_i}{K_i}$ 。由叠加原理，变应力作用下的应力应变关系将为

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t-z) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= J(0)\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (4-148)$$

对此式进行 Laplace 变换，可得

$$\bar{\varepsilon} = \lambda \bar{J} \bar{\sigma} \quad (4-149)$$

式中： λ 为变换参数。由此式可见，与弹性理论相比，粘弹性理论中只需把原为杨氏模量 E 的地方换成 $\frac{1}{\lambda \bar{J}}$ 即可。

在泊松比为常量的假设下，上式可扩展为

$$\{\bar{\sigma}\} = \frac{1}{\lambda \bar{J} (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \{\bar{\varepsilon}\} \quad (4-150)$$

现在对式 (4-27a) 进行 Laplace 变换，如果只考虑静力问题，可得

$$\frac{k}{\rho_f g} \nabla^2 \tilde{u}_w = \lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right) + \frac{n}{K_f} \tilde{u}_w \quad (1-151a)$$

由于平衡方程和几何方程不含时间 t ，对它们的 Laplace 变换将不出现参数 λ 。因此，对式

(4-27) 其余 3 式的 Laplace 变换只需考虑式 (4-150), 即只需把式中的 G 换成 $\tilde{G} = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda\tilde{J}}$, 由此得

$$\tilde{G}\nabla^2 u_x + \frac{\tilde{G}}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial x^2} = 0 \quad (4-151b)$$

$$\tilde{G}\nabla^2 u_y + \frac{\tilde{G}}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial y^2} = 0 \quad (4-151c)$$

$$\tilde{G}\nabla^2 u_z + \frac{\tilde{G}}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial z^2} = 0 \quad (4-151d)$$

由此可见, 经 Laplace 变换成的粘弹性介质的固结方程形式上将与弹性多孔介质的固结方程一致。如果已有弹性理论的解答, 只要把原解答中出现 E 的地方换成 $\frac{1}{\lambda\tilde{J}}$, 然后进行 Laplace 反变换, 即可得出同一问题的粘弹性方程的解答。以上解题思想最先由 E. H. Lee 提出, 被称为李氏比拟法。钱家欢在求解固结问题中拓扩了李氏比拟法的应用范围^[33]。

二、一维固结问题

一维粘弹性固结问题曾有许多人研究过, 著名的如 Gibson & Lo^[34] 和陈宗基^[35]。下面介绍赵维炳基于广义 Kelvin 模型的最一般的解法^[20]。

先对式 (4-147) 进行 Laplace 变换, 得

$$\lambda\tilde{J} = \frac{a_0}{\lambda \prod_{i=1}^N (\lambda + \eta_i)} \left[(\lambda + \eta_0) \prod_{i=1}^N (\lambda + \eta_i) + \lambda \sum_{i=1}^n a_i \eta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\lambda + \eta_j) \right] \quad (4-152)$$

其次, 对弹性骨架的解答式 (4-47) 进行 Laplace 变换, 得

$$\tilde{u}'_w = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \frac{1}{\lambda + \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 \frac{k}{\rho_f g m_v}} \quad (4-153)$$

对有侧限的一维压缩问题, $m_v = \frac{1}{E_s}$, E_s 为侧限压缩模量, 因此, 应用李氏比拟法, 只需把上式中的 m_v 换成 $\lambda\tilde{J}$ 即可得粘弹性骨架的相应解答

$$\tilde{u}_w = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{K_m \prod_{i=1}^N (\lambda + \eta_i)}{\lambda F(\lambda)} \right] \quad (4-154)$$

其中

$$K_m = \left(\frac{m\pi}{2H} \right) \frac{k}{\rho_f g a_0}$$

$$F(\lambda) = (\lambda + K_m + \eta_0) \prod_{i=1}^N (\lambda + \eta_i) + \lambda \sum_{i=1}^n a_i \eta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\lambda + \eta_j)$$

但方括号内的函数难以进行 Laplace 反变换, 为此先把它改写成下列分解式

$$\frac{\prod_{i=1}^N (\lambda + \eta_i)}{F(\lambda)} = \frac{y_0}{\lambda} + \sum_{i=1}^{N+1} \frac{y_i}{\lambda - \lambda_i} \quad (4-155)$$

其中 $y_0 = \frac{1}{K_m + \eta_0}$, 而 y_1, y_2, \dots, y_{N+1} 则可从求解下列联立方程组得出

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} y_i &= -y_0 \\ \sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \lambda_j \right] y_i &= y_0 f_i - 1 \\ \sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq i}}^{N+2-k} \lambda_{j_1} \sum_{\substack{j_2=j_1+1 \\ j_2 \neq i}}^{N+3-k} \lambda_{j_2} \cdots \sum_{\substack{j_k=j_{k-1} \\ j_k \neq i}}^{N+1} \lambda_{j_k} \right] y_i \\ &= (-1)^{k+1} \left[y_0 f_k - \sum_{j_1=1}^{N+2-k} \eta_{j_1} \sum_{j_2=j_1+1}^{N+3-k} \eta_{j_2} \cdots \sum_{j_{k-1}=j_{k-2}+1}^N \eta_{j_{k-1}} \right] \\ &\quad (k = 2, 3, \dots, N) \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}$ 是 $N+1$ 次多项式 $F(\lambda) = 0$ 的根, f_k 是 $F(\lambda)$ 的 k 次的系数。

把式 (4-155) 代入式 (4-154) 后经过 Laplace 反变换的可得

$$u_w(z, t) = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left(1 - K_m y_0 - K_m \sum_{i=1}^{N+1} y_i e^{\lambda_i t} \right) \quad (4-156a)$$

相应的固结度公式为

$$U(t) = 1 - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8}{m^2 \pi^2} \left(1 - K_m y_0 - K_m \sum_{i=1}^{N+1} y_i e^{\lambda_i t} \right) \quad (4-156b)$$

而地面沉降公式为

$$\begin{aligned} S(t) = S_{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8K_m}{m^2 \pi^2} \left[y_0 \eta_0 t + \frac{K_m}{(K_m + \eta_0)^2} \left(1 + \sum_{i=1}^N a_i \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{N+1} y_i \left(1 + \frac{\eta_0}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j \eta_j}{\lambda_i + \eta_j} e^{\lambda_j t} \right) \right] \quad (4-156c) \end{aligned}$$

$S_{\infty} = a_0 u_0 H$ 为最终沉降量。如果定义 $V(t) = S(t) / S_{\infty}$ 为压缩度, 则比较前面两式可见, 对于粘弹性体, 固结度与压缩度是不一样的。而对于弹性体, 两者是相同的, 均可以用式 (4-47b) 表示。

当采用 Mechant 模型时, $N=1, \eta_0=0$, 则式 (4-156a) 将简化为

$$u_w(z, t) = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left(\frac{K_m + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{K_m + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right) \quad (4-157)$$

式中 $\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \left[(K_m + \eta_1 + a_1 \eta_1) \pm \sqrt{(K_m + \eta_1 + a_1 \eta_1)^2 - 4K_m \eta_1} \right]$

以上即为 Gibson & Lo 求得的解答^[34]。

三、砂井固结问题

1. 自由应变解

对粘弹性介质, 砂井固结问题不能再分解为垂直向和径向渗流分别考察, 即式 (4-68) 和 Carrillo 定理不适用。为此, 先对弹性介质利用 Carrillo 定理求出双向渗流的固结公式, 即把式 (4-47a) 与式 (4-78a) 相乘, 得

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(z, t) = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4V_1^2(\alpha_i, s)}{\alpha_i (n^2 - s^2) \left[\frac{n^2}{s^2} V_0^2(\alpha_i, n) - V_0^2(\alpha_i, s) - V_1^2(\alpha_i, s) \right]} \\ \times \exp \left[- \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 C_{vt} t - \left(\frac{\alpha_i}{r_w} \right)^2 C_{vt} t \right] \quad (4-158) \end{aligned}$$

经 Laplace 变换后, 此式变为

$$\begin{aligned} \hat{u}_w(z, t) = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4V_i^2(\alpha, s)}{\alpha_i^2(n^2 - s^2) \left[\frac{n^2}{s^2} V_0^2(\alpha, n) - V_0^2(\alpha, s) - V_i^2(\alpha, s) \right]} \\ \times \frac{1}{\lambda + \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 C_{vz} + \left(\frac{\alpha_i}{r_w} \right)^2 C_w} \end{aligned} \quad (4-159)$$

将 C_{vz} 各 C_w 中的 m_v 代换成 λJ_i , 经分解和反变换后得出的最终解答为

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(z, t) = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4V_i^2(\alpha, s)}{\alpha_i^2(n^2 - s^2) \left[\frac{n^2}{s^2} V_0^2(\alpha, n) - V_0^2(\alpha, s) - V_i^2(\alpha, s) \right]} \\ \times \left(1 - K_{m\alpha} y_0 - K_{m\alpha} \sum_{j=1}^{N+1} y_j e^{\lambda_j t} \right) \end{aligned} \quad (4-160)$$

式中

$$K_{m\alpha} = \frac{1}{\rho_f g a_0} \left[\left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 k_z + \left(\frac{\alpha}{r_w} \right)^2 k_r \right] \quad (4-161)$$

2. 等应变解

略去推导过程, 从式 (4-94) 出发可得下列解答

$$\bar{u} = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left(1 - K_m y_0 - K_m \sum_{i=1}^{N+1} y_i e^{\lambda_i t} \right) \quad (4-162)$$

$$u_w = u_{w0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \frac{K_s}{K_{mw} + K_s} \sin \frac{m\pi}{2H} z \left(1 - K_m y_0 - K_m \sum_{i=1}^{N+1} y_i e^{\lambda_i t} \right) \quad (4-163)$$

K_m , K_{mv} , K_{mw} 和 K_s 的含义同式 (4-91) 和式 (4-93)。

第八节 固结方程的数值解法

以上求得的解析解只适用于系数为常数的线性方程, 而且只限于边界条件和初值条件比较简单的几种场合。一般问题只能通过数值方法求解, 而且常用有限单元法^[36]。

一、计算域的离散

设场变量 $\{u\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T$ 和 u_w 用下列插值公式近似

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i \{\bar{u}_i(t)\} \quad (4-164a)$$

$$u_w = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{N}_i \bar{u}_{wi}(t) \quad (4-164b)$$

式中: N_i 和 \bar{N}_i 分别为 $\{u\}$ 和 u_w 的形函数, 它们可以一样, 也可以不一样, 而 $\{\bar{u}_i\}$ 和 \bar{u}_{wi} 为 i 结点的待定值; n 和 \bar{n} 分别为相应的结点总数。把上式代入固结方程式 (4-26), 通过 Galerkin 法可以把它转化为下列结点变量的常微分方程组

$$[M]\{\dot{\bar{u}}\} + [K]\{\bar{u}\} + [C]\{\dot{\bar{u}}_w\} = \{F_1\} \quad (4-165a)$$

$$[A]\{\dot{\bar{u}}\} + [C]\{\dot{\bar{u}}\} + [S]\{\dot{\bar{u}}_w\} + [H]\{\bar{u}_w\} = \{F_2\} \quad (4-165b)$$

式中

$$[M] = \int_{\Omega} [N]^T \rho [N] d\Omega \text{—— 质量矩阵}$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \text{—— 劲度矩阵}$$

$$[C] = \int_{\Omega} [B]^T [\bar{N}] d\Omega \text{—— 耦合矩阵}$$

$$[A] = \int_{\Omega} [\bar{N}]^s [B] d\Omega \text{—— 流体惯性矩阵}$$

$$[S] = \int_{\Omega} [\bar{N}]^T \beta [N] d\Omega \text{—— 流体压缩矩阵}$$

$$[H] = \int_{\Omega} [\bar{B}]^T k [\bar{B}] d\Omega \text{—— 渗透矩阵}$$

$$\{F_1\} = \int_{\Omega} [N] \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N] \{t\} d\Gamma \text{—— 结点力}$$

$$\{F_2\} = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} k d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{N} q d\Gamma \text{—— 结点流量}$$

其中 $[B] = [L] [N]$, $[\bar{B}] = [L] [\bar{N}]$, $\{b\}$ 为体积力, $\beta = \frac{n}{K_f}$,

$$[L] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

对于二维问题, 上式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{u}_{x_j}(t) + k_{ij}^{11} u_{x_j}(t) + k_{ij}^{12} u_{z_j}(t)] + \sum_{j=1}^n k_{ij}^{13} u_{w_j}(t) &= F_1^i(t) \\ \sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{u}_{z_j}(t) + k_{ij}^{21} u_{x_j}(t) + k_{ij}^{22} u_{z_j}(t)] + \sum_{j=1}^n k_{ij}^{23} u_{w_j}(t) &= F_2^i(t) \\ \sum_{j=1}^n [a_{ij}^1 \ddot{u}_{x_j} + a_{ij}^2 \ddot{u}_{z_j} + k_{ij}^{31} \dot{u}_{x_j}(t) + k_{ij}^{32} \dot{u}_{z_j}(t)] + \sum_{j=1}^n [s_{ij} \dot{u}_{w_j}(t) + k_{ij}^{33} u_{w_j}(t)] &= F_3^i(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-166)$$

式中

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \rho N_i N_j d\Omega, \quad s_{ij} = \int_{\Omega} \beta \bar{N}_i \bar{N}_j d\Omega,$$

$$a_{ij}^1 = \rho_f k_x \int_{\Omega} \bar{N}_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad a_{ij}^2 = \rho_f k_z \int_{\Omega} \bar{N}_i \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega,$$

$$k_{ij}^{11} = \int_{\Omega} (d_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}) d\Omega$$

$$k_{ij}^{12} = \int_{\Omega} (d_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x}) d\Omega$$

$$k_{ij}^{21} = \int_{\Omega} (d_2 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z}) d\Omega$$

$$k_{ij}^{22} = \int_{\Omega} (d_1 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}) d\Omega$$

$$k_{ij}^{33} = - \int_{\Omega} (k_x \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial x} + k_z \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial z}) d\Omega$$

$$k_{ij}^{13} = - \int_{\Omega} N_j \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} d\Omega, \quad k_{ij}^{31} = - \int_{\Omega} \bar{N}_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$$

$$k_{ij}^{23} = - \int_{\Omega} N_j \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} d\Omega, \quad k_{ij}^{32} = - \int_{\Omega} \bar{N}_i \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega$$

$$F_i^1(t) = \int_{\Gamma} N_i t_x d\Gamma$$

$$F_i^2(t) = \int_{\Gamma} N_i t_x d\Gamma - \int_{\Omega} N_i \rho g d\Omega$$

$$F_i^3(t) = \int_{\Gamma} \bar{N}_i q_n d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} k d\Omega$$

且 $d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $d_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $d_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$, t_x 和 t_z 为表面作用荷载, q_n 为渗入水量。

二、时间域的离散

方程组 (1-17) 是一组对于时间的常微分方程, 需在时域上离散化。设 $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ 时刻的结点变量为 $\{\bar{u}\}_1, \{\bar{u}\}_2, \dots, \{\bar{u}\}_n, \{\bar{u}\}_{n+1}$ 以及 $\{\bar{u}_w\}_1, \{\bar{u}_w\}_2, \dots, \{\bar{u}_w\}_n, \{\bar{u}_w\}_{n+1}$, 则在时段 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 内, 可以用下列线性插值公式

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= \dot{\bar{u}}_n + (\dot{\bar{u}}_{n+1} - \dot{\bar{u}}_n)\tau/\Delta t \\ \bar{u}_w &= \bar{u}_{wn} + (\bar{u}_{wn+1} - \bar{u}_{wn})\tau/\Delta t \quad \tau: 0 \rightarrow \Delta t \end{aligned} \quad (4-167)$$

由此得

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_n + \dot{\bar{u}}_n \tau + (\dot{\bar{u}}_{n+1} - \dot{\bar{u}}_n)/\Delta t - \tau^2/2 \\ \ddot{\bar{u}} &= (\dot{\bar{u}}_{n+1} - \dot{\bar{u}}_n)/\Delta t \\ \ddot{\bar{u}}_w &= (\bar{u}_{wn+1} - \bar{u}_{wn})/\Delta t \end{aligned} \quad (4-168)$$

将上述表达式代入式 (4-165), 并在时域上用加权残数法

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} W([M]\{\dot{\bar{u}}\} + [K]\{\bar{u}\} - [C]\{\bar{u}_w\})d\tau &= \int_0^{\Delta t} W\{F_1\}d\tau \\ \int_0^{\Delta t} \bar{W}([C]^T\{\dot{\bar{u}}\} + [S]\{\dot{\bar{u}}_w\} + [H]\{\bar{u}_w\})d\tau &= \int_0^{\Delta t} \bar{W}\{F_2\}d\tau \end{aligned} \quad (4-169)$$

把以上两式的右端项仍记为 $\{F_1\}$ 和 $\{F_2\}$, 于是有

$$[M]\{\dot{\bar{u}}\} + [K]\{\theta_2 \bar{u}_n \frac{\Delta t^2}{2} + \theta_1 \dot{\bar{u}}_n \Delta t + \bar{u}_n\} - [C]\{\theta_1 \dot{\bar{u}}_w \Delta t + \bar{u}_{wn}\} = \{F_1\} \quad (4-170a)$$

$$[C]^T\{\theta_1 \dot{\bar{u}} \Delta t + \bar{u}_n\} + [S]\{\dot{\bar{u}}_w\} + [H]\{\theta_1 \dot{\bar{u}}_w \Delta t + \bar{u}_{wn}\} = \{F_2\} \quad (4-170b)$$

式中

$$\theta_1 = \frac{\int_0^{\Delta t} W r d\tau}{\Delta t \int_0^{\Delta t} W d\tau}, \theta_2 = \frac{\int_0^{\Delta t} W r^2 d\tau}{\Delta t \int_0^{\Delta t} W d\tau}, \bar{\theta}_1 = \frac{\int_0^{\Delta t} \bar{W} r d\tau}{\Delta t \int_0^{\Delta t} \bar{W} d\tau} \quad (4-171)$$

而 W 和 \bar{W} 为相应的权函数。

把式 (4-170) 中的两个方程式合并成

$$\begin{bmatrix} [M] + [K]\theta_2 \frac{\Delta t^2}{2} & - [C]\theta_1 \Delta t \\ - [C]^T \bar{\theta}_1 \Delta t & - [H]\theta_1 \Delta t - [S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\dot{u}_w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}_1\} \\ \{\bar{F}_2\} \end{Bmatrix} \quad (4-172)$$

$$\text{式中} \quad \{\bar{F}_1\} = \{F_1\} - [K]\theta_1 \{\dot{u}_n\} \Delta t - [K]\{\bar{u}_n\} + [C]\{\bar{u}_{wn}\} \quad (4-173)$$

$$\{\bar{F}_2\} = -\{F_2\} + [H]\{\bar{u}_{wn}\} + [C]^T \{\bar{u}_n\} \quad (4-174)$$

视权函数 W 和 \bar{W} 的具体形式, θ_1 、 θ_2 和 $\bar{\theta}_1$ 可能在 $0 \sim 1$ 之间变化。但只有在满足下列条件

$$\theta_2 \geq \theta_1 \geq 1/2, \bar{\theta}_1 \geq 1/2 \quad (4-175)$$

时, 上述时间差分方程才是无条件稳定的。

解出 $\{\ddot{u}\}$ 及 $\{\dot{u}_w\}$ 以后, 回代到式 (4-167) 和式 (4-168), 以便求解下一时刻的位移 $\{u\}_{n+1}$ 和孔隙水压力 $\{u_w\}_{n+1}$ 。

三、算例

下面只列举两个静力分析的算例, 有关动力分析的算例见第七章。

1. 条形荷载下的软土地基

设软土地基厚 10m, 下卧不透水土层, 地表承受 75kPa 的均布条形荷载, 荷载面宽度也为 10m, 此处地表不透水, 两侧地面排水。荷载分 10 级施加, 每级 3 天, 荷载序列为: 15kPa, 25kPa, 35kPa, 42.5kPa, 50kPa, 55kPa, 60kPa, 65kPa, 70kPa, 75kPa。地基中初始应力为 $\sigma_{z0} = 10z$, z 为深度, $\sigma_{z0} = 0.53\sigma_z$, 渗透系数为 10^{-5} cm/s。土体模型采用剑桥模型, $c_r = 0.06$, $c_s = 0.01$, $\varphi' = 28^\circ$, $\nu = 0.3$, 但对 π 平面上的屈服函数形状采用 5 种不同的描述方式。计算所得的荷载中心处的地表沉降及孔隙压力过程线如图 4-14 (a) 所示, 图中符号见图 2-41 中的说明。由图可见采用 Mohr-Coulomb 准则 (M) 和 Mises 圆 (O) 的计算结果有相当差距^[37]。

图 4-14 (b) 则显示同一问题用剑桥模型和双弹簧模型所得结果的比较。剑桥模型 (损伤土) 的计算参数同前一算例, 而原状土的杨氏模量则假定随深度线性增加, 表面处 80MPa, 底部 160MPa, 式 (2-292b) 中的损伤系数为 $a = 120$, $b = 500$, 且损伤前后的渗透系数分别取 10^{-5} cm/s 和 10^{-6} cm/s。用剑桥模型计算时, 最大表面荷载为 75kPa, 而用双弹簧模型时, 最大荷载达 150kPa, 两者均分 14 级增加。由图可见, 与扰动土相比, 原状土地基具有较高的承载力和明显的脆性破坏特征^[38]。

2. 粘土心墙堆石坝

碾压心墙坝的填筑含水量一般在最优含水量附近, 相应的饱和度当在 0.9 附近, 故此时可把含气泡的孔隙水当作可压缩的单一流体, 其压缩系数可用式 (4-14) 估算。随着填筑荷重的增加, 孔隙水压力也不断升高, 最终孔隙气将全部溶解在水中而达到完全饱和。饱和度随孔隙水压力的变化过程可用 Hilf 公式 (4-12) 计算。

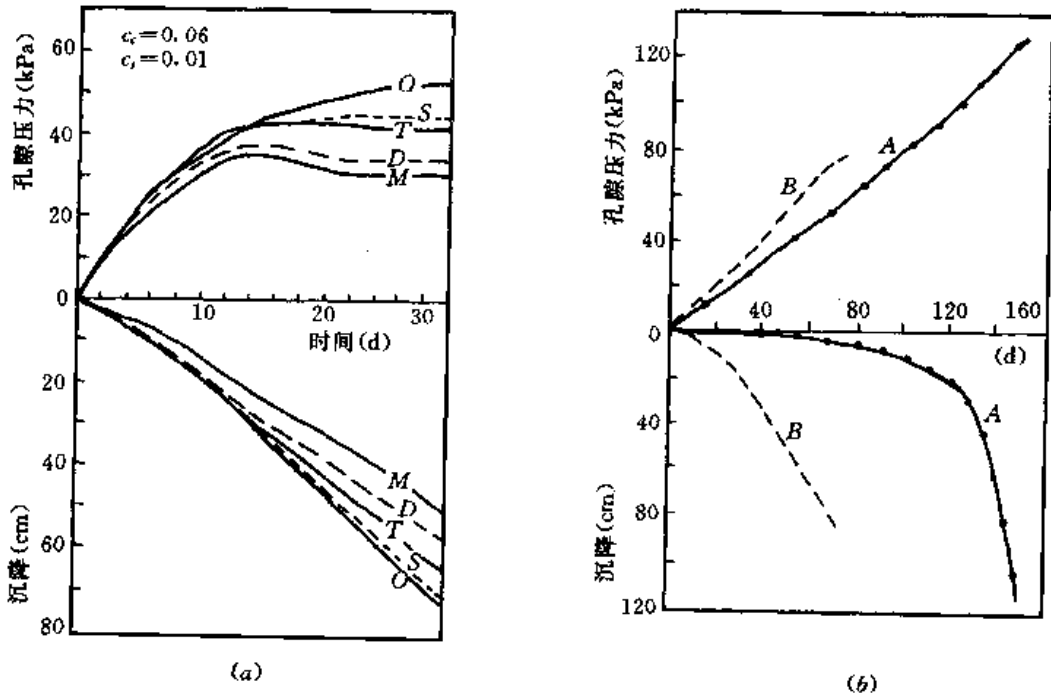


图 4-14 软土地基的固结沉降

(a) π 面上不同屈服面比较; (b) 双弹簧模型与剑桥模型比较

A—双弹簧; B—剑桥

应用图 2-49 所示的双屈服面模型和上述分析方法, 对高 100m 的鲁布革心墙堆石坝进行了模拟填筑和蓄水过程的分析^[39]。图 4-15 为计算所得的竣工时最大断面上沉降和位移等值线, 图 4-16 为 4 个时刻的心墙内孔隙压力分布。竣工时实测的最大沉降 87.8cm, 最大位移 11.0cm 以及心墙底部中点的孔隙压力实测值也分别绘于图上。

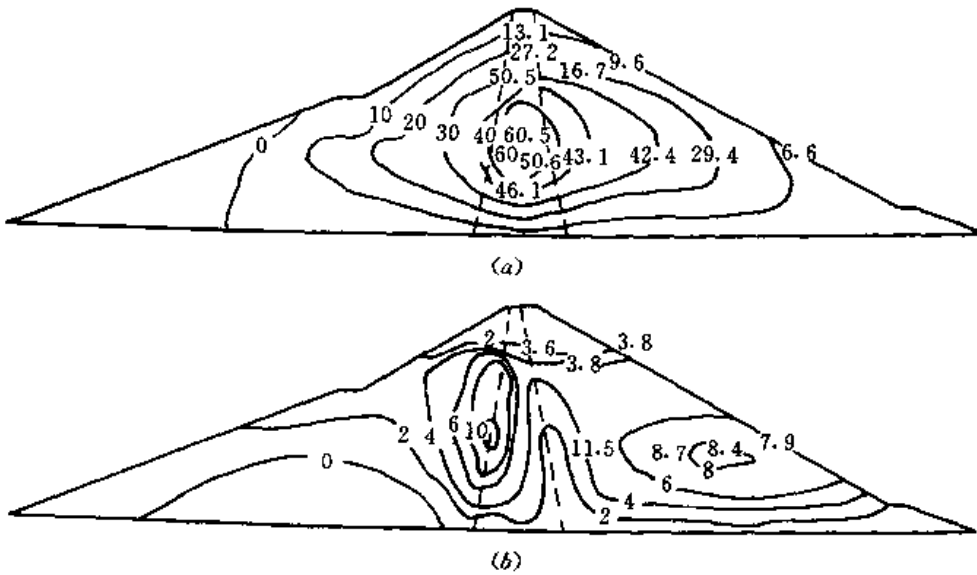


图 4-15 鲁布革坝竣工时的变位

(a) 沉降; (b) 位移

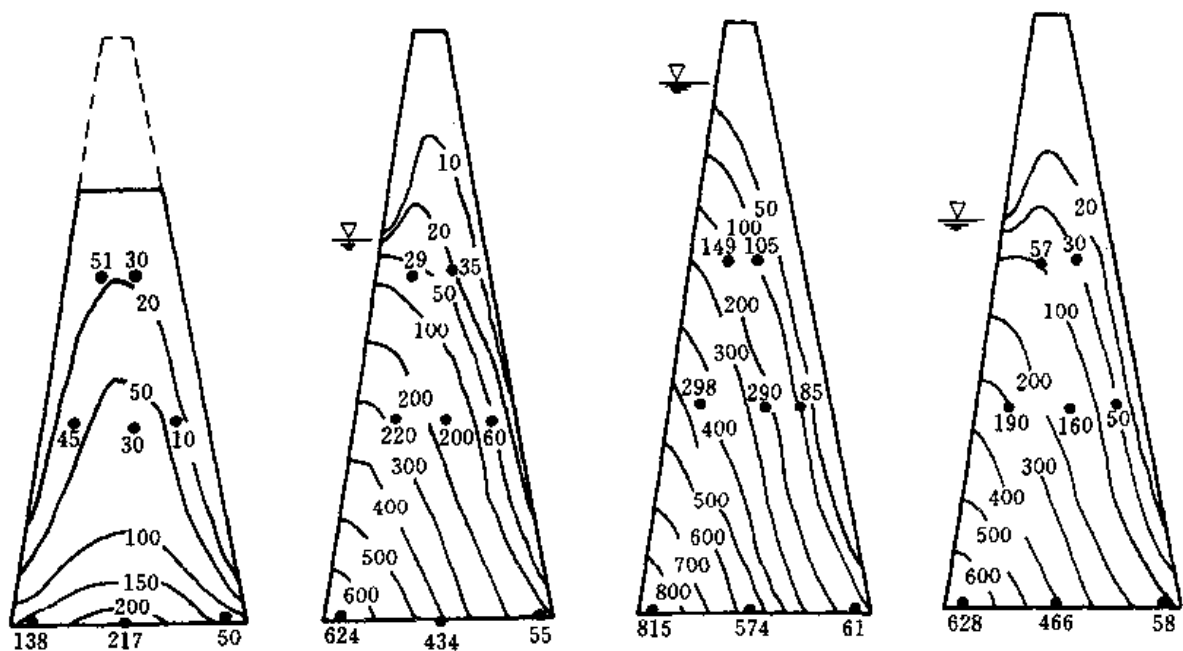


图 4-16 鲁布革坝心墙内孔隙压力 (单位: kPa)

第九节 大变形固结理论

固结理论主要用于饱和软粘土, 这里往往产生较大的应变, 变形量有时超过 20%。这时小应变理论可能带来较大的误差。因此需要考虑大变形理论。动力条件下产生大变形的情况较为少见, 故本节只讨论静力变形问题。

一、预备知识

大变形理论涉及一些专门知识, 为一般工程师所不熟悉。为此, 先对有关的专门概念作一简要的说明^[40,41]。

设 x_i^0 ($i=1, 2, 3$, 下同) 为质点的初始坐标, u_i 为其变位, 则 $x_i = x_i^0 + u_i$ 即为变位后的坐标。大变形问题有两种描述方法。一种是以初始构形描述的 Lagrange 法, 此时同坐标点意味着同一质点, 故此法又称物质描述法。另一种是瞬时构形描述的 Euler 法, 此时某一坐标点在不同的时刻由不同的质点所占据, 故此法又称空间描述法。但 Lagrange 描述法中有一个变种称为坐标更新法 (Updated Lagrangian Formulation), 简称 UL 法, 即在每一荷载增量结束时把坐标更新一次, 然后再从变位后新的坐标出发进行下一级荷载增量计算, 而始终采用初始坐标的方法则称为全 Lagrange 法 (Total Lagrangian Formulation), 简称 TL 法。

变形梯度

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} \quad (4-176)$$

式中: δ_{ij} 为单位张量, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0}$ 称为位移梯度。

Green 应变张量 改为以压缩为正 (下同)

$$E_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \right) \quad (4-177)$$

此式用于初始构形描述, 其中重复足标代表求和 (下同)。

Euler 应变张量

$$e_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4-178)$$

此式用于瞬时构形描述。

Cauchy 应力张量 作用于单位面积上 j 方向的力 t_j 可以写为

$$t_j = n_i \sigma_{ij} \quad (4-179)$$

式中: n_i 为此面法向与坐标轴 i 交角的方向余弦; σ_{ij} 即为 Cauchy 应力。Cauchy 应力用于瞬时构形描述, 与小应变的应力张量定义相同。

第一 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\sigma_{ij}^* = J \sigma_{ik} F_{jk}^{-1} \quad (4-180)$$

$J = \det F_{ij} = \frac{dV}{dV_0}$ 为 Jacob 行列式, 即变形前后的体积比。此式是把瞬时构形上法向 n 面上的力化到初始构形法向 n_0 面上而得到, 与变形前后的两点均有关系, 故属于两点张量。此张量也是不对称的, 不能用于应力应变关系的描述。

第二 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\sigma_{ij}^0 = J F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{jl}^{-1} = F_{ik}^{-1} \sigma_{kl}^* \quad (4-181)$$

这是只涉及初始构形上一点的应力张量, 它是一种二阶对称张量, 代表变形前单位面积上的力, 可以用于与 Green 应变张量匹配的应力应变关系表达。

二、基本方程式

下面采用 Lagrange 的物质描述法, 也即坐标系统用 x_i^0 , 应变用 Green 应变 E_{ij} , 应力用第二 Piola-Kirchhoff 应力 σ_{ij}^0 。

平衡方程 空间描述法的平衡方程与小应变时一样, 而当用物质描述法时, Cauchy 应力需改为第一 Piola-Kirchhoff 应力, 后者根据式 (4-180) 应写为 $F_{ik} \sigma_{kj}^*$, 故相应的方程式应为

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} (F_{ik} \sigma_{kj}^*) - f_i = 0 \quad (4-182)$$

f_i 为体积力。上式的增量方程将为

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} (F_{ik} \Delta \sigma_{kj}^0 + \Delta F_{ik} \sigma_{kj}^0) - \Delta f_i = 0 \quad (4-183)$$

本构方程

$$\Delta \sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} \Delta u_w = D_{ij\mu}^0 \Delta E_{ij} \quad (4-184)$$

几何方程 把式 (4-178) 写成增量式

$$\Delta E_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i^0} \right)$$

$$+ \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j^0} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j^0} \quad (4-185)$$

连续方程 不计静水压力下的渗流运动，以超静孔隙水压力 u_w 为变量，此时

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left(k_i \frac{\partial u_w}{\partial x_i^0} \right) = 0 \quad (4-186)$$

式中： k_i 为 i 方向渗透系数。

现在把本构关系式 (4-184) 和几何方程式 (4-185) 代入平衡方程式 (4-183) 中，并只保留二次项，略去三次项。可得

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \delta_{ik} D_{kijm}^0 \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_m^0} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_i^0} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k^0} D_{kijm}^0 \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_m^0} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_i^0} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \delta_{ik} D_{kijm}^0 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m^0} \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i^0} \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x_m^0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\sigma_{kj}^0 \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_k^0} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k^0} \right) \delta_{kj} \Delta u_w \right] - \Delta f_i = 0 \end{aligned} \quad (4-187)$$

另一方面，体应变公式为

$$\epsilon_v = 1 - \frac{dV}{dV^0} = 1 - \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2^0} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1^0} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1^0} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2^0} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \end{vmatrix} \quad (4-188)$$

把右端行列式展开后只保留二次项，并对时间求导后代入式 (4-186)，可得

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ & + \frac{\partial u_2}{\partial x_1^0} \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1^0} \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ & + \frac{\partial u_1}{\partial x_3^0} \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3^0} \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left(k_i \frac{\partial u_w}{\partial x_i^0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4-189)$$

式 (4-187) 和式 (4-189) 构成了以 Δu_1 、 Δu_2 、 Δu_3 和 Δu_w 为变量的大变形固结问题的控制方程式。

式 (4-184) 中 σ_{ij}^0 和 E_{ij} 为初始构形上定义的应力和应变，而非真实的应力和应变，因而模量矩阵 D_{ijkl}^0 也与通常意义下 D_{ijkl} 的不同。把式 (4-181) 和从式 (4-177) 和式 (4-178) 得到的 E_{ij} 与 e_{ij} 的关系式代入式 (4-184) 中，可得 D_{ijkl}^0 的表达式如下

$$\begin{aligned} D_{ijkl}^0 &= J F_{im}^{-1} F_{jn}^{-1} F_{kp}^{-1} F_{lq} D_{mnpq} + F_{kp}^{-1} F_{lq} \sigma_{ij}^0 \\ &\quad - F_{in}^{-1} F_{jn}^{-1} \sigma_{ik}^0 - F_{im}^{-1} F_{jn}^{-1} \sigma_{jk}^0 \end{aligned} \quad (4-190)$$

D_{mnpq} 即为按小变形理论确定的模量矩阵。

三、有限元公式

与式 (4-164) 一样，把位移和孔隙压力通过结点位移 $\{\bar{u}\}$ 和结点孔隙压力 $\{\bar{u}_w\}$ 表示，即

$$\{u\} = [N] \{\bar{u}\} \quad (4-191a)$$

$$u_w = [\bar{N}]\{\bar{u}_w\} \quad (4-191b)$$

采用 Green 应变，把式 (4-191a) 代入式 (4-185) 后可得

$$\{\Delta E\} = [\bar{B}]\{\Delta \bar{u}\} \quad (4-192)$$

其中

$$[\bar{B}] = [B_{L0}] + [B_{L1}] + [B_N] \quad (4-193)$$

右边第一项 $[B_{L0}] = [L][N]$ ，与前面式 (4-165) 的小应变表达式一样，即与式 (4-185) 中前面两项相当。第二项 $[B_{L1}] = [A][G]$ ，与式 (4-185) 的中间两项相当， $[A]$ 为位移梯度矩阵， $[G]$ 为转换矩阵。第三项 $[B_N] = \frac{1}{2} [\Delta A][G]$ 相当于式 (4-185) 的最后一项， $[\Delta A]$ 是 $[A]$ 的增量形式。这一项的存在将使大变形问题变成增量非线性问题，即增量方程式的系数中将包含增量本身，从而大大增加求解的难度。为了达到线性比，往往删去这一项。事实上在推导式 (4-187) 时已经这样做了。

把式 (4-191) 代入式 (4-187) 和式 (4-189) 中，可得与式 (4-172) 类似的有限元公式，而矩阵 $[K]$ 应改为 $[\bar{K}]$

$$[\bar{K}] = \int [\bar{B}][D^0][\bar{B}]d\Omega \quad (4-194)$$

此处的 $[\bar{B}]$ 应当用式 (4-193) 代入，而 $[D^0]$ 则要用式 (4-190) 计算。

四、算例

假定土骨架为线弹性体，应用上述大变形理论进行一维固结计算，所得的结果如图 4-17 中虚线所示，而 Terzaghi 固结理论的解答如图中实线所示。可见大变形计算所得的固结沉降小于小变形理论的计算结果，这一差距随着土体压缩系数的增大而增大^[42]。

对图 4-14(a) 所示的承受 75kPa 的条形荷载的 10m 厚的软土层，应用剑桥模型进行大变形固结计算的结果如图 4-18 中所示^[43,44]。图中 SM 为小变形计算结果，可见 TL 大变形理论所得的沉降和孔隙压力反应均小于小变形理论的相应值，而 UI 算法的沉降介于两者之间，孔隙压力则与小变形的结果接近。Dluzewski 曾把大变形理论应用于一个糖厂废渣坝工程的计算，得出按大变形计算的最大沉降为 2.61m，而按小变形计算则达到 4.27m^[45]。

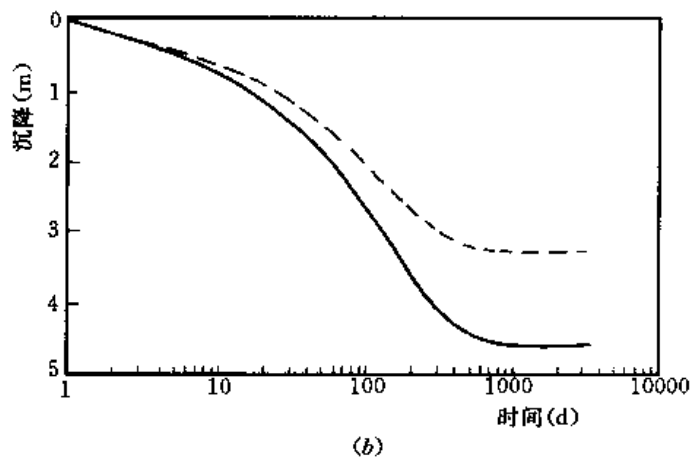
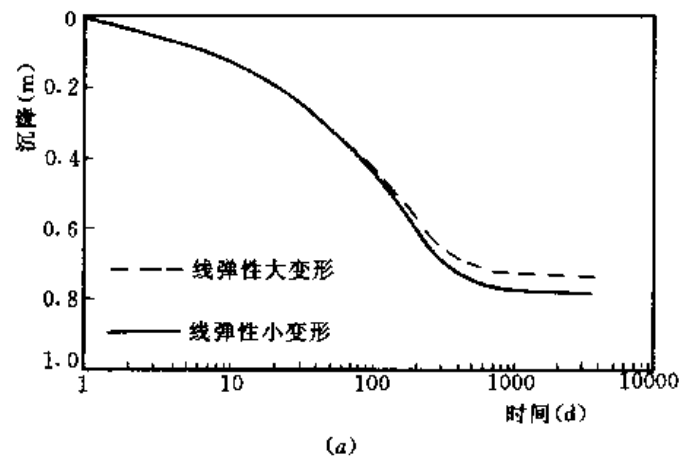


图 4-17 一维固结的大变形和小变形分析比较
(a) $q/E=0.083$; (b) $q/E=0.5$

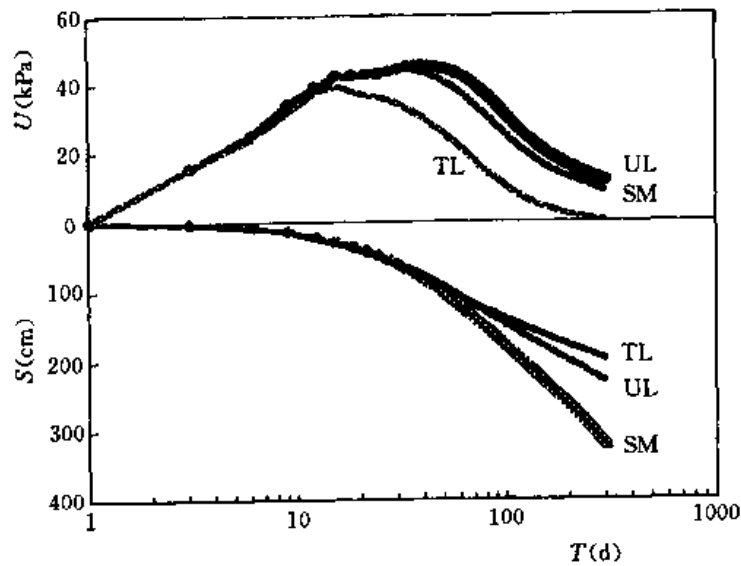


图 4-18 条形荷载下地面中心的沉降和孔隙压力

参 考 文 献

- 1 Terzaghi K. Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage, Lpz. Deuticke, 1925
- 2 Skempton A W. Effective stress in soils, concret and rocks, In: Pore Pressure and Suction in Soils, Butterworths, 1961
- 3 Hilf J W. Estimating construction pore pressure in rolled earth dams, In: 2ICSMFE, 1949, ■ : 234 ~240
- 4 Fredlund D G. Density and compressibility characteristic of air-water mixtures, Can. Geot. J. 1976, 13 (4): 386~396
- 5 Skempton A W. The pore pressure coefficient A and B, Geotechnique, 1954, 4 (4): 143~147
- 6 Rendulic L. Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen. Bauingenieur, 1936, 7 (51/53)
- 7 Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys. 1941, 12: 155 ~164
- 8 Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, J. Acoust. Soc. of America, 1956, 28: 168~191
- 9 Truesdell C. Sulle basi della termomeccanica, Rend. Linc. 1957, 22: 33-38, 158~166
- 10 Green A E. On flow of fluid through an elastic solid, Act. Mech. 1970, 9: 329~340
- 11 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论. 应用数学与力学, 1993 (2): 127-137 和 (8): 687~697
- 12 王明洋, 钱七虎. 爆炸波作用下准饱和土的动力模型研究. 岩土工程学报, 1995, 17 (6): 103 ~110
- 13 Zienkiewicz O C. The coupled problems of soil-pore-fluid-external fluid interaction, In: 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, 1985, 4: 1731-1739
- 14 黄传志. 多维太沙基固结方程的求解. 岩土工程学报, 1991, 13 (1): 34~47
- 15 Schiffman R L. Consolidation of soil under time-dependent loading and varying permeability, Proc. Highway Research Bord, 1958, 37
- 16 Gray H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soils, Trans ASCE,

1945, 110

- 17 谢康和. 双层地基—维固结理论与应用. 岩土工程学报, 1994, 16 (5): 24~35
- 18 Carrillo N. Simple two and three—dimensional case in the theory of consolidation of soils, J. Math. and Phys. 1942, 21 (1)
- 19 Barron R A. Consolidation of fine —grained soils by drained wells, Trans. ASCE, 1948, 113: 718~733
- 20 赵维炳. 广义 Voigt 模型模拟的饱和土体轴对称固结理论. 河海大学学报, 1988, 16 (5): 47~56
- 21 谢康和. 砂井地基——固结理论、数值分析与优化设计. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 1987
- 22 [俄] 弗洛林. 土力学原理, 第二卷, 徐志英译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1973
- 23 Biot M A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution, J. Appl. Phys. 1941, 12: 426~430
- 24 Mc Namee J and Gibson R E. Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi—finite clay stratum, J. Mech. Appl. Math. 1960, 1 (2)
- 25 Gibson E E. et al. Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious bas, J. Mech. Appl. Math. 1970, 23 (4)
- 26 Зарезкий Ю. К., Теория консолидации Грунтов, Наука, Москва, 1967
- 27 黄传志, 肖原. 二维固结问题的解析解. 岩土工程学报, 1996, 18 (3): 47~54
- 28 Zienkiewicz. O C & Bettess P. Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions, In: Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loads, 1982: 1~16
- 29 王立忠等. 饱和弹性半空间在低频谱和集中力下的积分形式解. 水利学报, 1996 (2): 84~89
- 30 Verruijt A. Approximation of Cyclic pore pressure caused by sea waves in a pore—elastic half—plane, In: Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loads, 1982: 37~51
- 31 Mei C C and Foda M A. Boundary Layer theory of waves in poro—elastic sea bed, In: Soils under Cyclic and Transient Loading, 1980: 609~618
- 32 Mei C C and Foda M A. Wave—induced stresses around a pipe Laid on a poro—elastic sea bed, Geotechnique, 1981, 31 (4): 509~518
- 33 钱家欢. 粘弹性理论在土力学方面的应用. 高等学校的自然科学学报 (土木建筑水利版), 1966, 2 (1)
- 34 Gibson R E and Lo K Y. A theory of consolidation for soils exhibiting secondary compression, Acta Polytechnica scandinavica, 1961. 296
- 35 陈宗基. 固结及时间效应的单维问题. 土木工程学报, 1958, 5 (1): 1~10
- 36 朱百里, 沈珠江. 计算土力学. 上海科技出版社, 1990
- 37 沈珠江. 土体弹塑性变形分析中的几个基本问题. 见: 江苏力学论文集. 南京: 河海大学出版社, 1994: 1~10
- 38 沈珠江. Development of Structural model for soils, In: 9th Int. Conf. on Computer methods and Advances in Geomechanics, Wuhan, 1, 1997: 235~240
- 39 沈珠江. 鲁布革心墙堆石坝变形的反馈分析. 岩土工程学报, 1994, 16 (3): 1~13
- 40 周正明. 饱和土大变形固结有限元分析. 水利水运科学研究, 1992 (1): 105~110
- 41 谢永利, 潘秋元, 曾国照. 软土地基大变形固结有限元分析, 见: 第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994: 192~195
- 42 谢新宇, 朱向荣, 谢康和, 潘秋元. 饱和土体—维大变形固结理论新进展. 岩土工程学报, 1997, 19 (4): 30~38
- 43 蒋明镜, 沈珠江. 饱和软土的弹塑性大变形有限元平面固结分析. 河海大学学报, 1998, 26 (1): 73

~77

- 44 何开胜, 沈珠江. 两种 Lagrange 大变形比奥固结有限元法及其与小变形法的比较. 岩土工程学报, 2000, 20 (1): 30~34
- 45 Dłuzewski J M. Nonlinear consolidation in finite element modelling, In: 9th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Wuhan, I, 1997: 1089~1094

第五章 极限平衡理论

第一节 概 述

极限平衡理论以刚塑性体模型为基础，刚塑性体的一部分或全部在荷载作用下从静力平衡转向运动的临界状态称为极限平衡状态，相应的荷载称极限荷载。

土体的极限平衡理论是在 50 年代初 Drucker 和 Shield 等人把静力场和运动场结合起来并提出极值原理以后才建立的^[1,2]。但在此以前，极限平衡理论的个别原理和方法已在土力学中广泛应用，例如 Coulomb 土压力理论和土坡圆弧稳定分析法是运动场理论的应用；Rankine 土压力理论和某些地基承载力公式则是静力场理论的应用。40 年代苏联学者 Соколовский 推导了静力场的微分方程式，并应用特征线法求解了许多边值问题，建立了严密的静力分析理论——散粒体静力学^[3]，沈珠江把 Drucker 理论和 Соколовский 理论结合起来，求得土力学中一些常见问题的静力场和运动场相结合的解答^[4,5,6]。

但是，要求得全面满足静力方程、运动方程和相应边界条件的应力场和速度场十分费事，有时甚至不可能，因此，许多人致力于开辟极限分析的另一条途径——利用变分原理建立极值定理，并由此求出极限荷载的近似解。钟万勰推广了极值定理，提出了结构力学中极限分析的一般变分原理^[7]。沈珠江曾试图把这一原理应用于莫尔—库伦材料。但以上变分原理是在正交流动法则基础上得到的，算出的剪胀量太大。后来 Palmer 等人又建立了非正交流动法则的极值原理^[8,9]。潘家铮进一步发展了极值定理，并成功地用于解释古典的土坡滑弧分析方法^[10]。基于极值原理的近似算法方面，也有不少新进展。另外，我国学者对各向异性土的极限平衡问题的研究，也取得一些进展。

西方文献中常把极限分析与极限平衡对立起来，并专指利用变分原理的近似分析方法为极限分析^[11]。许多作者还把事先假定滑动面的方法称为极限平衡法，并与滑移线法对立起来。本文中极限平衡问题专指求解一组微分方程的边值问题，而极限分析则指一切求解这类边值问题的分析方法，包括严密解法（特征线法）和近似解法。

本章的讨论限于强度包线为直线且遵从正交流动法则的所谓标准 Coulomb 材料，关于非标准材料的极限分析理论的研究参看文献 [12]。

第二节 基本方程式

在平面应变条件下，极限平衡问题的基本方程式由以下几部分组成

1. 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

式中 X 和 Z 为体积力分量

2. 屈服条件

$$f = \tau_m - \sigma_s \sin \varphi = 0 \quad (5-2)$$

3. 几何方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{xz} &= -\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

4. 流动法则

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \dot{\gamma}_m \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \dot{\gamma}_m \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \dot{\gamma}_m \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

由式 (5-2) 和式 (5-4) 可得下列极限平衡时的能量耗散条件

$$\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_z \dot{\epsilon}_z + \tau_{xz} \dot{\gamma}_{xz} = c \cos \varphi \dot{\gamma}_m \quad (5-5)$$

上述各式中 $\sigma_s = c \operatorname{ctg} \varphi$ (图 5-1)

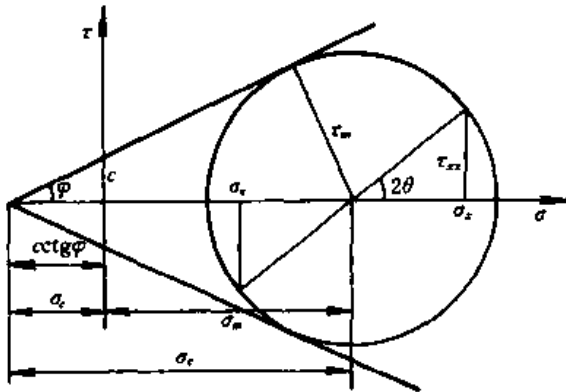


图 5-1 极限 Mohr 圆

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_c \\ \tau_m &= \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2} \\ \dot{\gamma}_m &= \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_z)^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

式 (5-1) 和式 (5-2) 中包括三个方程式和三个未知数, 故在给定的边界条件下可以独立求解。采用新的变量 σ_s 和 θ 代替 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$, 后者为大主应力方向角。这时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} \sigma_s (1 \pm \sin \varphi \cos 2\theta) - \sigma_c \\ \sigma_s \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

式 (5-2) 即自动满足。把式 (5-7) 代入式 (5-1), 简化后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial z} &= a \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial z} &= b \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma_s}{c} + \theta \\ \eta &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma_s}{c} - \theta \\ \mu &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \\ a \\ b \end{aligned} \right\} = \mp \frac{X \sin(\theta \mp \mu) - Z \cos(\theta \mp \mu)}{2 \sigma_s \sin \varphi \cos(\theta \pm \mu)} \quad (5-9)$$

式 (5-8) 为双曲线型偏微分方程组, 具有两组相交的特征线, 可用特征线法求数值解, 两组特征线的斜率为 $\frac{dz}{dx} = \text{tg}(\theta \pm \mu)$, 因此, 式 (5-8) 可改为

$$\left. \begin{array}{l} S_1: \quad \frac{dz}{dx} = \text{tg}(\theta + \mu) \quad \frac{d\xi}{dx} = a \\ S_2: \quad \frac{dz}{dx} = \text{tg}(\theta - \mu) \quad \frac{d\eta}{dx} = b \end{array} \right\} \quad (5-10)$$

特征线方向与大主应力的交角为 $\pm \mu$, 即与滑动面方向重合, 故物理意义上特征线就是滑动线 (图 5-2)。

上述平面问题的静力平衡方程系由 Соколовский 导出^[3]。Березанцев 在环向中主应力 $\sigma_\theta = \sigma_1$ 或 $\sigma_\theta = \sigma_3$ 的假设下把上述理论推广到轴对称问题, 推导了相应的极限平衡方程^[13]。其形式与式 (5-8) 完全一致, 只是式 (5-9) 中 a 和 b 应改为

$$\left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} = \mp \frac{\sin(\theta \pm \mu) - \sin(\theta \mp \mu)}{2\cos(\theta \pm \mu)} \\ \pm Z \frac{\cos(\theta \mp \mu)}{2\sigma_s \sin\varphi \cos(\theta \mp \mu)} \quad (5-11)$$

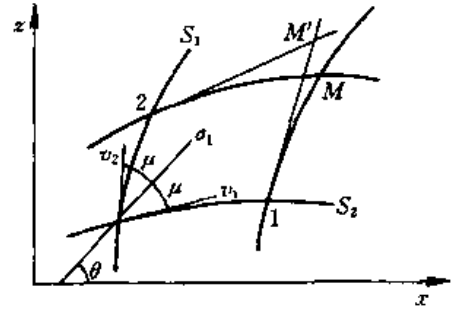


图 5-2 特征线

此时水平向体积力 $X=0$ 。相应的特征线方程也与式 (5-10) 完全一致。

现在推导运动方程式。由式 (5-2) 求出 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}$ 后代入式 (5-4) 和式 (5-3), 可得

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\dot{\gamma}_m}{2\sigma_s \sin\varphi} \left(-\sigma_s \sin^2\varphi + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\dot{\gamma}_m}{2\sigma_s \sin\varphi} \left(-\sigma_s \sin^2\varphi + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\dot{\gamma}_m}{2\sigma_s \sin\varphi} 2\tau_{xz} \end{array} \right\} \quad (5-12)$$

式 (5-12) 中消去 $\dot{\gamma}_m$, 并以沿滑动线方向的分速度 v_1 和 v_2 作为新的变量代替 v_x 和 v_z

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v_x \cos(\theta - \mu) + v_z \sin(\theta - \mu) \\ v_2 = v_x \cos(\theta + \mu) + v_z \sin(\theta + \mu) \end{array} \right\} \quad (5-13)$$

式 (5-12) 可以简化为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \text{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial v_2}{\partial z} - v_2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \text{tg}\varphi \\ + v_1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec\varphi = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \text{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial v_1}{\partial z} + v_1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \text{tg}\varphi \\ + v_2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec\varphi = 0 \end{array} \right\} \quad (5-14)$$

方程式 (5-14) 也属于双曲线型, 且其特征线与静力平衡方程式 (5-18) 的特征线重合, 特

征线方程式为

$$\left. \begin{aligned} S_1: & \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \quad \frac{dv_2}{d\theta} = v_2 \operatorname{tg}\varphi - v_1 \operatorname{sec}\varphi \\ S_2: & \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \quad \frac{dv_1}{d\theta} = -v_1 \operatorname{tg}\varphi + v_2 \operatorname{sec}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

当采用非正交流动法则时,例如用剪胀角 ψ 代替 φ ,则式(5-13)和式(5-14)中 $\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}$,此时速度场的特征线将不与应力场的特征线重合。

第三节 极限平衡问题的特征线解法

方程组(5-8)和式(5-14)构成了极限平衡问题的基本方程式,其中静力方程组(5-8)是可以独立求解的,但运动方程组(5-14)则需由静力方程组中解出大主应力方向角 θ 后才能求解。但是,只满足静力方程的解答并不就是极限平衡问题的真正解答,因为它不一定能满足土体发生滑动时的特定的边界条件。极限平衡问题的完整解答必须同时满足给定的静力边界条件和运动边界条件。

根据给定的边界条件的不同,极限平衡问题可以分为三类^[4]:

第一类问题:土体的部分表面给定荷载分布,另一部分表面给定速度分布或部分为荷载分布而部分是速度分布,求迫使后面这部分表面以预定速度移动所必须的极限荷载。属于这一类问题的有地基承载力和挡土墙土压力等问题。

第二类问题:整个土体表面只给定荷载分布,要求确定土体中一部分发生滑动时所必须的极限体积力。属于这一类问题的是土坡稳定问题。

第三类问题:整个土面只给定位移速度,要求确定引起表面发生这种位移所需要的极限荷载。属于这类问题的有隧道土压力和贯入试验等。

求解第一类极限平衡问题的一般顺序是:先根据荷载边界条件,把可能滑动的土体分成几个塑性应力区,用特征线法求出其应力场,然后考查是否存在与这一应力场相适应的、符合速度边界条件的速度场。如果存在这样的速度场,则求得的解便是正确的,否则就必须重新划分塑性应力区,再次求解。

图 5-3 举最简单的纯凝聚性材料的极限承载力为例,说明解题过程。从静力学角度出发。 a 和 b 都是满足边界条件的解答,但两者的塑性区范围不同。究竟哪一个是正确的,只有根据运动边界条件才能判别。如果压板是刚性的,则解答 a 是正确的,如果压板由两个半块拼成,中间断开或有铰相连,则解答 b 是正确的。由此可见,极限平衡问题并不是静定

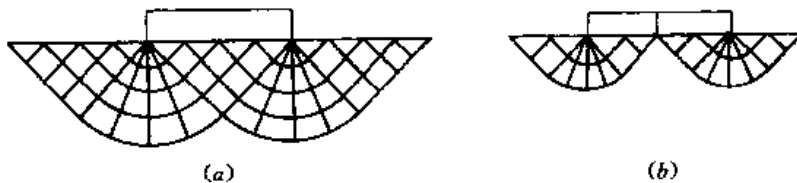


图 5-3 两种边界运动条件
(a) 整体压板; (b) 分离压板

的，而是可能存在许多静力场，何者正确，必须通过运动分析决定。至于第二类和第三类极限平衡问题，还没有研究出有效的解法。

下面介绍应用特征线法求解双曲线方程(5-8)的步骤，式(5-14)的解法完全相同。设点①和②为塑性区内不在同一特征线上的两点(图 5-2)，其坐标 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 及变量 (ξ_1, η_1) 和 (ξ_2, η_2) 已知，试求未知点 M 的 (x_m, y_m) 和 (ξ_m, η_m) 。先将式(5-9)写成差分形式。

$$z_m = z_1 + \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu)(x_m - x_1), \quad \xi_m = \xi_1 + a_1(x_m - x_1)$$

$$z_m = z_2 + \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)(x_m - x_2), \quad \eta_m = \eta_2 + b_2(x_m - x_2)$$

因 (ξ_1, η_1) 和 (ξ_2, η_2) 已知，故上式中 θ_1, θ_2 和 a_1, b_2 也是已知的。解此四方程式，即可得出未知量的第一次近似值 $x'_m, z'_m, \xi'_m, \eta'_m$ 。但是用这种差分法计算时，误差是积累的，因此，除非滑动线网格间距很小，否则计算只限于第一近似值是不够的。根据第一次近似值 ξ'_m, η'_m 求出 θ'_m, a'_m 和 b'_m ，并分别用 $(\theta_1 + \theta'_m)/2, (\theta_2 + \theta'_m)/2, (a_1 + a'_m)/2$ 和 $(b_2 + b'_m)/2$ 代替上式中的 $\theta_1, \theta_2, a_1, b_2$ ，再进行一次计算，就可以求得第二次近似值 x''_m, z''_m 和 ξ''_m, η''_m 。一般计算限于第二次近似就可以了。

解题从边界开始，根据边界条件的不同，双曲型微分方程的边界值问题可分三类(图 5-4)：

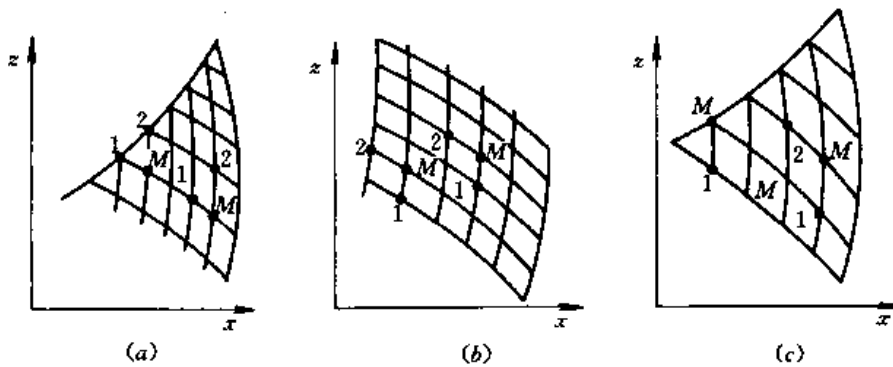


图 5-4 三种边值问题

(a) Cauchy 问题；(b) Goursat 问题；(c) 混合问题

- 1) Cauchy 问题，边界线不是特征线，边界上函数 ξ, η 已知；
- 2) Goursat 问题，边界为两条相交的特征线，每一条线上函数 ξ, η 已知；
- 3) 混合问题，边界由一条特征线和另一条曲线组成，特征线上 ξ, η 已知，另一条线上只知道 ξ 和 η 之一，或只知道两者之间的关系。滑动体中可以分成几个塑性应力区，每一区相当于上述的一个边值问题。

在划分塑性区时，经常遇到下列三种分界线：

(1) 应力不连续线。在莫尔应力图上通过任一点可以画两个与强度包线相切的应力圆——大极限应力圆和小极限应力圆(图 5-5)。如果线的一侧属大圆状态，另一侧属于小圆状态，则此线上的切向应力将有突

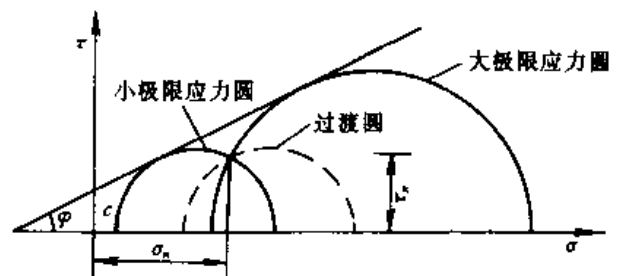
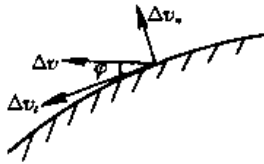


图 5-5 应力不连续线

变, 故称为应力不连续线, 它是刚性区 (图中过渡圆) 缩减到极限的结果。

(2) 界限线, 即一族滑动线的包线, 一般是强度较低的材料沿强度较高的材料滑动时的边界。



(3) 速度不连续线, 一般是刚性区与滑动区的边界, 可以是滑动线或界限线。在速度不连续线上, 法向速度的间断与切向速度的间断之间有下列关系 (图 5-6)

$$\Delta v_n = -\Delta v_t \operatorname{tg} \psi \quad (5-16)$$

图 5-6 速度不连续线 采用正交流动法则时 $\psi = \varphi$ 。

第四节 变分原理及近似解法

本节介绍利用变分原理和极值原理求极限平衡问题近似解的方法^[6]。

一、可静解和可动解

满足平衡方程式 (5-1), 刚塑性应力条件 $\tau_m \leq \sigma_c \cdot \sin \varphi$ 和一部分边界上的荷载边界条件的应力场称可静应力场, 与此应力场相应的另一部分边界上的荷载称可静荷载或可静解。

满足方程式 (5-14) 和速度边界条件的速度场称可动速度场, 与此速度场相适应而满足能量耗散率式 (5-6) 和应力边界条件及滑动面上应力等于抗剪强度条件的应力场称可动应力场, 与此应力场相应的另一部分边界上的荷载称可动荷载或可动解。

极限平衡状态是土体由静力平衡转向运动的临界状态, 因此极限平衡状态下的应力场必须是可静应力场, 其速度场必须是可动速度场。

在可静荷载作用下, 土体一定处于平衡状态; 在可动荷载作用下, 土体一定处于变形流动状态。由此可以得出结论, 可静荷载不会大于真正的极限荷载, 可动荷载不会小于真正的极限荷载, 或者说真正的极限荷载是可静荷载中的最大者和可动荷载中的最小者, 这就是下面介绍的极大极小原理的物理意义。

二、极大极小原理

设 p_i 和 F_i 为给定的表面荷载和体积力, $\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, v_i$ 为真正的应力场、应变速率场和速度场, 在速度不连续线上的切向和法向速度间断值分别为 Δv_t 和 $\Delta v_n = -\Delta v_t \cdot \operatorname{tg} \varphi$, q_i 为待求的极限荷载。可静应力场用 σ'_{ij} 表示, q'_i 为可静荷载, 可动速度场, 应变速率场及相应的应力场分别用 $v_i^*, \dot{\epsilon}_{ij}^*, \sigma_{ij}^*$ 表示, q_i^* 为可动荷载, 则根据虚功原理可以得出

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_3} (\tau_i \Delta v_t + \sigma_n \Delta v_n) d\Gamma \quad (5-17)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q'_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_3} (\tau'_i \Delta v_t + \sigma'_n \Delta v_n) d\Gamma \quad (5-18)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q_i^* v_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_3} (\tau_i^* \Delta v_t^* + \sigma_n^* \Delta v_n^*) d\Gamma \quad (5-19)$$

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_3} (\tau_i \Delta v_i^* + \sigma_n \Delta v_n^*) d\Gamma \quad (5-20)$$

Γ_1 和 Γ_2 分别为第一及第二类边界, 即荷载和速度边界, Γ_3 代表速度不连续线(滑动线), (σ_n, τ) 为线上法向及切向应力, (σ'_n, τ') 和 (σ_n^*, τ_n^*) 分别为与可静解和可动解相应的应力。式(5-17)减去式(5-18)和式(5-19)减去式(5-20), 考虑到式(5-16)和滑动线上 (τ, σ_n) 与 (τ_n^*, σ_n^*) 满足 Mohr-Coulomb 条件, 可得

$$\int_{\Gamma_2} (q_i - q'_i) v_i d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_3} (\tau' - \sigma'_n \operatorname{tg}\varphi) \Delta v_i d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_2} (q_i^* - q_i) v_i d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega - \int_{\Gamma_3} (\tau - \sigma_n \operatorname{tg}\varphi) \Delta v_i^* d\Gamma$$

由于 σ_{ij} 与 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 相适应, σ_{ij}^* 与 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 相适应, 根据正交法则 $(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$ 和 $(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq 0$ (图 5-7) 且考虑到 $\tau' - \sigma'_n \operatorname{tg}\varphi \leq 0$ 和 $\tau - \sigma_n \operatorname{tg}\varphi \leq 0$, 可得

$$\int_{\Gamma_2} (q_i - q'_i) v_i d\Gamma \geq 0 \quad (5-21)$$

$$\int_{\Gamma_2} (q_i^* - q_i) v_i d\Gamma \geq 0 \quad (5-22)$$

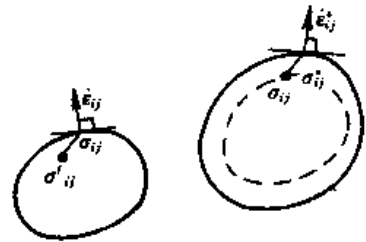


图 5-7 正交法则

如果第二类边界为刚性边界, Q, Q' 和 Q^* 为与 q_i, q'_i 和 q_i^* 相应的合力, 其作用点重合, 则由上式可得

$$Q' \leq Q \quad (5-23)$$

$$Q^* \geq Q \quad (5-24)$$

即真正的极限荷载 Q 是可静荷载 Q' 中的极大者, 可动荷载 Q^* 中的极小者。许多文献中把式(5-23)称为下限定理, 式(5-24)为上限定理, 即如果找到一个可静解和一个可动解, 则前者是极限荷载的可能的下限, 后者是它的上限。但是这一提法容易造成误解, 似乎极限荷载的真解不是唯一的, 可以在上、下限之间变动。

以上推导是建立在正交流动法则的基础上的, 但是实际土体破坏时的剪胀角 ψ 明显小于内摩擦角 φ , 对于符合非正交流动法则的材料, Palmer 推导了下列关系式^[8]

$$Q^*(\varphi, \varphi) \geq Q^*(\varphi, \psi) \geq Q(\varphi, \psi) \geq Q'(\varphi, \psi) \geq Q'(\psi, \psi) \quad (5-25)$$

因此, 如果我们能根据剪胀角 ψ 增大到 $\psi = \varphi$ 的假想材料找出一个可动解 $Q^*(\varphi, \varphi)$, 并根据另一个内摩擦角 φ 降低到 $\varphi = \psi$ 的假想材料找出一个可静解 $Q'(\psi, \psi)$, 则真实的极限荷载 $Q(\varphi, \psi)$ 将介于两者之间。

三、土坡稳定问题的极大极小原理

前面的讨论针对第一类极限平衡问题, 对于第二类极限平衡问题, 边界 Γ_2 不存在。式(5-17)~式(5-20)中去掉右边第二项, 并把式(5-18)和式(5-20)中的 F_i 相应地改为 F'_i 和 F_i^* , 由此可得与式(5-21)和式(5-22)类似的公式如下:

$$\int_{\Omega} (F_i - F'_i) v_i d\Omega \geq 0 \quad (5-26)$$

$$\int_{\Omega} (F_i^* - F_i) v_i^* d\Omega \geq 0 \quad (5-27)$$

如果 F_i^0 为实际体积力, 定义 $F_i = \frac{F_i}{F_i^0}$ 为安全系数, $F_i^* = \frac{F_i^*}{F_i^0}$ 和 $F_i' = \frac{F_i'}{F_i^0}$ 分别为可静和可动解的安全系数, 由上式可得

$$F_i^* \geq F_i \geq F_i' \quad (5-28)$$

实际分析中往往以抗剪强度之比定义安全系数。设 c 和 φ 为实际的抗剪强度指标, 当它们降低到 \bar{c} 和 $\bar{\varphi}$ 时土体处于极限平衡状态, 并设选用的可静应力场和可动应力场在滑动面上满足

$$\tau_i' = c + \sigma_i' \operatorname{tg} \varphi$$

$$\tau_i^* = c + \sigma_i^* \operatorname{tg} \varphi$$

这时, 当式 (5-17) 和式 (5-18) 以及式 (5-19) 和式 (5-20) 相减时, 左边为 0, 考虑到 $(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \epsilon_{ij} \geq 0$, $(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \epsilon_{ij} \geq 0$ 和刚性滑动时 $\Delta v_i = \text{const}$, 可得

$$\int_{\Gamma_3} [(\tau_i - \sigma_i \operatorname{tg} \varphi) - (\tau_i' - \sigma_i' \operatorname{tg} \varphi)] d\Gamma \leq 0$$

$$\int_{\Gamma_3} [(\tau_i^* - \sigma_i^* \operatorname{tg} \varphi) - (\tau_i - \sigma_i \operatorname{tg} \varphi)] d\Gamma \leq 0$$

考虑到 $\tau_i = c + \sigma_i \operatorname{tg} \varphi$, 并定义

$$F_i = \frac{c}{c} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (5-29)$$

$$F_i' = \int_{\Gamma_3} (c + \sigma_i' \operatorname{tg} \varphi) d\Gamma / \int_{\Gamma_3} \tau_i' d\Gamma \quad (5-30)$$

$$F_i^* = \int_{\Gamma_3} (c + \sigma_i^* \operatorname{tg} \varphi) d\Gamma / \int_{\Gamma_3} \tau_i^* d\Gamma \quad (5-31)$$

由上式可得

$$\int_{\Gamma_3} (c + \sigma_i' \operatorname{tg} \varphi) \left(\frac{1}{F_i} - \frac{1}{F_i'} \right) d\Gamma \leq 0$$

$$\int_{\Gamma_3} (c + \sigma_i^* \operatorname{tg} \varphi) \left(\frac{1}{F_i^*} - \frac{1}{F_i} \right) d\Gamma \leq 0$$

从而得到与式 (5-28) 同样的结果, 即

$$F_i^* \geq F_i \geq F_i' \quad (5-28a)$$

潘家铮根据以上思路推论, 对于给定的滑动面, 必须寻找能得出最大安全系数的可静应力场; 而在各种不同的滑动面中, 必须寻找安全系数最小的一个^[10]。

四、一般变分原理

当假定的可静应力场和可动速度场与实际相差较远时, 则可静解与可动解之间相差也较大, 虽然知道极限荷载介于两者之间, 但究竟多大就难以确定。如果在求极限荷载的近似值时能同时考虑可静场和可动场的贡献, 求得的极限荷载将大于可静荷载而小于可动荷

载。一般变分原理就是根据这一思想而发展的^①。为了不使篇幅过大，下面的介绍仅针对第一类极限平衡问题。

基本定理 设 σ_{ij} 和 v_i 为任意可变的应力场和速度场， p_i 和 v_i^0 为给定的边界荷载和边界速度，并令^②

$$I = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - F_i v_i - f \dot{\gamma}_m) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q_i (v_i - v_i^0) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} c \Delta v_i d\Gamma \quad (5-32)$$

则当 σ_{ij} 和 v_i 变为真正应力场和速度场时，泛函

$$I = \int_{\Gamma_2} q_i v_i d\Gamma \quad (5-33)$$

且其一次变分

$$\delta I = 0$$

以上定理可以利用下列 Gauss 定理证明

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_i d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma \quad (5-34)$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ 。把此式代入式 (5-32) 并考虑沿 Γ_3 $\sigma_{ij} n_j$ 由 (τ_i, σ_n) 组成， v_i 由 $(\Delta v_i, -\Delta v_i \operatorname{tg} \varphi)$ 组成，可得

$$I = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - F_i \right) v_i - f \dot{\gamma}_m \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} n_j - p_i) v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q_i (v_i - v_i^0) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} (\tau_i - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi - c) \Delta v_i d\Gamma \quad (5-35)$$

当 σ_{ij} 和 v_i 变为真正应力场和速度场时，上式中右边除第三个积分外都为 0，考虑到沿 Γ_2 面 $\sigma_{ij} n_j = q_i$ ，即得式 (5-33)，同理对式 (5-32) 变分得

$$\delta I = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma_{ij} - F_i \delta v_i - \dot{\gamma}_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} - f \delta \dot{\gamma}_m \right) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i \delta v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [q_i \delta v_i + \delta q_i (v_i - v_i^0)] d\Gamma + \int_{\Gamma_3} c \delta \Delta v_i d\Gamma \quad (5-36)$$

把前面 Gauss 定理中 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 换成 $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$ 代入后可得

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - F_i \right) \delta v_i - \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\gamma}_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} - f \delta \dot{\gamma}_m \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} n_j - p_i) \delta v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [(\sigma_{ij} n_j - q_i) \delta v_i - \delta q_i (v_i - v_i^0)] d\Gamma - \int_{\Gamma_3} (\tau_i - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi - c) \delta \Delta v_i d\Gamma \quad (5-37)$$

当 σ_{ij} 和 v_i 变为真正应力场和速度场时，上式中的每一项都为 0，故 $\delta I = 0$ 。

折中定理 当 σ_{ij} 选用可静应力场 σ'_{ij} ， v_i 选用可动速度场 v_i^0 时，代入式 (5-32) 所得的泛函以 \bar{I} 表示，则由下式求出的极限荷载值 \bar{Q} 将取介于可静荷载 Q' 和可动荷载 Q^0 之间的中间值

① 沈珠江，土体极限分析中的一般变分原理，手稿，1962。
② 这样的泛函不止一个。

$$\tilde{Q} = \frac{I}{\vec{v}} \quad (5-38)$$

即

$$Q' \leq \tilde{Q} \leq Q^* \quad (5-39)$$

\vec{v} 为合力作用点的给定位移。

证明如下：考虑到 σ_{ij} 满足平衡方程和 Γ_1 上荷载边界条件， v_i^* 满足 Γ_2 上速度边界条件，且 $f' \leq 0, \tau'_t \leq c + \sigma'_n \operatorname{tg} \varphi$ ，由式 (5-35) 可得

$$I = \int_{\Omega} -f \dot{\gamma}_m^* d\Omega + \int_{\Gamma_2} q'_i v_i^0 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\tau'_t - \sigma'_n \operatorname{tg} \varphi) \Delta v_i^* d\Gamma \geq \int_{\Gamma_2} q'_i v_i^0 d\Gamma$$

而 $\int_{\Gamma_2} q'_i v_i^0 d\Gamma = Q' \vec{v}$ ，上式两边除以 \vec{v} 后得

$$\tilde{Q} \geq Q'$$

其次，考虑到 $\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \leq \sigma'_m \dot{\epsilon}^* + \tau'_m \dot{\gamma}_m^*$ ， $\sigma'_m = (\sigma'_x + \sigma'_y)/2$ 和 $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}_x^* + \dot{\epsilon}_y^*$ 分别为平均应力和体应变，因为只有当 σ'_{ij} 与 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 的主轴重合时两边才相等，则两边减去 $f' \dot{\gamma}_m^*$ 并注意到 $\epsilon'_x = -\dot{\gamma}_m^* \sin \varphi$ 和 $f' = \tau'_m - (\sigma'_m + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi$ 后可得

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* - f' \dot{\gamma}_m^* \leq c \cos \varphi \dot{\gamma}_m^*$$

而右边则根据可动应力场的定义等于 $\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^*$ ，见式 (5-5)。上式代入式 (5-32)，考虑到 Γ_2 面上 $v_i^* = v_i^0$ 得

$$I \leq \int_{\Omega} (\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* - F_i v_i^*) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_3} c \Delta v_i^* d\Gamma$$

利用 Gauss 定理

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} - F_i \right) v_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\sigma'_{ij} n_j - p_i) v_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sigma'_{ij} n_j v_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_3} (\tau'_t - \sigma'_n \operatorname{tg} \varphi - c) \Delta v_i^* d\Gamma$$

根据可动应力场的定义 $Q^* \vec{v} = \int_{\Gamma_2} \sigma'_{ij} n_j v_i^* d\Gamma$ ，其它三项积分为 0，两边除以 \vec{v} 后可得 $\tilde{Q} \leq Q^*$ ，从而证明了式 (5-39)。

为了进一步提高计算精度，可以选取下列形式的可变的可静静应力场

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \beta \Delta \sigma_{ij} \quad (5-40)$$

β 是一个可变的待定系数，把它代入式 (5-32) 后， I 将是 β 的泛函，根据变分原理 $\delta I = 0$ ，可利用下列关系

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0 \quad (5-41)$$

求取 β ，再代回到式 (5-32) 中求 I ，则所得的 $\tilde{Q} = I/\vec{v}$ 将是式 (5-40) 所代表的一系列静力场中可能得到的最佳结果。

第五节 可 静 解 法

一、不连续解法

利用应力不连续线构成可静解是一种常用的方法。设 ω 为应力不连续线的方向角， (σ^-) ，

θ^-) 和 (σ_c^+, θ^+) 分别为该线两边低应力区和高应力区内包括凝聚压力在内的平均应力和大主应力方向角, 则它们之间存在下列关系^①

$$\omega = \theta^- + \delta^- = \theta^+ + \delta^+ \quad (5-42)$$

$$\sigma_c^+ = \eta \sigma_c^- \quad (5-43)$$

其中

$$\left. \begin{matrix} \delta^- \\ \delta^+ \end{matrix} \right\} = \arctg \left[\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2(\theta^+ - \theta^-)}} \right] \frac{\operatorname{tg}(\theta^+ - \theta^-)}{1 + \sin \varphi} \right]$$

$$\eta = \left[\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2(\theta^+ - \theta^-)}} + \sin \varphi \right]^2 \frac{\sin^2(\theta^+ - \theta^-)}{\cos^2 \varphi}$$

对凝聚性土, $\varphi = 0$, 上式可简化为

$$\omega = \frac{1}{2}(\theta^- + \delta^-) \pm \frac{\pi}{4} \quad (5-44)$$

$$\sigma_c^+ = \sigma_c^- \pm 2c \sin(\theta^+ - \theta^-) \quad (5-45)$$

以地基极限平衡为例, 如果不考虑自重, 则图 5-8 之 *a* 和 *b* 就是两个可能的解答。设 $\varphi = 30^\circ$, 则根据上述公式及 Mohr 应力圆可以推得

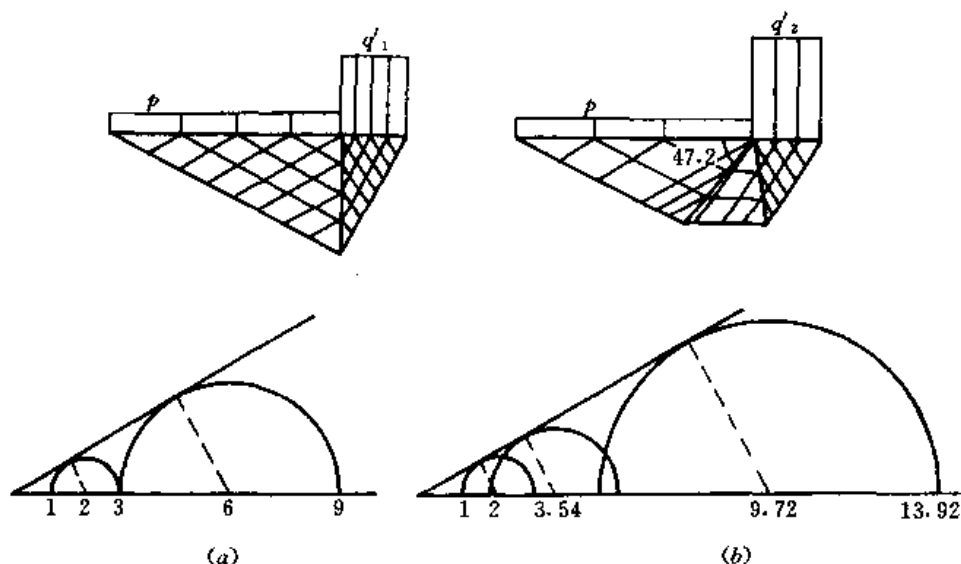


图 5-8 可静应力场的不连续解法

(a) 一条不连续线; (b) 二条不连续线

$$q'_1 = 9.0(p + \sigma_c) - \sigma_c;$$

$$q'_2 = 13.92(p + \sigma_c) - \sigma_c$$

当采用的不连续线数量增加时, 所得的可静荷载逐步趋近于下列 Prandtl 理论解

$$q = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) (p + \sigma_c) - \sigma_c \quad (5-46a)$$

或按土力学中的习惯写成

$$q = N_q (p + \sigma_c) - \sigma_c \quad (5-46b)$$

① 沈珠江, 不连续解在极限土压力计算中的应用, 南京水利科学研究所报告, 1962。

而当 $\varphi = 30^\circ$ 时, 为 $N_q = 18.40$ 。

二、静力场叠加法

设 $(\sigma'_x, \sigma'_z, \tau'_{xz})$ 和 $(\sigma''_x, \sigma''_z, \tau''_{xz})$ 是两个可静应力场, 并令 $\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x, \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z, \tau_{xz} = \tau'_{xz} + \tau''_{xz}$, 则很容易证明

$$\sigma_m = \sigma'_m + \sigma''_m; \quad \tau_m \leq \tau'_{mz} + \tau''_{mz} \quad (5-47)$$

且等号只有当两者的主应力方向角相同时才成立(图 5-9)。其次, 如果把 σ_c 当作虚拟的边界荷载, 则由式(5-2) $\tau'_m \leq \sigma'_m \sin\varphi, \tau''_m \leq \sigma''_m \sin\varphi$, 从而

$$\tau_m \leq \sigma_m \sin\varphi \quad (5-48)$$

故合成的应力场也为可静应力场。

应用叠加原理的一个例子是应力柱法^[11]。下面以图 5-10 的无重土体为例说明此法的基本思想。设边界上无荷载, $\sigma'_z = 0, \sigma''_z = 2c \cos\varphi / (1 - \sin\varphi)$ 为满足边界条件的基本解, 在其上叠加三个应力柱, 柱内应力分别为 $\sigma'_1 = 2c \cos\varphi / (1 - \sin\varphi), \sigma'_3 = 0, \theta' = 90^\circ$ 和 $\sigma''_3 = 0, \sigma''_1$ 和 θ'' 待定, 而柱外的应力均为 0, 根据图中(2)区及(3)区的叠加应力满足 Coulomb 屈服条件, 可以求得 σ''_1 和 θ'' 如下

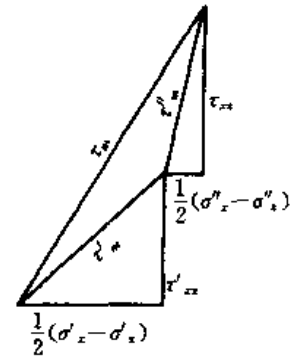


图 5-9 静力场的叠加

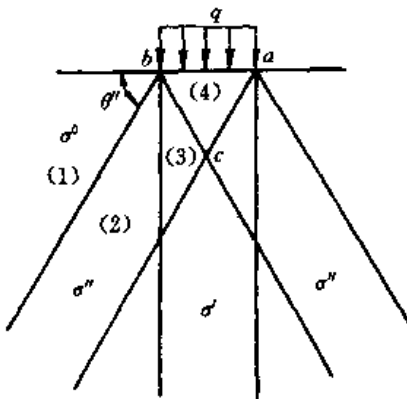


图 5-10 应力柱法

$$\sigma''_1 = \frac{2c \cos\varphi (1 + \sin\varphi)}{(1 - \sin\varphi)^2}$$

$$\cos\theta'' = \frac{1}{2} (1 + \sin^2\varphi)$$

由此可得 (4) 区内的叠加应力场为

$$\sigma_x = \frac{2c \cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \cos^2\varphi \right)$$

$$q = \sigma_z = \frac{2c \cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right.$$

$$\left. \times (3 + \sin^2\varphi) \right] \quad (5-49)$$

后者即为极限荷载的近似解。当 $\varphi = 30^\circ$ 时, $q = 11.75c \operatorname{ctg}\varphi$, 而精确解式(5-44)为 $q = 17.40c \operatorname{ctg}\varphi$ 。当应力柱的数量不断增加时, 所得的解将逐渐接近精确解。

三、有限单元法

可静解法的核心问题是构造一个好的可静应力场。前面两种方法缺乏普遍的适用性。有限单元法求可静解的基本思路是用结点变量代替单元内部变量, 从而把无限个自由度问题转化为有限个自由度问题。当采用的内插函数为线性时, 则容易证明, 如果结点应力满足可静应力条件, 则单元内部也满足可静应力条件。因此, 构造一个可静应力场的问题就相当于构造一组可静结点应力。进一步, 如果令边界上的荷载为 $\lambda q, \lambda$ 为超载系数, q 为固定的荷载分布, 则根据极值原理, 问题便转化为寻找一组最佳的结点应力组, 使 λ 达到极大值, 或用数学语言表示

$$\max : \lambda \{ \sigma \} \quad (5-50)$$

s.t. : f_1, f_2, f_3, f_4

其中 f_1, f_2, f_3, f_4 为可静应力场必须满足的 4 个约束条件, 即静力平衡条件、屈服条件、静力边界条件和单元间应力连续条件。这样, 应用有限单元法求可静解的问题最终归结为数学上线性规划问题。

Lysmer 最先把此法用于地基承载力和土压力问题^[14], 其具体步骤如下。

(1) 先用三角形单元离散计算域, 并应用下列线性内插公式

$$\{ \sigma \} = [N] \{ \sigma \}^e \quad (5-51)$$

$\{ \sigma \} = \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \}^T$ 为单元内应力, $\{ \sigma \}^e = \{ \sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xz}^1, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \tau_{xz}^2, \sigma_x^3, \sigma_y^3, \tau_{xz}^3 \}^T$ 为 3 个结点的应力, 形函数

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_1 & N_1 & N_2 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 & N_3 \\ N_1 & N_1 & N_1 & N_2 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 & N_3 \\ N_1 & N_1 & N_1 & N_2 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中} \quad \left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i z) \\ a_i &= x_j z_k - z_j x_k \\ b_i &= z_i - z_k \\ c_i &= -x_j + x_k \end{aligned} \right\} \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \\ k = 3, 1, 2 \end{cases} \quad (5-52)$$

每个单元 3 结点应力均独立赋值, 如 n 为单元数, 总自由度个数为 $9n$ 。

(2) 把上式代入平衡方程, 可得离散后的静力平衡约束条件

$$\sum_{e=1}^n [h] \{ \sigma \}^e = \{ R \}^e \quad (5-53)$$

$$\text{其中} \quad [h] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i & b_j & 0 & c_j & b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

$$\text{或} \quad [A_1] \{ \sigma \} = \{ R_b \} + \{ R_p \} + \lambda \{ R_q \} \quad (5-54)$$

式中: R_b, R_p 和 R_q 分别为体积力、 Γ_1 上的表面力 p 和 Γ_2 上的表面力 q 相应的荷载列阵; λ 为超载系数。

(3) 式 (5-2) 的屈服条件是非线性的, 而线性规划求解的方程必须是线性的, 因此此式必须先加以线性化。以 $\sigma_x - \sigma_z$ 为横轴, $2\tau_{xz}$ 为纵轴, 则屈服条件正好是以原点为圆心, 以 τ_m 为半径的圆。用内接正 m 边形来接近此圆, 可得下列线性化的屈服条件(图 5-11)

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & y_{m3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \end{Bmatrix} \quad (5-55)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad y_{k1} &= \cos(2\pi k/m) + \sin\varphi \cos(\pi/m) \\ y_{k2} &= \sin\varphi \cos(\pi/m) - \cos(2\pi k/m) \\ y_{k3} &= 2\sin(2\pi k/m) \\ d &= 2c \cos\varphi \cos(\pi/m) \end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

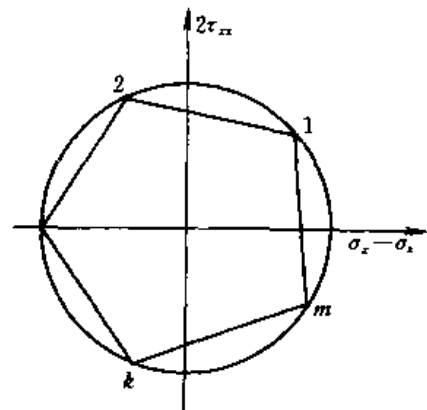


图 5-11 屈服条件的线性化

装配成整体形式后得

$$[A_2]\{\sigma\} \leq \{R_2\} \quad (5-56)$$

(4) 应力边界条件。\$\Gamma_1\$ 和 \$\Gamma_2\$ 边界上的法向和切向作用力统一写成 \$\sigma_n\$ 和 \$\sigma_s\$，则当 \$\theta\$ 为界面法向倾角时，应力边界条件可以写为

$$[T]\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_s \end{Bmatrix} \quad (5-57)$$

其中

$$[T] = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

装配成整体形式后得

$$[A_3]\{\sigma\} = \{R_3\} \quad (5-58)$$

(5) 应力连续条件。由于单元内部应力线性变化，两相邻单元的公共边界上法向和切向应力连续条件可以归结为两端点的应力连续条件，即单元 \$e_1\$ 和 \$e_2\$ 两端点 \$i_1, j_1\$ 和 \$i_2, j_2\$ 的法向和切向应力相等

$$\sigma_n^i = \sigma_n^j, \quad \tau_s^i = \tau_s^j; \quad \sigma_n^{i_1} = \sigma_n^{i_2}, \quad \tau_s^{i_1} = \tau_s^{i_2}$$

或简写为

$$\begin{bmatrix} T & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & -T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \tau^1 \\ \tau^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-59)$$

其中

$$\sigma^i = \{\sigma_n^i \quad \sigma_s^i \quad \tau_s^i\}, \dots$$

装配成整体形式后得

$$[A_4]\{\sigma\} = \{R_4\} \quad (5-60)$$

图 5-12 是应用上述方法求解 Prandtl 问题一个算例，采用了 6 个单元，且式 (5-55) 中 \$m = 5\$。求得的 \$N_s = 16.0\$，小于前面的精确解 18.4。

以上方法用于第一类极限平衡问题时，超载系数 \$\lambda\$ 即相当于安全系数。在土坡极限分析中，边界上应力已知，待定的是土的容重，相应的超载系数可以定义为

$$\lambda = \bar{\gamma} / \gamma \quad (5-61)$$

\$\bar{\gamma}\$ 为极限状态下的容重，\$\gamma\$ 为设计容重。但是，这样得出的超载系数可能不同于传统的以强度降低定义的安全系数。为此，李国英建议了以下的迭代方法^[15]。先假定一个安全系数的近似值 \$F_s^i\$，然后用降低以后的强度指标 \$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{tg}\varphi}{F_s^i}\right)\$ 和 \$c^i = \frac{c}{F_s^i}\$ 代入以上各式，求得 \$\lambda_i\$。

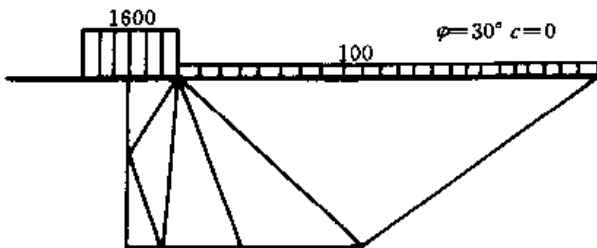


图 5-12 地基中有限元划分

如果 \$\lambda_i\$ 不等于 1，则降低或增大 \$F_s^i\$，进行下一轮计算，直至 \$|\lambda_i - 1|\$ 小于一定的误差值为止。

以上方法也很容易推广到非线性强度包线的情况。此时只要用分段线性化的办法把强度包线分成若干段，其强度参数分

别为 $(c_1, \varphi_1)(c_2, \varphi_2) \dots$, 如图 5-13 所示。

图 5-14 是一个坝坡的计算实例。坝体材料为堆石料, 采用非线性强度包线 $\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \log\left(\frac{\sigma_3}{p_0}\right)$ 。左边为单元网格。所得的最大安全系数为 1.68, 与此可静应力场相应的应力水平等值线如图 5-14(b) 所示, 图中同时绘出 Bishop 法求得的最危滑弧的位置, 相应的最小安全系数为 1.71。两种算法得出的结果十分接近, 理论上的正确解应当介于两者之间。

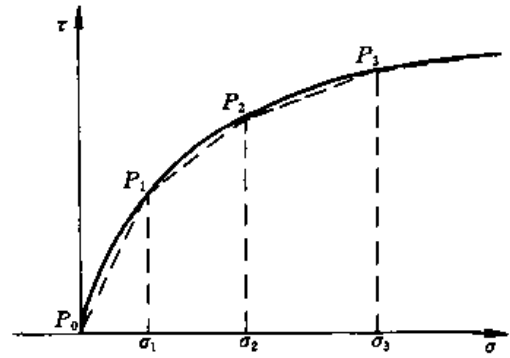


图 5-13 非线性破坏准则线性化

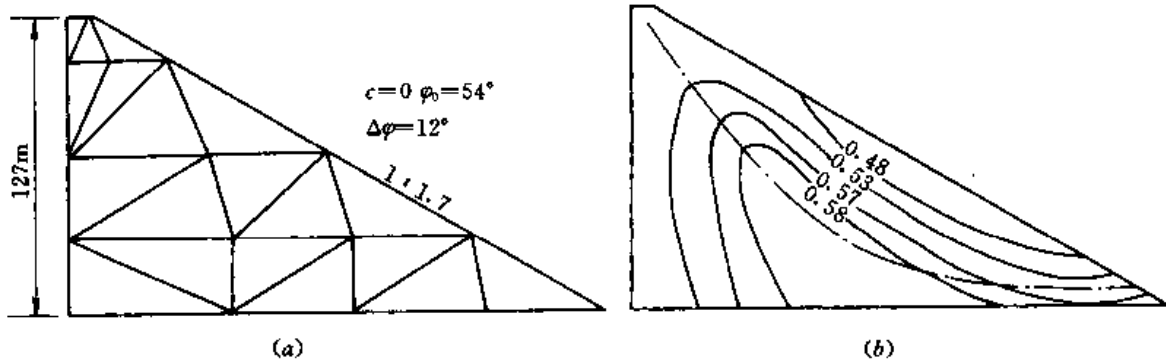


图 5-14 坝坡稳定的可静解
(a) 有限元网格; (b) 分析结果

第六节 可动解法

与假定应力场求解的步骤相反, 可动解法先要假定一个可动速度场, 然后按照式(5-9)的虚功原理计算可动荷载。考虑到滑动面上 $\tau_i^* = c + \sigma_n^* \operatorname{tg}\varphi$ 和 $\Delta v_n^* = -\Delta v_i^* \operatorname{tg}\varphi$

$$Q^* = \frac{1}{\vec{v}^*} \left[\int_a \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_3} c \Delta v_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p v^* d\Gamma - \int_a F_i v_i^* d\Omega \right] \quad (5-62)$$

不失一般性, 可取合力作用点的 $\vec{v}^* = 1$ 。

根据极小原理, 与真解最接近的可动解应由下式得出

$$\begin{aligned} \min : Q^*(v^*, \dot{\epsilon}^*) \\ \text{s. t. : } f_1(\sigma^*, \dot{\epsilon}^*), \quad f_2(v^*, \dot{\epsilon}^*), \quad f_3(v^*) \end{aligned} \quad (5-63)$$

其中: f_1 代表正交法则; f_2 代表变形的几何方程; f_3 代表运动边界条件。上式意味着要求不断改变可动速度场寻求 Q^* 的极小值。

求可动荷载的最简单的办法是把滑动土体划分成几个刚性块, 块内无应变, $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$, 能量耗散只发生于滑块之间的边界。此时, 取 $\vec{v}^* = 1$ 后式(5-62)可以简化为

$$Q^* = \sum_{i=1}^n c l_i \Delta v_i^* - P \vec{v}_p^* - W \vec{v}_w^* \quad (5-64)$$

式中: n 为滑块边界数; P 和 W 为外荷载和土体自重的合力; \vec{v}_p^* 和 \vec{v}_w^* 分别为 P 和 W 作用点的速度。

一、滑块平衡法

初等力学告诉我们, 当一个力系处于平衡状态时, 未知力既可以从力矢平衡条件求得, 也可以从能量平衡条件求得。因此, 上式中的 Q^* 也可以避开速度场直接从滑块系统的力矢平衡得出。这就是滑块平衡法的基本思想。实际上, 土力学中最早的理论——Coulomb 土压力理论就是应用滑块平衡法的实例。下面对此作一简单的证明。

按力矢条件, Coulomb 被动和主动土压力公式为 (图 5-15)

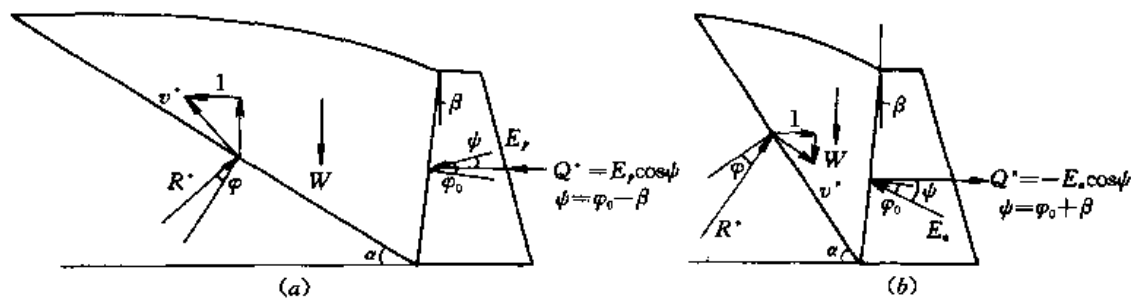


图 5-15 Coulomb 土压力
(a) 被动土压力; (b) 主动土压力

$$E_p = W \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi + \psi)} \quad (5-65a)$$

$$E_a = W \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi - \psi)} \quad (5-65b)$$

对被动土压力问题, 假定挡土墙在水平推力 Q^* 的作用下以单位速度向左作水平运动, 相应的可动速度场为 $v_x^* = 1$, $v_y^* = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ 。由于 $P = 0$, 由式 (5-64) 可得

$$Q^* = (E_p \sin \psi + W) \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

代入 $Q^* = E_p \cos \psi$ 后即得式 (5-65a)。

对主动土压力问题, 假定墙上作用一水平拉力 Q^* 使其以单位速度向右作水平运动, 相应的速度场为 $v_x^* = -1$, $v_y^* = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$ 。此时式 (5-64) 变为

$$Q^* = (E_a \sin \psi - W) \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

代入 $Q^* = -E_a \cos \psi$ 后即得式 (5-65b)。由于此处 Q^* 与 E_a 的符号相反, 对 Q^* 求极小值即相当于对 E_a 求极大值。这就证明, Coulomb 在 1773 年提出的极大极小原理符合现代极限分析中的极小原理。

滑块平衡法是土力学中求极限荷载的传统方法。计算实例表明, 只要选用的滑动面充分接近于真实的滑动面, 由滑块平衡法求得的解将十分接近于极限荷载。例如图 5-16 所示的凝聚性土地基的极限荷载真解 (Plandtl 解) 为 $q = (2 + \pi)c$, 如果把扇形区分成一个、二个和三个滑块, 相应的可动荷载分别为 $6.000c$, $5.313c$ 和 $5.150c$, 即分成三块已足够接近正确解。扇形区分成二块时的力矢多边形见图 5-17。如果扇形区不分块, 则根据扇形区上的作用力对 a 点的力矩平衡 (图 5-16, a), 当 \overline{ac} 线上法向力为 $N_2 = c \overline{ac}$ 时, \overline{ad} 线上法向力为 $N_3 = c(1 + \pi)\overline{ac}$, 然后根据滑块 ade 的平衡, 可得正确解 $q^* = (2 + \pi)c$ 。如果假定滑动面为圆弧, 用力矩平衡法求得的 q^* 的最小值为 $5.520c$, 即比扇形区分成两块的解答还差一些。

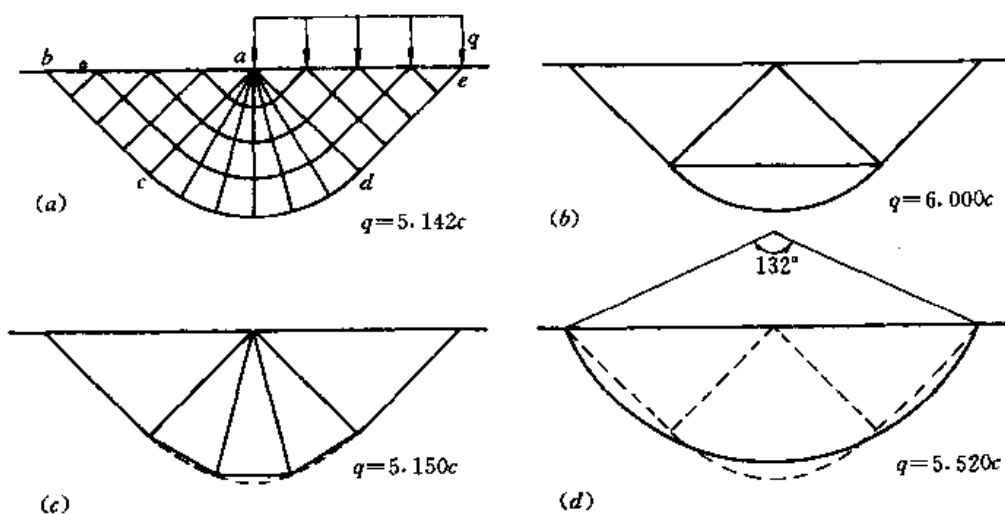


图 5-16 凝聚性土的极限荷载

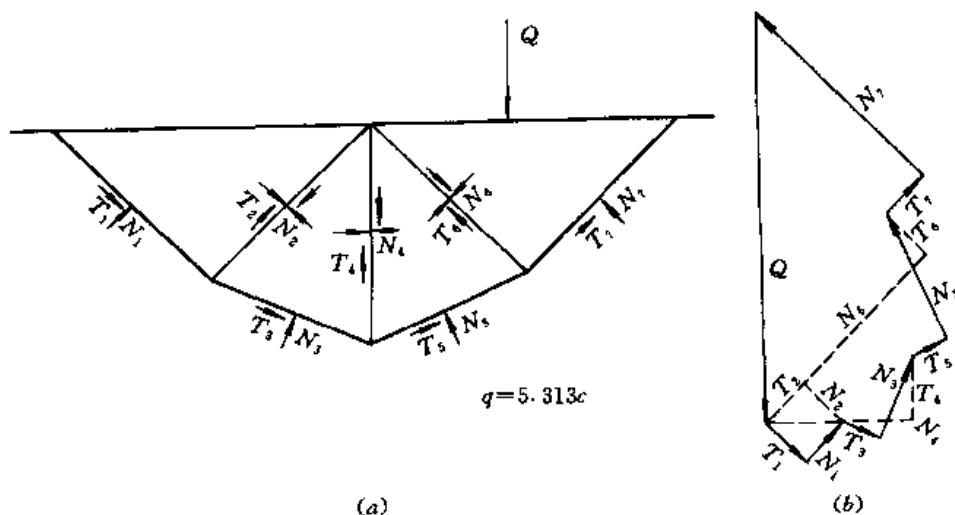


图 5-17 滑块间的力矢平衡

对于有 φ 角的土，令扇形区底面为对数螺线，同样可以从扇形区的力矩平衡得到式 (5-46) 所示的正确解。如果把对数螺线一直延伸到土面，可得下列可动荷载公式 (图 5-18)

$$q^* = \frac{p + \sigma_c}{1 - \sin\varphi} \exp[(1.5\pi - \varphi)\text{tg}\varphi] - \sigma_c \quad (5-66)$$

当 $\varphi=30^\circ$ 时， $Nq=20.0$ ，大于精确值 18.4。

近来，滑块平衡法有进一步发展。栾茂田等除平面滑块外还引入了对数螺线形滑块，并且根据滑块上力和力矩平衡条件推导了从一个侧面上的作用力计算另一个侧面上的作用力的递推公式^[16]

$$E_{i+1} = k_i E_i \quad (5-67)$$

这样，如果第一个侧面上的作用力 E_1 已

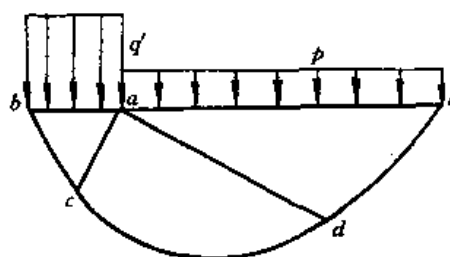


图 5-18 对数螺线滑动面

知，即可求出第 k 个侧面上的作用力如下

$$E_k = k_1, k_2, k_3, \dots, k_{k-1} E_1 \quad (5-68)$$

二、滑块单元法

如果在滑动土体中象有限元法一样划成许多小块，建立其平衡和运动方程，则最后可以归并成线性代数方程组并利用计算机求解。根据这一思想，Gussman 建议了下列滑块（运动）单元法^[17]。

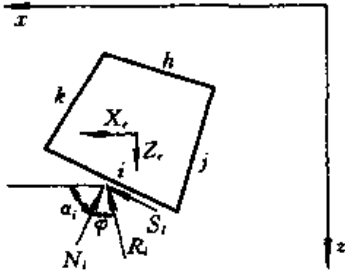


图 5-19 滑块单元法

设 i 为某一单元 e 的一边， e_i 为边长， α_i 为其外法线方向角， R_i 和 u_{wi} 分别为作用其上的有效应力合力和孔隙压力，考虑到（图 5-19）

$$N_i = R_i \cos \varphi, \quad S_i = R_i \sin \varphi, \quad C = ce_i$$

根据力的平衡可得

$$\sum_{i=1}^4 [-R_i \sin(\alpha_i + \varphi) - C_i \cos \alpha_i - u_{wi} \sin \alpha_i] + X_e = 0 \quad (5-69a)$$

$$\sum_{i=1}^4 [R_i \cos(\alpha_i + \varphi) - C_i \sin \alpha_i + u_{wi} \cos \alpha_i] + Z_e = 0 \quad (5-69b)$$

$$[k_{\alpha\varphi}]_e \{R\}_e + \{F\}_e = 0 \quad (5-69b')$$

或写为

其中

$$\{R\}_e = \{R_h, R_i, R_j, R_k\}$$

$$[k_{\alpha\varphi}]_e = [\{k_h\}, \{k_i\}, \{k_j\}, \{k_k\}]$$

$$\{k_i\}^T = \{-\sin(\alpha_i + \varphi), \cos(\alpha_i + \varphi)\}$$

$$\{F\}_e = \{F_c\} + \{F_u\} + \{F_b\}$$

$$\{F_c\} = \sum \{F_{ci}\}$$

$$\{F_{ci}\}^T = \{-C_i \cos \alpha_i, -C_i \sin \alpha_i\}$$

$$\{F_u\} = \sum \{F_{ui}\}$$

$$\{F_{ui}\}^T = \{-u_{wi} \sin \alpha_i, u_{wi} \cos \alpha_i\}$$

$$\{F_b\}^T = \{X_e, Z_e\}$$

对上述单元方程叠加形成总体方程，由此可解出各单元间作用力，最后得到极限荷载的近似解。在一定的约束条件下不断调整单元的尺寸，重复以上计算，逐步逼近最优解。图 5-20 是一个计算主动土压力的实例，虚线为初始选定的滑块组合，实线为调优后的滑块组合^[18]。计算所得的主动土压力值随单元个数的增加而增大，符合前面证明的主动土压力必需取极大值的原理。

三、能量法

直接应用式 (5-62) 求可动荷载的关键在

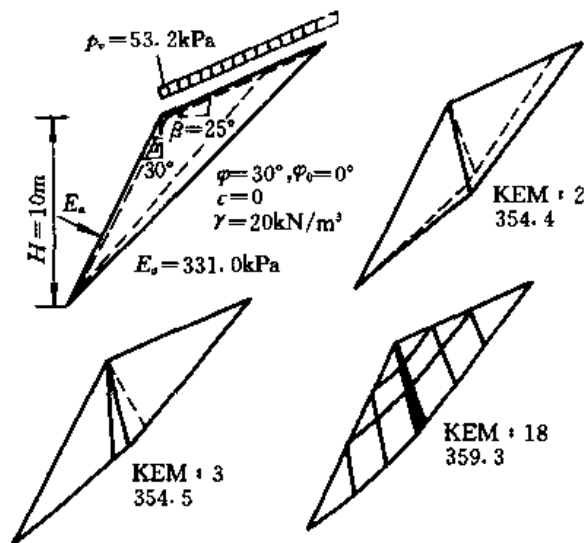


图 5-20 多种滑移单元主动土压力

于速度场的推求。近来陈祖煜等提出一种方法，可以根据第一个滑块的速度递推得出其它滑块的速度，从而方便地算出该式右边的能量耗散^[19]。这一方法的基本思路如下。

设第 i 滑块的可动速度为 v_i^* ，相应的滑面倾角为 α_i ，则相邻的 $i+1$ 块的速度 v_{i+1}^* 及两块之间的速度差 Δv_i^* 应满足下列条件（图 5-21）

$$\vec{v}_i^* + \Delta \vec{v}_i^* = \vec{v}_{i+1}^* \quad (5-70a)$$

或
$$\begin{bmatrix} \cos\beta_{i+1} & \cos\delta_i \\ \sin\beta_{i+1} & \sin\delta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{i+1} \\ \Delta v_i \end{Bmatrix} = v_i \begin{Bmatrix} \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{Bmatrix} \quad (5-70b)$$

设 φ 为 i 滑块的内摩擦角，考虑到 $\beta_i = \pi - \alpha_i - \varphi$ ，可得

$$v_{i+1} = v_i \frac{\sin(\alpha_i - \varphi - \delta_i)}{\sin(\alpha_{i+1} - \varphi_{i+1} - \delta_i)} \quad (5-71a)$$

或写为
$$v_{i+1} = k_i v_i \quad (5-71b)$$

$$\Delta v_i = v_i \frac{\sin(\alpha_{i+1} - \varphi_{i+1} - \alpha_i + \varphi_i)}{\sin(\alpha_{i+1} - \varphi_{i+1} - \delta_i)} \quad (5-71c)$$

以此递推，当第一块的速度 v_1 已知时，任意一个 k 滑块的速度为

$$v_k = k_1 k_2 k_3 \cdots k_{k-1} v_1 \quad (5-72)$$

对滑弧的光滑段，忽略高阶小量后，式（5-71）可以写为

$$-\frac{dv}{v} = \text{ctg}(\alpha - \varphi - \delta) \frac{d\alpha}{dx} dx$$

对上式积分可得任一点 x 处的速度公式

$$v = v_i^0 \exp \left[- \int_{x_i}^x \text{ctg}(\alpha - \varphi - \delta) \frac{d\alpha}{d\zeta} d\zeta \right] \quad (5-73)$$

v_i^0 为弧线左端点的速度。对于多段组合的滑块系统，如果 v_0 为滑面初始点的速度，则综合以上两种公式，可得 k 块内任一点的速度公式

$$v = k_1 k_2 k_3 \cdots k_{k-1} \exp \left[- \int_{x_0}^x \text{ctg}(\alpha - \varphi - \delta) \frac{d\alpha}{d\zeta} d\zeta \right] v_0 \quad (5-74a)$$

或简写为

$$v = E(x) v_0 \quad (5-74b)$$

相应地，忽略高阶小量后交界面上的速度变化为

$$\Delta v = -v \cos(\alpha - \varphi - \delta) d\alpha \quad (5-75)$$

考虑到 $v_i^* = v^* \cos\varphi$ ，已知各滑面上的速度后，即可得出相应的能量耗散如下：

$$D = \int (c \cos\varphi - u_w \sin\varphi) \text{seca} E(x) dx \quad (5-76a)$$

$$D = - (c \cos\varphi - u_w \sin\varphi) l \text{csc}(\alpha - \varphi - \delta) \sin(\Delta\alpha - \Delta\varphi) E(x) \quad (5-76b)$$

$$D = - \int (c \cos\varphi - u_w \sin\varphi) l \text{csc}(\alpha - \varphi - \delta) E(x) \frac{d\alpha}{d\zeta} d\zeta \quad (5-76c)$$

式（5-76a）适用于滑块底面，式（5-76b）适用于速度突变的滑块侧面，而式（5-76c）则适用于速度连续变化的滑块内部，后面两式中 l 为土块长度，且以上各式均考虑了孔隙压力。代入相应公式即得与该滑动面相适应的可动解，最佳的可动解可以通过不断改变滑动面的

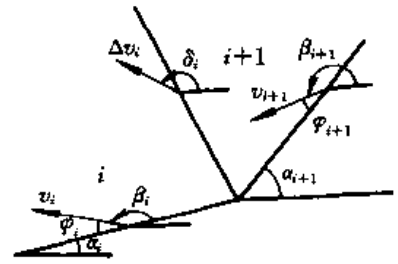


图 5-21 滑块面上的速度场

办法求得。图 5-22 是用此法计算地基极限荷载的一个实例^[20]，左边的初始滑动面任意假设，通过几轮迭代即得到近似于正确的解答。 $\varphi=30^\circ$ 时计算得 $N_q=18.67$ ，比理论解只大 1.5%。

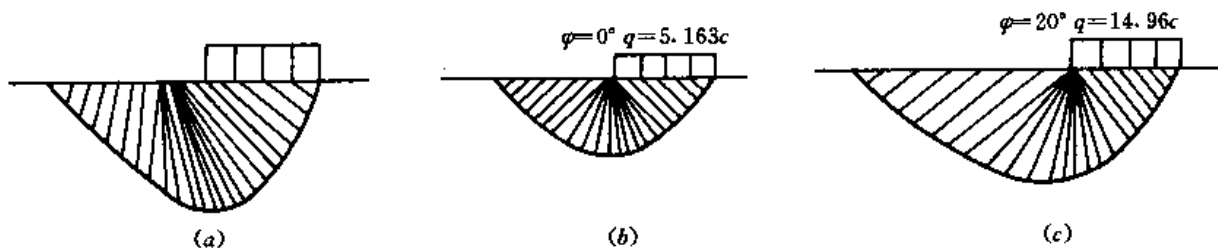


图 5-22 无重土体极限承载力计算
(a) 初始破坏模式；(b)、(c) 临界破坏模式

速度场也可以通过速度矢径图 (Hodograph) 得到。Michalowski^[21]用这一办法建立了适用于土坡稳定分析的速度场 (图 5-23)。如果令 $\bar{c}=c/F_s^*$ 和 $\text{tg}\bar{\varphi}=\text{tg}\varphi/F_s^*$ ，则根据滑动力所做的功等于滑动面上能量耗散的条件可得下列可动安全系数公式

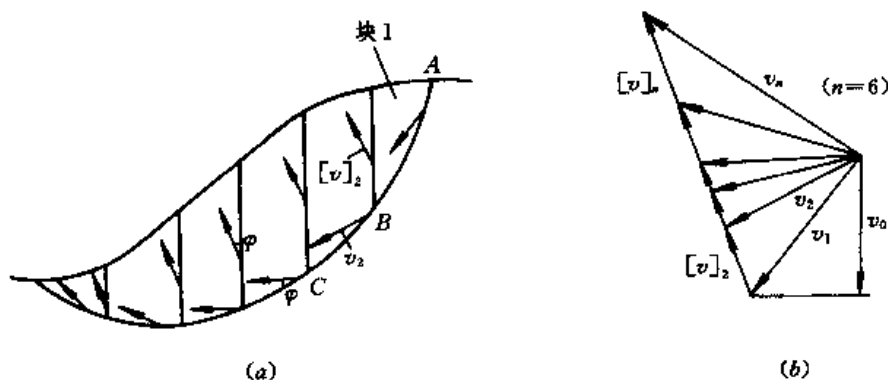


图 5-23 土坡稳定问题的能量解法
(a) 速度场；(b) 速度矢径

$$F_s^* = \frac{\sum_{k=1}^n (l_k \bar{c}_k v_k \cos \bar{\varphi}_k + h_k \bar{c}_k [v]_k \cos \bar{\varphi}_k)}{\sum_{k=1}^n v_k (G_k + Q_k) \sin(\alpha_k - \bar{\varphi}_k)} \quad (5-77)$$

式中： l_k 和 h_k 分别为土条底面长和高； G_k 和 Q_k 为作用在土条上的土重和外力。

四、变形单元法

以上方法中均假定滑块为不变形的刚体。考虑单元内部变形的有限单元法一般用 Lagrange 乘子法求解。Tamura 等曾把此法用于凝聚性土^[22]。作为未知变量，既可直接采用结点速度，也可采用下列定义的流函数 Ψ

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5-78)$$

这一方案自动保证了凝聚材料体积不变的假设。图 5-24 是应用此法求解 Plandtl 问题所用的单元网格和计算所得的速度分布，相应的极限荷载系数为 5.44。由此可见其精度尚不及图 5-17 所示的滑块平衡法的结果。

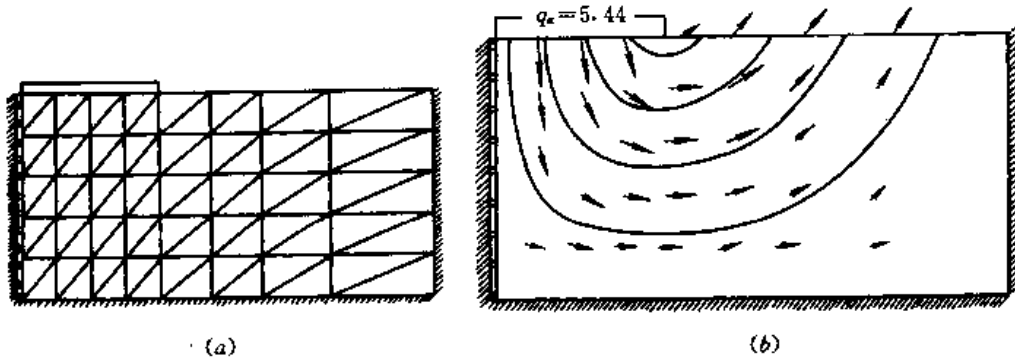


图 5-24 速度分布图
(a) 单元网格; (b) 速度场

近来, Jiang 又提出了适用于一般 c, φ 土类的有限单元法^[23]。此时, 单元内的应变速率应当满足剪胀条件 $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3 \frac{(1+\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)}$ 。相应地, 单元内的能量耗散为

$$D = \frac{-2c\dot{\epsilon}_3\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \quad (5-79)$$

作者也把此法用于求解 Plandtl 问题, 得出 $\varphi=30^\circ$ 时的最优解为 19.7, 与正确解 18.4 相比也有较大误差。

第七节 复杂土体的极限平衡

本节介绍各向异性土体和不均匀土体的极限平衡问题。

一、研究途径

各向异性土的屈服条件有两种研究途径。第一种是对应力不变量重新进行定义, 例如把平均应力和广义剪应力写为

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(U\sigma_x + V\sigma_y + W\sigma_z) \quad (5-80a)$$

$$\begin{aligned} \tau_m = \frac{1}{\sqrt{2}}[F\sigma_x^2 + G\sigma_y^2 + H\sigma_z^2 + I\sigma_x\sigma_y + J\sigma_y\sigma_z + K\sigma_x\sigma_z \\ + L\tau_{xy}^2 + M\tau_{yz}^2 + N\tau_{zx}^2] \end{aligned} \quad (5-80b)$$

这里 x 应固定为水平方向, U, V, W, \dots , 为一组参数。然后把屈服条件写为

$$\tau_m^n = \sigma_m + 1 \quad (5-81)$$

n 可取 1 或 2。在平面应变条件下, 式 (5-81) 简化为

$$\left[\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-D)} + \tau_{xy}^2} \right]^n = \frac{1}{2}(A_1\sigma_x + A_2\sigma_y) + A_0$$

其中 A_0, A_1, A_2 和 D 为 4 个参数。4 个参数与 c, φ 有关, 但无直接的物理含义。 $n=1, D=0$ 和 $A_1=A_2=\sigma_m\sin\varphi$ 时, $A_0=c\cos\varphi$, 即退化为 Mohr-Coulomb 准则。阮怀宁按照这一思路推导了相应的极限平衡方程^[24]。另一途径是土力学中传统采用的, 即假定 c 和 φ 是主应

力方向角的函数。下面介绍我国学者在这方面的研究成果。

二、变凝聚力问题

陈希有等假定凝聚力按下式变化^[25]

$$c = (c_0 + mz)[1 + (k - 1)\sin^2\theta] \quad (5-82)$$

θ 为大主应力方向与水平面的夹角, $k = c_v/c_h$ 为垂直与水平向凝聚力之比, c_0 为地面 $z=0$ 处的水平向凝聚力, m 为凝聚力随深度的增率。由于 $c \operatorname{ctg}\varphi$ 不再是常数, 式 (5-7) 宜改为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_z \end{aligned} \right\} = \sigma_m (1 \pm \sin\varphi \cos 2\theta) \quad (5-83)$$

$$\tau_{xz} = \sigma_m \sin\varphi \sin 2\theta$$

考虑到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dx} &= m[1 + (k - 1)\sin^2\theta] + c_h(k - 1)\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{dx}{dz} &= c_h(k - 1)\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-84)$$

把上式代入平衡方程后可得下列特征线方程组

$$\left. \begin{aligned} S_1: \quad \frac{dz}{dx} &= \operatorname{tg}\zeta_1 \quad a_{11} \frac{\partial \sigma_m}{\partial s_1} + a_{12} \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = b_1 \\ S_2: \quad \frac{dz}{dx} &= \operatorname{tg}\zeta_2 \quad a_{21} \frac{\partial \sigma_m}{\partial s_2} + a_{22} \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = b_2 \end{aligned} \right\} \quad (5-85)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= DB + AC + (AD - BC)\operatorname{tg}\zeta_1 \\ a_{12} &= a_{22} = D^2 + C^2 \\ a_{21} &= DB + AC + (AD - BC)\operatorname{tg}\zeta_2 \\ b_1 &= E_1(D\sin\zeta_1 + C\cos\zeta_1) - E_2(C\sin\zeta_1 - D\cos\zeta_1) \\ b_2 &= E_1(D\sin\zeta_2 + C\cos\zeta_2) - E_2(C\sin\zeta_2 - D\cos\zeta_2) \\ A &= 1 - \sin\varphi \cos 2\theta \\ B &= \sin\varphi \sin 2\theta \\ C &= c_h(k - 1)\sin 2\theta \cos\varphi \cos 2\theta - 2\tau_f \sin 2\theta \\ D &= -c_h(k - 1)\sin^2 2\theta \cos\varphi - 2\tau_f \cos 2\theta \\ E_1 &= Z + m[1 + (k - 1)\sin^2\theta]\cos\varphi \cos 2\theta \\ E_2 &= -m[1 + (k - 1)\sin^2\theta]\cos\varphi \sin^2\varphi \end{aligned}$$

特征线方程的斜率为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\zeta_1 \\ \operatorname{tg}\zeta_2 \end{aligned} \right\} = \frac{c_h(k - 1)\sin 2\theta \sin\varphi \cos 2\theta - 2\tau_f \sin 2\theta \pm \sqrt{(2\tau_f \cos\varphi)^2 + [c_h(k - 1)\sin 2\theta \cos\varphi]^2}}{2\tau_f(\cos 2\theta - \sin\varphi) + c_h(k - 1)\sin^2 2\theta \cos\varphi} \quad (5-86)$$

从作者计算所得的图表看, 对于 $\varphi=30^\circ$ 和 $k=2$ 的情况, 极限荷载可降低 40%。

三、变摩擦角问题

陈越研究了各向异性砂土的极限平衡理论^[26], 下面将在 $c \operatorname{ctg}\varphi$ 与大主应力方向无关的假设下把这一结果推广到 $c-\varphi$ 土。

如果 φ_0 为剪切面与沉积面重合时的最小内摩擦角, φ_1 为两者垂直时的最大内摩擦角, 中间情况下的抗剪强度可按下式内插 (图 5-25)^[27]。

$$\operatorname{tg}\varphi(\zeta) = \operatorname{tg}\bar{\varphi}(1 - d\cos 2\zeta) \quad (5-87)$$

其中 ζ 为堆积面与滑裂面之间的夹角

$$d = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi_1}, \quad \operatorname{tg}\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi_1)$$

各向异性土破坏时, 一般情况下破坏 Mohr 圆将与强度包线相割。如果令 φ^* 为与破坏 Mohr 圆切线的表观内摩擦角 (图 5-26), 则其值可由下式计算

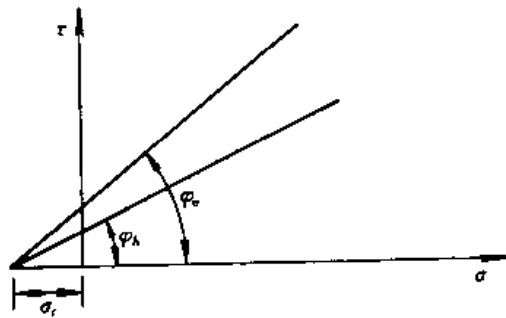


图 5-25 最大和最小内摩擦角

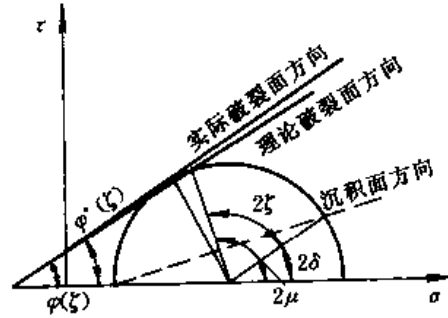


图 5-26 破裂面方向

$$\sin\varphi^*(\zeta) = \sqrt{\sin^2\varphi(\zeta) + D_1\cos\varphi(\zeta)} \quad (5-88)$$

同时, 大主应力方向与滑裂面之间的夹角为

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{1 - \operatorname{tg}\varphi\sin 2\zeta/\operatorname{tg}^2\varphi} \quad (5-89)$$

上述式中 $\varphi = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi(\zeta)]$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{d2\zeta} = \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{d2\zeta}\cos^2\varphi$, $D_1 = \varphi/(1 - \varphi)$

令 x 方向与沉积面重合, 就可以把式(5-7)改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \sigma_c(1 \pm \sin\varphi^* \cos 2\theta) - \sigma_c$$

$$\tau_{xz} = \sigma_c \sin\varphi^* \sin 2\theta \quad (5-90)$$

其中

只考虑土自重 Z , 把上述屈服条件代入平衡方程中, 可以推得以下两组滑移线方程

$$\left. \begin{aligned} S: \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\zeta; \quad (1 - D_1) \frac{d\sigma_c}{dx} - 2\sigma_c \operatorname{tg}\varphi(1 + D_2) \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{Z\cos\zeta}{\cos\varphi\cos\zeta} \\ \bar{S}: \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\bar{\zeta}; \quad (1 + D_1) \frac{d\sigma_c}{dx} + 2\sigma_c \operatorname{tg}\varphi(1 + D_2) \frac{d\zeta}{dx} = \frac{Z\cos\zeta}{\cos\varphi\cos\bar{\zeta}} \end{aligned} \right\} \quad (5-91)$$

其中 $D_2 = [\varphi' \operatorname{ctg}\varphi - \varphi(1 - 2\varphi)]/(1 - \varphi)^2$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{d2\zeta}$ 。

通常情况下, 只有一组与水平线夹角小于 90° 的滑移线 S 才是真实的, 另一组滑移线 \bar{S} 并不满足破坏条件, 可以称其为副滑移线 (图 5-27)。但当主应力方向与沉积方向垂直或平行时, 将同时出现两组主滑移线 S_1, S_2 和副滑移线 \bar{S}_1, \bar{S}_2 。

各向异性土地基的极限荷载低于平均内摩擦角相同条件下各向同性土地基的极限荷载。图 5-28 显示了 $\varphi=30^\circ$ 和 $d=0.2$ 一组参数下 Prandtl 问题的求解结果, 其极限荷载系数为 14.97, 显著低于前面的相应值 18.4。图中实线为主滑移线, 虚线为副滑移线。

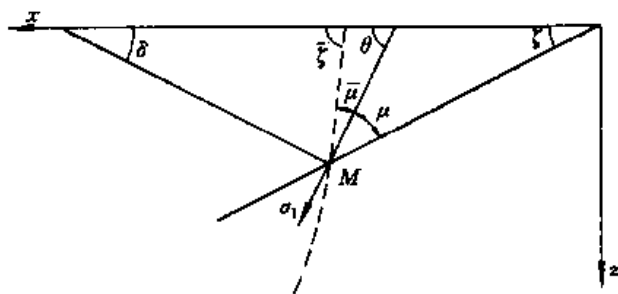


图 5-27 真实滑移线和副滑移线

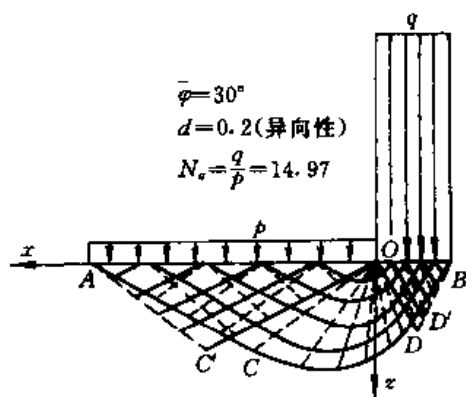


图 5-28 无重量的异向性地基承载力

第八节 饱和粘土体的极限平衡理论

一、有效固结应力理论

Mohr-Coulomb 强度理论原则上只适用于刚性骨架的砂土。粘土在压力下发生相当大的体积收缩，强度随法向应力增加而增大的现象不能简单地归之于内摩擦角的作用。为此，历史上曾经有过总强度、真强度和有效强度理论的争论。总强度理论认为，只要总体上知道强度随法向应力增加而增大的规律就够了，没有必要再细分为凝聚力增加部分和摩擦阻力增加部分。另一方面，饱和粘土的渗透性很小，从设计状态到破坏状态不发生排水固结的假设是十分自然的。这就意味着，饱和粘土的抗剪强度取决于破坏前的有效应力，而不是破坏瞬间或极限平衡状态下的有效应力。破坏前的状态也可以称为固结状态，包括等向固结和不等向固结。因此，破坏前的有效应力也就是有效固结应力。这就是强度增长的有效固结应力理论的基本思想。

按照这一理论，饱和粘土的屈服条件可以写为

$$f = \tau_m - (c_c + \sigma'_c \operatorname{tg} \varphi_c) = 0 \quad (5-92)$$

令 $\tau_f = c_c + \sigma'_c \operatorname{tg} \varphi_c \quad (5-93)$

上式又可写为 $f = \tau_m - \tau_f(x, z) = 0 \quad (5-94)$

此处 $\sigma'_c = \frac{1}{2} (\sigma'_{1c} + \sigma'_{2c})$ 为有效固结应力 (图 5-29)，在土体中各点是不同的，因此抗剪强度也将是坐标点的函数。由此可见，饱和粘土的破坏可以归结为非均质凝聚材料的极限平衡问题^[28]。

二、极限平衡方程及其特征线解法

取 $\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z)$ 和大主应力方向角 θ 为变量，把屈服条件 $\tau_m = \tau_f$ 代入平衡方程和不可压缩条件代入运动方程，可得下列特征

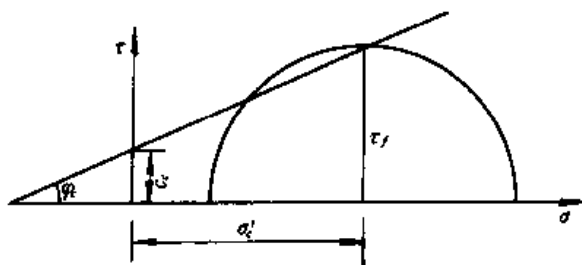


图 5-29

线方程

$$S_1: \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad d\sigma_m + 2\tau_f d\theta = (x dx + z dz) - \frac{d\tau_f}{ds_1} ds_2$$

$$dv_2 + v_1 d\theta = 0 \quad (5-95a)$$

$$S_2: \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad d\sigma_m - 2\tau_f d\theta = (x dx + z dz) + \frac{d\tau_f}{ds_2} ds_1$$

$$dv_1 - v_2 d\theta = 0 \quad (5-95b)$$

把上式写成差分形式，则当点①的 $x_1, z_1, (\sigma_m)_1$ 和 θ_1 与点②的 $x_2, z_2, (\sigma_m)_2, \theta_2$ 已知时， k 点的坐标和应力函数 $(\sigma_m)_k, \theta_k$ 可按下式计算

$$\left. \begin{aligned} z_k &= z_1 + \operatorname{tg}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{4}\right)(x_k - x_1) \\ z_k &= z_2 + \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{\pi}{4}\right)(x_k - x_2) \\ \theta_k &= \left(\tau_{f1}\theta_1 + \tau_{f2}\theta_2 + \frac{A-B}{2}\right) / (\tau_{f1} + \tau_{f2}) \\ (\sigma_m)_k &= [2\tau_{f1}\tau_{f2}(\theta_1 - \theta_2) + A\tau_{f2} + B\tau_{f1}] / (\tau_{f1} + \tau_{f2}) \end{aligned} \right\} \quad (5-96)$$

其中

$$A = (\sigma_m)_1 + \left(\frac{\partial \tau_f}{\partial z}\right)_1 (x_k - x_1) + \left[z - \left(\frac{\partial \tau_f}{\partial x}\right)_1\right] (z_k - z_1)$$

$$B = (\sigma_m)_2 - \left(\frac{\partial \tau_f}{\partial z}\right)_2 (x_k - x_1) + \left[z - \left(\frac{\partial \tau_f}{\partial x}\right)_2\right] (z_k - z_2)$$

上式中未考虑水平惯性力 X 。

具体计算时，地基中设计状态下的平均有效应力分布以 $M \cdot N$ 个网格点方式输入，然后用内插公式求特征线交点处的 $\sigma_m, \tau_f, \frac{\partial \tau_f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \tau_f}{\partial z}$ 。

图 5-30 的算例取自文献 [29]。假定表层深为 $1/4$ 基础宽度的范围内地基的天然强度

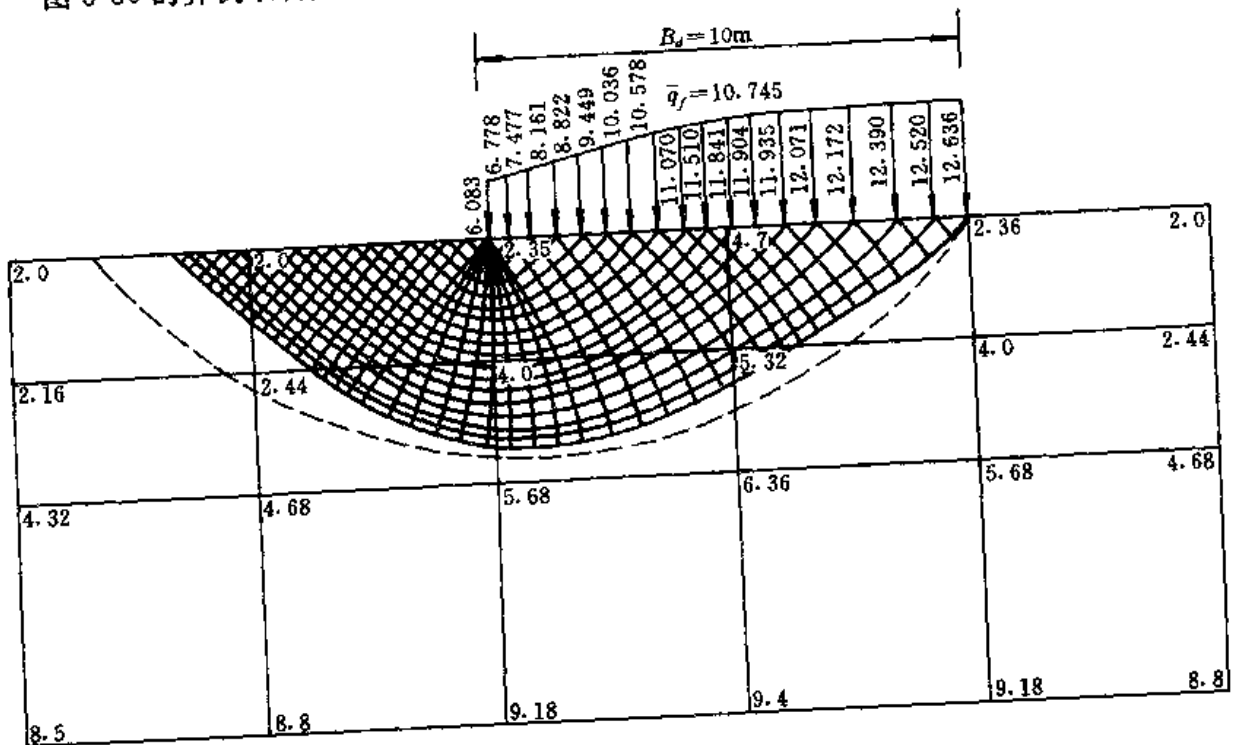


图 5-30 软基滑移线网

$\tau_{f0}=10\text{kPa}$ 为常量, 以下随深度线性增加, 增加比为 $\tau_f/p=0.4$, p 为自重压力。取侧压力系数 $K_0=0.7$, 则平均自重应力为 $\sigma_{c0}=0.8p$, 因而摩擦系数 $\text{tg}\varphi=0.5$ 。设地基在基础荷载 50kPa 下完全固结, 用弹性理论计算固结荷载引起的平均附加固结压力 $\Delta\sigma_c$ 。因而总的有效固结压力将为 $\sigma_c=\sigma_{c0}+\Delta\sigma_c$ 。用这样的 σ_c 输入后 (见图中网格点上的数字), 算得的极限荷载的平均值为 107.45kPa 。原文用圆弧法求得的极限荷载为 126.5kPa , 最危滑弧的位置如图中虚线。正如预料, 后者大于前者, 因为前者是可静解, 后者是可动解。

三、极值原理和近似解法

应用虚功原理, 考虑到 Schwarz 不等式 $\sigma'_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\leq\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}=\tau_f\dot{\gamma}_m$, $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^*\leq\tau_f\dot{\gamma}_m^*$, 可得

$$\int_{\Gamma} q_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega \geq \int_{\Gamma} q'_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F'_i v_i d\Omega \quad (5-97a)$$

$$\int_{\Gamma} q_i v_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega \leq \int_{\Omega} \tau_f \dot{\gamma}_m^* d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_f \Delta v^* d\Gamma \quad (5-97b)$$

上面两式即为极大定理和极小定理。

把式 (5-97b) 的第一项写为 $\int_{\Gamma} q_i v_i^* d\Gamma = Pv^* + Qv^*$, 可得

$$Qv^* \leq \int_{\Omega} \tau_f \dot{\gamma}_m^* d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_f \Delta v^* d\Gamma - \int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega - Pv^* \quad (5-98)$$

$$\text{令 } Q^* = \frac{1}{v^*} \left[\int_{\Omega} \tau_f \dot{\gamma}_m^* d\Omega + \int_{\Gamma} \tau_f \Delta v^* d\Gamma - \int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega - Pv^* \right] \quad (5-99)$$

为可动荷载, 可得

$$Q^* \geq Q \quad (5-100)$$

对于土坡稳定问题, 如果坡顶没有荷载或把坡顶荷载化作等量的土柱, 并设滑动土体为刚体和定义

$$F_i^* = \frac{\int_{\Gamma} \tau_f \Delta v^* d\Gamma}{\int_{\Omega} F_i v_i^* d\Omega} \quad (5-101)$$

则式 (5-97b) 两边除以 $\int_{\Gamma} \tau_f \Delta v^* d\Gamma$ 可得

$$F_i^* \geq F_i \quad (5-102)$$

其中 $F_i = \tau_f / \bar{\tau}_f = (c_c + \sigma'_c \text{tg}\varphi_c) / (\bar{c}_c + \sigma'_c \text{tg}\bar{\varphi}_c)$

式中: c_c 和 φ_c 为设计参数; \bar{c}_c 和 $\bar{\varphi}_c$ 为破坏时的降低值。因此, 当安全系数以式 (5-101) 定义时, 必须寻求其极小值。

第九节 地基极限荷载

这一类边值问题的提法是: 已知一部分表面上荷载分布, 另一部分表面以某种方式运动, 要求解出引起这种运动的荷载。随着基础上合力作用点的不同, 地基的可能破坏方式

有：①前倾滑动，②下沉滑动，③后倾滑动，如图 5-31。本节主要讨论前面两种滑动问题的求解方法。后倾滑动发生在地基表面有斜坡荷载或向后滑出受阻的场合。

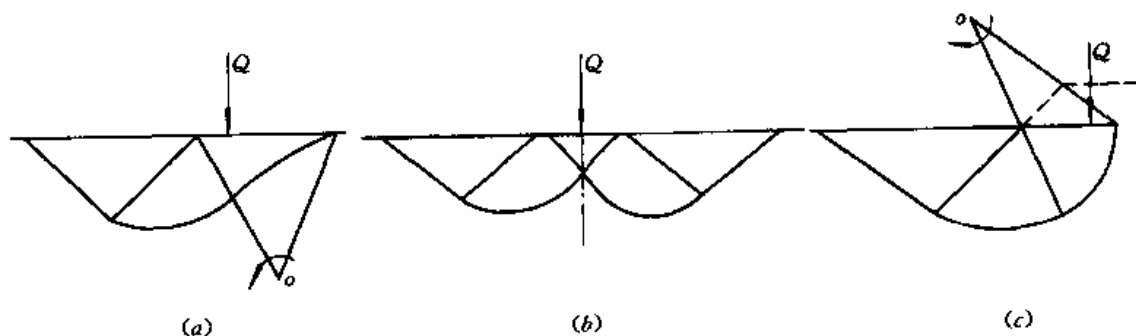


图 5-31 地基的可能破坏方式
(a) 前倾滑动；(b) 下沉滑动；(c) 后倾滑动

一、垂直下沉滑动

对称荷载下的垂直下沉问题，可取计算域的左半部进行分析（图 5-32）。

先进行静力分析，其步骤为：①从外边界 ab 已知荷载 p 出发，解 Cauchy 问题，求得 $\triangle abd$ 中的应力场；②解 Goursat 问题，求得扇形区应力场；③根据接触面摩擦条件，解混合问题，求得 $\triangle afg$ 内应力场；④再解 Goursat 问题，求得 $\square cefg$ 内应力场；⑤根据对称轴上边界大主应力垂直向下的条件，解混合问题，求得 $\triangle och$ 内的应力场；⑥再解 Goursat 问题，求得 $\triangle ogh$ 内的应力场，并得出接触面

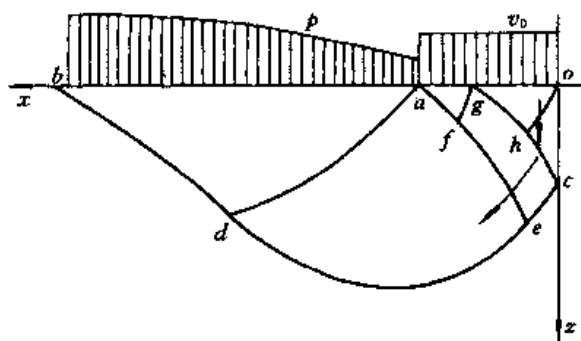


图 5-32 特征线法的解题过程

og 上的法向及切向应力。接触边界 oa 可划分为摩阻力充分发挥的 ag 段和未充分发挥的 go 段两段，分界点 g 的位置根据 gc 线两端必须分别满足摩擦条件和对称条件决定。运动分析的步骤相反，即先从接触边界 oa 开始，其步骤如下：①根据 og 段给定的速度条件 v_0 ，解 Cauchy 问题，求得 $\triangle ogh$ 内的速度场；②根据边界线 oc 上水平速度为 0 的条件，解混合问题，求得 $\triangle och$ 内的速度场；③根据 ag 段垂直速度已知的条件，解混合问题，求得 $\triangle afg$ 内的速度场；④解 Goursat 问题，求得 $\square cefg$ 内速度场；⑤解 Goursat 问题，求得扇形区内的速度场；⑥再解 Goursat 问题，求得 $\triangle abd$ 内的速度场。由以上分析可知，这里必定有一块土体，由于与底板之间的摩阻力小于极限值而无相对滑动，从而附着在底板下一起运动。在土力学文献中曾称为弹性楔，似无多大根据，沈珠江则称之为约束变形区^[4]。

图 5-33 是一个计算实例， φ_0 是界面摩擦角， \bar{q} 和 $\bar{\tau}$ 为接触面上归一化的法向和切向应力，实际的极限荷载分布按下式计算

$$q = (c + ptg\varphi)\bar{q} - cctg\varphi \quad (5-103)$$

相应的基础半宽为 $\bar{B}/2=3$ ，实际半宽为 $B/2 = (c + ptg\varphi) \bar{B}/2\gamma$ ， γ 为土容重。

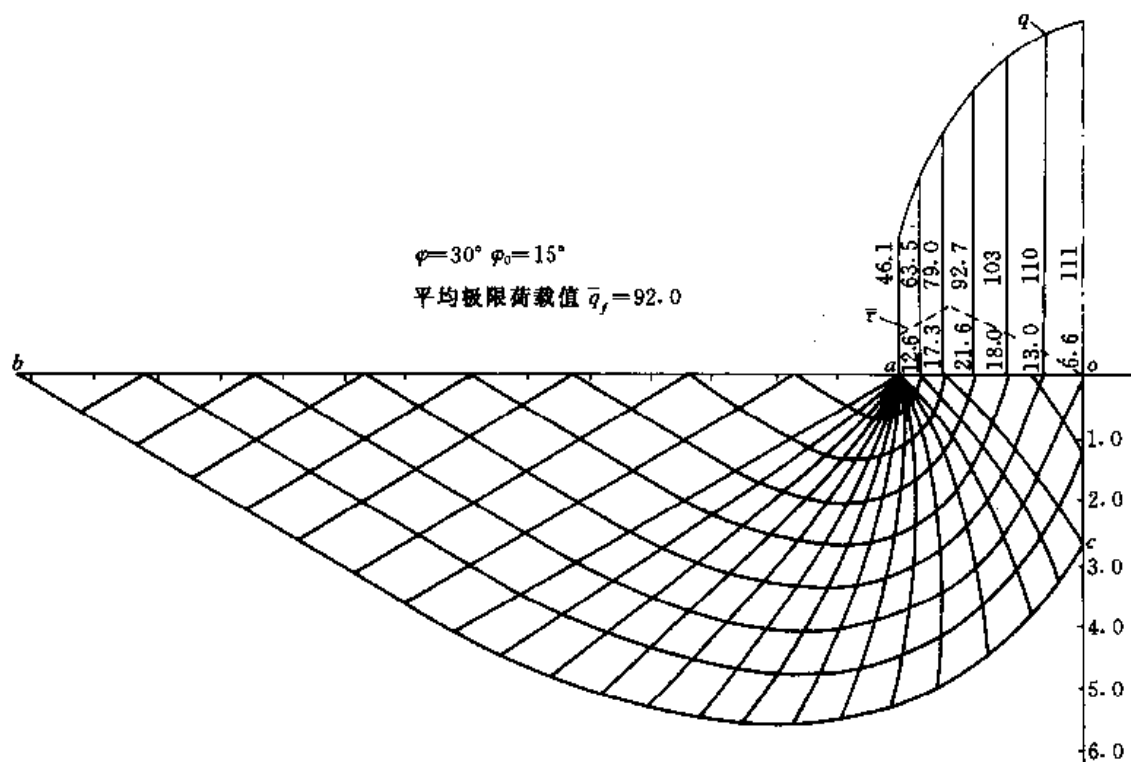


图 5-33 粗糙底板极限荷载

图 5-34 是软土地基在粗糙底板下的计算结果, 平均极限荷载为 102.4kPa, 同一情况下光滑底板的计算结果已见图 5-30, 如果只取左边 5m 底板上的荷载进行比较, 相应的极限荷载为 92.8kPa, 即粗糙底板比光滑底板的极限承载力提高 10.3%^[30]。

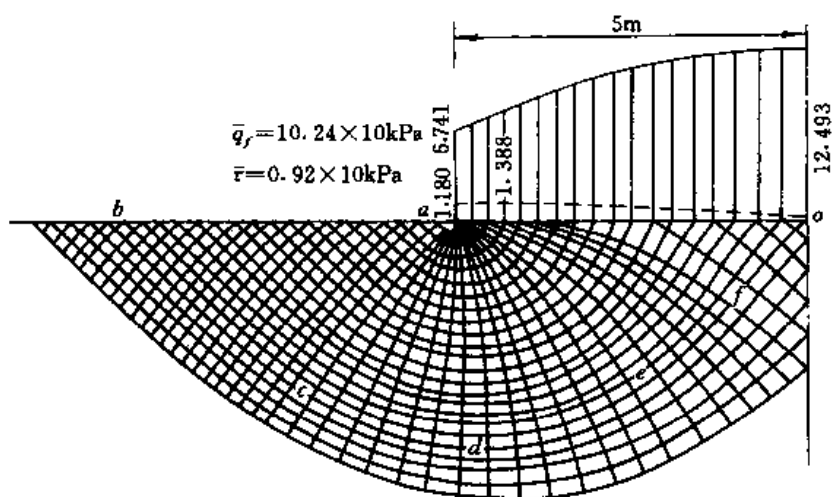


图 5-34 软土地基算例 (粗糙底面)

图 5-35 是对 $\varphi=\varphi_0=30^\circ$ 情况下不同宽度粗糙底板的计算结果, 并与光滑底板下的 Соколовский 解作了比较, 可见随着基础宽度的增加, 粗糙底板的极限承载力可能增加 50% 以上。

对粗糙底板的下沉破坏, 也可用滑块平衡法进行计算。图 5-36 是图 5-34 所示的同一问

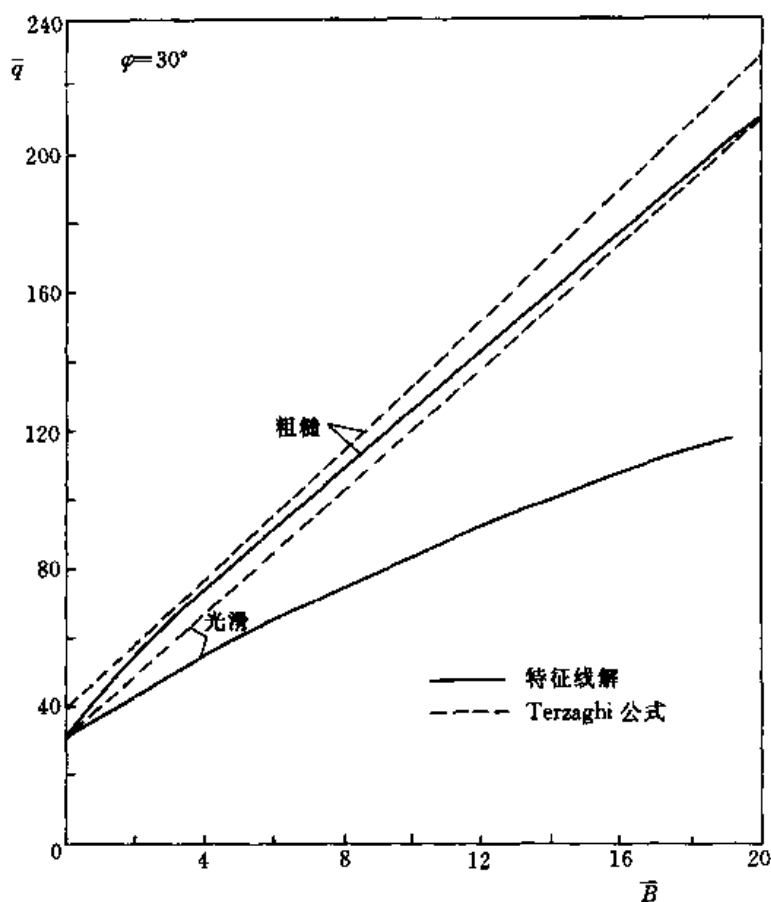


图 5-35 地基极限荷载系数

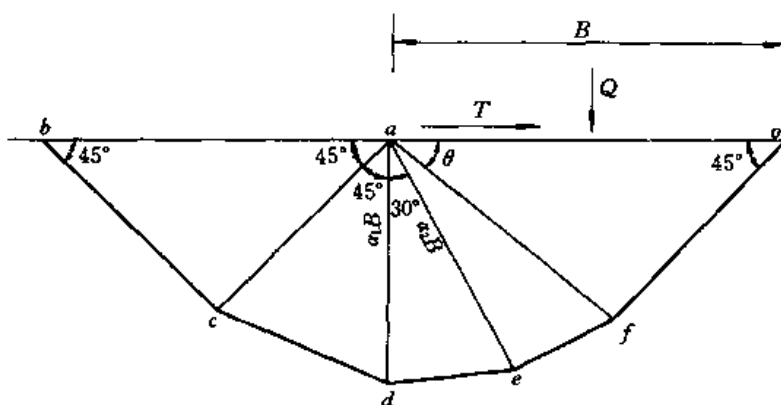


图 5-36 土工布加强地基算例

题的求解结果，所得的极限荷载为 106.7kPa，只比前面的严格解增加 4.2%。

二、埋深基础的下沉滑动

当基础有一定埋深时，通常的处理办法是把基础底面以上的土重 $p = \gamma D$ 看作表面荷载，从而忽略了表层土的强度。不难想象，由于土体向两边滑动，表层土处于主动土压力状态，上述处理办法实际上采用了一条水平应力不连续线 ab ，如图 5-37。可以证明，这样

的应力场没有相应的速度场，因而仅仅是一种可静解。下面介绍沈珠江建议的应用不连续线的求解途径^①，如图 5-38。

先假定直线段 af 的夹角 ω ，根据 I 区内已知的主动应力场按式 (5-43) 求得 II 区 af 线上的应力分布，然后进行以下步骤的静力分析：①解 Cauchy 问题，求 ae 内的应力，②解 Goursat 问题求 aec 内的应力，③解混合问题，求 oic 内的应力④解 Goursat 问题求 oai

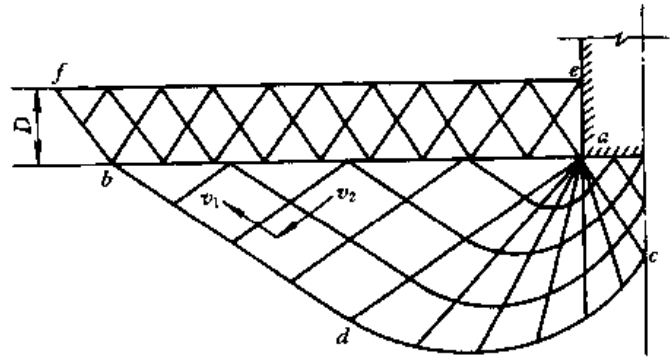


图 5-37 埋深地基的不连续解

内的应力，得出 oa 面上的极限压力分布，⑤再解混合问题，求 cgd 内的应力，⑥解 Goursat 问题求 $\square gfh$ 内的应力，⑦最后对 fbh 进行分析， hf 为特征线，而不连续线段 bf 应满足式 (5-42) 和式 (5-43) 的连续条件。因此求解混合问题，即可得 fbh 内应力。根据 bf 线必须与地面相切的条件最后决定滑动区边界 $djhb$ 和埋深 D 。

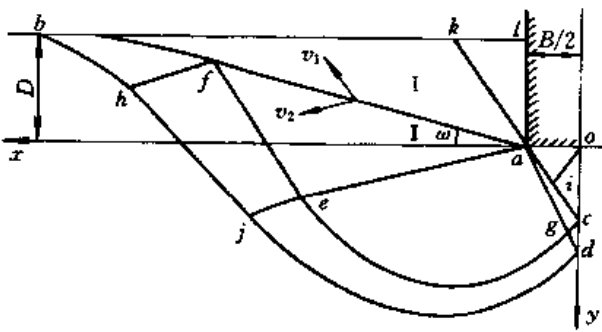


图 5-38 埋深地基的特征线法

运动分析按以下步骤进行。首先，在应力不连续线两边应力值发生跳跃，但应变速率不能跳跃，因而不连续线上应变速率必定为 0，即相应的特征线上速度 v_k 必须满足下列条件

$$\begin{aligned} & \sin(\theta + \mu - \omega)dv_k - \sin(\theta - \mu - \omega)dv_k \\ & = [-v_k \cos(\theta + \mu - \omega) + v_k \cos \\ & \quad \times (\theta - \mu - \omega)]d\theta \end{aligned} \quad (5-104)$$

当不连续线为直线时， v_1, v_2 应为常量，由此可以推论，基础底面也必须刚性下沉。具体分析从 oa 面开始，逐步向左进行，最后得到 afb 线上的速度分布。

应用上述解法对 $\varphi=30^\circ$ 和 $\varphi=0^\circ$ 两种情况进行了计算，得到的极限荷载系数如图 5-39 所示，计算结果可用下列经验公式拟合。

$$q = q_{d=0} \sqrt[3]{1 + \frac{D}{B}} \quad (5-105)$$

其中 $q_{d=0}$ 为无埋深时的极限荷载，图 5-40 和图 5-41 为两个具体的算例。

以上方法同样可以用于后倾滑动的计算，但这时不连续线 af 将不能假定为直线。其具体办法是先假定 af 为某一下凹的曲线，然后按照前面相似的步骤求出基础底面的压力和速度分布，如果求得的速度分布不符合后倾滑

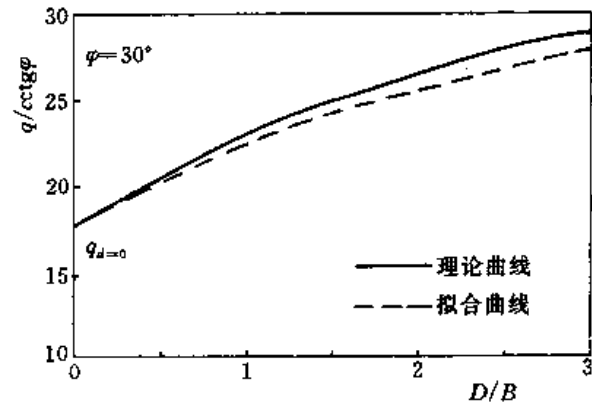


图 5-39 深埋地基极限荷载系数

① 沈珠江，不连续解在地基极限分析中的应用，南京水利科学研究所报告，No. 55，1964。

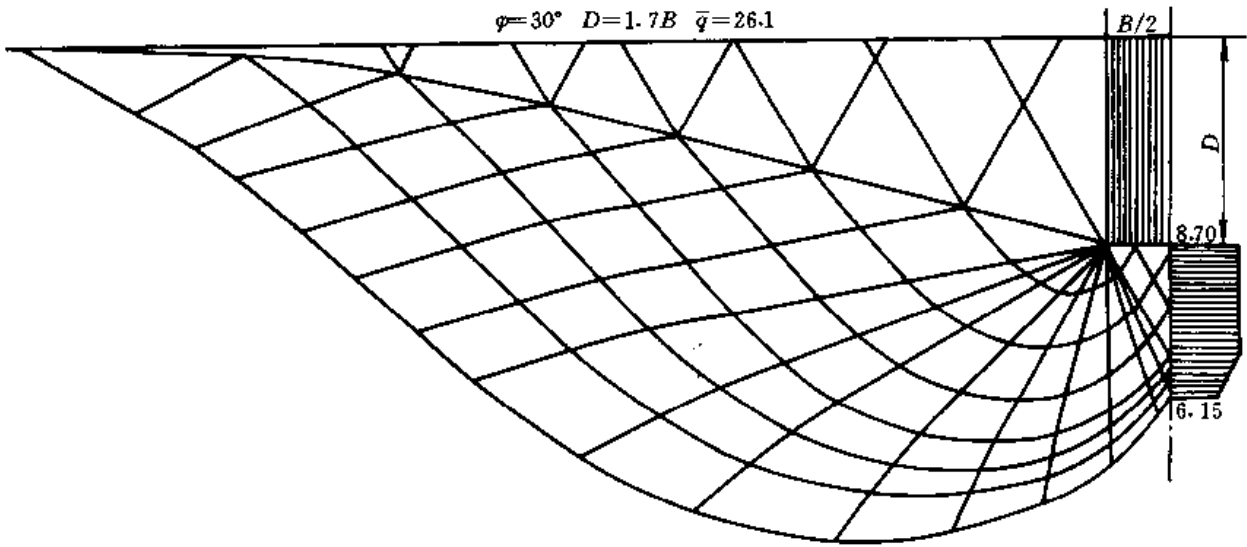


图 5-40 $c-\varphi$ 土算例

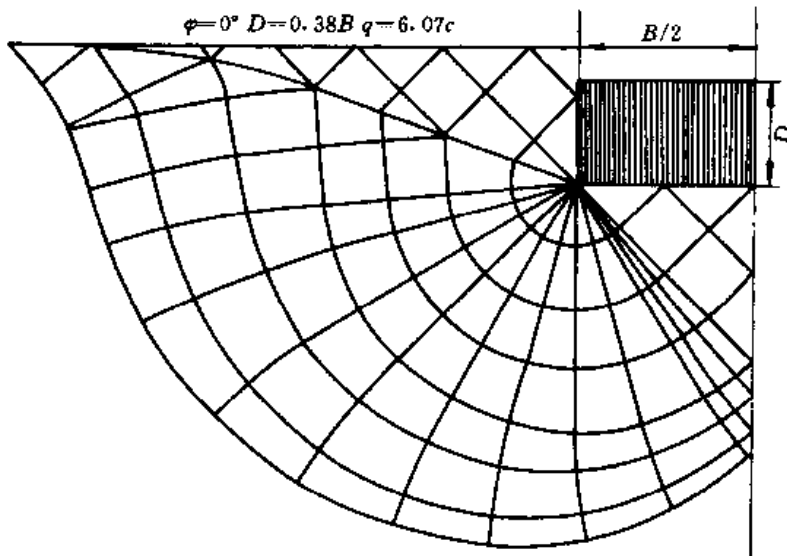


图 5-41 凝聚土算例

动的要求,需要修改 af 曲线重新计算。图 5-42 是一个算例,假定 af 线为圆弧,所得的速度场和底板上的压力也绘于图上,与后倾破坏的要求相差不远。不连续解法原则上也可以用于有重土体,当然实际做起来很麻烦。为此,对于实际问题,还是建议采用近似解法。可静解可以采用基底以上土柱当作表面荷载的办法得出,而作为可动解,建议采用图 5-43 所示的滑块平衡法。图 5-44 为对 $\varphi=30^\circ$ 土的求解结果,中间实线是用式(5-105)得出的结果。

三、水平荷载下的前倾滑动

下面讨论水平荷载下的前倾滑动,单纯垂直荷载下的前倾滑动只是其中的特例(图 5-45)。求解的步骤与前面类似,只是作用在底板上的摩阻力的方向相反, ode 区的范围缩小。其次,向前倾覆时旋转中心 o 在基础下面,而且基础底下必定附着一块土体跟着作刚性运动,因此转移线 ec 必定为对数螺线。这样,当 obd 和 ode 两区求解后,沿对数螺线积分,

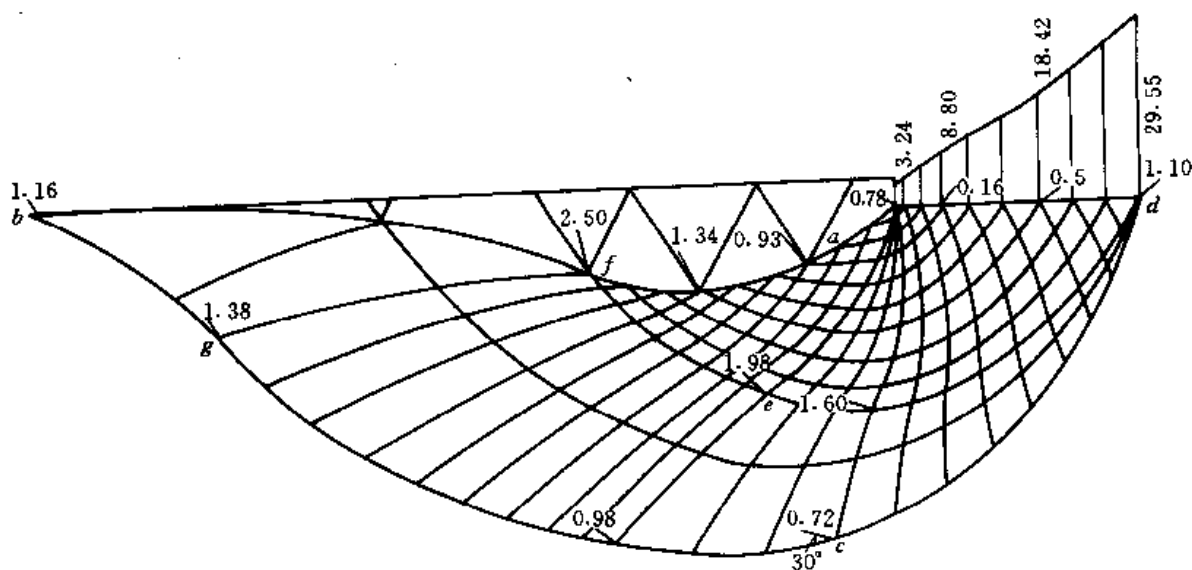


图 5-42 后倾滑动算例

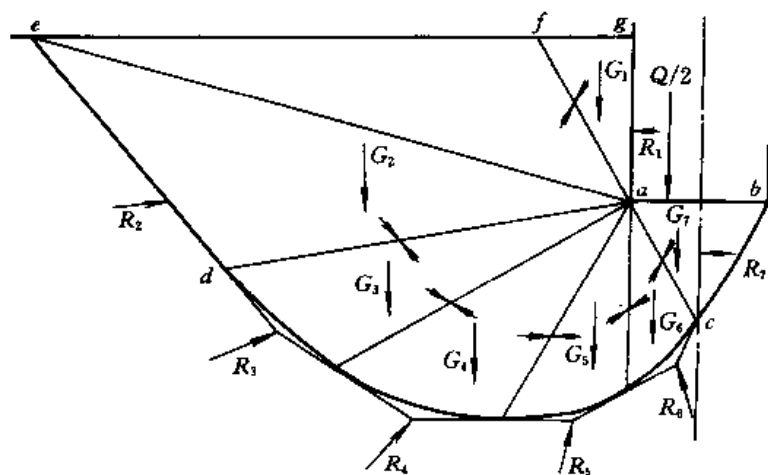


图 5-43 深埋地基的滑块平衡法

可求得线上应力分布，然后根据 oe 和 ec 线上应力，解 Goursat 问题，即可得底板上的极限荷载。运动分析沿相反方向进行，不再赘述^[5]。

决定对数螺线的位置需三个参数，相应地求得的极限荷载也有三个参数：垂直分量 Q ，水平分量 T 和偏心距 e 。对于 p 为均布荷载的无重散粒体，沈珠江求解了 Q ， T 和 e 的解析解^[5]，对 $\varphi=30^\circ$ 情况用曲线表示如图 5-46。图中虚线左边代表偏心距较大时滑动区只限于基础底下一部分，即 ac 与地面脱开的情况。当考虑土体自重时，必须用特征线法求数值解。图 5-47 就是这样的算例，其中假定底板与土的摩擦角 φ_0 也为 30° ，因而滑动线在 c 点与底板相切。当偏心距小于零，即合力移到对称轴右边时，转动中心 o' 可能移到地面以上。平面滑动，即转动中心位于无穷远处，是一个特例。当 $T=0$ 和 $e=0$ 时，即得到垂直中心荷载下地基极限平衡的情况。

对这一问题，也可以用极大极小原理求近似解。

作为可静解，选用图 5-48 的可静应力场，其中 oe 为一条应力不连续线，线左边为高塑性应力区或常说的被动土压力区，由此可以推算出 oe 线上的应力分布，然后假定 ec 线为滑动线，根

据力的矢量平衡求的 oc 面上的可静荷载分量 Q' 和 T' , 偏心矩 e 可按力的作用点位于 oc 的中点考虑, 随着选用的不连续线 oe 的倾斜度不同, 得出的 Q' 与 T' 之比将不同。针对图 5-47 的例子, 当 Q' 也为 $17.7cB$ 时, $T' = 5.4cB$ 。

可动解的速度场采用无重土的精确定解速度场, 即假定滑动线由一段直线和两段对数螺线组成, 如图 5-49 的虚线。把此速度场代入式 (5-19) 经积分后可求出

$$\int_{\Gamma_2} q_i v_i d\Gamma = Q^* v_x + T^* v_z \quad (5-106)$$

式中: v_x 和 v_z 为合力作用点的速度。为了使求得的可动解接近真正解, 必须假定不同的转动中心位置 o' (r_0, θ_0), 以 T^* 最小者为准。当 $Q^* = 17.7cB$ 时, 如此得出的 $T^*_{min} = 6.50cB$ 。而前面特征线法求得的数值解为 $T = 6.46cB$, 可见 $T' < T < T^*$, 而且 T' 比 T 更接近于 T 。

四、极限承载力公式

Terzaghi 最早提出了下列地基承载力公式^[31]

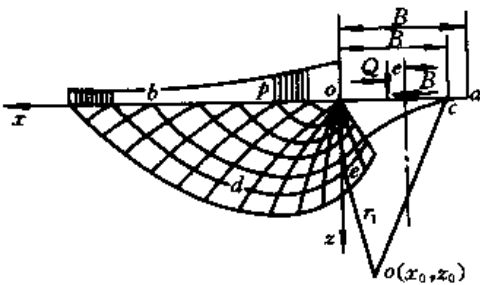


图 5-45 水平荷载下的地基极限平衡

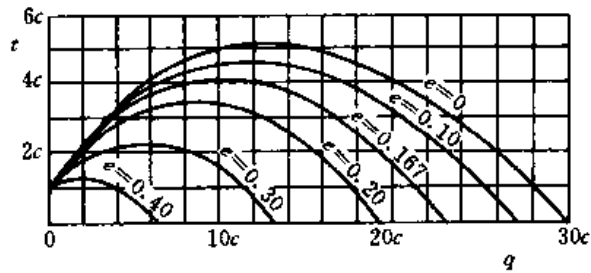


图 5-46 无重地基的极限承载力

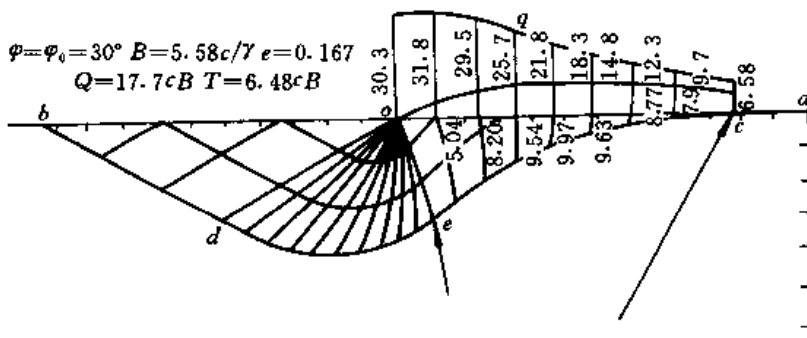


图 5-47 有重土体算例

$$q = pN_q + cN_c + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (5-107a)$$

或

$$q = (p + cctg\varphi)N_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma - cctg\varphi \quad (5-107b)$$

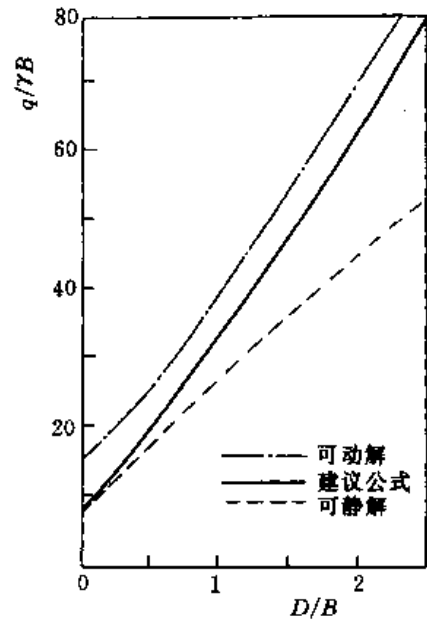


图 5-44 有重量深埋地基极限荷载系数

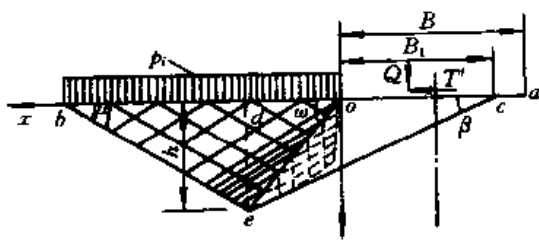


图 5-48 可静应力场

并建议了相应的 N_q 和 N_γ 的经验公式。现在应用极限分析的观点讨论这一公式的合理性。根据前面分析, 如果 N_q 和 N_γ 都由可静应力场算出, 则根据静力场的叠加原理 Terzaghi 公式将是一个可静解, 但实际计算中这些系数往往是用滑块平衡法求得的。对光滑底板来说, 这样求得的 N_q 是正确解, 即既是可静解, 又是可动解, 见式

(5-46), 但 N_γ 只能是可动解, 而对粗糙度板来说, 两者都是可动解。许多作者的可动解往往采用了无重土体的滑动面, 又不进行极小化的处理。因此, 按照上述公式求得的解一般都大于严密解而且可能偏大较多, 特别当 φ 角较大时。图 5-35 同时绘上了 Terzaghi 公式的计算结果, 可见两种情况下 Terzaghi 的解均偏大, 特别是光滑底板。

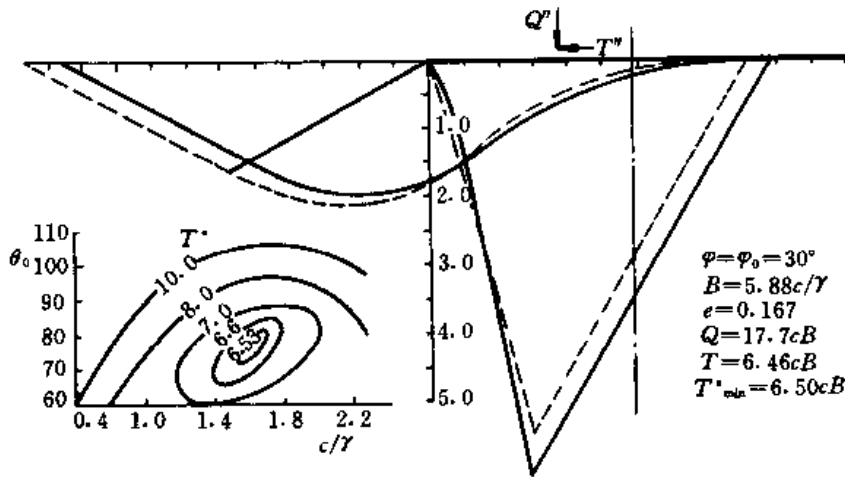


图 5-49 可动应力场

最后, 根据以上分析, 建议采用下列公式计算地基极限承载力

$$q = \sqrt[3]{1 + \frac{D}{B} \left[c \operatorname{ctg} \varphi (N_q - 1) + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \right]} \quad (5-108)$$

对光滑底板, N_γ 应当采用 Соколовский 的解, 或者近似地按下式计算

$$N_\gamma = (N_q - 1) \sin \varphi \quad (5-109)$$

对粗糙底板, 由图 5-35 可见, Terzaghi 原来建议的用于光滑底板的下列经验公式倒比较合适

$$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi \quad (5-110)$$

第十节 极限土压力

一、经典土压力理论

Rankine 和 Coulomb 土压力理论是大家所熟知的, 先从极限分析的观点讨论这两个经典土压力理论。

按照 Rankine 理论，对于水平土面、光滑垂直墙背，墙后的应力分布为

$$\sigma_x = \gamma z, \quad \sigma_z = K_a \gamma z, \quad \tau_{xz} = 0$$

上述应力场满足静力平衡条件和破坏准则，因而是可静应力场。然而，上述解答正确与否，还要看是否存在满足运动边界条件的速度场。墙的可能破坏方式有三种：①墙位于坚实地基上，因而只能水平滑动；②地基土质较差，墙身绕地基中某一点倾覆（见上节水平荷载重下地基的极限平衡）；③墙顶受到支撑，底部位移大于顶部（图 5-50）。对于前面两种情况，可以通过运动分析求得相应的速度场。具体的解法是先对 abc 区求解混合问题，因为 bc 是特征线，其上的速度分布可以根据 b 点的边界条件积分而得，另一条非特征线 ab 上已知水平位移，即式 (5-13) 中 v_1 与 v_2 之间的关系已知。其次是 acd 区，由于 ac 和 cd 两特征线上速度分布均已知，故解 Goursat 问题即可。但是对第三种墙运动情况，将得不到相应的速度场，因而 Rankine 理论不再正确。

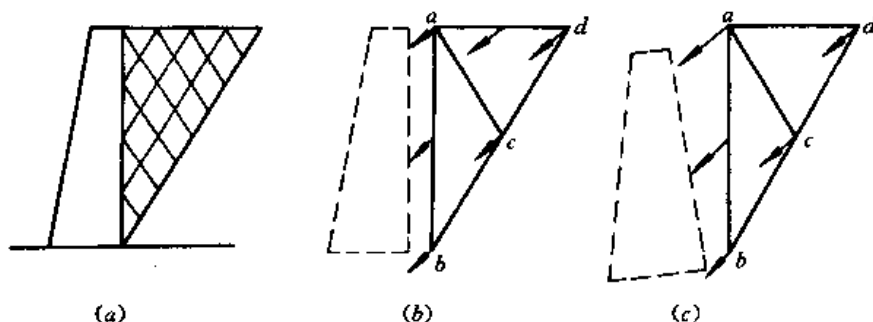


图 5-50 挡土墙的运动方式

(a) 静力滑移线场；(b) 水平滑移破坏；(c) 倾覆破坏

前面已经证明，基于滑块平衡的 Coulomb 土压力理论实际上属于可动解，由于假定滑块作刚性运动，只适用于墙身平移的破坏方式，而且所得的极限土压力是一个合力。

二、支撑墙土压力

当墙的上部受到支撑时，可能发生两种形式的破坏，即①上段墙不动，下段墙前移或后移；②墙体围绕支撑点旋转，如图 5-51。这两种破坏均可用不连续解法进行分析。

图 5-52 是第一种破坏问题的一个算例，具体分析步骤是先假定应力不连续线 oe 的倾角，然后通过静力分析和运动分析求得 ob 面上的压力和速度分布，如果求得的速度分布不符合要求，

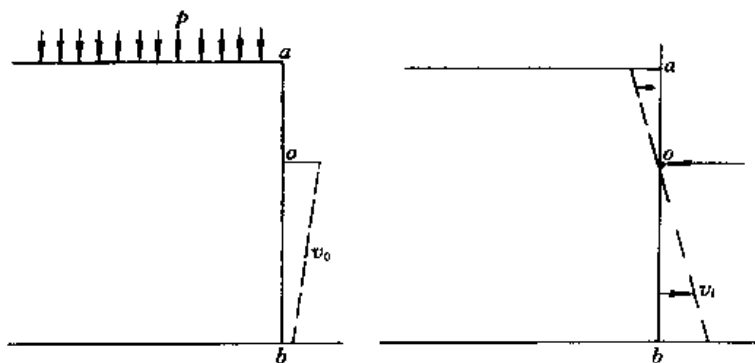


图 5-51 墙的局部运动和转动

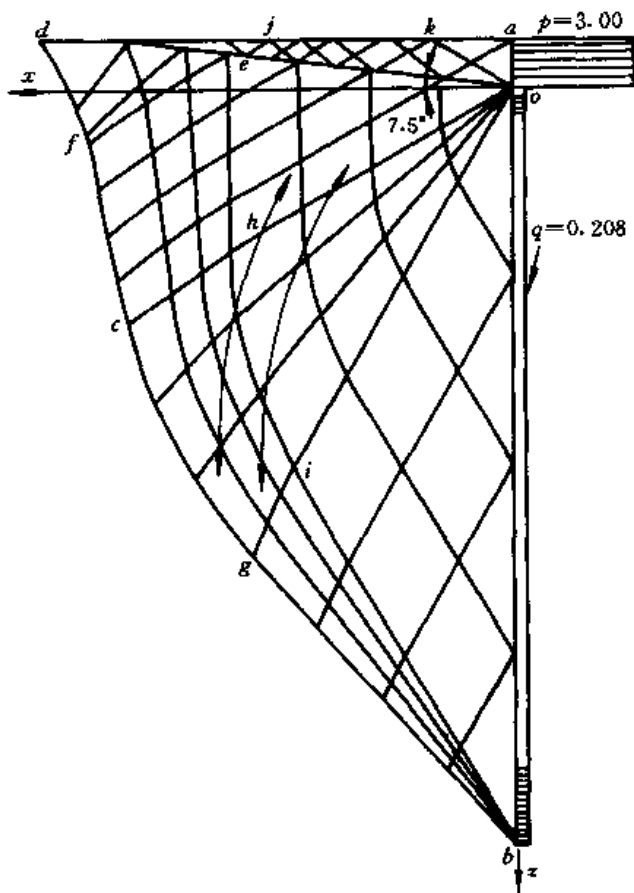


图 5-52 上部固定墙上的土压力

需要重新假定 oe 线的倾角, 重复计算。计算过程与前面的埋深基础问题类似。图中所示的解也是针对无重土体, 当 oe 段取为直线时墙 ab 将向前平移。对有重土体, 需要利用极值原理求近似解。

建议的可静解如图 5-53 (a) 所示, 下段墙上的可静压力可以按下列 Rankine 主动土压力公式计算

$$Q = \frac{1}{2} \gamma (H + 2D) H K_a$$

作为可动解, 建议如图 5-53 (b) 所示, 把滑动土体分成四块, 其中楔形体 oce 为变形区, 其他均为刚性移动区。可动压力 Q' 可用图解法计算, 如图 5-53 (c)。为了求得最小的可动压力 Q'_{\min} , 需要变动楔形区的夹角 θ 。根据极值原理, 真正的极限压力大于可静压力而小于可动压力, 即

$$-Q' < -Q < -Q'_{\min}$$

或 $Q'_{\min} < Q < Q'$

式中负号表示主动土压力对土体所作的是负功。

是负功。

利用这一方法对 $\varphi = 30^\circ$ 和 $H = 4D$ 的情况进行计算, 得 $Q' = 0.25\gamma H^2$, $Q'_{\min} = 0.20\gamma H^2$ 。如果取 $Q = \frac{1}{2}(Q' + Q'_{\min}) = 0.225\gamma H^2$, 其精度为 $\pm 10\%$ 。对于旋转破坏问题, 必须采用弧形的应力不连续线, 图 5-54 是一个算例。显然, 这里问题更为复杂, 所得的速度场不一定满足旋转

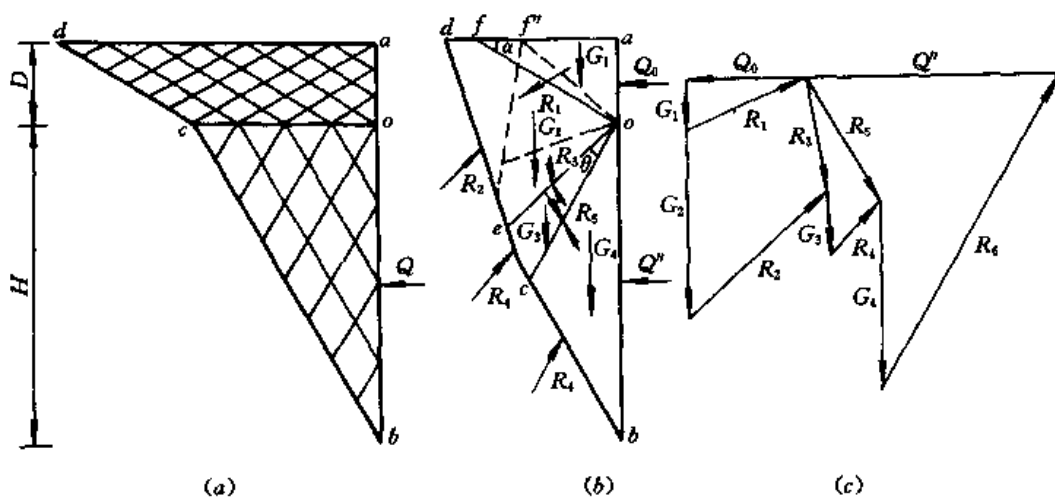


图 5-53 上部固定墙的近似解法
(a) 静力场; (b) 滑动场; (c) 力矢量场

滑动的要求,因而需要不断修改不连续线的形状。

三、孔口挤出问题

孔口挤出问题的合理解法也需要求助于应力不连续线,下面应用这一方法求解平孔和圆孔的挤出。

图 5-55 中 aa 代表一个底板,其上有一定的压力或无压力,要求确定 dd 面向下挤动的挤压力。其求解步骤是先分析下面的应力场,然后假设一条与 o 点相切的不连续线 oe ,再进行上半部的分析,求得 od 面上的挤压力分布。此后再按照右边的分区进行运动分析,求得 od 面上的速度分布,如果不符合 od 面刚性下移的要求,必须修改 oe 线的形状。

对于圆孔问题,宜先把特征线方程写成极坐标形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \operatorname{tg}(\psi + \mu) \frac{\partial \xi}{r \partial \theta} &= -\frac{\operatorname{tg}(\psi + \mu)}{r} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} + \operatorname{tg}(\psi - \mu) \frac{\partial \eta}{r \partial \theta} &= \frac{\operatorname{tg}(\psi - \mu)}{r} \end{aligned} \quad (5-111)$$

ψ 为大主应力方向与 r 轴的夹角。对无重土体,可得特征线方程和应力场的解析解如下

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{\pm \theta \operatorname{tg} \mu} & (\psi = 0) \\ r &= r_0 e^{\pm \theta \operatorname{tg} \mu} & (\psi = 90^\circ) \end{aligned} \quad (5-112)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 r^{-2 \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \varphi} & (\psi = 0) \\ \sigma &= \sigma_0 r^{2 \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \varphi} & (\psi = 90^\circ) \end{aligned} \quad (5-113)$$

求得下半部应力场后,即可采用前面类似的方法,先假定一条不连续线 ab ,再进行静力分析和运动分析,求得挤压面上的压力和速度分布。图 5-56 是一个算例。

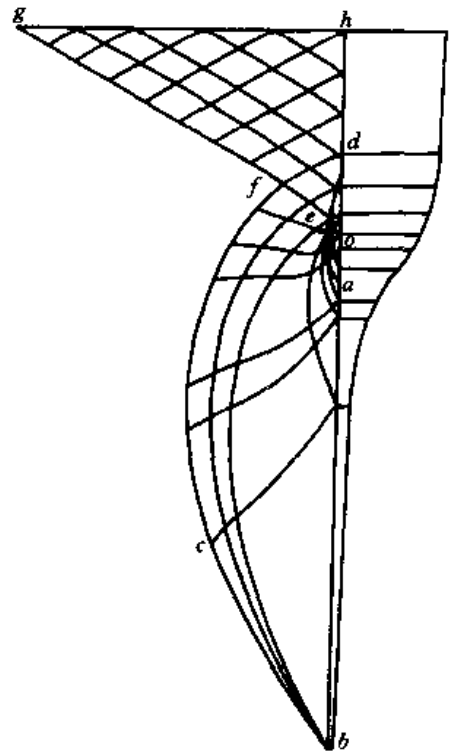


图 5-54 旋转运动墙

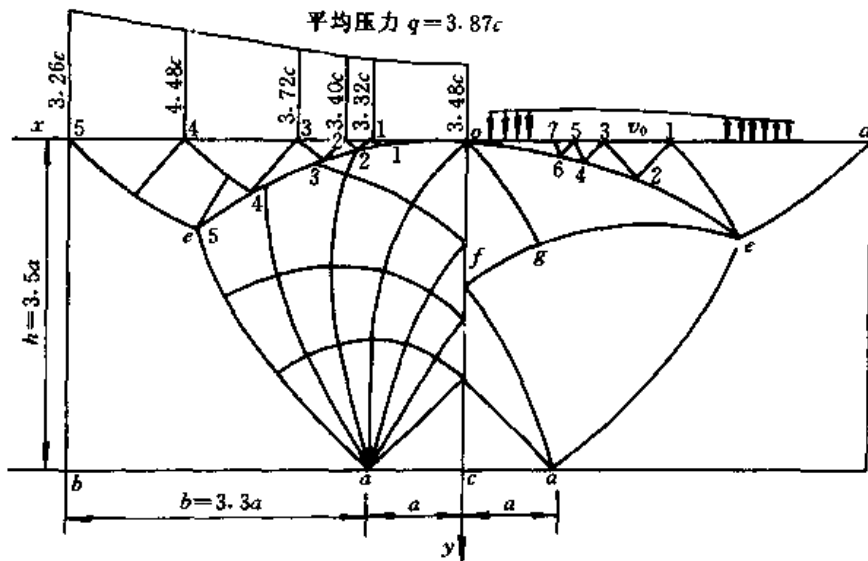


图 5-55 孔口挤出问题解法

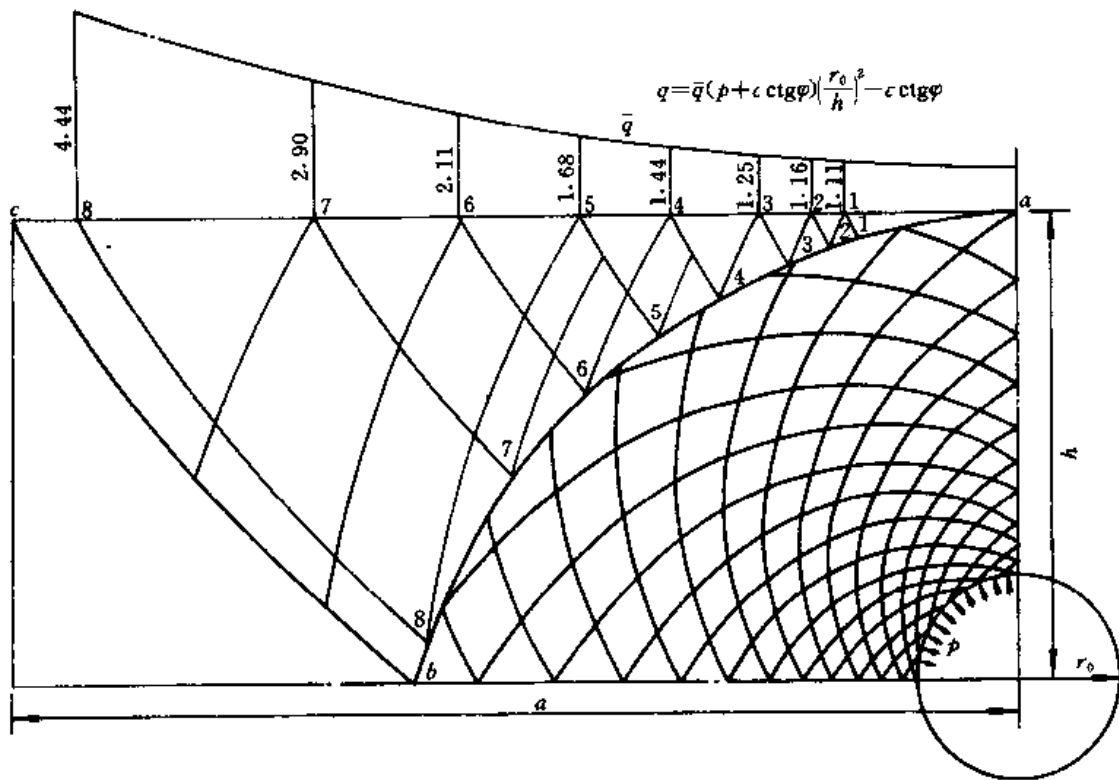


图 5-56 孔口挤出问题算例

四、阻滑桩土压力

前面讨论的都是垂直截面上的滑动问题。对于阻滑桩，可以切一水平面而讨论土绕过桩滑动时作用于单位桩长上的土压力。此时，由于重力与所讨论的截面垂直，土体就可以当作无重体看待。在这样的条件下，进一步假设桩表面绝对粗糙，且桩的间距较大，忽略其相互作用，沈珠江推得土体绕过矩形桩（图 5-57）和圆形桩（图 5-58）滑动时单位桩长上的绕流压力公式如下^①

$$Q = \left[\frac{e^{(\frac{\pi}{2}-\varphi)\text{tg}\varphi}}{1-\sin\varphi} - \frac{e^{-(\frac{\pi}{2}+\varphi)\text{tg}\varphi}}{1+\sin\varphi} \right] (p_0 + \sigma_c)A + 2\text{tg}\varphi(p_0 + \sigma_c)B \quad (5-114)$$

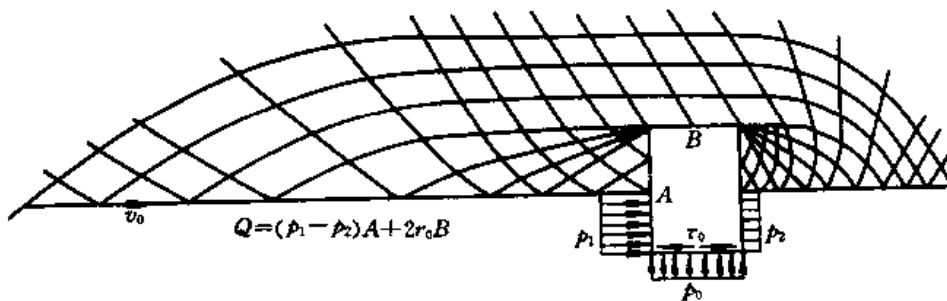


图 5-57 绕过矩形桩的滑动

① 沈珠江，散粒体对柱体的绕流压力及其在计算桩对岸坡稳定的遮帘作用中的应用，南京水利科学研究所报告，1961。

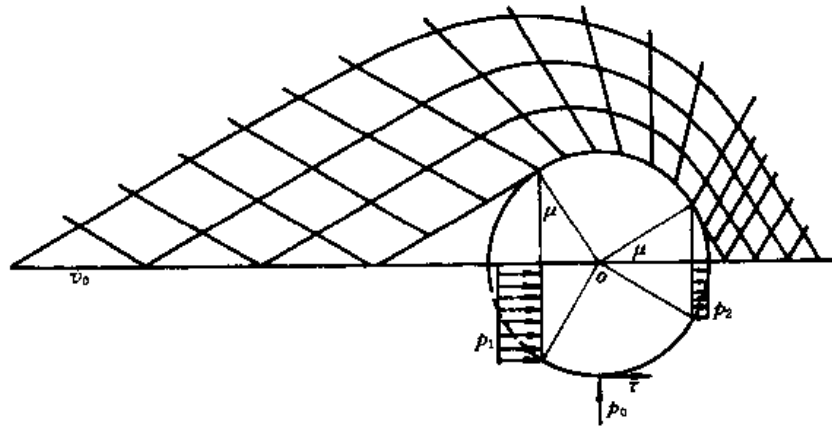


图 5-58 绕过圆形桩的滑动

和

$$Q = \frac{e^{(-\frac{\pi}{2} + \varphi) \operatorname{tg} \varphi}}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \left\{ e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} \left[3 \operatorname{tg} \varphi \sin \mu + (2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) \cos \mu \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{1 - \sin \varphi} \cos \varphi \right] + \left[3 \operatorname{tg} \varphi \cos \mu - (2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) \sin \mu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{1 + \sin \varphi} \sin \mu \right] \right\} (p_0 + \sigma_c) D \quad (5-115)$$

其中 A 和 B 为矩形桩的尺寸, D 为圆桩直径, $p_0 = K_0 \sigma_c$ 为所考察深度的静止侧压力。

对纯凝聚土, 上式将简化为

$$Q = (2 + \pi) c A + 2 c B \quad (5-114a)$$

和

$$Q = 4 \sqrt{2} c D \quad (5-115a)$$

第十一节 土坡极限分析

滑坡可能性分析常称土坡稳定分析, 但此处的稳定实际上是指破坏, 与力学中的稳定概念不同。本节从极限分析的观点出发讨论土坡稳定分析中常见的几种方法, 因此正名为土坡极限分析。

一、圆弧滑动面

古典的瑞典圆弧法是针对软粘土边坡提出的, 从极限分析的观点看, 这一方法的思路符合极小定理的基本原则。

根据前面介绍的饱和粘土的极限平衡理论, 圆弧法实际上是假定整个滑动体为一刚体的可动解法, 因而只需要考虑滑弧上的能量耗散。假定 R 为滑弧半径, 滑动时的旋转角速度为一单位, 则滑面上的切线速度 $\Delta v = R$, 每一土条垂直向速度为 $R \sin \alpha_i$, 这样式 (5-101) 可以改为 (图 5-59)

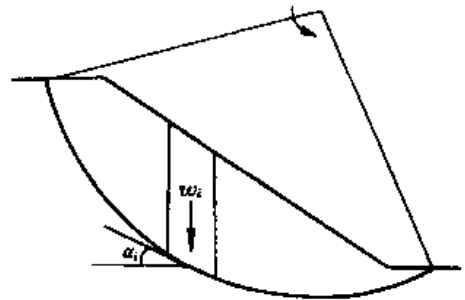


图 5-59 圆弧滑动面

$$F_s^* = \frac{\sum (c_i + \sigma'_{ci} \operatorname{tg} \varphi_c) \operatorname{seca}_i}{\sum w_i \sin \alpha_i} \quad (5-116)$$

式中： w_i 为土条重； $\sigma'_{ci} = \sigma_{ci} - u_i$ 为滑面上法向有效固结应力； u_i 为孔隙压力。以上就是圆弧滑动法求安全系数的基本公式。既然是可动解，就要假定不同的滑面，寻找安全系数的极小值。

纵观几十年来土坡稳定分析的历史，争论的焦点正是集中在滑面上法向应力的确定上。Fellenius 法假定 $\sigma_{ci} = \gamma h_i \cos \alpha_i$ ，相当于采用下列应力场

$$\sigma_x = \gamma h, \sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0$$

当 $\alpha_i \rightarrow 90^\circ$ 时， $\sigma_{ci} = \sigma_x = 0$ ，因而比较偏于保守。按照有效固结应力法的原则， σ_c 和 u 最好应用 Biot 固结理论算出。采用近似方法时，可以适当考虑水平应力，例如令其等于静止侧压力或主动侧压力。常见的从土条平衡出发并假定滑弧上剪应力满足抗剪强度后再求法向应力的办法未必合理。

对于一般的 $c-\varphi$ 土，破坏时发生剪胀，假定圆弧滑面后已不能把滑动土体看成刚体，此时土条侧面上也将发生能量耗散，如果继续按刚体滑动进行分析，所得的安全系数就可能偏低。图 5-60 是陈祖煜所做的比较^[19]，其中 1、2 和 3 分别是应用 Spencer 法，Bishop 法和作者自己的能量法的计算结果，相应的最小安全系数分别为 1.372，1.387 和 1.416。后者考虑了土条间的能量耗散，是一种明确的可动解法。由此可见，传统的条分法不是严格意义上的可动解，但在某种意义上说，倒可能更接近于真解。因为这些解法在寻求条间作用力时力求遵守可静应力条件。以上结果可以用潘家铮建立的土坡稳定分析的极大极小原理来说明，即对每一个固定的滑弧，应当寻求一种可静应力分布，使安全系数达到极大值，而对于不同的滑弧，应当寻求最小的安全系数^[10]。

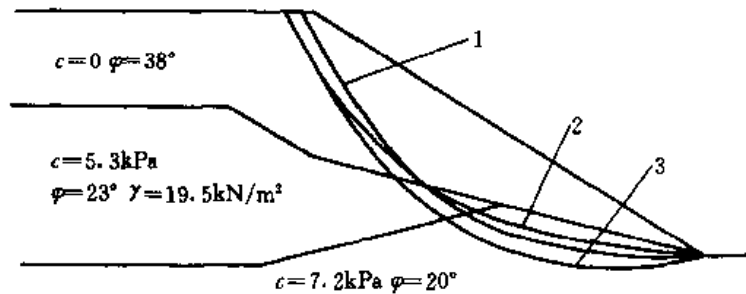


图 5-60 能量法和传统圆弧法的比较

二、对数螺线滑动面

对于 $c-\varphi$ 土，满足刚体滑动条件的滑动面应是对数螺线，而且此时滑动面上的能量耗散只取决于凝聚力 c ，与法向应力 σ 无关。这就使前面讨论的有关法向应力的争论成为不必要，相应的计算工作也大为简化。而且这一方法也可方便地推广到成层土，只要令每一段滑动面的切线方向与旋转方向的夹角为 φ 就行了（图 5-61）。相应的可动安全系数定义为

$$F_s^* = \int_{r_3} c \Delta v_i^* d\Gamma / \int_a F_i v_i^* d\Gamma \quad (5-117)$$

如果假定旋转速度为 1，则对第二层土中的 i 点，相应的速度为 $R_i = R_0 \exp[-\alpha_i \operatorname{tg} \varphi_3 - (\alpha_i -$

$\alpha_3) \text{tg}\varphi_2]$, 由此, 上式写成条分法的形式将变为

$$F_s = \frac{\sum c_i R_i \sec(\varphi_2 + \alpha_i)}{\sum w_i R_i \sin\varphi_1} \quad (5-118)$$

栾茂田等从变分原理和 Lagrange 乘子法出发^[32], 建议了所谓的一般滑楔法, 并用于成层地基的计算。但该法的实质与上式一致。

三、任意滑动面

Janbu 法和推力传递法均针对任意滑动面而提出。前者假定土条间合力作用点的位置, 后者则假定土条间作用力平行于土条底面。以推力传递法为例, 其推力公式为 (图 5-62)

$$E_i = F_i w_i \sin\alpha_i - (w_i \cos\alpha_i - E_{i-1} \sin\Delta\alpha_i) \text{tg}\varphi_i - c_i l_i + E_{i-1} \cos\Delta\alpha_i \quad (5-119a)$$

$$\text{或简写为} \quad E_i = F_i w_i \sin\alpha_i - w_i \cos\alpha_i \text{tg}\varphi_i - c_i l_i + E_{i-1} \psi \quad (5-119b)$$

其中 $\psi = \cos\Delta\alpha_i + \sin\Delta\alpha_i \text{tg}\varphi$ 被称为推力系数, $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ 。安全系数 F_s 通过迭代得出。最后满足 $E_{n+1} = 0$ 的 F_s , 即为正确的解答。显然, 在这类方法中, 不能再假定整个滑动体作刚性运动。此时, 从满足可动解的要求看, 滑块底面及侧面均应是滑动面, 然后按照第六节的滑块平衡法逐块进行分析。但是, 无论是 Janbu 法还是推力传递法均不认为土条侧面是滑动面。例如, 按照推力传递法, 只有当 $\alpha = \varphi$ 时恰好满足滑动条件, 一般 α 均小于 φ , 因而不能判定相应的解为可动解。而对于滑面端部 α 大于 φ 的土条, 则又破坏了屈服条件。近来, 王元汉

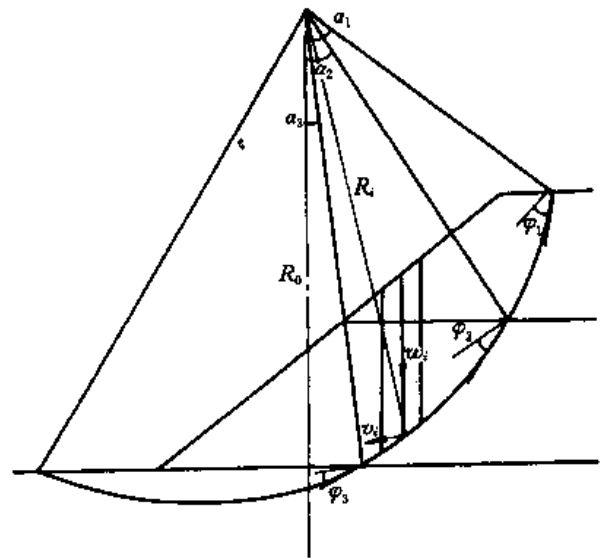


图 5-61 对数螺旋滑动面

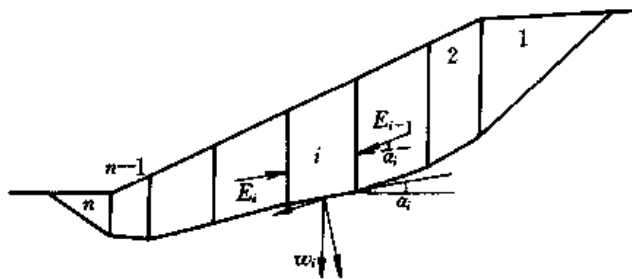


图 5-62 推力传递法

对此作了改进, 假定土条间切向力 T 和法向力 N 之间满足下列屈服条件^[33]。

$$T = N \text{tg}\varphi / F_s \quad (5-120)$$

这样修改后, 将保证所得的解即为可动解。但是求可动解时应当假定不同的滑动面寻求安全系数的极小值, 土条之间的面作为一种滑动面就不能只限于垂直面。

参 考 文 献

- 1 Drucker D C & Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quartly J. Appl. Math, 1952, 10 (2)
- 2 Shield R T. Mixed boundary value problems in soil mechanics. Quartly J. of Appl. Math, 1953, 11 (1)
- 3 Соколовский В. В., Статика сыпучей среды, 1960, 第 3 版 (第 2 版中译本, 徐志英译, 地质出版社,

- 1956).
- 4 沈珠江. 散粒体极限平衡理论及其应用. 水利学报, 1962 (3): 22~36
 - 5 沈珠江. 水平荷重下地基的极限平衡. 中国科学, 1964, 13 (7): 1138~1150
 - 6 沈珠江. 极大极小原理在土体稳定分析中的应用. 见: 第一届土力学及基础工程学术讨论会论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1964: 202~210
 - 7 钱令希, 钟万勰. 论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理. 力学学报, 1964 (1)
 - 8 Palmer A C. A limit theorem for materials with non-associated flow laws, *J. Mecanique*, 1966. 5 (2)
 - 9 De Jong G D J. A limit theorem for material with internal friction, *Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mechanics*. Cambridge, 1973: 12~21
 - 10 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析. 北京: 水利出版社, 1980
 - 11 Chen W F. *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier Company, 1975
 - 12 Salencon J. *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & Sons, 1977
 - 13 Березанцев В Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1952.
 - 14 Lysmer J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics, *J. Soil Mech. & Found. Div., ASCE*, 1970, 96 (SM4): 1311~1334
 - 15 李国英, 沈珠江. 下限原理有限元法及其在土工问题中的应用. 岩土工程学报, 1997, 19 (5): 84~89
 - 16 栾茂田等. 土体稳定分析的改进滑楔模型及其应用. 岩土工程学报, 1995, 17 (4): 1~9
 - 17 Gussmann P. Kinematical elements for soils and rocks, In: 4th Int. Conf. Numerical Methods in Geomech. 1982, 1: 47~52
 - 18 董正筑, 黄平. 土力学极限分析的滑移单元最优化算法及侧土压力计算. 岩土工程学报, 1992, 14 (2): 28~36
 - 19 陈祖煜. 边坡稳定的塑性力学上限解. 见: 第七届土力学及基础工程学术会议论文集, 北京: 中国建筑工业出版社, 1994: 484~488
 - 20 陈祖煜, 高峰. 地基承载力的数值分析方法. 岩土工程学报, 1997, 19 (5): 6~13
 - 21 Michalowski R L. Slope stability analysis: a kinematical approach, *Geotechnique*, 1995, 45 (2): 283~293
 - 22 Tamura J et al. Rigid plastic finite element method for soil structure, In: 5th Int Conf. Numerical Methods in Geomech. 1985, : 185~192
 - 23 Jiang G L and Magman J P. Stability analysis of embankments: comparison of limit analysis with method of slices, *Geotechnique*, 1997, 47 (3): 857~872
 - 24 阮怀宁, 徐志英. 复杂岩土材料平面变形强度理论, 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 49~55
 - 25 陈希有, 龚晓南, 曾国熙. 具有各向异性和非均质性的 $c-\varphi$ 土上条形基础的极限承载力. 土木工程学报, 1987, 20 (4): 74~82
 - 26 陈越. 异向性粒状材料的极限平衡理论. 岩土工程学报, 1994, 16 (5): 54~64
 - 27 陈越. 粒状材料强度异向性的物理实质和数学表现形式. 岩土工程学报, 1992, 14 (1): 1~13
 - 28 沈珠江. 饱和粘性土的极限平衡理论. 见: 第一届土力学及基础工程学术讨论会论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1964: 193~201
 - 29 Taylor D W & Ooi T A. Increase in bearing capacity resulting from consolidation, *Geotechnique*, 1971. 21 (4): 376~390
 - 30 沈珠江. Limit analysis of soft ground reinforced by geosynthetics, 岩土工程学报 1998, 20 (4): 82~86

- 31 Terzaghi K & PeckRB. 工程实用土力学, 蒋彭年译. 北京: 水利水电出版社, 1960
- 32 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 土体稳定分析极限平衡法改进及其应用. 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 20~29
- 33 王元汉, 周晓育. 一种改进的边坡稳定分析的条分法. 见: 第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994: 460~463

第六章 非饱和土固结理论

第一节 概 述

随着饱和度的不同,非饱和土可以区分为气封闭,气—水均连通和气连通三种状态,如图 6-1^[1]。第一种状态下孔隙气以小气泡形式封闭在孔隙水中,并随孔隙水一起流动。这时可以把含气水当作可压缩液体,运用第四章所述的饱和土固结理论进行分析。第三种状态下孔隙水以薄膜水和水蒸气形式存在,不需要考虑它的流动,而且此时土的力量也比较高,不需要进行专门研究。所以非饱和土固结理论的研究范围主要是针对水—气双连通状态,其饱和度大概在 50%~90% (粘土) 或 30%~80% (砂土) 之间。

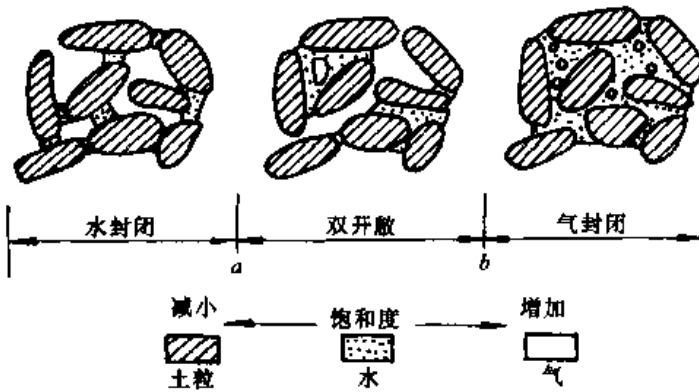


图 6-1 非饱和土三种含水状态

尽管从 30 年代起人们就开始对非饱和土进行研究,但由于难度大,进展缓慢,在 70 年代以前,有关非饱和土的研究停留在资料积累和探索阶段。其中 60 年代对于非饱和土有效应力公式的研究不能不说是走了一段弯路^[2]。70 年代净应力和吸力双变量理论的确立标志着非饱和土力学的研究逐步趋向于成熟^[3]。但是,非饱和土固结理论的建立则完全是 90 年代以后的事^[4]。目前,有关

这一理论还仅仅是形成了初步的框架,可能还要经过 10~20 年的努力,才能达到比较完善的地步。

由于陆地上非饱和土的覆盖面积远大于饱和土,非饱和土固结理论有其巨大的应用前景,除了目前涉及较多的膨胀土,黄土和人工填土外,诸如蒸发引起的硬壳层的形成,雨水入渗引起的滑坡、冻土中的水分迁移和冻胀等无不与此有关。只是对于这些问题研究深度还很不够。本章主要要讨论膨胀土、黄土和人工填土有关的问题。

第二节 基本变量的选择

不计温度的影响,陈正汉证明^[5],非饱和土的应力状态可用以下三组应力张量中任一组来描述

$$\{\sigma^*\}, s\{\delta\}, u_a\{\delta\} \quad (6-1a)$$

$$\{\sigma\} - u_w\{\delta\}, s\{\delta\}, u_w\{\delta\} \quad (6-1b)$$

$$\{\sigma^*\}, \{\sigma\} - u_w\{\delta\}, \{\sigma\} \quad (6-1c)$$

式中: $\{\delta\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 为单位张量; $s = u_a - u_w$ 为吸力; $\{\sigma^*\} = \{\sigma\} - u_a \{\delta\}$ 常称净应力。Fredlund 认为^[6], 当孔隙水和气压力对土颗粒的压缩可以忽略时只需两个独立的变量就可以了, 而比较方便的是采用净应力和吸力两个变量, 这就是目前流行的双变量理论。

双变量理论最早于 1961 年由 Coleman 提出^[7], 可是, 鉴于有效应力理论在饱和土领域取得的成功, 许多人致力于寻找一种单一的有效应力变量。这就导致大量非饱和土有效应力公式的出现, 其中最著名的是下列 Bishop 公式^[8]

$$\sigma' = \sigma^* + \chi s \quad (6-2a)$$

实验表明, 系数 χ 不是一个土性常数。如果 χ 仅仅是 s 的函数, 上式可以写为

$$\sigma' = \sigma^* + \bar{s} \quad (6-2b)$$

\bar{s} 可以称为等价吸力或折减吸力, χ 即为折减系数^[9]。

通过长期的争论, 土力学家已达成共识, 对非饱和土一般情况需要采用双变量来描述, 但在一定条件下基于有效应力原理的单变量理论仍有一定的实用价值。下面讨论一下两种理论之间的关系。

按照双变量理论, 土骨架的增量型应力应变关系可以写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C]_m \{\Delta\sigma^*\} + [C]_u \Delta s \{\delta\} \quad (6-3a)$$

或当只考虑体积应变时

$$\Delta\epsilon_v = m_1 \Delta\sigma_m^* + m_2 \Delta s \quad (6-3b)$$

其中 $[C]_m$ 和 $[C]_u$ 分别是相应于净应力和吸力的柔度矩阵, m_1 和 m_2 为相应的体积压缩系数, σ_m^* 为平均净应力。而按照单变量理论, 考虑到 $\Delta\sigma' = \Delta\sigma^* + \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} \Delta s$, 上述两式应写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C]_m \{\Delta\sigma^*\} + [C]_u \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} \Delta s \{\delta\} \quad (6-4a)$$

$$\Delta\epsilon_v = m_1 \Delta\sigma_m^* + m_2 \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} \Delta s \quad (6-4b)$$

由此可见, 在双变量理论中, $[C]_u$ 和 m_2 是与 $[C]_m$ 和 m_1 不同的独立的系数, 而对单变量理论来说, 它们应遵守下列关系

$$[C]_u = [C]_m \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} \quad (6-5a)$$

$$m_2 = m_1 \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} \quad (6-5b)$$

显然, 并不是任何情况下上述关系都能遵守的, 例如对于膨胀土, $m_1 > 0$; $m_2 > 0$, 由于 $\frac{\partial \bar{s}}{\partial s}$ 恒大于 0, 上述关系可能得到遵守; 但对湿陷性土, $m_2 < 0$, 上述关系不可能满足。由此可见, 有效应力原理不能用于湿陷性土。

在某些情况下, 用饱和度 S_r 代替吸力作为变量可能更为方便。如果水分特征曲线是唯一的, $s = f(S_r)$, 则式 (6-3a) 就可以改写为

$$\{\Delta\epsilon\} = [C]_m \{\Delta\sigma^*\} + [C]_{w'} \Delta S_r \{\delta\} \quad (6-6)$$

其中 $[C]_{w'} = [C]_u \frac{\partial \bar{s}}{\partial S_r}$ 。显然, 这一研究途径只适用于含水量单调增加或单调减小的情况,

例如黄土的单调增湿问题。对于含水量季节变化的问题，例如膨胀土地基，由于 s 与 S_r 之间的关系不再是唯一的，就不宜采用这一办法。

第三节 基本方程式

60~70 年代陆续有人对非饱和土的一维固结问题进行过研究，其中值得一提的是 Fredlund 基于双变量理论推导得出的一维固结方程^[10]。80 年代后期有人开始研究三维固结方程。李锡夔等在简单假定 $\chi=S_r$ 后从有效应力概念出发把 Biot 固结理论推广到饱和土^[11]。陈正汉则把混合物理论用于三相的非饱和土，得出类似的包含 5 个场变量的三维固结方程^[12,13]。杨代泉严格按双变量理论推导了非饱和土的三维固结方程^[14,15]。下面介绍杨代泉的研究成果，其中还考虑了温度的变化。

一、基本假设

- 1) 土体为均质各向同性材料；
- 2) 土骨架只有微小应变；
- 3) 土颗粒和孔隙水不可压缩；
- 4) 孔隙水 and 气各自连通，可在各自压力梯度和温度梯度下运动，且服从 Darcy 定律；
- 5) 孔隙气体的压缩与溶解分别服从 Boyle 定律和 Henry 定律。

二、控制方程

1. 土体平衡方程

此方程已见第三章。由于这里必须考虑非线性，宜写成增量式，并简写为

$$L\{\Delta\sigma\} + \{\Delta b\} = 0 \quad (6-7)$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

2. 孔隙水连续方程

孔隙水包括液体水和蒸汽两部分，单位土体内的含量分别为 $\rho_w\theta_w$ 和 $\rho_v\theta_v$ ，而流出的质量分别为 $\text{div}\vec{q}_w$ 和 $\text{div}\vec{q}_v$ ，由此可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w\theta_w + \rho_v\theta_v) = -\text{div}(\vec{q}_w + \vec{q}_v) \quad (6-8)$$

式中： $\theta_w=S_r n$ 和 $\theta_v=(1-S_r)n$ 分别为体积含水量和含气量； ρ_w 和 ρ_v 为水和蒸汽密度； \vec{q}_w 和 \vec{q}_v 为水和蒸汽质量通量。

3. 孔隙气连续方程

孔隙气包括除去蒸汽后的自由气和水中溶解气两部分，其单位土体内的含量分别为

$\rho_a \theta_a \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right)$ 和 $c_h \rho_a \theta_w$, c_h 为 Henry 溶解系数。流出量也包括气体本身流动和水流带出两部分, 即

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_a \theta_a \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right) + \rho_a c_h \theta_w \right] = - \operatorname{div} \left(\vec{q}_a + c_h \frac{\rho_a}{\rho_w} \vec{q}_w \right) \quad (6-9)$$

4. 热量守恒方程

土体内的热量变化由温度变化和水与蒸汽之间相变两部分组成, 因而单位土体内的热量变化与热流之间关系可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_T T + c_v \rho_v \theta_a - c_w \rho_w \theta_w) = - \operatorname{div} \vec{q}_h \quad (6-10)$$

式中: T 为绝对温度; $c_T = \sum_1^4 c_i \rho_i \theta_i$, $i=1, 2, 3, 4$ 分别代表固体颗粒、水、汽和空气; c_i 为它们的比热容; c_v 和 c_w 分别代表蒸发 (θ_a 增加) 和凝结 (θ_w 增加) 时的热量变化系数; \vec{q}_h 表示热流。

5. 骨架变形的几何方程

以压缩为正的应变增量为

$$\{\Delta \epsilon\} = - L^T \{\Delta U\} \quad (6-11)$$

其中 $\{\Delta U\} = \{\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z\}^T$ 为位移增量。

6. 骨架的本构方程

把式 (6-3) 改为

$$\{\Delta \sigma^*\} = [D]_m (\{\Delta \epsilon\} - \{\Delta \epsilon^0\}) \quad (6-12)$$

其中 $\{\Delta \epsilon^0\} = [C]_m \Delta s \{\delta\}$, $[D]_m = [C]_m^{-1}$

7. 水流方程

水和蒸汽流受位势和吸力势控制, 也与温度梯度有关, 一般情况下可以写为

$$\frac{\vec{q}_w}{\rho_w} = - d_{T_w} \operatorname{grad} T - \frac{k_w}{\rho_w g} \operatorname{grad} u_w - k_w \operatorname{grad} z \quad (6-13a)$$

$$\frac{\vec{q}_v}{\rho_w} = - d_{T_v} \operatorname{grad} T - \frac{k_v}{\rho_w g} \operatorname{grad} (u_a - u_w) \quad (6-13b)$$

式中: d_{T_w} 和 d_{T_v} 为热梯度下水和蒸汽的扩散系数; k_w 和 k_v 为水力梯度和吸力梯度作用下水和蒸汽的渗透系数。

8. 气流方程

假定气流也服从 Darcy 定律, 可得

$$\frac{\vec{q}_a}{\rho_a} = - d_{T_a} \operatorname{grad} T - \frac{k_a}{\rho_a g} \operatorname{grad} u_a \quad (6-14)$$

$d_{T_a} = k_a \frac{u_a + p_a}{T}$ 为热梯度下的渗气系数。

9. 热流方程

$$\vec{q}_h = - (\lambda_m - c_v \rho_w d_{T_v}) \operatorname{grad} T + c_v \vec{q}_v + c_w T \vec{q}_w \quad (6-15)$$

式中: λ_m 为土的平均热传导系数。

10. 气体压缩方程式

按 Bayle 定律, 孔隙气的密度可按下式计算

$$\rho_a = \rho_{a0} \left(1 + \frac{u_a}{p_a} \right) \frac{T_0}{T} \quad (6-16)$$

式中： ρ_{a0} 为 $T=T_0$ 和 $u_a=0$ 时的密度。

11. 吸力状态方程

也称水分特征曲线，一般可以写为

$$u_a - u_w = f(S_r, n, T) \quad (6-17)$$

具体表达式将在后面讨论。上述式中孔隙率 $n = n_0 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$ 。

把式 (6-11) 代入式 (6-12) 后再代入式 (6-7) 可得

$$L[D]_m L^T \{\Delta U\} + L u_a \{\delta\} = \{\Delta b\} + L[D]_m \{\Delta \epsilon^0\} \quad (6-18)$$

把式 (6-13a) 代入式 (6-8)，并用饱和度取代体积含水量，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[S_r n + \frac{\rho_v}{\rho_w} (1 - S_r) n \right] = \operatorname{div} [(d_{T_w} + d_{T_v}) \operatorname{grad} T] + \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div} [(k_w - k_v) \operatorname{grad} u_w] \\ + \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div} (k_v \operatorname{grad} u_a) + \frac{\partial}{\partial z} k_w \end{aligned} \quad (6-19)$$

把式 (6-13b) 和式 (6-14) 代入式 (6-9) 后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_a (1 - S_r) n \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) + \rho_a c_h S_r n \right] = \operatorname{div} [\rho_a (d_{T_a} + c_h d_{T_w}) \operatorname{grad} T] \\ + \frac{1}{g} \operatorname{div} (c_h \rho_a k_w \operatorname{grad} u_w) + \frac{1}{g} \operatorname{div} (\rho_a k_a \operatorname{grad} u_a) + \frac{\partial}{\partial z} (c_h \rho_a k_w) \end{aligned} \quad (6-20)$$

把式 (6-15) 代入式 (6-10) 后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [c_T T + c_v \rho_v (1 - S_r) n - c_w \rho_w S_r n] = \operatorname{div} \{ [\lambda_m - c_w \rho_w T (d_{T_w} + d_{T_v})] \operatorname{grad} T \} \\ + \frac{1}{g} \operatorname{div} \{ [c_w T (k_w - k_v) - c_v k_v] \operatorname{grad} u_w \} + \frac{1}{g} \operatorname{div} \{ [c_w T k_v + c_v k_v] \operatorname{grad} u_a \} + \rho_w \frac{\partial}{\partial z} (k_w c_w T) \end{aligned} \quad (6-21)$$

式 (6-16) ~ 式 (6-21) 中共有 8 个方程式，其中式 (6-18) 中包含 3 个方程，而未知变量 $\{\Delta U\}$ (3 个)， u_a ， u_w ， T ， S_r ， ρ_a 也为 8 个。如果由式 (6-16) 和式 (6-17) 解出 ρ_a 和 S_r 代入式 (6-19)，式 (6-20) 和式 (6-21) 中，未知量就剩下 6 个。因此，一般说来非饱和土固结问题可以归结为 6 个场变量的问题，即 3 个位移，1 个孔隙水压力，1 个孔隙气压力和一个温度。

三、初值和边值条件

对于静力问题，一般以加荷前的状态作为参考基准，因此可以令位移和孔隙气压力的初值为 0，但孔隙水压力和温度的初值则要根据具体情况设定。土体是大自然的产物，在人工干预之前就已存在。如果以人工干预以前的状态作为起点，此时土体中已有一定的初始应力、孔隙水压力（吸力）和温度分布，需要通过实测或某种办法间接推定。初值的设定往往是阻碍计算理论实用化的一个难点。

边界条件则针对变形、孔隙水、孔隙气和温度 4 种变量，每一种又可区分第一类和第二类边界，即

位移边界	$\{\Delta U\} = \{\Delta \bar{U}\}$	(6-22a)
荷载边界	$[N]\{\Delta \sigma\} = \{\Delta F\}$	(6-22b)
孔隙水压边界	$u_w = \bar{u}_w$	(6-23a)
孔隙水流边界	$q_w = \bar{q}_w$	(6-23b)
孔隙气压边界	$u_a = \bar{u}_a$	(6-24a)
孔隙气流边界	$q_a = \bar{q}_a$	(6-24b)
温度边界	$T = \bar{T}$	(6-25a)
热流边界	$q_h = \bar{q}_h$	(6-25b)

第四节 固结方程的简化

对于恒温问题，式(6-21)不再需要，如果再略去蒸汽的蒸发、冷凝和扩散的影响，式(6-19)和式(6-20)可以简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_r n) = \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(k_w \operatorname{grad} u_w) + \frac{\partial}{\partial t} k_w \quad (6-26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_a (1 - S_r + c_h S_r) n] = \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(c_h \rho_a k_w \operatorname{grad} u_w) + \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(\rho_a k_a \operatorname{grad} u_a) + \frac{\partial}{\partial t} (c_h \rho_a k_w) \quad (6-27)$$

现在令 $[D]_m \{\Delta \epsilon^0\} = \{\Delta \sigma^0\}$ ，并把切线刚度写为

$$[D]_m = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

则式(6-18)的具体表达式将为

$$\begin{aligned} & d_{11} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{44} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y^2} + d_{66} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{14} + d_{41}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial y} + (d_{16} + d_{61}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} \\ & + (d_{46} + d_{64}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y \partial z} + d_{14} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x^2} + d_{42} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y^2} + d_{65} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial z^2} + (d_{12} + d_{44}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial y} \\ & + (d_{15} + d_{64}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial z} + (d_{45} + d_{62}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y \partial z} + d_{16} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x^2} + d_{45} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial y^2} + d_{63} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial z^2} \\ & + (d_{15} + d_{46}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} + (d_{43} + d_{65}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u_a}{\partial x} \\ & = \Delta b_x + \frac{\partial \Delta \sigma_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \tau_{xy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \tau_{xz}^0}{\partial z} \end{aligned} \quad (6-29a)$$

$$\begin{aligned} & d_{41} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{24} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y^2} + d_{56} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{21} + d_{44}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial y} + (d_{46} + d_{51}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} \\ & + (d_{26} + d_{54}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y \partial z} + d_{44} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x^2} + d_{22} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y^2} + d_{55} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial z^2} + (d_{24} + d_{42}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (d_{45} + d_{54}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial z} + (d_{25} + d_{52}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y \partial z} + d_{46} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{25} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y^2} + d_{53} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} \\
& + (d_{26} + d_{45}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x \partial y} + (d_{43} + d_{56}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x \partial z} + (d_{23} + d_{55}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \\
= & \Delta b_y + \frac{\partial \Delta \sigma_y^0}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \tau_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \tau_{yz}^0}{\partial z} \tag{6-29b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_{61} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{54} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y^2} + d_{36} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{51} + d_{64}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial y} + (d_{31} + d_{66}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} \\
& + (d_{34} + d_{56}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial y \partial z} + d_{64} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x^2} + d_{52} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y^2} + d_{35} \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial z^2} + (d_{54} + d_{62}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial y} \\
& + (d_{34} + d_{65}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial x \partial z} + (d_{32} + d_{55}) \frac{\partial^2 \Delta u_y}{\partial y \partial z} + d_{66} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x^2} + d_{55} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial y^2} + d_{33} \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial z^2} \\
& + (d_{56} + d_{65}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x \partial y} + (d_{36} + d_{63}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial x \partial z} + (d_{35} + d_{53}) \frac{\partial^2 \Delta u_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \\
= & \Delta b_x + \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \tau_{yz}^0}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \tau_{xz}^0}{\partial x} \tag{6-29c}
\end{aligned}$$

代入 $\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial S_r}{\partial x} = -\frac{1}{H_w} \frac{\partial (u_a - u_w)}{\partial x}$, 其中 $H_w = -\frac{\partial S_r}{\partial S_r}$, 由式 (6-26) 可得

$$-\frac{n}{H_w} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + S_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(k_w \operatorname{grad} u_w) + \frac{\partial}{\partial x} k_w \tag{6-30a}$$

代入 $\frac{\partial \rho_a}{\partial x} = \frac{\rho_{a0} \partial u_a}{\rho_a \partial x}$ 和前面的 $\frac{\partial n}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial S_r}{\partial x}$, 由式 (6-27) 可得

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - S_r + c_h S_r) + (1 - c_h) \frac{\rho_a + u_a}{H_w} \right] n \frac{\rho_{a0}}{\rho_a} \frac{\partial u_a}{\partial x} - (1 - c_h) n \frac{\rho_a}{H_w} \frac{\partial u_w}{\partial x} \\
& + \rho_a (1 - S_r + c_h S_r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(c_h \rho_a k_w \operatorname{grad} u_w) \\
& + \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(\rho_a k_a \operatorname{grad} u_a) + \frac{\partial}{\partial x} (c_h \rho_a k_w) \tag{6-31}
\end{aligned}$$

以上方程式 (6-29), 式 (6-30a) 和式 (6-31) 组成简化以后的固结方程, 共有 u_x, u_y, u_z, u_a 和 u_w 5 个未知变量。当式 (6-28) 中的 $d_{11}, d_{12} \dots$ 诸元素和 H_w, k_w, k_a 的关系式已知时, 在给定的初始和边界条件下可以求解。当然式 (6-29) 右端的 $\{\Delta \sigma^0\}$ 也是 $u_a - u_w$ 的函数, 实际求解时可以先把它们当作已知项, 然后采用迭代法进行。

对于饱和土 $S_r = 1, u_a - u_w = 0$, 式 (6-30a) 进一步简化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_w g} \operatorname{div}(k_w \operatorname{grad} u_w) + \frac{\partial}{\partial x} k_w \tag{6-30b}$$

而式 (6-29) 右端含 $\{\Delta \sigma^0\}$ 各项也等于 0, 此时式 (6-29) 和式 (6-30b) 即组成 Biot 固结理论的基本方程式。

第五节 本构关系

本节讨论 $[D]_{uv}, \{\Delta \varepsilon^0\}, k_w, k_a$ 和 H_w 的关系式。

一、骨架应力应变关系

首先讨论 $[D]_n$ 和 $\{\Delta\epsilon^0\}$ 的关系式。已经提出过的这类本构模型大致可分非线性弹性模型，弹塑性模型和结构性模型三类。此外，还有不少人从有效应力概念出发提出过单变量弹塑性模型。下面分别介绍之。

1. 非线性模型

最简单的办法是把 Duncan-张模型推广到非饱和土。此时，式 (6-28) 中的各元素将为 $d_{11} = d_{22} = d_{33} = \frac{E_i(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}$ ， $d_{12} = d_{21} = d_{13} = \dots = \frac{E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}$ ， $d_{44} = d_{55} = d_{66} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ ，其它元素均为 0，同时，假定吸力的变化只引起体积应变，即式 (6-3a) 中 $[C]_n$ 可以写为

$$[C]_n = \frac{1}{3H_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

式中： $H_i = \frac{\partial s}{\partial \epsilon_v}$ 为吸力变化的体积模量。相应的吸力改变引起的初应变将为

$$\{\Delta\epsilon^0\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \frac{\Delta s}{3H_i} \quad (6-33)$$

剩下的问题是确定 E_i 、 ν_i 和 H_i 的表达式。

把 Duncan-张模型中的 E_i 和 ν_i 公式推广用于非饱和土的最简单办法是遵照式 (6-2) 的有效应力概念，把第二章中式 (2-82) 和式 (2-83) 中的 σ_3 用 $\sigma_3 + \chi s$ 代替，即

$$E_i = K_E p_a \left(\frac{\sigma_3 + \chi s}{p_a} \right)^n \quad (6-34a)$$

$$\nu_i = G_1 - F_1 \lg \left(\frac{\sigma_3 + \chi s}{p_a} \right) \quad (6-34b)$$

相应的抗剪强度公式

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{c \cos \varphi + (\sigma_3 + \chi s) \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6-34c)$$

另一条途径是 σ_3 仍用原值，但修正系数 K_E 。陈正汉在采用 E_i 、 B_i 模型的同时（即用体积模量 B_i 代替 ν_i ）建议把系数 K_E 和 K_B 看作吸力的线性函数^[16]，即

$$E_i = \left(K_E^0 + c_1 \frac{s}{p_a} \right) p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6-35a)$$

$$B_i = \left(K_B^0 + c_2 \frac{s}{p_a} \right) p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (6-35b)$$

相应的 E_i 公式为

$$E_i = E_i \left[1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2 \quad (6-35c)$$

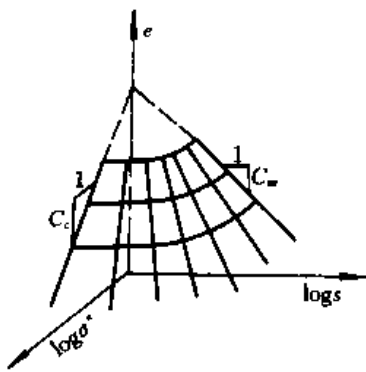


图 6-2 三维压缩曲线

式中： K_E^0 和 K_B^0 为饱和土的 K_E 和 K_B 值； c_1 和 c_2 为二个系数。

更简单的办法是假定单轴压缩曲线为半对数曲线，当 C_m 为 $e - \log \sigma^*$ 曲线的斜率时（图 6-2），则切线单轴压缩模量为

$$M_t = \frac{1 + e_0}{0.434 C_m} (\sigma - u_a) \quad (6-36a)$$

再配合下列切线泊松比

$$v_t = v_i + (0.49 - v_i) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (6-36b)$$

即可得出有关参数为 $d_{11} = d_{22} = d_{33} = M_t$ ， $d_{12} = d_{21} = d_{13} = \dots$

$$= M_t \frac{v_i}{1 - v_i}, \quad d_{44} = d_{55} = d_{66} = M_t \frac{(1 - 2v_i)}{2(1 - v_i)}$$

Fredlund 假定孔隙比与吸力之间的关系也为半对数曲线^[3]，并令其斜率为 C_m （图 6-2），则式(6-32)中的 H_t 将为

$$H_t = \frac{1 + e_0}{0.434 C_m} (u_a - u_w) \quad (6-37a)$$

显然，此式只适用于体积随吸力增加而收缩的情况，对于膨胀土因吸力减小而回弹的问题，上式中的 C_m 应换成回弹指数 C_m 。但是，上式决不能用于湿陷性土，因为此时 H_t 应为负值。对于湿陷土，如果从初始吸力 s_0 到最后饱和后的湿陷曲线用下式拟合（图 6-3）

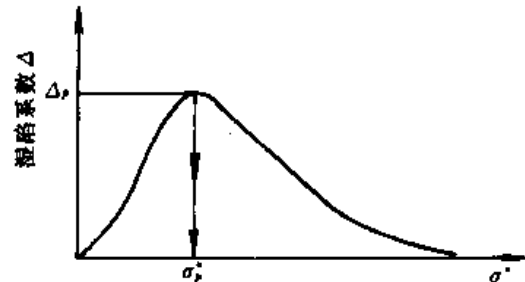


图 6-3 湿陷曲线

$$\frac{\Delta e}{1 + e_0} = 2.72 \Delta_p \frac{\sigma^*}{\sigma_p^*} \exp\left(-\frac{\sigma^*}{\sigma_p^*}\right) \quad (6-38)$$

式中： Δ_p 为峰值湿陷量； σ_p^* 为相应的净应力，则 H_t 的公式可以写为

$$H_t = -\frac{s_0}{2.72 \Delta_p} \frac{\sigma_p^*}{\sigma^*} \exp\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_p^*}\right) \quad (6-37b)$$

采用式(6-33)计算湿陷变形还存在一个严重的缺点，即只有体积变形而无形状变形。为此建议把它改为

$$\{\Delta \epsilon^0\} = \{\sigma_x - \sigma_3 \quad \sigma_y - \sigma_3 \quad \sigma_z - \sigma_3 \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \frac{\Delta s}{(\sigma_1 - \sigma_3) H_t} \quad (6-39)$$

在单轴压缩条件下， $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_3$ ， $\sigma_z = \sigma_1$ ，上式给出了正确的垂直应变。

2. 弹塑性模型

弹塑性模型中流行最广的是 Alonso 提出的模型^[17,18]。该模型在应力空间中引入吸力分量，并把剑桥模型中子午面上椭圆形屈服面推广到 σ_m ， σ_1 和 s 三维空间屈服面，如图 6-4，该屈服面在等吸力状态下的投影为一连串椭圆（图 6-5a），而在 $\sigma_1 = 0$ 的等压状态下的投影则为连接 $0 - p_s - p_0 - p_0^*$ 三条线，其中 $p_s - p_0$ 线称为 SI (Suction increase) 线， $p_0 - p_0^*$ 线称为 LC (Loading-collapse) 线。椭圆屈服面和 SI 屈服面的方程式可以写为

$$F_1 = \sigma_1^2 - M^2 (\sigma_m + p_s) (p_0 - \sigma_m) = 0 \quad (6-40)$$

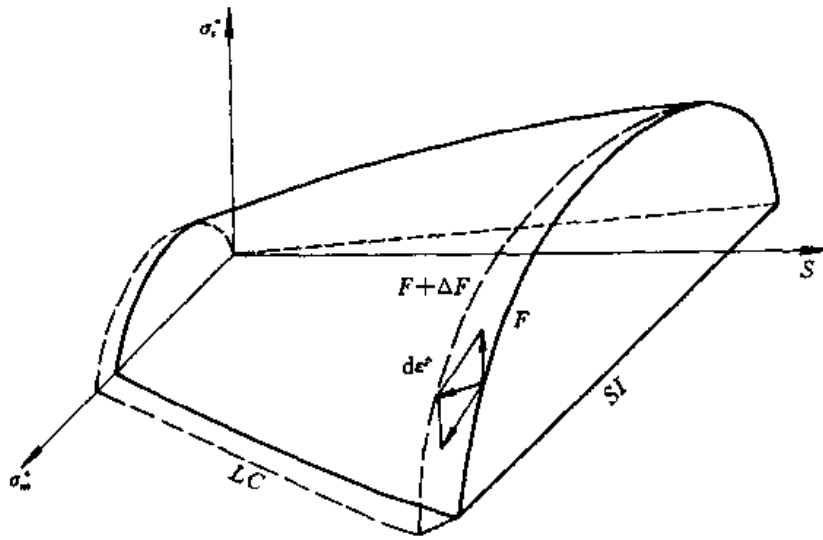


图 6-4 三维空间屈服面

$$F_2 = s - s_0 = 0 \quad (6-41)$$

而 LC 线，即式 (6-34) 中 p_0 的迹线，其方程式为

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\frac{\lambda_0 - \kappa}{\lambda - \kappa}} \quad (6-42)$$

上述式中 $p_s = ks \quad (6-43)$

p_0^* 和 s_0 服从下列硬化规律

$$p_0^* = p_c \exp \left[\frac{(1 + e_0) \epsilon_v^e}{\lambda_0 - \kappa} \right] \quad (6-44a)$$

$$s_0 = p_c \exp \left[\frac{(1 + e_0) \epsilon_v^e}{\lambda_s - \kappa_s} \right] - p_a \quad (6-44b)$$

式中： p_c 为 $\epsilon_v = 0$ 时的参考压力， $\lambda = 0.434C_c$ 和 $\kappa = 0.434C_r$ 与剑桥模型中的压缩和回弹系数相同，不过这里 λ 将是吸力 s 的函数，建议按下式计算

$$\lambda = \lambda_0 \left[\left(1 - \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \exp(-\beta s) + \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right] \quad (6-45)$$

其中 λ_0 和 λ_∞ 分别为 $s=0$ 和 $s \rightarrow \infty$ 时的 λ 值， β 为常数。 λ_s 和 κ_s 为吸力引起的压缩和回弹系数，假定为常数。

采用正交流动法则，可得下列应力应变关系

$$\langle \sigma^* \rangle = [D]_{,p} (\langle \Delta \epsilon \rangle - \langle \Delta \epsilon_0 \rangle) \quad (6-46)$$

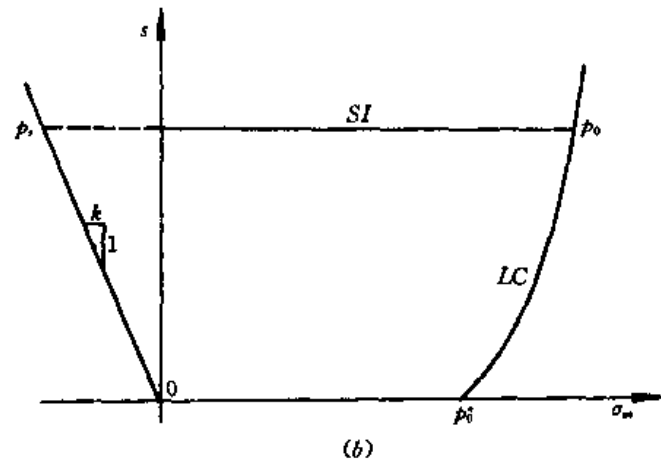
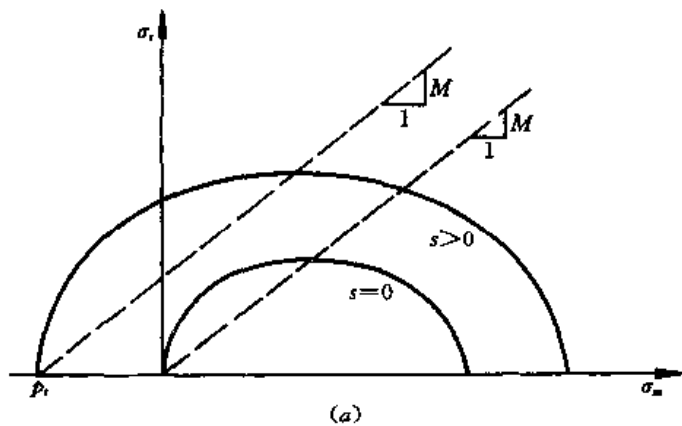


图 6-5 空间屈服面的投影

其中弹塑性矩阵 $[C]_{ep}$ 按第二章所述的常规方式计算, 而吸力引起的初应变公式为

$$\{\Delta\epsilon^0\} = \left\{ \frac{1}{3} \{\delta\} \frac{\partial \epsilon_v^c}{\partial s} - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma^*} \right\} \frac{\partial F}{\partial s}}{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_v^c} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m^*}} \right\} \Delta s \quad (6-47)$$

s 增加时 F 应取 F_2 , $\frac{\partial F_2}{\partial s} > 0$; s 减小时 F 应取 F_1 , $\frac{\partial F_1}{\partial s} < 0$, 两种情况括号内的值与 Δs 的乘积均大于 0, 即能预测体积的收缩。但它预测的湿陷变形随着 σ^* 的增加不断增大, 得不出图 6-3 那样有峰值的曲线。

当有效应力原理适用时, 任何一个饱和土本构模型都可方便地推广到非饱和土, 只需把饱和土的有效应力公式 $\sigma' = \sigma - u_w$ 换成 $\sigma' = \sigma - \bar{u}_w$ 其中

$$\bar{u}_w = \chi u_w + (1 - \chi) u_a \quad (6-48)$$

相当于孔隙水压力和孔隙气压力的加权平均值, 这一研究途径在一定范围内仍有其应用价值, 例如饱和粘土的抽水和蒸发引起的固结问题及膨胀土和一般硬粘土的吸水软化问题。对于第一类问题, 剑桥模型无疑仍然是一种可行的方案, 而对第二类问题, 则必须采用 σ' 降低时仍会产生塑性应变的屈服面。后者如沈珠江建议的双硬化屈服面, 见式 (2-124)。

3. 结构性模型

黄土具有明显的大孔隙结构, 以膨胀土为原料的击实土则具有明显的双孔隙结构, 即团粒内部有一个优势孔隙直径 d_1 , 而团粒之间则有另一个优势孔隙直径 d_2 , 如图 2-62 (b)。用已有的弹塑性模型很难描述它们的力学行为, 从而要求发展新一代的结构性模型。但与第二章中所介绍的不同, 应用于非饱和土, 必须考虑吸力的影响。

沈珠江把复合体的概念应用于黄土, 提出了黄土的损伤力学模型^[19]。但这时应考虑损伤比同时是应变和饱和度的函数

$$\omega = 1 - \exp\{-c_d \epsilon_v - c_b \epsilon_s - c_w (S_r - S_{r0})\} \quad (6-49)$$

相应地
$$\Delta\omega = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon} \right\}^T \{\Delta\epsilon\} + \frac{\partial \omega}{\partial S_r} \Delta S_r \quad (6-50)$$

因此, 式 (2-290) 应改写为

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{epd} \{\Delta\epsilon\} - \{\Delta\sigma^0\} \quad (6-51)$$

其中初应力

$$\{\Delta\sigma^0\} = (\{\sigma\}_i - \{\sigma\}_d) \frac{\partial \omega}{\partial S_r} \Delta S_r \quad (6-52)$$

c_w 是新增加的参数。鉴于 $\frac{\partial \omega}{\partial S_r} = c_w (1 - \omega)$, 此模型对于 $\omega = 0$ 时的初期变形预测值偏大。为了克服这一缺点, 沈珠江又提出一种广义吸力模型^[20]。这一模型建立在稳定孔隙比原理基础上, 并把一切增加颗粒间连接强度的因素统称为广义吸力, 包括毛管吸力, 胶结力和咬合力。这些力丧失时, 土的孔隙比将向重塑土特有的稳定孔隙比 e_s 靠近, 大孔隙土 ($e > e_s$) 体积收缩, 超固结土 ($e < e_s$) 体积膨胀, 如图 6-6。当采用剑桥模型时, 稳定孔隙比 e_s 可用下式计算

$$e_s = e_1 - C_r \log \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{m1}} \right) - \frac{C_d}{\log 2} \log \left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^2 \right] \quad (6-53)$$

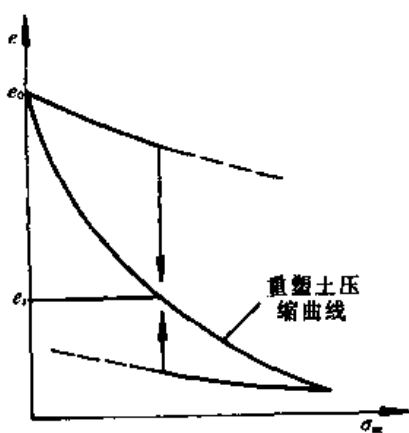


图 6-6 广义吸力的丧失

式中: e_1 为 $\sigma_m = \sigma_{m_1}$, 且 $\eta = 0$ 时的孔隙比; C_d 为剪缩系数, 即 η 由 0 增加到 η_f 时的体积收缩量。用广义的吸力代替折减吸力, 式 (6-2b) 应改写为

$$\sigma'' = \sigma' + s'' \quad (6-54)$$

式中: s'' 为广义吸力; σ'' 可以称为广义有效应力。对于黄土, s'' 将由折减吸力 \bar{s} 和胶结力相当的吸力 s' 两部分组成。广义吸力的大小可以从强度等效原则或模量等效原则确定, 从强度等效原则得出的广义吸力公式为

$$s'' = c \operatorname{ctg} \varphi \quad (6-55)$$

而从压缩模量 M 等效原则得到的则为

$$s'' = 0.434 C_c M - \sigma_m \quad (6-56)$$

广义吸力与孔隙比之间的关系建议由下列幂曲线代表

$$s'' = s''_0 \left(\frac{e - e_s}{e_0 - e_s} \right)^m \quad (6-57)$$

式中: s''_0 为初始孔隙比时的相应值。塑性应变将由广义有效应力增加及广义吸力丧失两部分叠加而成, 当采用剑桥的椭圆屈服面时, 相应的体应变和剪应变分别为

$$\Delta \epsilon_v^p = \frac{c_c - c_s}{\sigma''_m} \Delta \sigma''_m + c_d \frac{2\eta''/\eta_f^2}{1 + (\eta''/\eta_f)^2} \Delta \eta'' + c_b \frac{e_s - e}{s''} \Delta s'' \quad (6-58)$$

$$\Delta \epsilon_s^p = \frac{3\eta''/\eta_f^2}{1 - (\eta''/\eta_f)^2} \left[\frac{c_c - c_s}{\sigma''_m} \Delta \sigma''_m + c_d \frac{2\eta''/\eta_f^2}{1 + (\eta''/\eta_f)^2} \Delta \eta'' + c_b \frac{|e_s - e|}{s''} \Delta s'' \right] \quad (6-59)$$

式中 $c_s = \frac{0.434 C_c}{1 + e_0}$, $c_c = \frac{0.434 C_c}{1 + e_0}$, $c_d = \frac{0.434 C_d}{(1 + e_0) \log 2}$, $c_b = \frac{1}{m(1 + e_0)}$

上述式中 $\Delta s''$ 只取负值, 即只限于吸力的丧失。

二、吸力状态方程

现在讨论式 (6-30) 中的参数 H_w , 即吸力 s 与饱和度 S_r 之间的关系, 已经提出的经验公式很多^[21], 可以归纳为 A 和 B 两种类型 (图 6-7)。属于 A 型的如 (图中虚线)

$$S_r = S_{r0} + (1 - S_{r0})(1 + as)^{-n} \quad (6-60a)$$

$$S_r = 1 - (1 - S_{r0}) \tanh(-as) \quad (6-60b)$$

$$S_r = S_{r0} + (1 - S_{r0}) \exp(-as) \quad (6-60c)$$

$$S_r = \frac{1 + S_{r0}as}{1 + as} \quad (6-60d)$$

式中: S_{r0} , a 和 n 为常数。

属于 B 型的如 (图中实线)

$$S_r = 1 \quad (s < s_e)$$

$$S_r = S_{r0} + (1 - S_{r0}) \left(\frac{s}{s_e} \right)^{-n} \quad (s \geq s_e)$$

$$(6-61a)$$

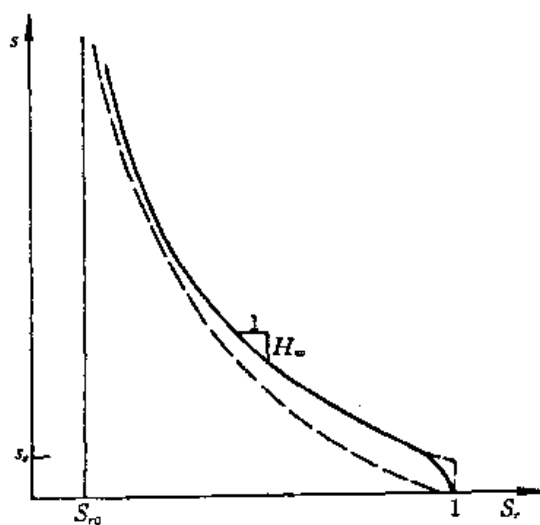


图 6-7 吸力状态曲线

$$S_r = S_{r0} + (1 - S_{r0})\exp(-as^2) \quad (6-61b)$$

$$S_r = S_{r0} + (1 - S_{r0})(1 + as^n)^{-m} \quad (6-61c)$$

$$S_r = \left[1 - \frac{\ln(1 + s/s_m)}{\ln(1 + 1000000/s_m)} \right] \{\ln[e + (as)^n]\}^{-m} \quad (6-61d)$$

后两个公式有 4 个常数。由此可得 $H_w = -\frac{ds}{dS_r}$ 。例如由式 (6-60c) 和式 (6-62b) 分别得

$$H_w = \frac{1}{a(1 - S_{r0})\exp(-as)} \quad (6-62a)$$

$$H_w = \frac{1}{2as(1 - S_{r0})\exp(-as^2)} \quad (6-62b)$$

当 $s=0$ 时, 由式 (6-62a) $H_w=1/a(1-S_{r0})$, 而由式 (6-62b) $H_w=\infty$ 。

三、渗透系数

透水和透气系数的经验公式也很多, 下面只列出比较简单的几个
透水系数

$$\left. \begin{aligned} k_w &= k_s & (s < s_e) \\ k_w &= k_s \left(\frac{s}{s_e} \right)^{-\lambda} & (s \geq s_e) \end{aligned} \right\} \quad (6-63a)$$

$$k_w = k_s \left(1 + \frac{as}{\rho_w g} \right)^{-\lambda} \quad (6-63b)$$

透气系数

$$\left. \begin{aligned} k_a &= 0 & (s < s_e) \\ k_a &= k_d \left[1 - \left(\frac{s}{s_e} \right)^{-\lambda} \right] \left[1 - \left(\frac{s}{s_e} \right)^{-2-\lambda} \right] & (s \geq s_e) \end{aligned} \right\} \quad (6-64a)$$

$$k_a = k_d \left[1 - \left(\frac{s}{s_e} \right)^{-\lambda} \right]^n \quad (6-64b)$$

上述式中: k_s 和 k_d 分别为饱和土的透水系数和干土的透气系数; a 、 λ 和 n 为常数。

第六节 一维固结问题

一、一维固结方程

对于垂直向变形的一维固结问题, $\sigma_z = \text{const}$, 平衡方程式不再需要, 式 (6-26) 和式 (6-27) 简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_r n) = \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial u_w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k_w \quad (6-65)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_a (1 - S_r + c_h S_r) n] = \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(c_h \rho_a k_w \frac{\partial u_w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_a k_a \frac{\partial u_a}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (c_h \rho_a k_w) \quad (6-66)$$

考虑到 $\Delta \epsilon_v = -\Delta n$, 应力应变关系式 (6-3b) 可写为

$$\Delta n = -m_1(\Delta\sigma_z - \Delta u_a) - m_2(\Delta u_a - \Delta u_w) \quad (6-67)$$

而由式 (6-16) 和式 (6-17) 可得

$$\Delta\rho_a = \rho_{a0} \frac{\Delta u_a}{p_a} \quad (6-68)$$

$$\Delta u_a - \Delta u_w = -H_w \Delta S_r \quad (6-69)$$

把它们代入式 (6-65) 和式 (6-66) 可得

$$\begin{aligned} & \left(S_r m_1 - S_r m_2 - \frac{n}{H_w}\right) \frac{\partial u_a}{\partial z} + \left(S_r m_2 + \frac{n}{H_w}\right) \frac{\partial u_w}{\partial z} - S_r m_1 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial u_w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} k_w \end{aligned} \quad (6-70)$$

$$\begin{aligned} & \left[n(1 - S_r + c_h S_r) \frac{\rho_{a0}}{p_a} + \frac{\rho_a n(1 - c_h)}{H_w} + \rho_a(1 - S_r + c_h S_r)(m_1 - m_2) \right] \frac{\partial u_a}{\partial z} \\ &+ \rho_a \left[(1 - S_r + c_h S_r) m_2 - \frac{n(1 - c_h)}{H_w} \right] \frac{\partial u_w}{\partial z} - \rho_a(1 - S_r + c_h S_r) m_1 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(c_h \rho_a k_w \frac{\partial u_w}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_a k_a \frac{\partial u_a}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} (c_h \rho_a k_w) \end{aligned} \quad (6-71)$$

以上方程中 $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ 为已知的表面荷载增率, 只剩下 u_a 和 u_w 为未知量。

二、初始条件

在荷载 $\Delta\sigma_z$ 作用的瞬间, 排水和排气尚未开始, 上面两式的右端为 0, 可解出 Δu_a 和 Δu_w 的初始值如下

$$\Delta u_a = \frac{m_1}{m_1 + R} \Delta\sigma_z + \frac{m_2}{m_1 + R} (\Delta u_a - \Delta u_w) \quad (6-72)$$

$$\Delta u_w = \frac{m_1}{m_1 + R} \Delta\sigma_z + \frac{m_1 - m_2 + R}{m_1 + R} (\Delta u_a - \Delta u_w) \quad (6-73)$$

其中 $R = \frac{(1 - S_{r0}) n_0 + S_{r0} n}{\rho_a + u_{a0} + \Delta u_a}$; S_{r0} 、 n_0 和 u_{a0} 为加荷前的值。以上三式中包含 Δu_a 、 Δu_w 和 R 三个未知量, 可以通过迭代求解。

令 $B_w = \Delta u_w / \Delta\sigma_z$, $B_a = \Delta u_a / \Delta\sigma_z$, 不同初始饱和度 S_{r0} 下的计算结果如图 6-8 所示。计算中采用的吸力状态方程为

$$S = 0.929(S_r^{-5.5486} - 1.0) \text{ (kPa)} \quad (6-74)$$

三、单变量解

式 (6-70) 和式 (6-71) 仍然十分复杂, 难以求得解析解, 为此进一步作以下两点假设^[22]:

(1) 固结过程主要是排气过程, 忽略饱和度和吸力的影响。

(2) 渗透系数 k_a 和 k_w 为常量。这时考虑到 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 和 $\frac{\partial k_w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial k_a}{\partial z} = 0$, 在 σ_z 不变的条件

下式 (6-71) 将简化为

$$\frac{\partial u_a}{\partial z} = \frac{k_a + c_h k_w}{\rho_w g(1 - S_r + c_h S_r)[n + m_1(u_a + p_a)]} \frac{\partial}{\partial z} (u_a + p_a) \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (6-75)$$

令 $Y = (u_a + p_a)^2 - p_a^2$ 上式可简写为

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = J_v \frac{\partial Y}{\partial z^2} \quad (6-76)$$

其中

$$J_v = \frac{(k_a + c_h k_w)(u_a + p_a)}{\rho_w g (1 - S_r + c_h S_r) [n + m_1 (u_a + p_a)]} \quad (6-77)$$

假设土层顶部透水透气, 底部 $z = H_d$ 处不透水透气, 相应的初始边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u_a(z, 0) &= u_{ai} & 0 < z < H_d \\ u_a(0, t) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} u_a(H_d, t) = 0; t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-78)$$

其中 $u_{ai} = u_{a0} + \Delta u_a$ 。由于系数 J_v 中包含未知量 u_a , 上式求解析解仍有困难。为此, 进一步令 J_v 中的 u_a 为某一介于 u_{a0} 和 u_{ai} 之间的一个常量, 即用下式

$$\bar{u}_a = u_{a0} + R_a \Delta u_a \quad (6-79)$$

代替式 (6-77) 中的 u_a , $0 < R_a < 1$ 取为常量。由此可得下列理论解

$$Y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_{ai}(u_{ai} + 2p_a)}{M} \sin M \frac{z}{H_d} \exp(-M^2 J_v) \quad (6-80)$$

式中 $M = \frac{1}{2} (2m+1) \pi$, 求得 Y 后即可得下式

$$u_a = \sqrt{Y^2 + p_a^2} - p_a \quad (6-81)$$

相应的固结度公式为

$$U = 1 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_{ai}}{p_a} \right) \frac{\int_0^{H_d} Y dz}{\int_0^{H_d} u_{ai}(u_{ai} + 2p_a) dz} + \frac{\int_0^{H_d} H_d u_a^2 dz}{2H_d u_{ai} p_a} \quad (6-82)$$

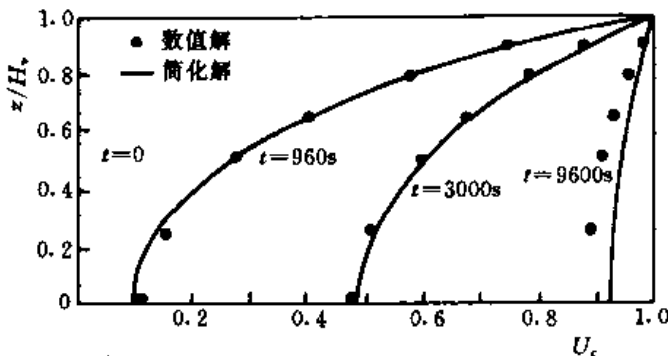


图 6-9 固结度的数值解与简化解

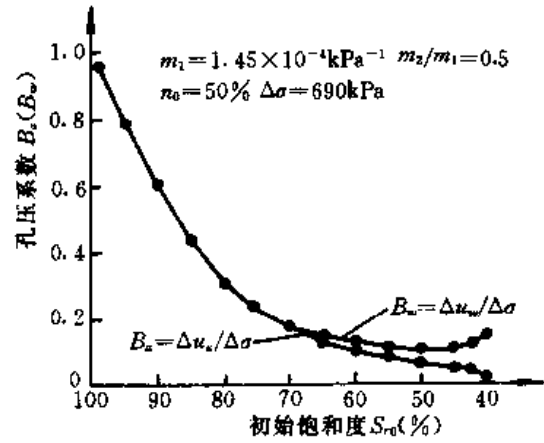


图 6-8 非饱和土孔隙压力系数

通过 $R_a = 0, 0.5, 1.0$ 三种方案的比较, 计算结果差别很小, 因此上述简化解仍有一定应用价值。图 6-9 为 $H_d = 2\text{m}$ 且瞬时加载 $\Delta \sigma_z = 1380\text{kPa}$ 的一个算例的计算结果, 计算参数为 $m_1 = 2.1 \times 10^{-4} \text{kPa}^{-1}$, $m_2 = 1.05 \times 10^{-4} \text{kPa}^{-1}$, $k_w = 6 \times 10^{-7} \text{cm/s}$, $k_a = 3 \times 10^{-5} \text{cm/s}$, $S_{r0} = 0.5$, $n_0 = 0.5$, $u_{w0} = -42.5 \text{kPa}$, $u_{a0} = 0$ 。图中同时给出了数值计算结果, 表明两者基本吻合。图 6-10 为计算所得的

土面沉降曲线, 其中初始由于空气压缩而产生的沉降就达到了 312mm , 后期的增加并不很多^[23]。

四、双变量解

以上的简化计算实际上只求解了孔隙气压力方程, 适合于初始饱和度较低的情况, 一般情况下需要联合求解水压和气压方程。陈正汉在渗水和渗气系数为常量, 且忽略溶解气体并在有效应力原理适用的条件下求解了这一问题^[24]。

式(6-70)和式(6-71)中略去 $\frac{\partial}{\partial z}k_a$,
 $\frac{\partial}{\partial z}k_w$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}p_a$, 并去掉含 c_h 各项,
 可得

$$[\chi m_v(1-a_1) + a_2] \frac{\partial}{\partial t} [(1-\chi)m_v(1-a_1) + a_3] \frac{\partial u_w}{\partial t} = \frac{k_w}{\rho_w g} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \quad (6-83)$$

$$(\chi m_v a_1 + a_2) \frac{\partial u_a}{\partial t} + [(1-\chi)m_v a_1 - a_2] \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{k_a}{\rho_w g} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \quad (6-84)$$

式中: m_v 为压缩系数; $m_v(1-\chi)$ 和 $m_v\chi$ 相当于前面的 m_1 和 m_2 , $a_1 = S_r - an$, $a_2 = \beta n$, $a_3 = \frac{n(1-S_r)}{u_a + p_a} + \beta n$, $\alpha = \frac{\partial S_r}{\partial n}$, $\beta = \frac{\partial S_r}{\partial s}$ 。在这里假定饱和度是孔隙率和吸力两者的函数。式(6-83)中 a_3 包含变量 u_a , 具体求解时当作常量, 通过 Laplace 变换和有限 Fourier 变换可得下列瞬时加载 σ_z 后的解答

$$u_w(z, t) = \frac{4\sigma_z}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_w(i, t)}{i+1} e^{-m^2 C t} \sin m z \quad (6-85)$$

$$u_a(z, t) = \frac{4\sigma_z}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_a(i, t)}{i+1} e^{-m^2 C t} \sin m z \quad (6-86)$$

其中

$$m = \frac{(2i+1)\pi}{2H_d}; \quad C = \frac{D_{11} + D_{22}}{2D}$$

$$F_w(i, t) = \frac{D_{20}}{D} \text{chit} + \frac{2D_{10}D_{21} + D_{20}(D_{11} - D_{22})}{D \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}D_{21}}} \text{shit}$$

$$F_a(i, t) = \frac{D_{10}}{D} \text{chit} + \frac{D_{10}(D_{22} - D_{11})_t + 2D_{20}D_{12}}{D \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D_{12}D_{21}}} \text{shit}$$

$$D_{11} = [(1-\chi)m_v(1-a_1) + a_3]k_w$$

$$D_{12} = [(1-\chi)m_v a_1 - a_2]k_w$$

$$D_{21} = [\chi m_v(1-a_1) - a_2]k_a$$

$$D_{22} = (\chi m_v a_1 + a_2)k_w$$

$$D_{10} = m_v[a_1 a_3 + a_2(1-a_1)]$$

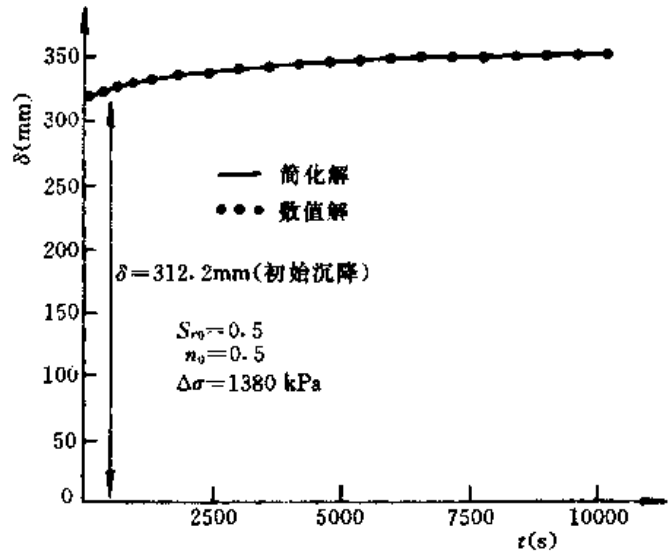


图 6-10 土层表面的沉降

$$D_{20} = m_v a_2$$

$$D = \chi D_{10} + (1 - \chi) D_{20} + a_2(a_3 - a_2)$$

相应的固结沉降公式为

$$u_z(t) = m_v \sigma_z H_d \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} [\chi F_a + (1 - \chi) F_w] e^{-m^2 C_i} \right\} \quad (6-87)$$

$t=0$ 时 $shit=0$, $chit=1$, 且 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, 故瞬时沉降为

$$u_z(0) = m_v \sigma_z H_d \frac{a_2(a_3 - a_2)}{D} \quad (6-88)$$

考虑到 $t \rightarrow \infty$ 时的最终沉降量 $u_z(\infty) = m_v \sigma_z H_d$, 固结度可用下式计算

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{u_z(t) - u_z(0)}{u_z(\infty) - u_z(0)} \\ &= 1 - \frac{D}{\chi D_{10} + (1 - \chi) D_{20}} \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} [\chi F_a + (1 - \chi) F_w] e^{-m^2 C_i} \quad (6-89) \end{aligned}$$

第七节 单相流固结理论

一、固结理论的简化

一般情况下, 非饱和土孔隙内既含水又含气, 变量太多, 给求解带来困难。在一定的条件下, 可以只考虑孔隙水或孔隙气的流动, 从而把问题简化为单相流。可以简化的情况大致有三种。①饱和度在 90% 以上, 如图 6-1 中所示的气封闭情况, 此时可以把含气水当作可压缩的混合流体, 按第四章的饱和土固结理论计算, 此处不再讨论。②饱和度较低, 孔隙水主要以薄膜水形式存在, 流动缓慢, 因此可以只考虑孔隙气流。前面一维问题中已讨论过这一问题, 下面也不再展开。③饱和度适中, 但排气通道畅通, 由于排气速度远较排水速度快, 因此可以忽略排气过程, 即假定各处气压力均等于大气压, 下面主要讨论这一类问题。

二、膨胀土的简化固结理论

下面针对二维问题进行讨论。在孔隙气压力等于 0 的假设下, 对膨胀土, 可以假设有效应力原理适用。式 (6-2b) 的折减吸力变为

$$\bar{s} = -\bar{u}_w \quad (6-90)$$

其中 $\bar{u}_w = \chi u_w$ 可以称为折减孔隙水压力。此时式 (6-29) 将化为

$$\begin{aligned} d_{11} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{44} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{16} + d_{61}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} + d_{16} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} \\ + d_{63} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Delta \bar{u}_w}{\partial x} = \Delta F_x \quad (6-91a) \\ d_{61} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{36} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{31} + d_{66}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} + d_{66} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$+ d_{33} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{36} + d_{63}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} = \Delta F_x \quad (6-91b)$$

其次, 当 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ 时, 式 (6-30) 可以写为

$$\frac{n}{H_w} \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial x} + S_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_w g} \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} k_x \quad (6-92a)$$

式中 k_x 和 k_z 为水平和垂直向渗透系数。上式除以 S_r 后可得

$$\frac{n}{S_r H_w} \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_w g} \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{k}_x \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}_z \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \chi \bar{k}_x \quad (6-92b)$$

其中 $\bar{k}_x = \frac{k_x}{\chi S_r}$, $\bar{k}_z = \frac{k_z}{\chi S_r}$, $\bar{H}_w = \frac{\bar{u}_w}{\Delta S_r}$ 。上述推导中假定 χ 的变化小于 u_w , 可以近似地当作常数。式 (6-91) 和式 (6-92) 即组成以 u_x 、 u_z 和 \bar{u}_w 为未知变量的微分方程组。比较式 (6-92b) 与第四章中的式 (4-26) 可知, 两者的差别仅仅在于用 $S_r \bar{H}_w$ 代替孔隙流体的压缩模量 K_r 和用 \bar{k}_x 、 \bar{k}_z 代替 k_x 、 k_z 。由此可见, 前面针对饱和土固结理论的求解方法可以原封不动地搬到非饱和上来。

参数 \bar{k}_x 、 \bar{k}_z 和 \bar{H}_w 建议直接通过膨胀土的回弹试验测定, 而毋须先测定 $s \sim S_r$ 曲线和 k_x 、 k_z 后再换算。具体办法如下:

设 C_s 和 C_u 分别为吸水—吸气条件下和吸气—不吸水条件下测定的膨胀指数。在后一种条件下, 当土体承受的压力从 p_0 降到 p 时, 土体中将发展吸力 $-u_w$, 并相应地有一个等价吸力 $-\bar{u}_w$, 则根据等价吸力的定义两种条件下的孔隙比变化应相等

$$\Delta e = C_u \log \frac{p_0}{p} = C_s \log \frac{p_0}{p - u_w} \quad (6-93)$$

由此可得

$$\frac{\bar{u}_w}{p_0} = \frac{p}{p_0} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{C_u/C_s} \quad (6-94)$$

另一方面, 在后一种情况下, 含水量不变, 即 $S_r e = S_{r0} e_0$, 由此可得

$$S_r = \frac{S_{r0} e_0}{e_0 + \Delta e} \quad (6-95)$$

由上述两式消去 $\frac{p}{p_0}$ 后可得

$$\frac{\bar{u}_w}{p_0} = 10^{\frac{C_u}{C_s} \left(1 - \frac{S_r}{S_{r0}} \right)} - 10^{\frac{C_u}{C_s} \left(1 - \frac{S_r}{S_r} \right)} \quad (6-96)$$

由此可得

$$\bar{H}_w = \frac{p_0 e_0 S_{r0}}{0.434 S_r^2} \left[\frac{1}{C_s} 10^{\frac{C_u}{C_s} \left(1 - \frac{S_r}{S_{r0}} \right)} - \frac{1}{C_s} 10^{\frac{C_u}{C_s} \left(1 - \frac{S_r}{S_r} \right)} \right] \quad (6-97)$$

垂直向渗透系数可以通过膨胀时间过程线推导而得, 可以利用现成的从固结试验结果推导渗透系数的方法, 但最好采用反馈分析技术。

下面是上述理论应用于渠道边坡的一个算例^[9]。设渠道开挖于 16m 深厚的膨胀土层中, 开挖深度 12m。图 6-11 (a) 是计算所用的有限元网络, 开挖后形成的坡面变位和吸力分布如图 6-11 (b) 所示。然后假定渠道内水位升高 15m 并维持 10 年不变, 计算所得的湿润锋 (0 孔隙压力线) 推进过程如图 6-11 (c) 所示, 而图 6-11 (d) 和图 6-11 (e) 则分别

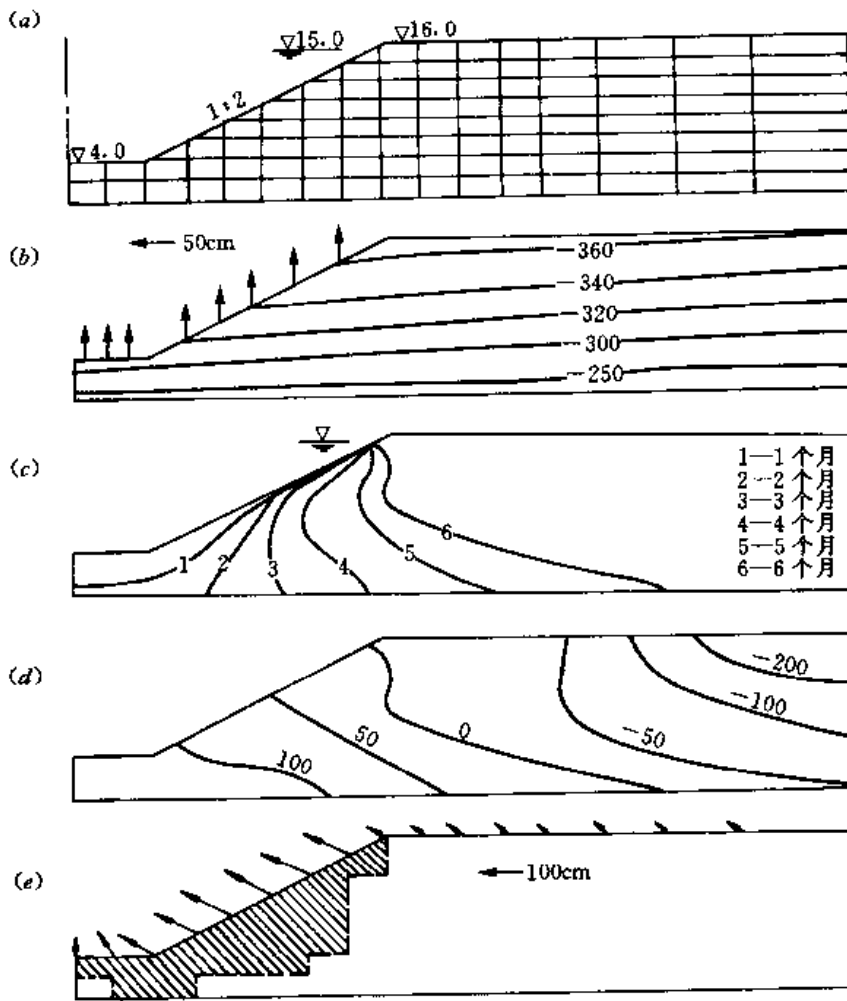


图 6-11 膨胀土渠道边坡的浸水变形

(a) 单元网络; (b) 开挖后的变形和孔压; (c) 0 压锋面;
(d) 10 年后孔压; (e) 变形和破坏区

为 10 年后的孔隙水压力分布和坡面变位及破坏区范围。计算中假定坡顶地面为不透水面，土骨架模型采用式 (2-174) 所示的双硬化模型，相应的计算参数为 $c_v=0.1$ ， $c_s=0.04$ ， $c_k = \frac{0.434c_u}{1+e_0}$ ， $\eta_m=0.7$ ， $c_1=0.56$ ， $c_2=0.07$ 和 $n=1.2$ 。土体的初始条件为 $p_0=1\text{MPa}$ ， $e_0=0.8$ ，渗透系数按下式计算

$$\bar{k} = k_s \exp\left(c_k \frac{\bar{u}_w}{p_a}\right) \quad (6-98)$$

并取 $k_s=10^{-7}\text{m/s}$ ， $c_k=1.0$ 。如式 (2-178) 所示，随着塑性剪应变 ϵ_s^p 的发展， η_0 逐渐减小，屈服面也相应缩小，从而反映了浸水软化的特点。

三、黄土的浸水变形理论

对于黄土地基或边坡，如果浸水范围比较小，土面的其他部位均能通畅排气，就可以假定土体中各点孔隙气压力均等于大气压力，因此可以用单相流的简化理论进行分析。在单调增湿的条件下，可以假定饱和度或含水量与吸力之间存在唯一的对应关系，从而允许

采用饱和度或含水量取代吸力作为基本变量。如取含水量作为基本变量，与式 (6-91) 和式 (6-92) 相当的固结方程将为

$$d_{11} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{44} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{16} + d_{61}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} + d_{16} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{63} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x \partial z} - \beta H_w \frac{\partial \Delta w}{\partial x} = \Delta F_x \quad (6-99a)$$

$$d_{61} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{36} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{31} + d_{66}) \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x \partial z} + d_{66} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2} + d_{33} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial z^2} + (d_{36} + d_{63}) \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x \partial z} - \beta H_w \frac{\partial \Delta w}{\partial z} = \Delta F_z \quad (6-99b)$$

$$\frac{\beta n}{S_r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) = \frac{\beta}{S_r \rho_w g} \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x H_w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k_z H_w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{S_r} \frac{\partial}{\partial t} k_z \quad (6-100a)$$

式中 $\beta = \frac{\partial S_r}{\partial w} = \frac{\rho_s}{e \rho_w}$ ； ρ_s 和 ρ_w 分别为固体和水密度。但当用含水量作为变量时，常用扩散系数 D 代替渗透系数 k ，此时式 (6-100a) 将变为

$$\frac{\beta n}{S_r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{S_r \rho_w g} \left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{S_r} \frac{\partial}{\partial t} k_z \quad (6-100b)$$

注意，此时右端含 k_z 一项仍必须保留，因此式中将同时出现扩散系数和渗透系数。

图 6-12 为模拟 2m 直径圆形荷载板下面黄土地基浸水变形的一个算例^[19]。设荷载板上分 4 级加荷到 300kPa，然后从底板下面注水，经过 20 个时段（每段半天）的渗水计算所得的变形后网格和地基中含水量分布如图中左边和右边所示。计算中假定土的初始条件为 $w_0 = 0.12$ ， $e_0 = 0.9$ ，相应的饱和含水量 $w_s = 0.36$ ，计算采用的本构模型为复合体模型，见式

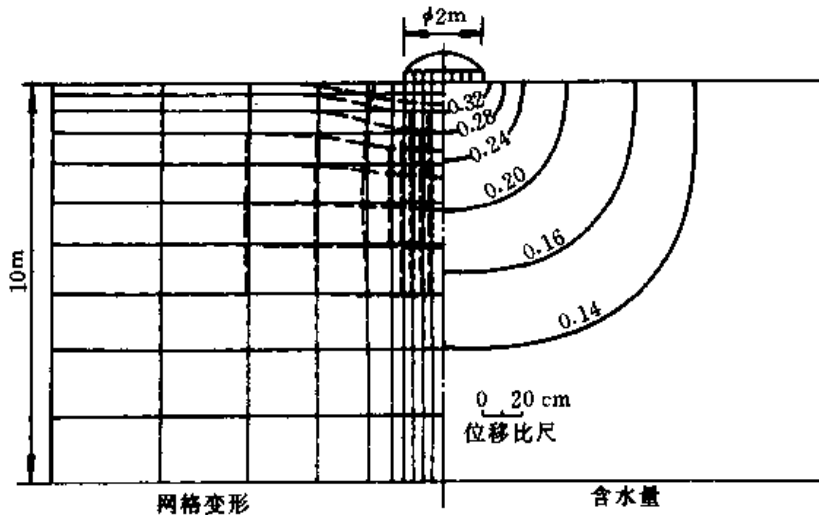


图 6-12 黄土地基的浸水变形

(6-49) ~ 式 (6-52)，但弹塑性损伤矩阵改为下列非线性损伤矩阵

$$[D]_{nd} = (1 - \omega)[D]_i + \omega[D]_r - a(1 - \omega)([D]_i - [D]_r) \left\{ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \epsilon} \right\}^T \quad (6-101)$$

而初应力为

$$\{\Delta\sigma^0\} = \frac{b(1-w)(w_s-w_0)}{(w_s-w)^2} ([D]_i - [D]_j) \{\varepsilon\} \Delta w \quad (6-102)$$

$[D]_i$ 为原状土的弹性矩阵, $[D]_j$ 和 $[D]_i$ 分别为损伤土的切线和割线模量矩阵, 由单轴压缩试验得到的压缩模量和三轴剪切试验得到的杨氏模量计算, a 和 b 为下列损伤方程的参数

$$w = 1 - \exp(-a\varepsilon_s - bD_r) \quad (6-103)$$

$D_r = \frac{w-w_0}{w_s-w_0}$ 。水的扩散系数和渗透系数则按下式计算

$$D = D_0 + D_1 w + D_2 w^2 \quad (6-104a)$$

$$k = k_0 + k_1 w + k_2 w^2 \quad (6-104b)$$

第八节 双相流固结理论

一、双相流的数值解法

对于一般双相流问题, 要求同时求解式 (6-29), 式 (6-30) 和式 (6-31) 组成的方程组, 共有 5 个偏微分方程, 包含 u_x , u_y , u_z , u_a 和 u_w 5 个未知变量。杨代泉则把饱和度 S_r 也当作独立变量, 并增加一个如式 (6-60) 所示的函数方程 $u_a - u_w = f(S_r)$ 。对于二维问题, 上述方程组有限元离散后变为下列代数方程组

$$\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^m [K_{ij}]_e^{n+\frac{1}{2}} \{\Delta u_j\}^e = \sum_{i=1}^{N_e} \{\Delta F_i\}^e \quad (6-105)$$

其中 N_e 为单元总数, $i=1, 2, \dots, m$ 为单元结点数, $n+\frac{1}{2}$ 代表 t_n 时段到 t_{n+1} 时段的中点

$$\{\Delta u_j\}^e = \{\Delta u_{xj}, \Delta u_{yj}, \Delta u_{zj}, \Delta u_{aj}, \Delta u_{wj}, \Delta S_{rj}\}^{eT} \quad (6-106a)$$

$$\{\Delta F_i\} = \{\Delta F_{1i}, \Delta F_{2i}, \Delta F_{3i}, \Delta F_{4i}, \Delta F_{5i}\}^{eT} \quad (6-106b)$$

而单元广义劲度子矩阵为

$$[K_{ij}]_e = \begin{bmatrix} k_{ij}^{11} & k_{ij}^{12} & k_{ij}^{13} & k_{ij}^{14} & k_{ij}^{15} \\ k_{ij}^{21} & k_{ij}^{22} & k_{ij}^{23} & k_{ij}^{24} & k_{ij}^{25} \\ k_{ij}^{31} & k_{ij}^{32} & k_{ij}^{33} & k_{ij}^{34} & k_{ij}^{35} \\ k_{ij}^{41} & k_{ij}^{42} & k_{ij}^{43} & k_{ij}^{44} & k_{ij}^{45} \\ k_{ij}^{51} & k_{ij}^{52} & k_{ij}^{53} & k_{ij}^{54} & k_{ij}^{55} \end{bmatrix} \quad (6-107)$$

式中子矩阵诸元素分别为

$$\left. \begin{aligned} k_{ij}^{11} &= \iint_{\bar{\Omega}_e} \left(d_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \\ k_{ij}^{12} &= \iint_{\bar{\Omega}_e} \left(d_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dz \\ k_{ij}^{13} &= - \iint_{\bar{\Omega}_e} d_4 N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dz \end{aligned} \right\} \quad (6-108a)$$

$$\begin{aligned}
k_{ij}^{14} &= - \iint_{\bar{n}_i} (1 - d_4) N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dz \\
k_{11}^{15} &= 0 \\
k_{ij}^{21} &= \iint_{\bar{n}_i} \left(d_2 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dz \\
k_{ij}^{22} &= \iint_{\bar{n}_i} \left(d_1 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + d_3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dz \\
k_{ij}^{23} &= - \iint_{\bar{n}_i} d_4 N_j \frac{\partial N_i}{\partial z} dx dz \\
k_{ij}^{24} &= - \iint_{\bar{n}_i} (1 - d_4) N_j \frac{\partial N_i}{\partial z} dx dy \\
k_{ij}^{25} &= 0 \\
k_{ij}^{31} &= \iint_{\bar{n}_i} S_r N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dz \\
k_{ij}^{32} &= \iint_{\bar{n}_i} S_r N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} dx dz \\
k_{ij}^{33} &= \alpha \Delta t \iint_{\bar{n}_i} \frac{k_w}{\rho_w g} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \\
k_{ij}^{34} &= 0 \\
k_{ij}^{35} &= \iint_{\bar{n}_i} n N_i N_j dx dz \\
k_{ij}^{41} &= \iint_{\bar{n}_i} \{ (u_a + p_a) [1 - (1 - c_h) S_r] \} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dz \\
k_{ij}^{42} &= \iint_{\bar{n}_i} \{ (u_a + p_a) [1 - (1 - c_h) S_r] \} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} dx dz \\
k_{ij}^{43} &= \alpha c_h \Delta t \iint_{\bar{n}_i} \left(\frac{u_a + p_a}{\rho_w g} k_w \right) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \\
k_{ij}^{44} &= \alpha \Delta t \iint_{\bar{n}_i} \left(\frac{u_a + p_a}{\rho_w g} k_a \right) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \\
&\quad + \iint_{\bar{n}_i} \{ n [1 - (1 - c_h) S_r] \} N_i N_j dx dz \\
k_{ij}^{45} &= - (1 - c_h) \iint_{\bar{n}_i} [(u_a + p_a) n] N_i N_j dx dz \\
k_{ij}^{51} &= 0
\end{aligned} \tag{6-108b}$$

$$\left. \begin{aligned}
 k_{ij}^{52} &= 0 \\
 k_{ij}^{53} &= - \iint_{\bar{\alpha}_i} N_i N_j dx dz \\
 k_{ij}^{54} &= \iint_{\bar{\alpha}_i} N_i N_j dx dz \\
 k_{ij}^{55} &= - \iint_{\bar{\alpha}_i} \left(\frac{\partial}{\partial S_r} \right) N_i N_j dx dz
 \end{aligned} \right\} \quad (6-108c)$$

广义外荷增量列阵元素分别为：

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta F_i^1 &= \int_{\Gamma_{1,e}} N_i \Delta f_x d\Gamma \\
 \Delta F_i^2 &= \int_{\Gamma_{1,e}} N_i \Delta f_x d\Gamma + \int_{\alpha} \Delta b_z dx dz \\
 \Delta F_i^3 &= - \int_{\Gamma_{2,e}} N_i \Delta f_w d\Gamma - \sum_{j=1}^m k_{ij}^{33} u_{wj}^n - \rho_w g \Delta t \iint_{\bar{\alpha}_i} k_w \frac{\partial N_i}{\partial z} dx dz \\
 \Delta F_i^4 &= - \frac{pa}{\rho_{a0} g} \int_{\Gamma_{3,e}} N_i \Delta f_a d\Gamma - \sum_{j=1}^m k_{ij}^{43} u_{wj}^n - \sum_{j=1}^m k_{ij}^{44} u_{aj}^n \\
 &\quad - \Delta t c_h \iint_{\bar{\alpha}_i} [k_w (u_a + p_a)] \frac{\partial N_i}{\partial z} dx dz \\
 \Delta F_i^5 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (6-109)$$

上述式中： α 为时间差分常数，可取 $2/3$ ； Γ_1 、 Γ_2 和 Γ_3 分别为荷载作用面，渗水面和渗气面； Δf_x 和 Δf_z 为表面荷载增量； Δb_z 为垂直向体力增量； Δf_w 和 Δf_a 为相应的渗水量和渗气量。推导中采用了非线性弹性应力应变模型，即

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{E_t(1-\nu_t)}{(1+\nu_t)(1-2\nu_t)}; d_2 = \frac{E_t\nu_t}{(1+\nu_t)(1-2\nu_t)} \\
 d_3 &= \frac{E_t}{2(1+\nu_t)}; d_4 = \frac{E_t}{(1-2\nu_t)H_t}
 \end{aligned} \quad (6-110)$$

应用上述方法对条形基础下非饱和土的排水排气过程进行分析^[25]。图6-13(a)显示所用的单元网格及边界条件。图6-13(b)，图6-13(c)和图6-13(d)分别为 $t=0$ 和 $t=2.5h$ 时地基内的 u_a 、 u_w 和 S_r 分布。地基的初始条件为 $S_{r0}=0.8$ ， $e_0=1.0$ ， $u_{w0}=-2.27$ ， $u_{a0}=0$ 。所采用的吸力方程和渗水、渗气系数公式为

$$u_a - u_w = a(S_r^b - 1.0) \quad (6-111)$$

$$k_w = k_s \left(\frac{S_r - S_{rmin}}{1 - S_{rmin}} \right)^c \quad (6-112)$$

$$k_a = k_0 \left(\frac{1 - S_r}{1 - S_{rmin}} \right)^d \quad (6-113)$$

计算参数为： $a=0.93$ ， $b=5.55$ ， $c=8.0$ ， $d=2.6$ ， $S_{rmin}=0.42$ ， $k_s=5 \times 10^{-6} \text{m/s}$ ， $k_0=2.8 \times 10^{-4} \text{m/s}$ ， $E_t=17100 \text{kPa}$ ， $\nu_t=0.3$ ， $H_t=85700 \text{kPa}$ 。计算所得的荷载中心初始沉降为 55.0mm ，后期沉降 56.2mm ，即与图6-10类似，排气很快，压缩变形一开始就大部分完成。

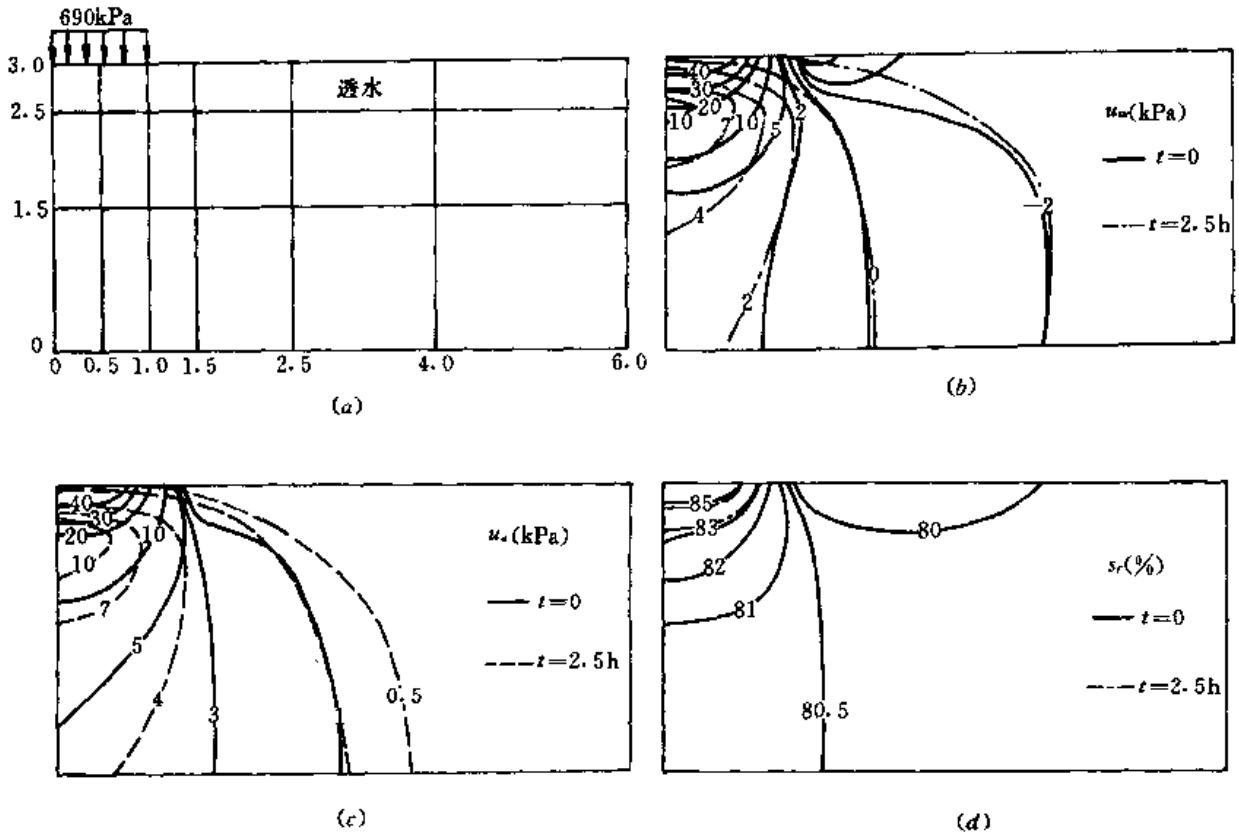


图 6-13 条形荷载下非饱和土地基的固结
 (a) 单元网络; (b) 孔隙水压; (c) 孔隙气压; (d) 饱和度

二、单相流和双相流的比较

为了说明单相流理论和双相流理论的适用条件, 下面列举针对一维的土柱问题所做试验和计算结果。

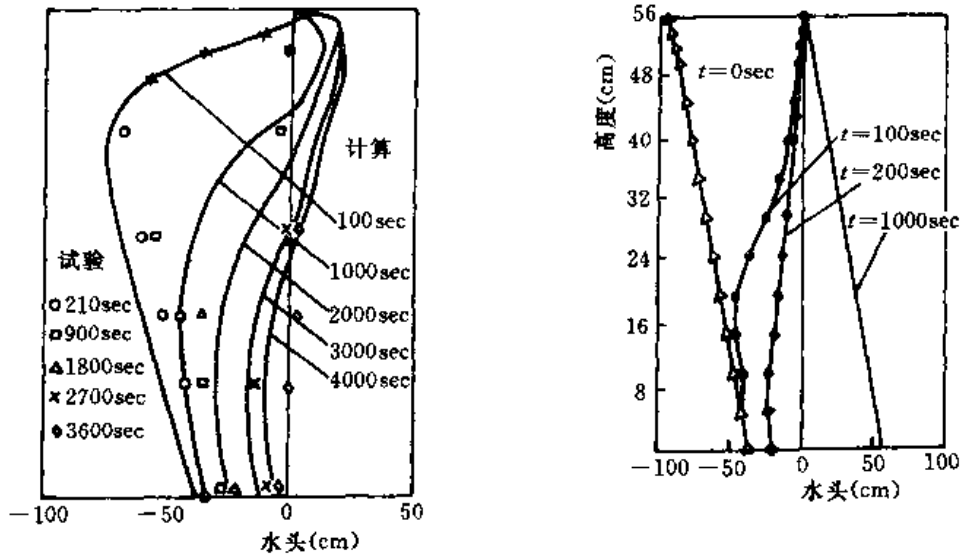


图 6-14 土柱灌水

第一个问题是从 56cm 高的土柱顶部灌水，底部封闭。此时孔隙气的四面均被封闭，不考虑孔隙气压的单相流理论必然带来很大误差。图 6-14 为 Sun 等用两种理论计算结果的比较^[26]，该图中并绘上试验结果，可见孔隙水流因孔隙气压的影响而大大受阻，因此单相流的计算结果与实际相差甚远，必须采用双相流理论计算。

第二问题是从 1m 高的土柱底部排水。当垂直向下的稳定渗流形成以后，顶部封闭，停止进水，然后考察水分从底部排出的疏干过程。图 6-15 (a) 为 Gawin 等所做的两种计算结果的比较^[27]，可见单相流的计算结果与试验结果相当接近，两相流的计算结果反而较差。Klubertanz 等对同一问题进行了计算^[28]，得出的结果略有不同。按两相流计算，土柱中最大将产生 6kPa 的孔隙气压，如图 6-15 (b)。

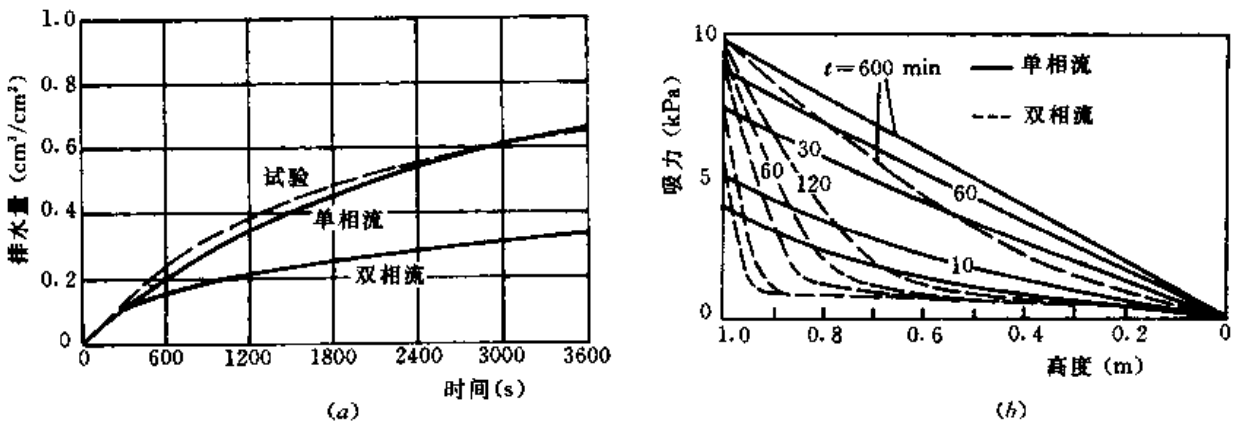


图 6-15 土柱排水

(a) Gawin 的计算结果；(b) Klubertanz 的计算结果

第九节 热流耦合固结理论

热流的引入进一步增加了问题的复杂性。但是，很多情况下考虑热流的耦合作用是必须的，例如：①土中埋有电缆，核废料等热源；②对温度季节性变化比较敏感的土类；③蒸发作用比较显著；④冻土问题。第 3 种情况往往伴随着水和蒸汽之间的相变，第 4 种情况则有水和冰的相变。本节讨论第 1、2 两种无相变的问题。

一、热流耦合固结问题的数值解法

当式 (6-18) ~ 式 (6-21) 均需考虑时，相应的有限元方程可以写为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ww} & K_{wa} & K_{wT} \\ 0 & K_{aw} & K_{aa} & K_{aT} \\ 0 & K_{Tw} & K_{Ta} & K_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ u_w \\ u_a \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{UU} & C_{Uw} & C_{Ua} & C_{UT} \\ C_{wU} & C_{ww} & C_{wa} & C_{wT} \\ C_{aU} & C_{aw} & C_{aa} & C_{aT} \\ C_{TU} & C_{Tw} & C_{Ta} & C_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \dot{u}_w \\ \dot{u}_a \\ \dot{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_U \\ f_w \\ f_a \\ f_T \end{Bmatrix} \quad (6-114)$$

$U = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ 代表变位矢量。此式可进一步简写为

$$[K]\{\varphi\} + [C]\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\} = \{R\} \quad (6-115)$$

其中 $\{\varphi\} = \{U \quad u_w \quad u_a \quad T\}^T$ 。把 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 写成差分式 $(\varphi^{n+1} - \varphi^n) / \Delta t$ ， φ 和 R 取下列内插值

$$\varphi = \alpha \varphi^{n+1} + (1 - \alpha) \varphi^n \quad (6-116a)$$

$$R = \alpha R^{n+1} + (1 - \alpha) R^n \quad (6-116b)$$

n 和 $n+1$ 分别代表时段 t_n 和 t_{n+1} ，把它们代入式 (6-115) 后可得下列代数方程组

$$[A]\{\varphi^{n+1}\} = \{F^{n+1}\} \quad (6-117)$$

其中 $[A] = \alpha[K] + [C]/\Delta t$ (6-118)

$$\begin{aligned} \{F\}^{n+1} = & (1 - \alpha)\{R^n\} + \alpha\{R^{n+1}\} \\ & - (1 - \alpha)[K]\{\varphi^n\} + [C]\{\varphi^n\}/\Delta T \end{aligned} \quad (6-119)$$

如前所述，差分常数 α 可取 $2/3$ ，与式 (6-105) 不同，此处以总量 φ 为未知量。如果仍以增量 $\Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n$ 为未知量，则上式应写为

$$[A]\{\Delta\varphi\} = \{\Delta F\} \quad (6-120)$$

$[A]$ 仍如式 (6-118)，而 $\{\Delta F\}$ 则为

$$\begin{aligned} \{\Delta F\} = & \alpha\{\Delta R\} + \{R^n\} - [K]\{\varphi^n\} \\ & - (1 - \alpha)[K]\{\varphi^n\} + [C]\{\varphi^n\}/\Delta T \end{aligned} \quad (6-121)$$

其中 $\Delta R = R^{n+1} - R^n$

二、热源问题

Thomas 应用上述理论分析了一个模拟核废料存储问题的试验装置^[29]。在 $\phi 15\text{cm}$ 和高 14.6cm 金属容器内放置击实微晶高岭土，试样的初始条件为 $w_0 = 12.4\%$ ， $e_0 = 0.72$ ， $S_r = 0.5$ ，温度 20°C 。然后把伸入试样顶部的加热棒加热到 100°C ，四周金属壁则维持 28°C ，最后达到稳定状态时计算和实测的温度和饱和度分布如图 6-16 所示。

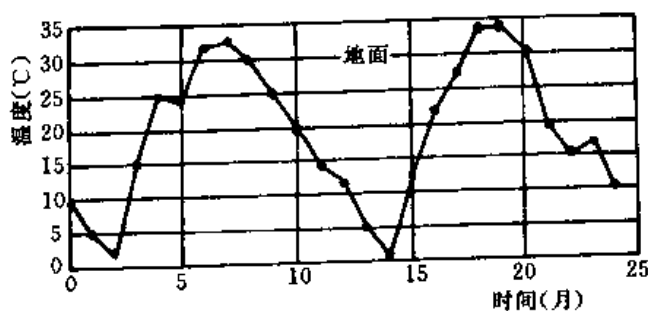
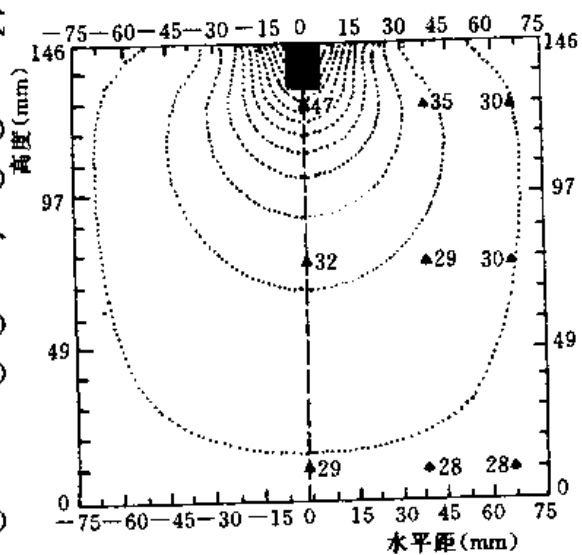
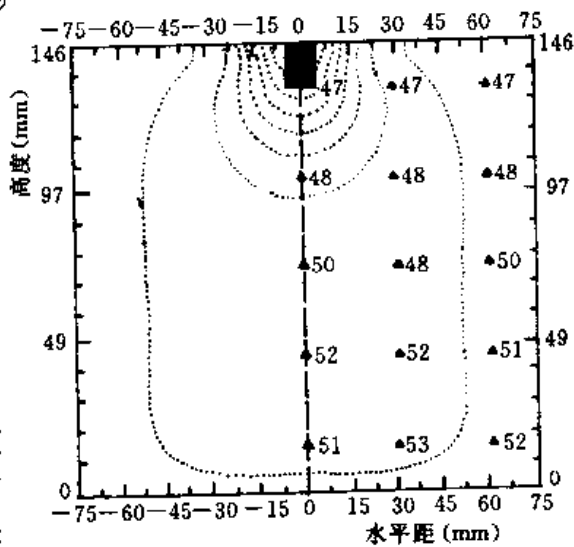


图 6-17 地面边界条件



(a)



(b)

图 6-16 热源问题

(a) 温度；(b) 饱和度

三、膨胀土地基的季节变化

由于气候季节性变化而引起的地面运动常造成建筑物的变形，下面是一个三维有限元算例^[30]。

设一厚 12m 的均匀膨胀土地基，表面 $6\text{m} \times 9\text{m}$ 内承受均布荷载 q ，另外 $2\text{m} \times 3\text{m}$ 内承受均布荷载 q_2 。荷载底面为不透水、不透气的，并维持一个恒定的恒温

10℃，自由土面上与大气相通，其入渗—蒸发率及温度的季节变化如图 6-17 所示。注意这里所指的蒸发实际上是排水，即水分排到地面后才蒸发掉，土体内部并没有发生从水分到蒸汽的相变。土的初始条件为： $n_0=0.38$ ， $T_0=10^\circ\text{C}$ ， $(u_a-u_w)_0=312.2\text{kPa}$ ， $S_{r0}=0.72$ 。

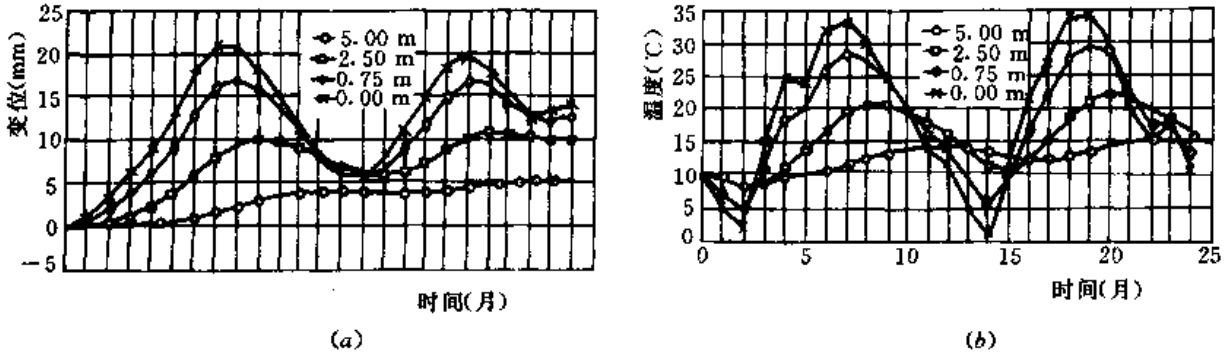


图 6-18 位移和温度过程线

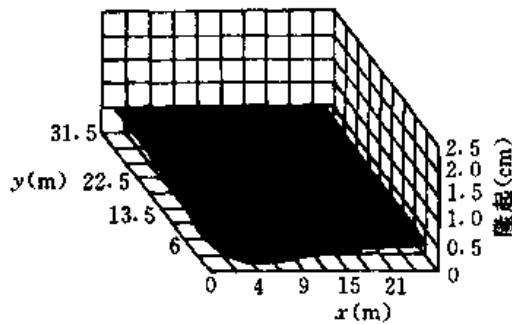
(a) 不同深度处的膨胀变位；(b) 不同深度处的温度变位

计算中采用的各种参数为：土的侧限压缩模量

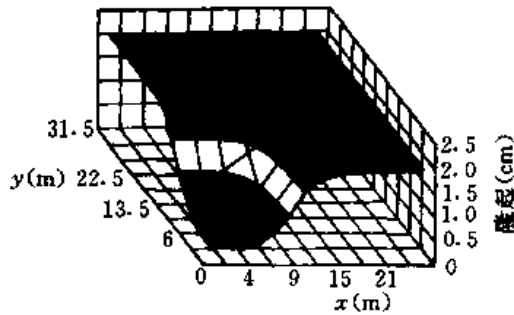
$$M_t = 88.9 - 215S_r n \text{ (MPa)}$$

浸水变形模量

$$H_t = \frac{0.434}{u_a - u_w} \left(40 - 10.3 \frac{\sigma_1 - u_a}{p_a} \right) \text{ (kPa}^{-1}\text{)}$$



(a)



(b)

图 6-19 地面隆起

(a) 12 个月后；(b) 18 个月后

$$\text{吸力方程} \quad S_r = \left(\frac{3.78}{3.78 + u_a - u_w} \right)^{1/13.5}$$

$$\text{渗水系数} \quad k_w = 2 \times 10^{-8} \left(\frac{S_r - 0.42}{1 - 0.42} \right)^6 \text{ (m/s)}$$

$$\text{渗气系数} \quad k_a = 2.09 \times 10^{-6} \left(\frac{1 - S_r}{1 - 0.42} \right)^{2.5} \text{ (m/s)}$$

$$\text{热传导系数} \quad \lambda = 0.441 + 3.24S_r - 2.21S_r^2 + 0.66S_r^3 \text{ (W/m} \cdot \text{}^\circ\text{C)}$$

计算所得的远离荷载处各深度的垂直变位和温度变化情况如图 6-18 所示，而 12 个月（干季）和 18 个月（雨季）后的地面隆起情况则如图 6-19 所示。

第十节 相变耦合固结理论

近来 Corapcioglu & Panday 和郭力与苗天德研究了考虑冻土中相变的耦合变形问题^[31,32,33]，但前者只限于研究冻土的融沉问题，后者只限于饱和冻土。下面介绍前一研究成果。

一、控制方程式

1. 未冻水的连续方程

只考虑水和冰的冻融，忽略蒸发和凝结，式 (6-19) 中略去有关蒸汽的项目，但加上冻融引起的相变项后，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_r n) = \text{div}(d_T \text{grad} T) + \frac{1}{\rho_w g} \text{div}(k \text{grad} u_w) + \frac{\partial}{\partial z} k + \frac{R_a}{\rho_w} \quad (6-122)$$

式中： R_a 表示单位土体内因冰的融化而增加的水量。进一步假定气压为 0， S_r 只是孔隙水压力和温度的函数，从而

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} = \xi_p \frac{\partial u_w}{\partial t} + \xi_T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6-123)$$

考虑到 $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t}$ ，且 ϵ_v 是有效应力 σ' 和温度的函数，即

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial \sigma'}{\partial t} - \alpha_T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6-124)$$

则在总应力不变和 $\sigma' = \sigma - S_r u_w$ 的假设下， $\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(S_r u_w)$ 。把以上各式代入式 (6-116) 后得

$$\begin{aligned} & (S_r u_w \alpha_p \xi_p + \alpha_p S_r^2 + n \xi_p) \frac{\partial u_w}{\partial t} + (S_r u_w \alpha_p \xi_T + S_r \alpha_T + n \xi_T) \frac{\partial T}{\partial t} \\ & = \text{div}(d_T \text{grad} T) + \frac{1}{\rho_w g} \text{div}(k \text{grad} u_w) + \frac{\partial}{\partial z} k + \frac{R_a}{\rho_w} \end{aligned} \quad (6-125)$$

式中： α_p ， α_T ， ξ_p 和 ξ_T 为 4 个参数。

2. 冰的连续方程

设 θ_i 为体积含冰率，且假定冰与土粒一起运动，则冰量的连续方程可以写为

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \text{div}(\theta_i V_s) + \frac{R_s}{\rho_i} = 0 \quad (6-126)$$

式中: ρ_i 为冰密度; V_s 为土粒速度。在小变形假设下, $\text{div}(\theta_i V_s) \approx \theta_i \text{div} V_s = -\theta_i \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}$, 并设

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \xi_{i_p} \frac{\partial u_w}{\partial x} + \xi_{i_T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6-127)$$

则式 (6-126) 可以写为

$$[\theta_i(u_w \alpha_p \xi_p + \alpha_p S_r) + \xi_{i_p}] \frac{\partial u_w}{\partial x} + [\theta_i(u_w \alpha_p \xi_T + \alpha_T) + \xi_{i_T}] \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{R_s}{\rho_i} = 0 \quad (6-128)$$

3. 热量平衡方程

略去气流的影响, 但增加融冰时的潜热 L , 则相应的热量平衡方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(c_m T) - LR_s + \text{div}\{[c_w \rho_w \theta_w V_w + c_i \rho_i \theta_i V_s + c_s \rho_s (1-n) V_s] T\} \\ - \text{div}(\lambda_m \text{grad} T) - u_w \text{div}(\theta_w V_w) + [\theta_i + (1-n)] T \frac{\alpha_T}{\alpha_p} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (6-129)$$

其中 $c_m = c_w \rho_w \theta_w + c_i \rho_i \theta_i + c_s \rho_s (1-n)$ (6-130a)

$$\lambda_m = \lambda_w \theta_w + \lambda_i \theta_i + \lambda_s (1-n) \quad (6-130b)$$

式中: c_w, c_i, c_s 和 $\lambda_w, \lambda_i, \lambda_s$ 分别是水, 冰和土粒的比热容和导热系数。与式 (6-21) 相比, 除了冻融以外, 上式还考虑了冰和土粒变位引起的热流损失 (含 V_s 项) 及水的粘滞流动的产热和固体压缩的产热 (最后两项)。代入式 (6-127) 及有关各项, 式 (6-129) 可以最后写为

$$\begin{aligned} \left\{ c_m + u_w n \xi_T + (u_w \alpha_p \xi_T + \alpha_T) \left[(\theta_i + 1-n) T \frac{\partial}{\partial p} + (1-n) u_w S_r \right] \right\} \frac{\partial T}{\partial x} \\ + \{ u_w n \xi_p + (u_w \xi_p + S_r) [(1-n) T \alpha_T + (1-n) S_r u_w \alpha_p] \} \frac{\partial u_w}{\partial x} \\ - c_w \rho_w \left[k \left(\frac{1}{\rho_w g} \text{grad} u_w - 1 \right) \text{grad} T \right] - \text{div}(\lambda_m \text{grad} T) \\ + R_s \left[T(c_w - c_i) - L - \frac{u_w}{\rho_w} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6-131)$$

力矢平衡方程仍如前面一样, 但在一维问题中垂直应力是已知的, 所以不需要这一方程。

二、计算参数和求解方法

以上方程中有些参数可以假设在感兴趣的孔隙压力和温度变化范围内为常量, 如 $\alpha_p, c_w, c_i, \lambda_w, \lambda_i$ 和 L 等, 有些则应考虑既是孔隙压力, 又是温度的变量, 如 α_T, ξ_p, ξ_T 和渗透系数等。冰层内的渗透系数可用下式计算

$$k = k_w / 10^{10 \theta_i} \quad (6-132)$$

式中: k_w 为冰层外水分的渗透系数。

针对一维问题, 从式 (6-128) 求得 R_s 代入式 (6-125) 和式 (6-131) 后可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-k \left(\frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial u_w}{\partial z} - 1 \right) - d_T \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

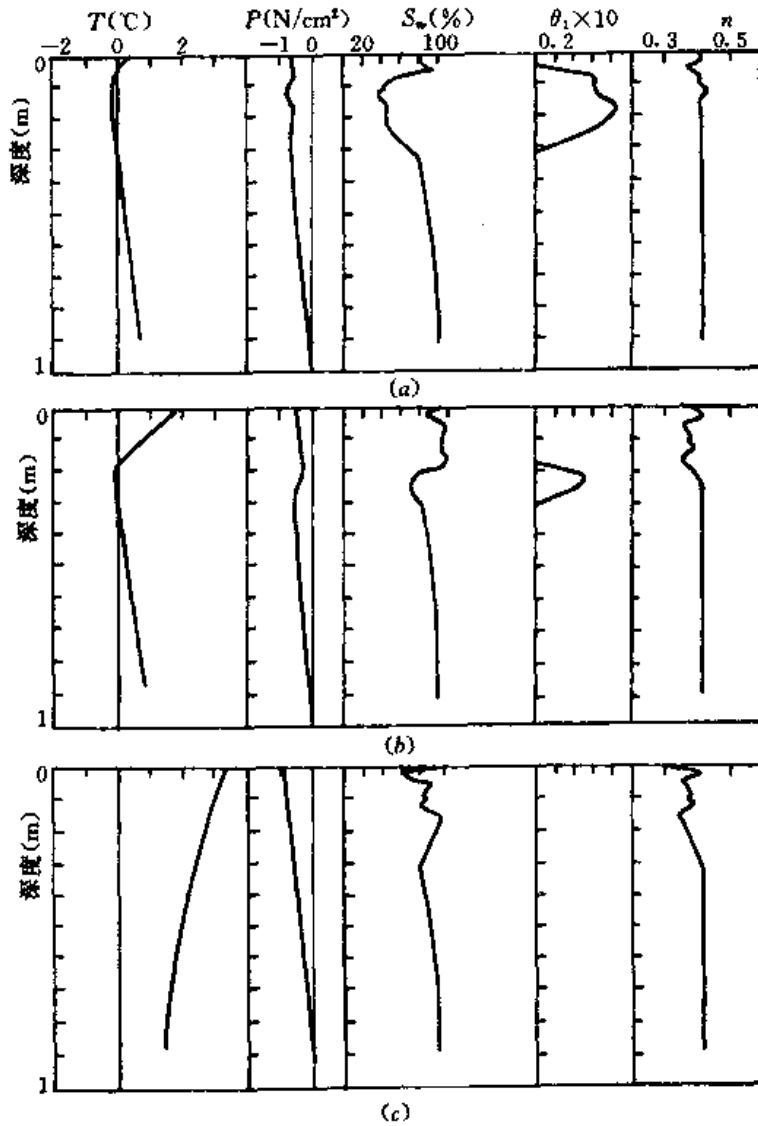


图 6-20 温度、孔隙压力、饱和度、含水量及孔隙率的变化
(a) 1d; (b) 6d; (c) 12d

$$\begin{aligned}
 & + [S_w u_w \alpha_p \xi_p + \alpha_p S_w^2 + n \xi_p + (\rho_i / \rho_w) \xi_{ip} + (\rho_i / \rho_w) \theta_i \alpha_p (u_w \xi_p + S_r)] \frac{\partial u_w}{\partial x} \\
 & + [S_r u_w \alpha_p \xi_T + \alpha_T S_r + n \xi_T + (\rho_i / \rho_w) \xi_{iT} + (\rho_i / \rho_w) \theta_i (u_w \alpha_p \xi_T + a_T)] \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6-133) \\
 & \left\{ c_m + u_w n \xi_T + (u_w \alpha_p \xi_i + a_T) \left[(\theta_i + 1 - n) T \frac{\alpha_T}{\alpha_p} + (1 - n) u_w S_r \right] \right. \\
 & \quad \left. - [\rho_i \xi_{iT} + \rho_i \theta_i (u_w \alpha_p \xi_T + a_T)] \left[T (c_w - c_i) - L - \frac{u_w}{\rho_w} \right] \right\} \frac{\partial T}{\partial x} \\
 & + \left\{ u_w n \xi_p + (u_w \xi_p + S_r) [(1 - n) T \alpha_T + (1 - n) S_r u_w \alpha_p] \right. \\
 & \quad \left. - [\rho_i \xi_{ip} - \rho_i \theta_i \alpha_p (u_w \xi_p + S_r)] \left[T (c_w - c_i) - L - \frac{u_w}{\rho_w} \right] \right\} \frac{\partial u_w}{\partial x} \\
 & + c_w \rho_w \left[-k \left(\frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial u_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (6-134)
 \end{aligned}$$

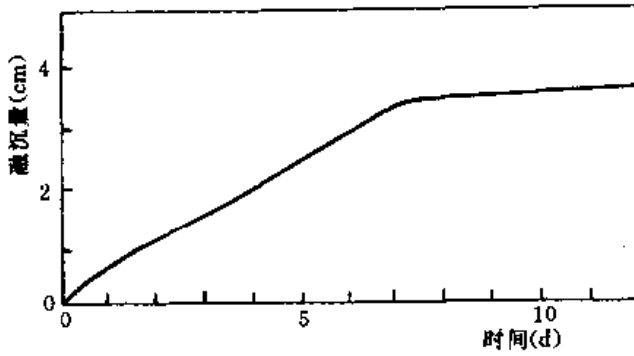


图 6-21 地面融沉过程线

由图可见，大约 7 天后冰层全部融解，以后只产生少量的自重作用下的排水沉降。另外，冰层上部孔隙水压力有明显增大，这是因为冰层的渗透系数小，阻碍孔隙水的流动。

由上式求出 u_w 和 T 后，代入式 (6-124)，在总应力 σ 不变假设下，即可得出垂直应变 ϵ_v ，从而算出融沉量。

上述方程为二阶非线性抛物线方程，可以用差分法求解。设一粉质土柱顶面为大气压且无水渗流入，底部 90cm 处为地下水水面，初始的孔隙压力和温度为线性变化，则在地表加温 1 天，6 天及 12 天后的温度，孔隙压力，饱和度，含冰量及孔隙率的变化如图 6-20 所示，图 6-21 为地面

参 考 文 献

- 1 俞培基，陈愈炯．非饱和土的水、气形态及其力学性质的关系．水利学报，1965 (1)：16~24
- 2 蒋彭年．非饱和土工程性质简论．岩土工程学报，1989，11 (6)：39~59
- 3 Fredlund D G and Rahardio H. Soil mechanics for unsaturated soils (非饱和土力学)，中译本．北京：中国建筑工业出版社，1997
- 4 沈珠江．Advances in numerical modeling of deformation behavior of unsaturated soils. In: 2nd Int. Conf. Unsaturated Soils, Beijing, 1998, I: 180~193
- 5 陈正汉．非饱和土的应力状态与应力状态变量．见：第七届土力学及基础工程学术会议论文集．北京：中国建筑工业出版社，1994：186~191
- 6 Fredlund D G. Second Canadian Geotechnical Colloquium: Appropriate concepts and technology for unsaturated soils. Can. Geotech. J., 1976, 16 (1): 121~139
- 7 Coleman J D & Russamk. Some uses of stress and strain invariants in the thermodynamic study of soils, Geotechnique, 1961, 11 (1): 29~36
- 8 Bishop A W & Blight G E. Some aspects of effective stress in saturated and unsaturated soils. Geotechnique, 1963, 13 (3): 177~197
- 9 沈珠江．Reduced suction and simplified consolidation theory for unsaturated soils. In: Int. Conf. Unsaturated Soils. Paris, 1995, II: 1533~1540
- 10 Fredlund D G and Hasan J U, One-dimensional consolidation theory of unsaturated soils. Can. Geot. J. 1979, 16 (3): 521~531
- 11 Li X, Zienkiewicz O C and Xie Y. A numerical model for immiscible two phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution. Int. J. for Num. Method in Eng. 1990, 30: 1195~1221
- 12 Chen Z H, Xie D Y and Liu Z D. The consolidation of unsaturated soil. In: 7th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech, Cairns, 1991, I: 1617~1621
- 13 杨代泉，沈珠江．Two-dimensional numerical simulation of generalized consolidation problem of unsaturated soils. In: 7th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech, Cairns, 1991, I:

1261~1266

- 14 杨代泉, 沈珠江. Study on generalized consolidation theory of unsaturated soils, In: 7th Int. Conf. Expansive Soils, Dallas, 1992, 158~162
- 15 陈正汉等. 非饱和土固结的混合物理论. 应用数学和力学, 1993 (2): 127~137 和 (8): 687~697
- 16 陈正汉等. A non-linear model for unsaturated soils, In: 2nd Int. Conf, Unsaturated Soils, Beijing, 1998, 1: 461~466
- 17 Alonso E E, Gens A & Josa A. A constitutive model for partially saturated soils, Geotechnique, 1990, 40 (3): 405~430
- 18 Alonso E E, Gens A, Josa A, 杨代泉. 非饱和土弹塑性应力应变特性模拟. 岩土工程学报, 1995, 17 (6): 42~51
- 19 沈珠江. 关于黄土力学的研究途径. 见: 中加非饱和土力学学术研讨会. 武汉, 1994: 153~160
- 20 沈珠江. 广义吸力和非饱和土的统一变形理论. 岩土工程学报, 1996, 18 (2): 1~8
- 21 Leong E C & Rahardjo H. Review of soil-water characteristic curve equation, J. of Geotechnical and Geoenvironmental Enging, 1997: 1118~1126
- 22 杨代泉, 沈珠江. 非饱和土一维固结简化计算. 岩土工程学报, 1991, 13 (5): 70~78
- 23 杨代泉, 沈珠江. 非饱和土一维广义固结的数值计算. 水利水运科学研究, 1991 (4): 375~385
- 24 陈正汉. 非饱和土固结理论的工程应用. 后勤工程学院院报, 1993, 9 (2): 25~33
- 25 杨代泉. 非饱和土二维广义固结非线性数值模型. 岩土工程学报, 1992, 14 (增刊): 2~12
- 26 Sun Y, Sakajo S & Nishigaki M. Application research on a numerical model of two-phase flow in deformation porous medium. In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech, Wuhan, 1997, 1: 1171~1176
- 27 Gawin D, Simoni L & Schrefler B A. Numerical model for hydro-mechanical behavior in deformable media: A benchmark problem. In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech., Wuhan, 1997, 1: 1143~1148
- 28 Klabertanz G, Laloui L & Vulliet L. Numerical modeling of unsaturated porous media as a two and three phase medium. In: 9th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech., Wuhan, 1997, 1: 159~1164
- 29 Thomas H R and He Y. Analysis of coupled heat, moisture and air transfer in a deformable unsaturated soil. Geotechnique, 1995, 45 (4): 677~689
- 30 Yang D, Rahardjo H, Leong E C & Choa V. Fully coupled heat-moisture-air-deformation analysis in an unsaturated expansive clay foundation. 2nd Int. Symp. Struct. and Found. in Civil Enging, Hong Kong, 1997: 294~299
- 31 郭力等. Thermodynamic models of heat-moisture migration in saturated freezing soils. 岩土工程学报, 1998, 20 (5): 87~91
- 32 Corapcioglu M Y & Panday S. Multiphase approach to thaw subsidence of unsaturated frozen soils: Equation development. J. of Eng. Mech., ASCE, 1995, 121 (3): 448~459
- 33 Panday S & Corapcioglu M Y. Solution and evaluation of permafrost thaw-subsidence model, J. of Eng. Mech., ASCE, 1995, 121 (3): 460~471

第七章 饱和土的液化破坏理论

第一节 概 述

土的抗剪强度降低到等于0,从而达到能像液体一样流动的状态称为液化。砂土的抗剪强度决定于有效围压,当孔隙压力升高到等于外加围压时,有效围压等于0,抗剪强度也就等于0。所以砂土的液化过程也就是孔隙水压力的升高过程。具有凝聚力的粘土的液化与其结构破坏有关,结构强度完全丧失以后其性质将与砂土类似。

孔隙压力的升高可以是外力作用下土体内部结构变化的结果,也可以是孔隙水流动的结果。单纯由于孔隙水流动而引起的砂土强度丧失常伴随流砂和管涌,将不在本章讨论的范围之内。硬粘土吸水膨胀而发生的孔隙压力上升当然也是孔隙水流动的结果,更不在本章讨论之列。

液化一般发生在饱和土中,但在非饱和的黄土区地震时也观察到类似液化的现象。由于气体的可压缩性,可以想见这里的孔隙气压力虽然会有较大的上升,但不大可能达到等于上覆压力。因此,这里的液化实际上是指孔隙压力上升到一定程度后由于抗剪强度不足而引起的滑坡。处于斜坡位置的饱和砂土因孔隙水压力上升到一定程度而发生滑坡的事例更是屡见不鲜,这里“液化”一词显然指的是孔隙水压力上升的过程本身,不管最后是否导致抗剪强度等于0。

总括起来,对液化一词可以有广义和狭义的理解。广义的液化是指孔隙压力上升的过程,狭义的液化是指最后达到的有效围压等于0的状态。对于孔隙压力上升问题也有广义和狭义两种理解,狭义的理解只限于封闭条件下土体内部孔隙压力的增高,广义的理解则包括孔隙水由高孔隙压力区向低孔隙压力区的转移。本章的讨论只限于狭义的液化。

自从1936年Casagrande提出砂土临界孔隙比的概念算起^[1],砂土液化的研究经历了经验阶段(70年代以前),半经验阶段(70~80年代),目前正在形成一个较完整的理论体系。而有关粘土液化问题的研究,则只是近几年才开始的。

第二节 液 化 机 理

液化是剪缩性土体在不排水条件下孔隙压力不断积累的结果,因此要认清液化的机理,首先要分析出各种土的剪缩特性。

松砂 松砂不仅平均孔隙比较大,而且还包含一些不稳定的大孔隙,最大孔隙比 e_M 和最小孔隙比 e_m 之间差别大(图7-1中a线)。如第二章中孔隙分布匀化原理,剪切时大孔隙首先减小,而小孔隙基本不变,因此,平均孔隙比 \bar{e} 和孔隙分布的标准差都将减小(图7-1中b线)。但是,如果砂土饱和而又不让排水, \bar{e} 将保持不变, e_M 的减小必然要求 e_m 增大(图7-1中c线)。为了满足这一点,作用在接触面上的有效应力必须减小,最后导致部分接触面脱离而液化。如果不稳定的大孔隙占了相当比重,微小的扰动就可能引起微结构的失

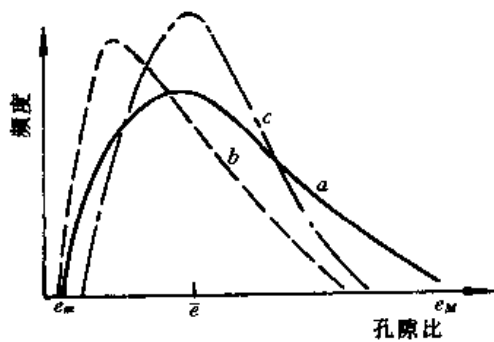


图 7-1 孔隙分布的变化

稳，这就是松砂的流滑现象。

密砂 中等密实和紧密的砂土，尽管没有不稳定的大孔隙，如果多次受到反复荷载，孔隙比仍有不断减小的趋势。第二章中提出最小孔隙比原理时对此作出解释。这里更进一步加以说明。土体在动荷载作用下的变形趋势与原来的静荷载有关。静力和动力的共同作用导致土体应力的不对称。当土体承受的荷载足够大时，总有一部分接触点进入滑移状态，且沿荷载偏大方向的滑移量总是大于沿荷载偏小方向的滑移量，累加的结果就发生偏向一个方向

的变位和应变。如垂直向应力大于水平向应力的不等向固结土样，反复加荷后试样将趋向于缩短，处于重力场下的砂堆受到振动后将会下塌等，同理，处于一定围压状态下的砂土受到扰动时其体积也必然不断缩小。在不排水条件下，这种体积缩小的趋势就转化为孔隙压力的积累。

较密的砂土在偏应力较大时将发生剪胀，偏应力减小时发生剪缩。所以就一个荷载循环来说，孔隙水压力是波动的，既可以增长，也可以减小，只是当一个荷载循环结束时，孔隙水压力才会产生一个净的增长。当孔隙水压力积累到一定程度时，在一个荷载循环的某一瞬间，孔隙水压力等于围压，即达到瞬时液化。瞬时液化一般发生在偏应力等于 0 的瞬间，但以后随着偏应力的增长，砂土又发生剪胀，孔隙水压力减小，从而又获得一定的强度。因此，较密砂土不会发生突然的液化破坏，而只会发生残余变形的不断积累。这种变形特性被称为循环活动性(Cyclic mobility)^[2]，如图 7-2 所示。

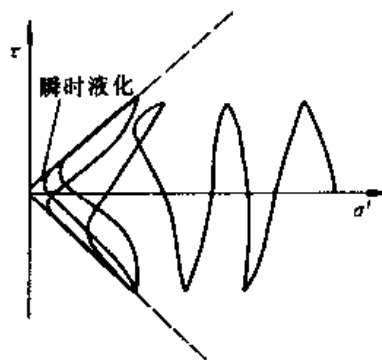


图 7-2 瞬时液化和循环活动性

粘土 天然粘土都具有一定的结构强度，在缓慢的沉积过程中，结构强度的形成阻碍了正常的压密，所以一般意义上的正常固结粘土都具有远较室内重塑土为高的孔隙比。大孔隙的黄土便是如此。一旦结构强度遭到破坏，这些土都显示强烈的剪缩特性。所谓快粘土(Quick clay)在结构受到破坏时的失稳现象与松砂的流滑现象本质上都是孔隙水压力迅速上升的结果。但是，如果作用的荷载比较小，结构强度的丧失将是一个随荷载循环次数的增加而逐渐演化的过程，相应的孔隙水压力也将是逐步积累的。

无结构强度的重塑粘土在循环荷载作用下也会产生孔隙水压力的积聚，与中等密度的砂土相比，其剪缩性大得多而剪胀性小得多，因此变形虽不会突然发生，但会很快积累而引起相邻建筑物的破坏。

第三节 砂土液化的平均过程理论

一、基本概念

在地震、波浪等反复荷载作用下，实际的孔隙压力和变形过程是波动着上升的，如图

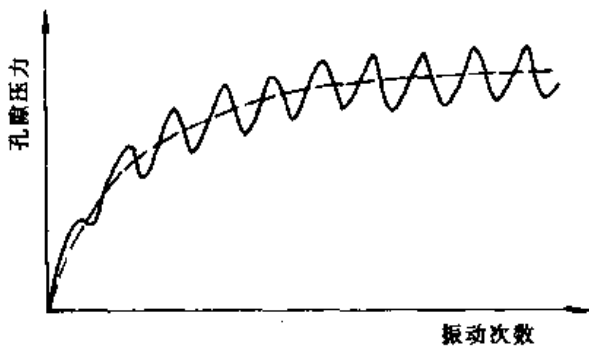


图 7-3 波动过程及平均过程

7-3 所示。如前所述,在一个荷载循环中,尽管孔隙压力的瞬时变化可以是上升或下降,但荷载循环结束时,孔隙压力总是有一定的上升。平均过程理论就是忽略瞬时变化的细节而只描述孔隙压力和变形总体发展趋势的一种理论。这一理论的形象比拟如图 7-3 中虚线所示。

平均过程理论的思路最早可以追溯到 50 年代前苏联学者 Маслов 的动力破坏渗透理论,他根据孔隙率的振动压密速率 $\frac{dn}{dt}$ 建立了

$$\Delta u_w = E_r \Delta \epsilon_v \quad (7-1)$$

一维条件下动孔隙压力的产生和消散的公式,汪闻韶进一步把这一理论推广到三维问题^[3,4]。70 年代中,北美学者 Martin 等在平均孔隙压力增量 Δu_w 等于平均体积收缩量 $\Delta \epsilon_v$ 乘上回弹模量 E_r

的基础上提出了一维振动液化问题的有效应力分析方法^[5],沈珠江把它推广到二维问题,并提出了有关平均过程理论的完整的概念^[6,7,8]。

二、本构模型

平均过程理论采用等价粘弹性模型。但是 60 年代末发展起来的原始的粘弹性模型,只包括平均模量 G_d 和阻尼比 λ 两个公式,只能用于总应力法动力分析,动力过程结束时土体即恢复原状,不产生任何残余变形。后来,沈珠江引入了残余体积应变 $\Delta \epsilon_v$ 和残余剪切应变 $\Delta \epsilon_s$ 两个经验公式,完善了等价粘弹性模型,使其能适用于不等向固结的试样,该模型的要点已见第二章第六节^[9]。另一方面,许多西方学者则提出了只包含体积残余变形或剪切残余变形的公式^[10,11]。而文献中更多见到的则是只包含残余孔隙压力的经验公式。鉴于残余孔隙压力与残余体积应变之间可以通过式 (7-1) 联系起来,所以两者之间并无本质上的差别。

1. 剪切模量和阻尼比

Hardin-Drnevich 根据滞回圈顶点轨迹的骨干曲线为双曲线的假设,推导了下列 G_d 和 λ 的公式^[12]

$$G_d = \frac{G_{max}}{1 + \gamma_h}; \lambda = \lambda_{max} \frac{\gamma_h}{1 + \gamma_h} \quad (7-2)$$

$\gamma_h = \gamma / \gamma_r$, $\gamma_r = \tau_{max} / G_{max}$ 称为参考应变 (图 7-4)。 λ_{max} 取为常数, G_{max} 则按下式计算

$$G_{max} = k_1 p_a \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^{k_2} (OCR)^{k_3} \quad (7-3)$$

为了更好符合试验结果,他们又加了二个经验参数 a 和 b , 并把 γ_h 写为

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left[1 + a \exp \left(-b \frac{\gamma}{\gamma_r} \right) \right] \quad (7-4)$$

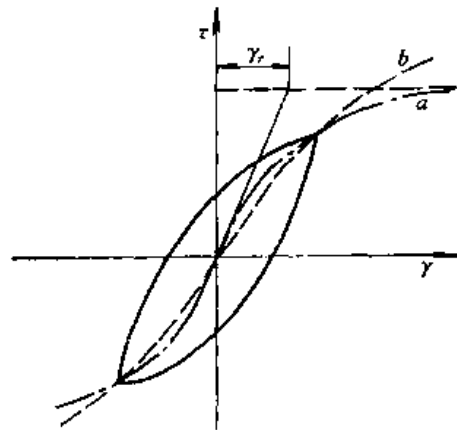


图 7-4 滞回圈的骨干曲线
a—双曲线; b—Ramberg-Osgood

骨干曲线也可以采用下列 Ramberg-Osgood 曲线

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{\max}} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^r \right) \quad (7-5)$$

这一曲线没有强度极限 τ_{\max} , τ_y 可以任选某一应力作为参考, α 和 r 为两个参数。由此可以推出下列 G_d 和 λ 的公式

$$G_d = \frac{G_{\max}}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^r}, \lambda = \frac{2}{\pi} \frac{r}{r+2} \frac{\alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^r}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^r} \quad (7-6)$$

沈珠江对 Hardin-Drnevich 公式作了一些修改, 已见第二章。

2. 残余变形

第二章中介绍了沈珠江建议的残余体积应变和剪切应变公式, 每一个荷载循环下的相应值为

$$\Delta \epsilon_v = c_1 \gamma_d^2 \exp(-c_3 S_t) \frac{1}{1+N} \quad (7-7a)$$

$$\Delta \epsilon_s = c_4 \gamma_d^2 S_t \frac{1}{1+N} \quad (7-7b)$$

式中: γ_d 为动应变幅值; c_1, c_2, c_3, c_4 和 c_5 为 5 个参数。Bouckovalas 等也提出过一组类似的表达式^[13]。

Martin 等建议的体积应变公式为^[5]

$$\Delta \epsilon_v = c_1 (\gamma_d - c_2 \epsilon_v) + \frac{c_3 (\epsilon_v)^2}{\gamma_d + c_4 \epsilon_v} \quad (7-8)$$

式中: $\epsilon_v = \sum \Delta \epsilon_v$ 为残余应变的累加值, c_1, c_2, c_3 和 c_4 为 4 个参数。

八木则男用双曲线描述残余体应变积累值的公式^[15]

$$\epsilon_v = \frac{N}{a + bN} \left(\frac{\tau_d}{\sigma_m} \right)^3 \quad (7-9a)$$

相应的增量公式为

$$\Delta \epsilon_v = \frac{a}{(a + bN)^2} \left(\frac{\tau_d}{\sigma_m} \right)^3 \quad (7-9b)$$

式中: τ_d 为动剪应力幅值。

另一些人则提出只含残余剪切变形 ϵ_s 的公式, 例如下列 Taniguchi 建议的公式^[14]

$$\frac{\tau_d}{\sigma'_m} = \frac{\epsilon_s}{a + b\epsilon_s} \quad (7-10)$$

式中: a 和 b 为与固结应力比及振动次数有关的两个参数。

3. 残余孔隙压力

根据应力控制扭剪试验结果, Ishibashi 等建议下列残余孔隙压力增量公式^[16]

$$\Delta u_w = \sigma'_m \left(\frac{\tau_d}{\sigma'_m} \right)^\beta \frac{c_1 N}{N^{c_2} - c_3} \quad (7-11)$$

式中 β 和 c_1, c_2, c_3 为 4 个参数, Seed 则根据大量振动三轴试验结果提出了一个拟合其平均趋势的公式^[17]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[2 \left(\frac{N}{N_i} \right)^{1/2\theta} - 1 \right] \quad (7-12a)$$

式中： σ_c 为初始固结应力； N_i 为液化时振动次数； θ 为经验常数，一般可取 0.7。上式的增量式为

$$\Delta u_w = \frac{\sigma_c}{\pi \theta N_i} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{N}{N_i} \right)^{1/\theta}}} \left(\frac{N}{N_i} \right)^{\frac{1}{2\theta}-1} \Delta N \quad (7-12b)$$

N_i 则用下式计算

$$N_i = 10^{b-\tau_d/\sigma_c} \quad (7-12c)$$

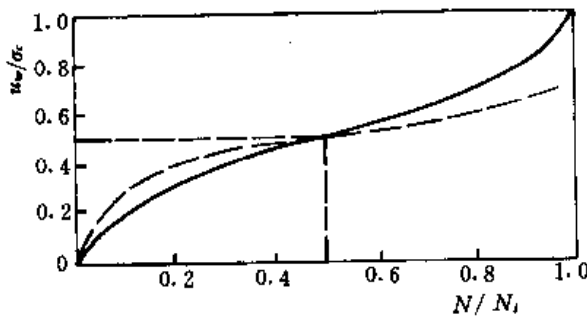


图 7-5 孔隙压力增长规律

但是对于 $K_c > 1$ 的不等向固结的试样， u_w/σ_c 不可能达到 1。为此，Finn 把式 (7-12a) 修改为^[18]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[\left(\frac{N}{N_{50}} \right)^{1/\alpha} - 1 \right] \quad (7-13)$$

式中： $\alpha = \alpha_1 K_c + \alpha_2$ ； α_1 和 α_2 为两个参数； N_{50} 为 u_w/σ_c 等于 50% 时的振动次数。式 (7-12a) 和式 (7-13) 的形状如图 7-5 中实线和虚线所示，徐志英则把式 (7-12a) 修改为^[19]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{N}{N_L} \right)^{\frac{1}{2\theta}} (1 - ma) \quad (7-14a)$$

其中 $\alpha = \tau_0/\sigma_c$ 为初始剪应力， $m = 1.1 \sim 1.5$ 为随土类而变的修正系数，相应的增量式为

$$\Delta u_w = \frac{\sigma_c}{\pi \theta N_i} \frac{(1 - ma)}{\sqrt{1 - \left(\frac{N}{N_i} \right)^{1/\theta}}} \left(\frac{N}{N_i} \right)^{\frac{1}{2\theta}-1} \Delta N \quad (7-14b)$$

4. 等效振动次数

以上经验公式中均有一个振动次数。在等振幅振动下，振动次数的概念是明确的，但在不规则振幅下，就需要引入等效振动次数的概念。

最简单的办法是把不规则振动剪应力峰值 τ_{\max} 折算成 $\tau_d = 0.65 (\tau_d)_{\max}$ 的均匀周期荷载，相应的振次直接根据地震震级假定，例如规定 7 级地震的等效振动为 12 次，地震历时 20s，因此每秒对应的振次即为 0.6^[20]。这样，等效振次就直接与振动时间挂钩。

比较复杂的办法是采用损伤积累的概念^[21]。假定破坏振次随动应力增大而减小，设 N_i 和 N_{ii} 为各级 $(\tau_d)_i$ 下的实际发生的振动次数及其破坏振动次数，其相应的损伤量为 N_i/N_{ii} ，则等效振次可以定义为

$$N_{eq} = N_i \sum \frac{N_i}{N_{ii}} \quad (7-15)$$

其中： N_i 为 $\tau_d = 0.65 (\tau_d)_{\max}$ 的规则荷载下的液化次数。

沈珠江则借用内时模型中内时量度的概念把等效振次及其增量的公式写为^[22]

$$N_{eq} = \frac{\xi}{\bar{\gamma}_d}; \Delta N_{eq} = \frac{\Delta \xi}{\bar{\gamma}_d} \quad (7-16)$$

式中: $\bar{\gamma}_d = 0.65 (\gamma_d)_{max}$ 为某一时段 Δt 内平均动剪应变幅值; $\xi = \sum |\Delta \epsilon_i|$ 为剪应变的累加值; $\Delta \xi$ 为 Δt 时段内的相应值, 见图 7-6。

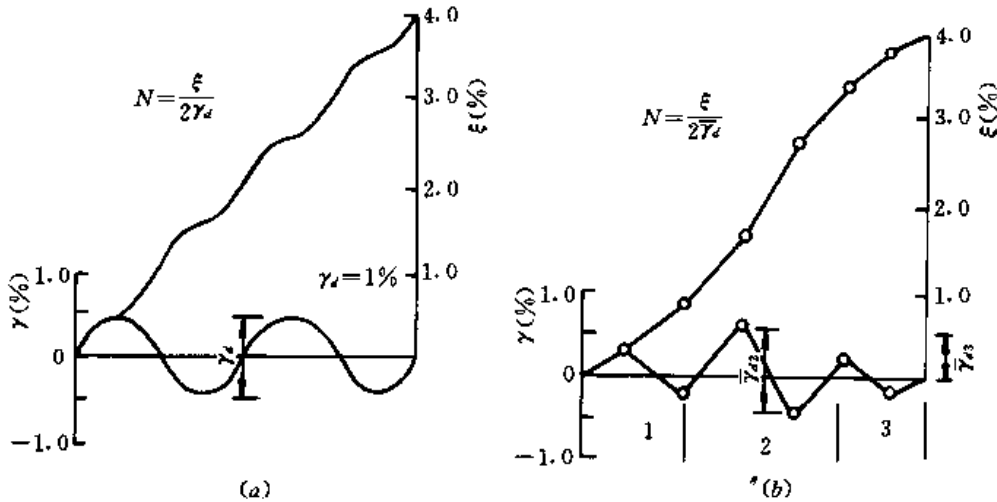


图 7-6 等效振动次数
(a) 等幅振动; (b) 变幅振动

三、计算方法

一个由弹簧和阻尼器支持的质点运动方程式为下列二阶常微分方程

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + ky = f \quad (7-17)$$

其中 u , \dot{u} 和 \ddot{u} 分别是质点的位移, 速度和加速度; k 是弹簧系数; η 为粘滞系数; m 是质量; f 是外力。对于连续介质, 考虑粘滞项以后, 第三章中式 (3-4) 可改写为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (7-18)$$

用有限元离散后, 质量矩阵 $[M]$ 和劲度矩阵的一般表达式见第四章第八节。而阻尼矩阵常按 Rayleigh 理论由两部分组成, 一部分与单元的应变速率成正比, 另一部分则与结点的变位速率成正比, 即

$$[C] = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\lambda\omega [M]^e + \frac{\lambda}{\omega} [K]^e \right) \quad (7-19)$$

式中: n_e 为单元数; $[M]^e$ 和 $[K]^e$ 为各单元的质量和劲度矩阵; λ 即为公式 (7-2) 的阻尼比; ω 为振动体系的圆频率, 一般取第一圆频率 ω_1 。在地震荷载下, 设 $\{\ddot{u}_0\}$ 为由基岩传入的地震波, 则荷载项可以写为

$$\{F\} = -[M]\{\ddot{u}_0\} \quad (7-20)$$

式 (7-18) 可用直接积分法求解。设 $\{u\}_n$ 和 $\{\dot{u}\}_n$ 为某一时段 δt 开始时的结点位移和速度, 时段结束时的相应值可由下式积分

$$\{\dot{u}\}_{n+1} = \{\dot{u}\}_n + \int_0^{\delta t} \{\ddot{u}\} dt; \{u\}_{n+1} = \{u\}_n + \int_0^{\delta t} \{\dot{u}\} dt \quad (7-21)$$

设 $\{\ddot{u}\}$ 在 δt 时段内线性变化, 上式积分后可得

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{u}\}_{n+1} &= \{\dot{u}\}_n + \frac{1}{2}\delta t\{\ddot{u}\}_n + \frac{1}{2}\delta t\{\ddot{u}\}_{n+1} \\ \{u\}_{n+1} &= \{u\}_n + \delta t\{\dot{u}\}_n + \frac{1}{3}\delta t^2\{\ddot{u}\}_n + \frac{1}{6}\delta t^2\{\ddot{u}\}_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

由上式可解出

$$\{\ddot{u}\}_{n+1} = \frac{6}{\delta t^2}\{u\}_{n+1} - \{A\}_n \quad (7-23a)$$

$$\{\dot{u}\}_{n+1} = \frac{3}{\delta t}\{u\}_{n+1} - \{B\}_n \quad (7-23b)$$

其中

$$\{A\}_n = \frac{6}{\delta t^2}\{u\}_n + \frac{6}{\delta t}\{\dot{u}\}_n + 2\{\ddot{u}\}_n$$

$$\{B\}_n = \frac{1}{\delta t}\{u\}_n + 2\{\dot{u}\}_n + \frac{1}{2}\delta t\{\ddot{u}\}_n$$

把式 (7-23) 代入式 (7-18) 后得

$$[K]\{u\}_{n+1} = \{\bar{F}\} \quad (7-24)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [K] &= [K] + \frac{3}{\delta t}[C] + \frac{6}{\delta t^2}[M] \\ [\bar{F}] &= [F] + [M]\{A\}_n + [C]\{B\}_n \end{aligned} \right\} \quad (7-25)$$

式 (7-24) 即为常规的代数方程组, 解出 $\{u\}_{n+1}$ 后代回到式 (7-23) 即可得出时段末的 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$ 和 $\{\dot{u}\}_{n+1}$ 。但以上的解法是有条件稳定的, 为了达到无条件稳定, Wilson 把时段 δt 延长为 $h = \theta\delta t$, 按上述方法解出 h 时段末的 $\{\ddot{u}\}_h$ 后再用下式内插得出 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$

$$\{\ddot{u}\}_{n+1} = \{\ddot{u}\}_n + \frac{1}{\theta}(\{\ddot{u}\}_h - \{\ddot{u}\}_n) \quad (7-26)$$

θ 应大于 1.37, 常用 $\theta = 1.4$ 。

具体的计算过程如下:

(1) 先进行震前静力分析, 并根据静应力分布按式 (7-3) 算出各单元 G_{\max} , λ 假定为 0.05, 并估计一个 ω_1 初值。

(2) 把整个地震过程分成 10 个左右时段 Δt , 每个 Δt 再分成 50~100 个 δt , 按 Wilson θ 法进行数值积分。

(3) 从动力分析结果得出峰值动应变 $(\gamma_d)_{\max}$, 取 $\bar{\gamma}_d = 0.65 (\gamma_d)_{\max}$, 按式 (7-2) 计算 G_d 和 λ , 并计算出主频 ω_1 。

(4) 按新的 G_d 和 λ 重新进行数值积分, 一般这一过程要迭代 2~3 次。

(5) 按式 (7-16) 计算该 Δt 内的振动次数 N_{eq} 和 ΔN_{eq} , 并代入式 (7-7) 计算 $\Delta\epsilon_v$ 和 $\Delta\epsilon_s$ 或按式 (7-14) 计算 Δu_w 。

(6) 把 $\Delta\epsilon_v$ 和 $\Delta\epsilon_s$ 作为初应变, 或把 Δu_w 作为初应力, 按 Biot 固结理论进行静力计算, 得出 Δt 时段内残余变位和残余孔隙压力的增长。

(7) 如此一个时段接着一个时段进行, 直到地震结束。

(8) 地震结束后再按 Biot 固结理论进行静力分析以模拟孔隙压力消散过程。

四、计算实例

1. 密云水库白河主坝

密云水库位于北京东北潮白河上游，由白河、潮河两座主坝和 7 座副坝组成。白河主坝最大坝高 66m，坝顶全长 960m，为薄粘土斜墙坝。斜墙上游为厚 3~5m 的砂砾石保护层，典型断面如图 7-7 所示。1976 年 7 月 28 日，距坝址约 150km 处的唐山发生 7.8 级地震时，白河主坝上游水面下的砂砾石保护层全坝线发生滑坡，滑坡的总面积达 6 万 m^2 ，坍塌方量达 15 万 m^2 。滑坡发生后，经取样试验和分析，得出滑坡原因为砂砾石料中粗粒部分含量不足，细粒部分较松散而导致液化的结论。

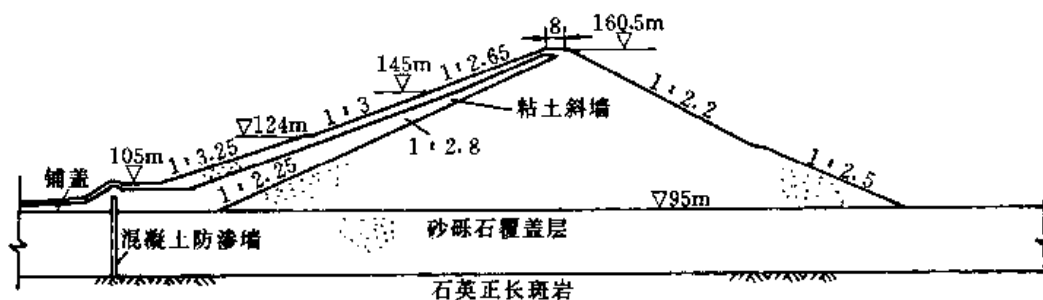


图 7-7 白河主坝断面

由于没有主震记录，分析时采用一条 6.3 级的强余震纪录，并考虑到地震波经过长距离传播以后的改变，将该记录的峰值加速度调整到 0.05g，卓越周期为 0.42s，持续时间 30s，取渗透系数为 $5 \times 10^{-2} \text{cm/s}$ ，按式 (7-14) 进行残余孔隙水压力增长的计算，所得三个时刻的孔隙压力分布如图 7-8 所示。其中最高的孔隙压力发生在 $t=9\text{s}$ 时，用折线滑动面法计算所得的抗滑安全系数只有 0.6，而如果没有振动孔隙压力，相应的安全系数达到 1.7^[23]。

2. 册田水库大坝

册田水库位于山西大同，初建于 1960 年。开始用水力冲填，以后碾压加高，最大坝高 41.5m，所用坝料为淤泥质壤土，填筑密度较低，干密度只达 $1.3 \sim 1.6 \text{g/cm}^3$ 。经多年运用，坝前淤积厚达 25m，如图 7-9 所示。该坝位于 7 度地震区，为了检验其抗震稳定性，曾于 1986 年取土试验，并进行了动力分析^[24]。

计算按 50~100km 以外发生 7 级地震考虑，选用 1976 年 8 月 15 日松潘地震的加速度纪录，其峰值加速度调整为 1.0m/s^2 ，卓越周期 0.36s，持续时间 24s，

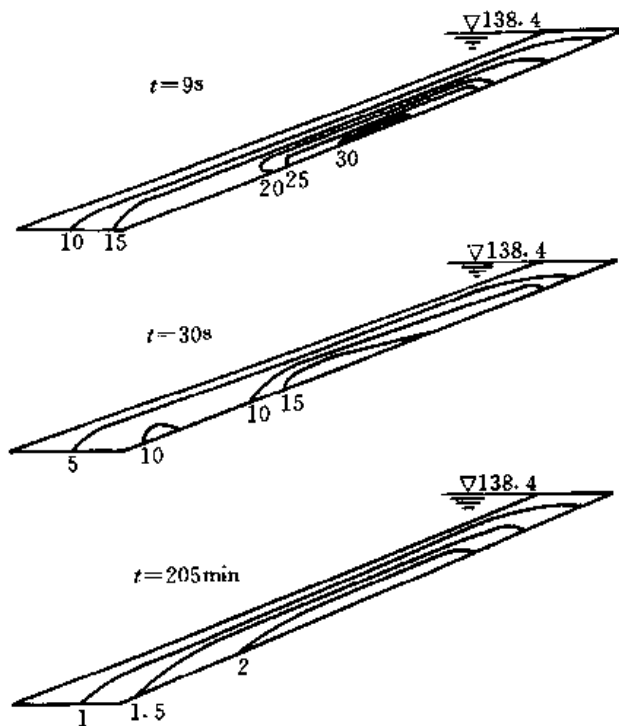


图 7-8 斜墙保护层中振动孔隙压力

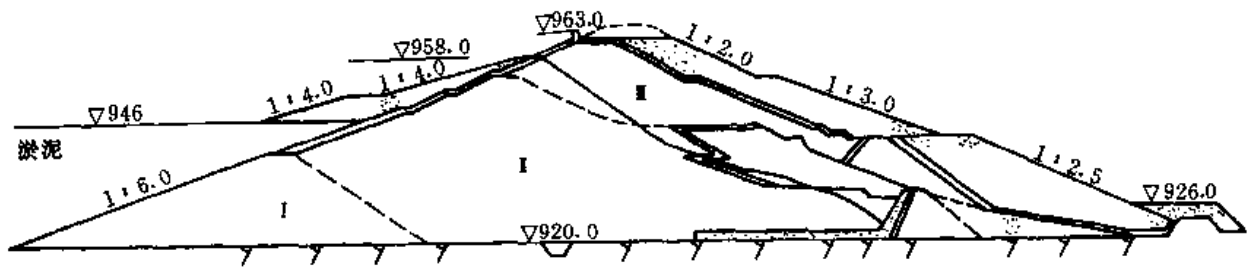


图 7-9 册田水库大坝断面

计算中把地震历时分成 10 个时段，并按式 (7-7) 计算残余变形。图 7-10 为高水位地震时计算所得的地震结束时的坝面残余变位和坝内振动孔隙压力分布，坝顶最大沉降 10.4cm，最大水平位移 10.8cm，坝内最大孔隙压力 36kPa，根据这一结果，认定该坝在 7 度地震下是安全的。分析完成 3 年后，1989 年 10 月 18 日发生震级为 6.1 级的大同一阳高地震，震中距坝址 2.5km，除了坝面有少量裂缝外，该坝无严重变形^[25]，实测 A 点沉降为 1.85cm，B 点位移为 1.75cm，也远小于预测值。该坝位于基岩上，是震害较轻的一个重要原因。预测时按远震考虑，实际发生的是近震。近震的频率高，坝体的反应就小。

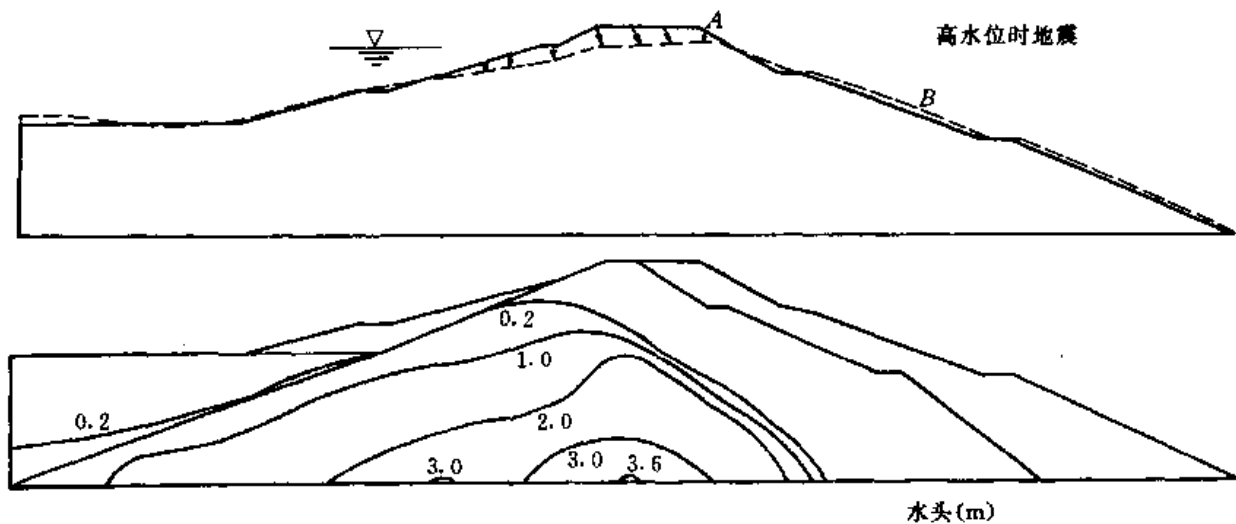


图 7-10 册田土坝的震后变位及孔隙水压力

第四节 砂土液化的波动过程理论

一、动孔隙压力波动规律

平均过程理论把动力荷载下的砂土实际孔隙压力和变形增长过程简化为平稳的上升过程，波动过程理论则要求通过数值仿真再现真实的时间过程，从而更好地预测地震、风浪等荷载作用下砂土地基和相关建筑物的变形和破坏过程。谢定义等把这种理论称为饱和砂土瞬态动力学^[26]，有人把相应的数值分析方法称为真非线性分析，而前面基于等价粘弹性模型的分析方法则被称为等价线性分析。

引起孔隙压力波动的原因不外乎两个，一是外加荷载的波动，另一是砂土微结构的周期变化。谢定义把前者有关的孔压称为应力孔压，而后者则称为结构孔压。应力孔压是压缩一回弹特性的反映。在常规动三轴试验中，围压 σ_3 不变，平均压力 σ_m 随动应力 $\pm\sigma_d$ 的周期变化而变化，在不排水条件下就转化为孔隙压力的波动，如图 7-11 (a) 所示，而在动扭剪试验中， σ_m 不变，孔隙压力在试验初期就无明显的波动，如图 7-11 (b) 所示。结构孔压是土骨架剪胀—剪缩的反应。这一变化初期不明显，随着孔隙压力的上升，有效剪应力比 $\eta' = \sigma_s / (\sigma_m - u_w)$ 也逐渐增大，这一周期变化就越来越明显。另外，从总体上看剪缩量总是大于剪胀量，这就导致孔隙压力在波动过程中逐渐积累而导致液化。波动过程理论的关键问题是如何模拟好这种剪胀—剪缩的变形特点。

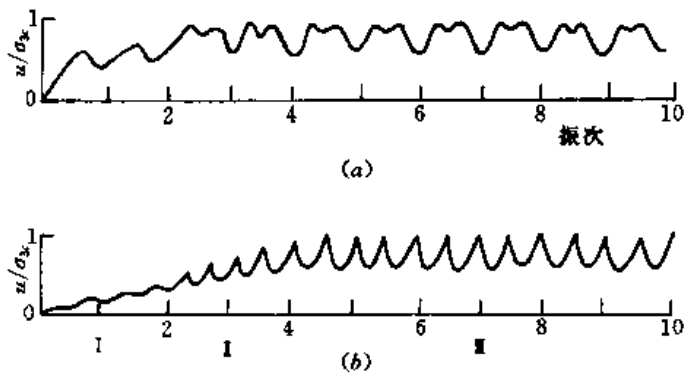


图 7-11 孔隙压力的波动
(a) 动三轴试验；(b) 动扭剪试验

地震和风浪荷载作用下的实际变化过程是十分复杂的。具体的研究过程需要分两步进行。第一步是把实际荷载分解为几种简单的周期荷载，而且每种荷载都当作正弦波处理；第二步再把简单荷载过程综合起来。

简单的周期荷载大致可以区分以下几种：

简单的周期荷载大致可以区分以下几种：

(1) 周期压缩荷载——可在单轴压缩仪上进行 (图 7-12, a)。

(2) 周期剪切荷载——需要在双向振动三轴仪上进行 (图 7-12, b 中实线)。常规的振动三轴试验则是 (1) 和 (2) 的合成 (图 7-12, b 中虚线)。

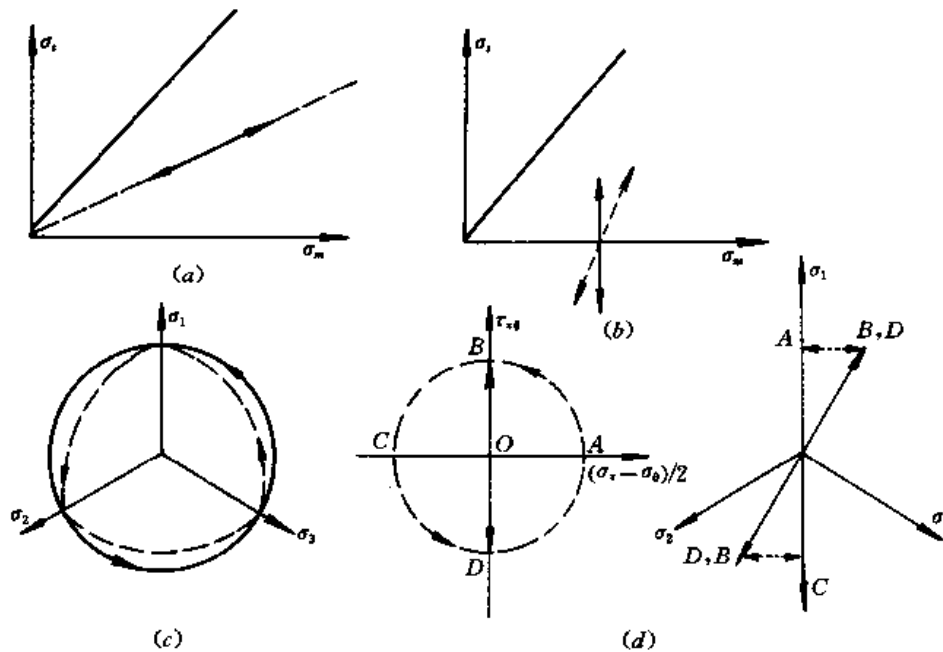


图 7-12 常用的试验应力路径

(a) 压缩试验；(b) 三轴试验；(c) 真三轴试验；(d) 空心扭剪试验

(3) 周期应力路线旋转——需在真三轴仪中进行，采用的应力路线可为圆形 [图 7-12 (c) 中实线] 或曲线三角形 (虚线)。

(4) 周期主应力轴旋转——需在振动扭剪仪中进行，常用的试验方法有三种：①单纯扭剪试验，保持 σ_x , σ_r , σ_θ 不变，只变化剪应力 $\tau_{x\theta}$ (图 7-12, d 中实线)；②中主应力变化的主应力轴旋转试验，保持圆桶内外压力相等，此时 $\sigma_r = \sigma_\theta$ ，中主应力参数 b 将在 $0 \sim 0.5$ 之间变化 (图 7-12, d 中虚线)；③中主应力不变的主应力轴旋转试验，常用 $b = 0.5$ ，即 $\sigma_r = (\sigma_x + \sigma_\theta) / 2$ ，如该图 d 左边所示。

经过多年研究，已积累了大量试验资料，从中可以总结出以下有关砂土在周期荷载下的变形规律。

(1) 当外加荷载振幅很小时，所产生的应变小于门槛应变 ($\sim 10^{-2}\%$)，不产生残余孔隙压力。

(2) 任何较大的循环荷载在一个循环结束时都会产生一定的残余孔隙压力，尽管在一个循环各个阶段产生的孔隙压力可正可负。

(3) 等向固结下的液化过程可以分为三个阶段 (图 7-11)：

I —— 纯剪缩阶段，孔隙压力持续上升；

II —— 剪胀—剪缩阶段，孔隙压力波动上升；

III —— 液化阶段，孔隙压力呈重复波动状态，在某一瞬间有效应力达到 0，而剪应变幅值则不断增大。三个阶段的详细的应力—孔压—应变关系如图 7-13 所示。该图中符号 c 代表剪缩阶段， d 代表剪胀阶段， e 代表弹性阶段。按照邵生俊的观点，剪缩阶段又可划分成 c_1 , c_2 和 c_3 三个亚阶段^[27]。 c_1 代表准弹性状态，此时的剪应力水平没有超过历史最大值，反

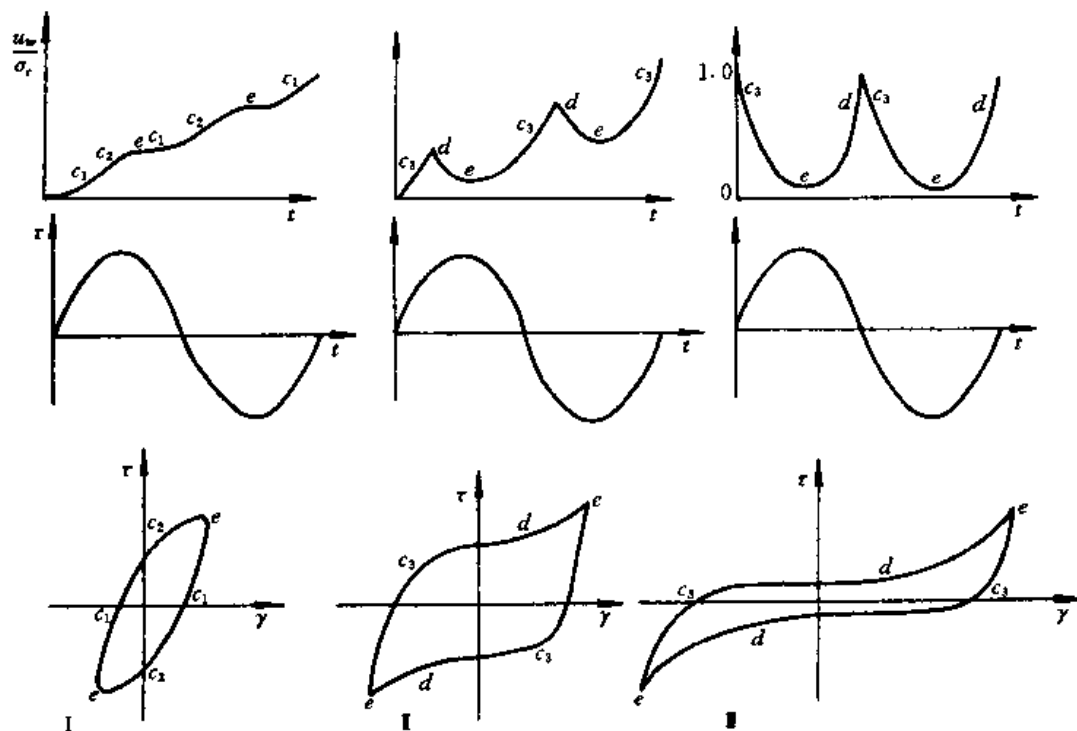


图 7-13 等向固结试样液化过程的三个阶段

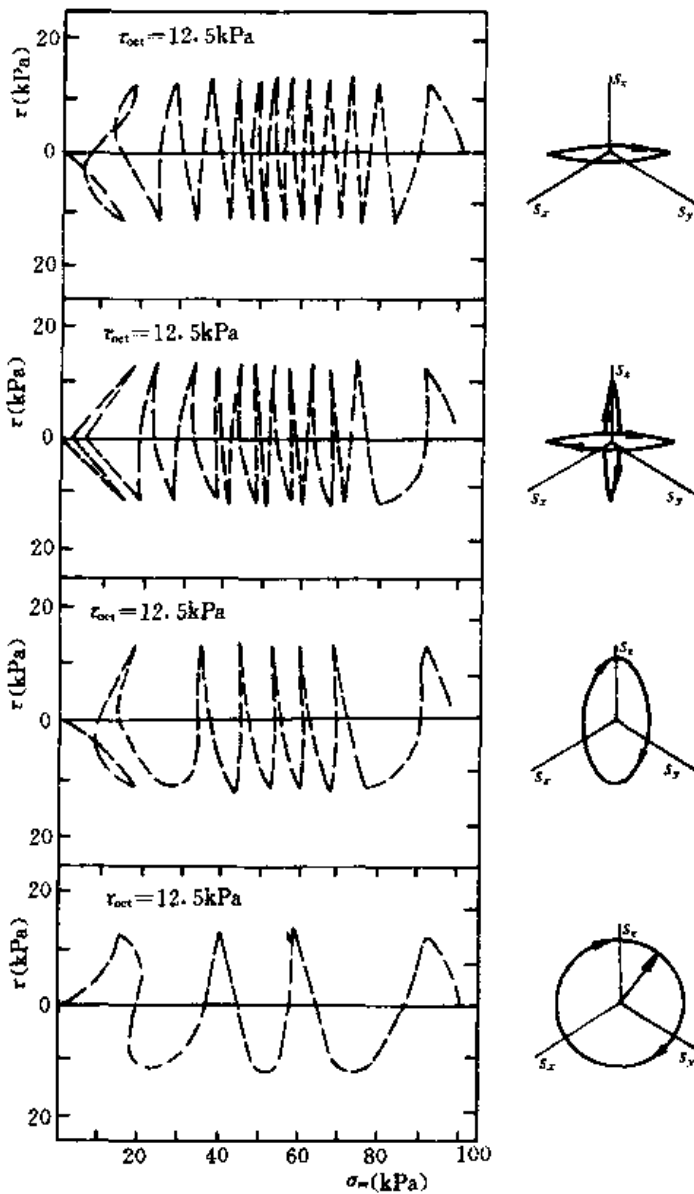


图 7-14 四种典型应力路径下的液化过程

映出剪缩量较小。 c_2 为剪应力水平超过历史最大值所处的阶段。 c_3 则为出现剪胀后的反向剪缩量，此时的剪缩量最大。

(4) 不等向固结试样，经过几次振动后孔隙压力达到某一值后将不再上升，最大孔压比 u_w/σ_c 小于 1，但大主应力作用方向的变形将不断积累，动应变的幅值视动应力的幅值而异，可能不断增大，也可能略有减小的趋势。

(5) 应力路线旋转下也会产生显著的孔隙压力，不管采用什么的应力路线（圆的，椭圆的还是曲线三角形的）。而且在同一动应力振幅下，旋转应力路线比循环应力路线更易液化（图 7-14）。大量试验资料还表明，实际产生的应变增量方向既不与任何可能的屈服面正交，也不与应力增量方向（即切线方向）重合，而往往介于两者之间，如图 7-15 所示^[28,29]。

(6) 主应力轴旋转时它也出现孔隙压力波动上升的过程。由于剪应力的作用，与不等向固结试样类似，不会最终导致液化，但松砂则可能最终导致流滑。试验资料表明，孔隙压力的升高与制样过程中的各向异性密切相关，其显著增加往往发生在大主应力方向与沉积方向偏转 60° 左右的时候

(图 7-16)^[30,31]。

二、基于切线剪切模量的液化理论

动力分析与等价线性分析方法同时发展起来的是一种称之为真非线性分析的方法^[32]，这种分析方法用切线剪切模量 G_t 代替式 (7-2) 中割线模量进行计算， G_t 值在滞回圈的每一段都是不同的。对于性质完全取决于剪切模量的无体积变形材料，无疑比等价线性分析方法更合理，但是，对

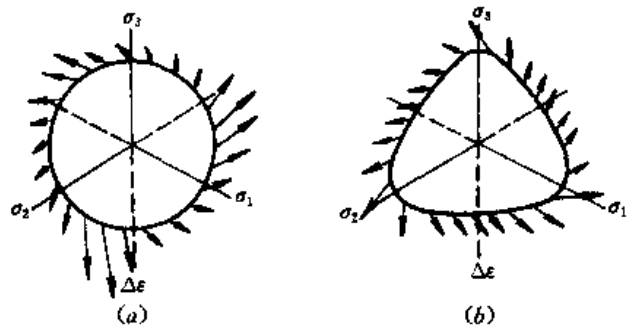


图 7-15 应力路线旋转时的应变增量方向
(a) Mises 屈服面；(b) Matsuoka 屈服面

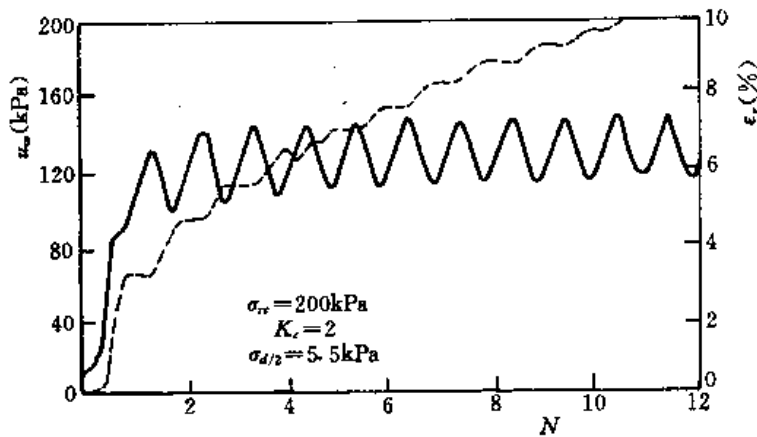


图 7-16 主应力轴旋转下的孔隙压力和应变增长

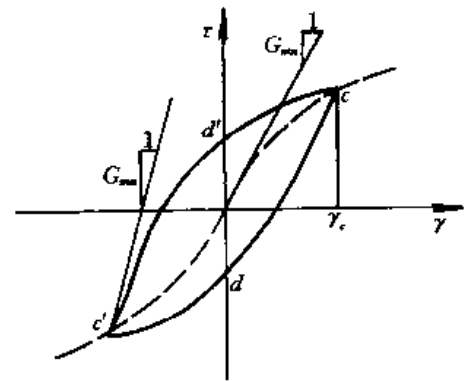


图 7-17 真非线性算法采用的应力应变曲线

于体积变形有决定意义的砂土液化问题，这一理论是否优于前面的等价粘弹性理论，就值得讨论。

Finn 等人最先在这一理论基础上发展了砂土液化的所谓真非线性分析方法^[33]。首先他们采用了下列双曲线应力应变曲线（图 7-17）

初始加荷

$$\tau = \frac{G_{m0}\gamma}{1 + \frac{G_{m0}\gamma}{\tau_{m0}}} \quad (7-27a)$$

再加荷

$$\frac{\tau - \tau_r}{2} = \frac{G_{mn}(\gamma - \gamma_c)}{2 + \frac{G_{mn}}{\tau_{mn}}|\gamma - \gamma_c|} \quad (7-27b)$$

式中： γ_c 是应力反转点的剪应变； G_{m0} 和 τ_{m0} 是固结应力的函数， G_{mn} 和 τ_{mn} 中还考虑硬化。切线模量 $G_t = \frac{d\tau}{d\gamma}$ 由上式得出。其次，这一理论假定孔隙压力增长仍如式 (7-8) 那样计算，但每循环中孔隙压力不是平均增长，而只在 cd 和 $c'd'$ 段增长。其他两段则保持不变。因而由此得出的孔隙压力增长过程只是阶段增长过程，而不能反映实际的波动增长过程。应用这一模型的计算实例见辛鸿博的论文^[34]。

李万红等因袭了这一思路，并在分析方法上作了一些改进，但每个循环下的孔隙压力增量仍用经验公式计算，并且假定均匀分配到每一时段上^[35]。

徐干成所提出的弹塑模型中把残余孔隙压力作为一个硬化参量，具体分析时在偏应力空间采用多环屈服面模型（图 2-12），得出剪应变的增长，并用经验公式算出残余孔隙压力的增长，因而也只能反映孔隙压力的平均增长过程^[36]。

三、基于模量场概念的液化理论

对于循环荷载下的变形，最初用运动硬化模型模拟，以后发展为多环屈服面模型，后来又产生了边界面模型^[37]。边界面模型的主要特点是提出一种映射方法，把实际应力点映射到边界面上，得出一个对偶应力点，并根据该点的边界面法向确定塑性应变方向和根据

两点间距离确定塑性模量场，见图 2-52。但是，这类模型仍然无法模拟孔压的波动增长过程。后来，这类模型在以下三点上作了重大修改：

(1) 引入反向屈服面，后者在应力转向点与屈服面相切，并随应力点到转向点的距离增大而增大。

(2) 除了剪切模量和压缩模量外，另外引入剪胀模量和压剪模量，并参照原有的模量场理论假定了 4 个模量的经验公式。

(3) 在体积应变直接由压缩和剪胀模量公式确定的基础上，对偏应变方向引入次塑性的概念，即塑性应变方向不仅决定于应力总量，也决定于应力增量方向。在以上假设的基础上，王志良建议了下列计算弹性应变和塑性应变的公式^[38]

$$\{\Delta \epsilon^e\} = \frac{1}{2G} \sigma_m \{\Delta r\} + \left\{ \frac{1}{2G} \{r\} + \frac{1}{3K} \{\delta\} \right\} \Delta \sigma_m \quad (7-28a)$$

$$\{\Delta \epsilon^p\} = \left\{ \frac{1}{H_r} \{n_d\} + \frac{1}{3K_r} \{\delta\} \right\} \sigma_m \{\Delta r\}^T \{n_i\} + \left\{ \frac{1}{H_p} \{r\} + \frac{1}{3K_p} \{\delta\} \right\} \Delta \sigma_m \quad (7-28b)$$

式中： $\{r\} = \frac{1}{\sigma_m} \{s\}$ 为归一化偏应力张量； $\langle \cdot \rangle$ 表示 σ_m 大于历史最大应力 $\bar{\sigma}_m$ 且 $\Delta \sigma_m > 0$ 时等于原值，否则为 0，加荷方向 n_i 和塑性应变方向 n_d 采用下列内插公式

$$n_i = \alpha_1 \bar{n} + (1 - \alpha_1) \hat{n} \quad (7-29a)$$

$$n_d = \alpha_2 \bar{n} + (1 - \alpha_2) \hat{n} \quad (7-29b)$$

式中： α_1 和 α_2 为两个常数； \bar{n} 和 \hat{n} 的方向见图 7-18，该图中 \hat{f} 代表破坏面， \bar{f} 代表历史上最大的屈服面，虚线所示即为应力反向后的屈服面。4 个模量公式中剪胀模量公式为

$$K_r = p_a \frac{1}{w c_s} \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^{1/2} \quad (7-30)$$

$$\text{其中 } w = w_i + (w_l - w_i) \left(\frac{\rho}{\rho} \right)^n \quad (7-31a)$$

$$w_i = \frac{1}{k \exp(a\xi)} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_m} \right)^a \left(\frac{\eta}{\eta_f} \right)^b \left(\frac{\eta_c - \eta}{\eta_f - \eta} \right) \quad (7-31b)$$

$$w_l = \frac{1}{\exp(a\xi)} \left(\frac{\eta}{\eta_f} \right)^d \quad (7-31c)$$

式中： α 和 a, b, d 为 4 个常数； k 为对压缩和拉伸取不同值的常数； ξ 相当于内时量度。

由于 $\{\Delta r\}$ 与 $\{n_i\}$ 之间的夹角总是小于 90° ，式 (7-28b) 中 $\{\Delta r\}^T \{n_i\}$ 恒为正值，按上述模型预测，任何情况均产生塑性变形，而且应力反向时式 (7-30) 中 w 按 (7-31b) 计算，后者随 η 增大而增大，故反向剪缩量也随之增大。除主应轴旋转未考虑外，该模型比较合理地模拟了反向剪缩和应力路线旋转下的液化过程 (图 7-19)。模型的不足之处是当 η 大

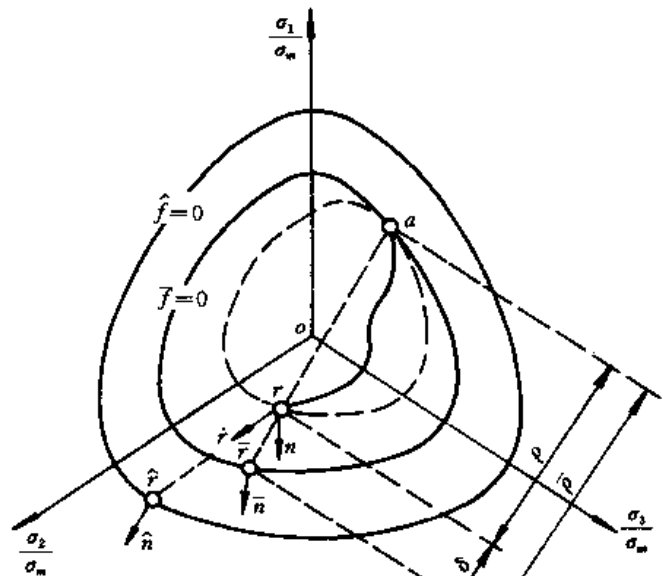


图 7-18 王志良模型

于历史最大值时预测的剪缩量（即图 7-13 中的 c_2 剪缩）偏大，另外模型参数的确定比较困难。

陈生水等建议了一个类似的模型，但用塑性系数取代塑性模量，并在模拟反向剪缩方面作了一些改进^[39]。

四、基于多重剪切机构的液化理论

针对圆形应力路线，虽然八面体剪应力 τ_{oct} 保持常量，但 $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$ 和 $\sigma_3 - \sigma_1$ 或 σ_1/σ_2 , σ_2/σ_3 , σ_3/σ_1 三个分量是不断变化的。Matsuoka 建议的三机构模型假定每一个主应变均由两个滑移机构的贡献所产生，即^[29]

$$\Delta \epsilon_i = f^i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j} \right) \Delta \eta_{ij} + f^i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_k} \right) \Delta \eta_{ik} \quad (7-32)$$

$(i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2)$

其中

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_j}} - \sqrt{\frac{\sigma_j}{\sigma_i}} \right) \quad (7-33)$$

$$f^i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j} \right) = \frac{\gamma_{\alpha ij}}{\mu'_{ij} - \mu} \left(\frac{\mu - \eta_{ij}}{\lambda} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_j}} \right) \exp \left(\frac{\eta_{ij} - \mu}{\mu'_{ij} - \mu} \right) \quad (7-34)$$

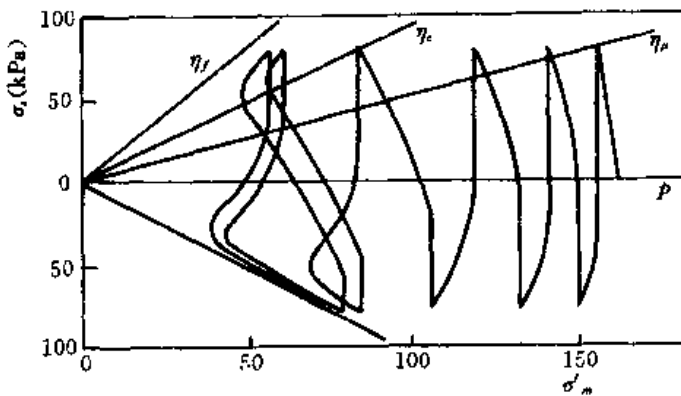


图 7-20 三剪切机构模型预测的有效应力路线

当一段范围内只有弹性变形。从这一点看此模型未能很好模拟反向剪缩现象（图 7-20）。

Towhata 等人建议了另一种多弹簧模型^[40]（图 7-21, a），每个弹簧具有与式（7-27）类似的非线性关系，并由每个弹簧的贡献积分得出剪应力—剪应变关系。这一模型在一定程度上可以模拟旋转剪切及主应力轴旋转下的剪应力—剪应变关系，但在孔隙压力增长上，他们仍采用半经验公式，即假定孔隙压力的积累与剪切功之间存在唯一关系，另外还假定有

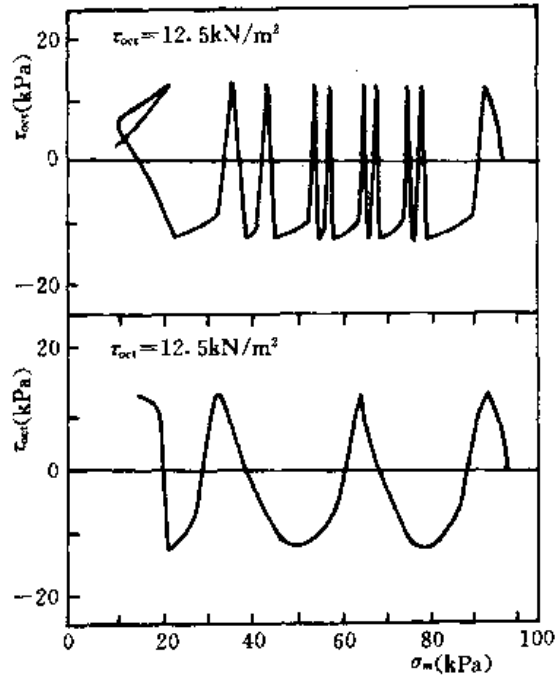


图 7-19 十字交叉和圆形应力路线的液化模拟

式中： λ 和 μ 为反映剪胀规律的常数； μ'_{ij} 和 $\gamma_{\alpha ij}$ 为反映结构变化的两个参数。不排水条件下 $\Delta \epsilon_v = 0$ ，取体积回弹模量 $K_a = \frac{\sigma'_m}{c_s}$ ，可得孔隙压力增长公式

$$\Delta u_w = \frac{\sigma'_m}{c_s} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta \epsilon_i \right) \quad (7-35)$$

按照这一模型，只有剪应力比 η_{ij} 大于颗粒表面摩擦系数 φ_i 时颗粒之间才产生滑移而引起塑性应变，即 φ_i 相当于门槛应力。因而应力反向后相

效应力路线随剪应力的波动，而沿某一所谓的等价应变能面发生波动。应力路线的图形呈抛物线形（图 7-21, b）。Iai 等也曾提出一个类似的模型^[41]，并且定义了一个与前面应变能相当的所谓液化面，其有关公式已在式（2-269）中介绍。刘汉龙曾应用这一模型分析了阪神地震中遭到破坏的一座沉箱式码头^[42]。

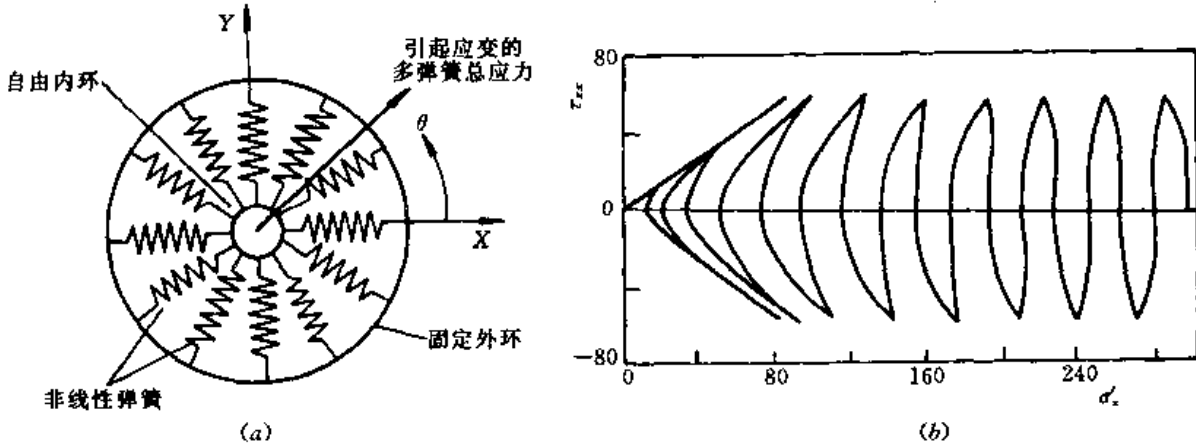


图 7-21 多弹簧模型及其预测的有效应力路线

五、考虑主应力轴旋转的液化理论

对于主应力轴旋转引起的液化，目前有两条研究途径。一是如 Vermeer 等人所建议启用形变理论^[43]，假定塑性应变与 3 个主应力及 3 个主应力方向角之间存在唯一关系，从而其中任何一个的改变均将引起塑性变形。Matsuoka 则建议过下列双曲线形应力应变关系^[44]

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_0} \frac{\sin\varphi \sin\varphi_{m_0} \sin 2\alpha}{\sin\varphi - \sin\varphi_{m_0}} \quad (7-36)$$

式中： $\sin\varphi_{m_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$ ； α 为主应力方向角； G_0 为初始切线模量；是平均应力 σ_m 的函数。上式表明，无论剪应力变化（ φ_{m_0} 变化）， α 变化，还是 σ_m 变化，均将引起 γ_{xy} 的改变。然后根据剪胀规律得出体应变，再把 γ_{xy} ， γ_{yz} ， γ_{zx} 合成起来，即可得出一种考虑主应力轴旋转的模型。

另一途径是用 6 维应力空间中线段长度 $\Delta\bar{\sigma} = \sqrt{\{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\sigma\}}$ 反映应力变化，只要任何一个应力分量不为 0， $\Delta\bar{\sigma}$ 均不为 0，从而将引起塑性应变。沈珠江曾经建议过一个这类模型^[45]，刘元雪等人所建议的重新定义广义剪应力增量为 $\bar{\Delta\sigma}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\{\Delta s\}^T \{\Delta s\}}$ 的办法也与此类似^[47]。前面介绍的 Towhata 建议的多弹簧模型也得到任何应力增量下都能产生塑性剪应变的结果。

六、基于结构性模型的液化理论

微结构的变化是导致土体发生塑性变形的根本原因，结构性模型就是在弄清塑性变形微观机制基础上建立起来的宏观应力应变模型。沈珠江针对砂土液化问题提出的散粒体模

型建立在下列三个微观机制基础上：

(1) 颗粒的滑动和滚动共同构成塑性变形的原因。

(2) 剪缩是普遍存在的现象，剪胀只是剪切到一定程度才显现；并且是可逆的，即正向剪切时剪胀，反向剪切时剪缩。

(3) 天然沉积的砂土都具有各向异性。

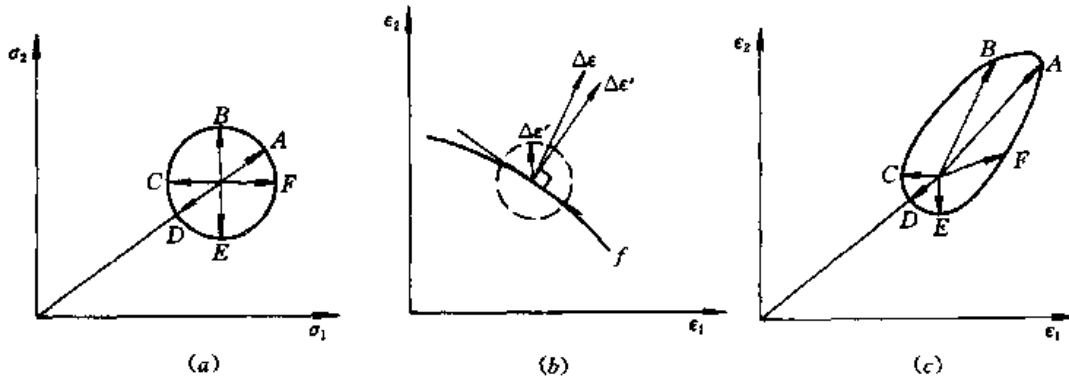


图 7-22 颗粒滚动和滑动引起的塑性应变

(a) 单位应力增量；(b) 滚动和滑动应变；(c) 合成应变

设单位应力增量（图 7-22, a）下由于滚动和滑动而引起的塑性应变分别如图 7-22 (b) 中虚线和实线所示， f 为通常理解的只有滑动时的屈服面，则两者相加得出的塑性应变将如图 7-22 (c) 所示。前面介绍的许多模型中均对传统的加荷—卸荷准则作了修改，目的无非是为了描述任何应力路线下均会产生产生的塑性变形，这里用滚动机制十分简单地解释了这一现象。其实，滚动机制也明确地解释了塑性势理论的有效性，即滚动引起的塑性应变方向决定于应力增量方向，只有滑动引起的部分塑性应变才决定于应力总量（服从塑性势理论）。因而合成的塑性应变增量方向将如图 7-15 那样介于应力总量方向与应力增量方向之间。其次，该模型把剪胀应变看作可逆的，十分简单地解释了反向剪缩现象，从而能更好地描述一旦出现剪胀后应力反向时的显著剪缩现象（图 7-13 中的 c_3 剪缩）。最后，该模型用滚动机制和各向异性机制共同起作用的观点解释了主应力旋转下的液化现象。主应力轴的旋转相当于 6 维空间中的应力路线旋转，同样将会产生一定的塑性变形，普遍剪缩机制导致不排水条件下的孔隙压力增长，而各向异性则导致主应力值不变条件下 η/η_f 比值的波动，因为 η_f 值在主应力轴旋转到 $60^\circ \sim 90^\circ$ 时达到最小值，如图 2-67 所示。两种机制相加，导致孔隙压力的波动增长过程。前面介绍的式 (7-36) 实际上只考虑了各向异性的影响，而沈珠江和刘元雪的空间应力路线理论则只考虑前一种因素。

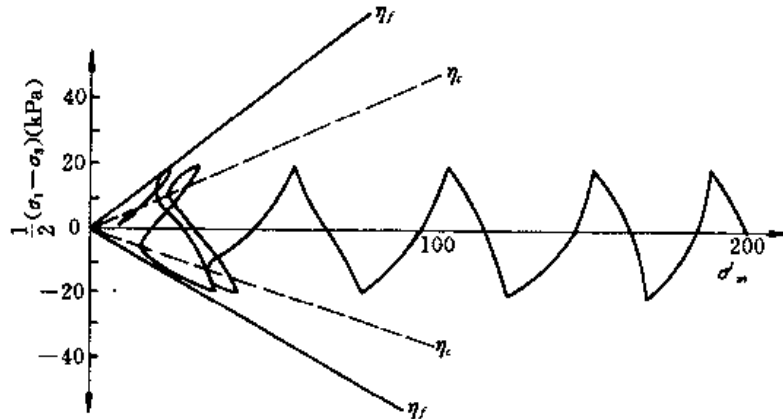
沈珠江最近建议的一种散粒体模型的表达式已见式 (2-283) 和式 (2-284)^[47]，按这一模型，在不排水条件下，由 $\Delta \epsilon_v = 0$ 得出的孔隙压力增长公式将为

$$\Delta u_w = \frac{K_u}{B} \Delta \epsilon_{vd} \quad (7-37)$$

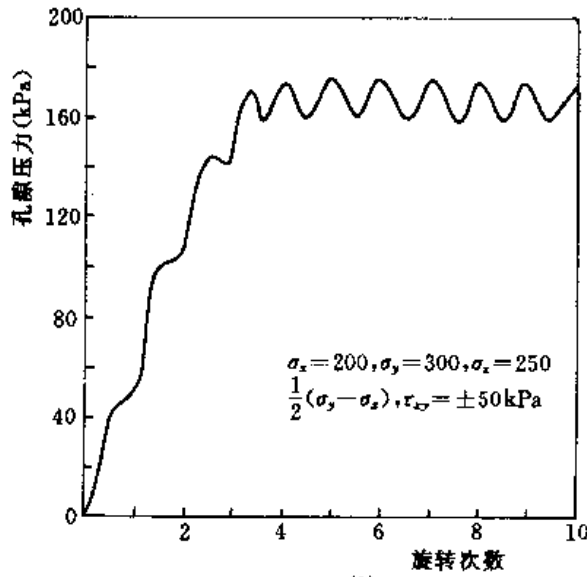
其中 $\Delta \epsilon_{vd}$ 为由于剪切引起的体应变， K_u 为回弹体积模量，而

$$B = 1 + \frac{c_c - c_s}{c_s} \frac{\sigma_m^*}{(\sigma_m)_M} \quad (7-38)$$

式中： $(\sigma_m)_M$ 为历史上最大压应力； σ_m^* 为转折点算起的压应力差。在常规试验条件下， $(\sigma_m)_M$ 就是固结应力 σ_c ， $\sigma_m^* = \sigma_c - \sigma'_m$ 就是积累的孔隙压力。由于这一模型考虑了反复加压条件下也会产生塑性体应变，即 B 总是大于 1，因此由式 (7-37) 算出的孔隙压力增长将小于单纯用回弹模量计算的相应值，如前面介绍的王志良模型和 Matsuoka 模型，见式 (7-35)。按这一模型预测的循环三轴荷载条件下的有效应力路径和主应力轴旋转条件下的孔隙压力增长过程如图 7-23 所示。与图 7-14 和图 7-16 相比，可见预测的结果相当好。



(a)



(b)

图 7-23 结构性模型预测的孔隙压力增长

(a) 循环荷载；(b) 主应力轴旋转

第五节 粘土液化理论

一、循环荷载作用下粘土变形的特征

粘土液化问题比砂土更复杂。首先，粘土对加荷速率更敏感，不同应变速率下的峰值

强度可能相差 30% 以上，因此不同振动频率的结果将有相当差别。其次，超固结比影响很大，正常固结土振动时产生正的孔隙压力，超固结土振动时则会产生负的孔隙压力。另外，由于结构性的存在，天然土的动力反应与重塑土有很大差别。孔隙压力反应的滞后现象也增加了研究难度。试验所采用的振动频率一般在 1~0.1Hz 之间，多数采用较慢的 0.1Hz，以便试样内的孔隙压力比较均匀。但这一频率对地震荷载显然太慢，对风浪荷载则又太快。已有的试验多数是在三轴仪上进行的，另一部分则在单剪仪上做。三轴仪上一般在试样底部测孔压，单剪仪上常做等体积试验，即采用增减垂直荷载的办法以保持体积不变，并把垂直压力的增减量作为相当的孔隙压力变化^[48,49]。

粘土振动试验中难以观察到 $u/\sigma_c=1$ 的完全液化，一般此值只能达到 0.75 左右，因此，多数人采用双幅应变 5% 为破坏准则。大量试验表明，如果动应力小于某一临界值，无论振动多少次都不会破坏。振动后再进行静力剪切试验的结果表明，超固结土的强度不受影响，正常固结土和轻超固结土则由于残余孔隙压力的存在强度有所降低，但静力剪切中所产生的孔隙压力将有所减小，甚至出现负的孔隙压力增量，即具有明显的超固结土的特性。图 7-24 为 Yasuhara 等人的试验结果^[50]，显示加 100kPa 动应力经不同振次后进行静力剪切试验时所得的有效应力路线，并与不同超固结比试样的静力剪切试验结果比较。如果振后让残余孔隙压力消散后再进行不排水剪切，则其强度将有所提高，如图 7-24 (b)。

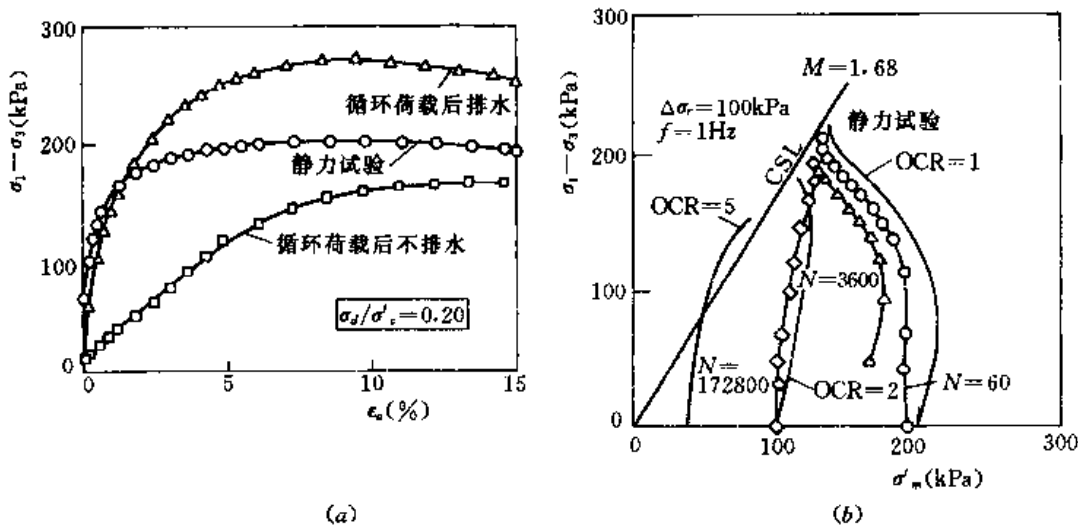


图 7-24 粘土在循环荷载后的静力剪切
(a) 应力应变曲线；(b) 有效应力路线

二、经验公式

1. 动模量和阻尼比

在 Hardin-Drnevich 建议的公式 (7-2) 和式 (7-4) 中参数 a 、 b 和 λ_{max} 对砂石和粘土假定了不同的值，对粘土须要考虑振动频率的影响，例如 λ_{max} 的公式为

$$\lambda_{max} = 31 - (3 + 0.03f)/\sigma'_0{}^{1/2} + 1.5f^{1/2} - 1.5 \log N \quad (7-39)$$

式中： f 为振动频率。

2. 残余孔隙压力

Ohara 等建议的公式为^[52]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{N}{A(\gamma_d)^m + \frac{\gamma_d}{(B + c\gamma_d)}N} - \psi \quad (7-40a)$$

式中：A, B, C 和 m 为参数； ψ 是超固结比的函数。Hyde 等建议的公式为^[53]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{\alpha}{1 - \beta}(N^{1-\beta} - 1) + \alpha \quad (7-40b)$$

式中： α 和 β 为参数。阎澍旺则采用了下列更简单的半对数公式^[55]

$$u_w = A \lg N + B \quad (7-40c)$$

以上式中：N 为振动次数。Hyodo 则改用动应变幅值 ϵ_d 为参数，建议了下列公式^[54]

$$\frac{u_w}{\sigma_c} = \frac{\sigma_d}{\sigma_c} \left(\frac{1}{\eta_s} - \frac{1 + \epsilon_d}{c\epsilon_d} \right) \quad (7-40d)$$

式中：c 为参数； η_s 为第一次加荷时达到的应力比。按照上述公式，归一化的孔隙压力与动应变幅值之间有唯一关系。周健建议的公式为^[56]

$$\frac{u_w}{u_{wf}} = \frac{\eta^*}{c_3 - (c_3 - 1)\eta^*} \quad (7-40e)$$

式中： $\eta^* = \frac{(R_N)^{c_2}}{c_1 - (c_1 - 1)R_N}$, $u_{wf} = \sigma_c - (\sigma_d + \sigma_{s0})/\eta_f$, $R_N = \frac{\log(N+1)}{\log(N_f+1)}$ ； N_f 为破坏振次； σ_{s0} 为振前静剪应力； c_1, c_2, c_3 为 3 个参数。

3. 残余体应变

假定压缩曲线为半对数曲线，则当残余孔隙压力 Δu_w 已知时，残余体应变可由下式计算

$$\epsilon_v = \frac{C_p}{1 + e_0} \log \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_c - \Delta u} \right) \quad (7-41)$$

式中： C_p 为振动后压缩曲线的斜率。设 C_c 和 C_r 分别为压缩和回弹曲线的斜率， C_r 为回弹后再压缩曲线的斜率，则大量试验资料表明

$$C_c > C_p > C_r > C_r \quad (7-42)$$

Yasuhara 建议取 $C_p = 1.5C_r$ ^[50]，白冰和刘祖德建议取 $C_p = 1.32C_r$ 或 $C_p = 2.0C_r$ ^[57]。

4. 残余剪应变

许多人根据动三轴试验结果得出轴向残余应变 ϵ_p 的经验公式。郁寿松和石兆吉建议的公式为^[58]

$$\epsilon_p = 10 \left\{ \frac{\sigma_d}{\sigma_3 [c_1 + c_2(K_c - 1)]} \right\}^{\frac{1}{c_3 + c_4(K_c - 1)}} \left[\frac{N}{10} \right]^{-\frac{c_5}{c_3 + c_4(K_c - 1)}} \quad (7-43a)$$

而周健则建议了下列公式^[55]

$$\epsilon_p = \frac{\eta^*}{d - (d - 20)\eta^*} \quad (7-43b)$$

式中： η^* 的含义同式 (7-40e)， $d = 0.5$ 。

显然，前面介绍的式 (7-7b) 和式 (7-10) 仍是可用的。

三、理论模型

1. Masing 模型

前面提到的 Masing 模型，如式 (7-27)，本来就是针对体积不变的材料提出的，当然

同样适用于不排水剪切的粘土。但是用于粘土时，最好把粘滞阻尼考虑进去。为此，具体计算时仍按动力方程式 (7-18) 进行分析。当然此时劲度矩阵 $[K]$ 的形成应当采用切线模量 G_t 而不用割线模量 G_s ，而阻尼矩阵 $[C]$ 的形成也不宜用式 (7-7) 算出的 λ ，而需要乘上一个折减系数以便接近真正的粘滞体， λ 则只是一种等价意义上的粘滞性。王志良和李小军均提出过这类模型^[59,60]。

2. 多环屈面模型

多环屈面模型与 Masing 模型不同之处在于前者引用了流动理论计算塑性应变方向，后者则相当于形变理论，而在塑性模量的确定上前者实际上借鉴了后者的结果。

Prevost 最早用多环屈服面模型模拟粘土在循环荷载下的变形^[61]，接着不少人提供了各种改进的建议。王建华建议的下列模型是其中的一个代表^[62]。

设 F ， f 和 f_c 分别为边界面，当前加荷面和应力转折点加荷面， R_b 和 R 分别为边界面和当前加荷面的半径，其相应的表达式取为

$$F = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij} - R_b^2 = 0 \quad (7-44a)$$

$$f = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - R^2 = 0 \quad (7-44b)$$

加荷面半径及其中心点位置按以下规律变化

$$\Delta R = \frac{3}{2} \frac{(s_{ij} - a_{ij})\Delta s_{ij}}{R + \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij} + \Delta s_{ij})\theta_{ij}} \quad (7-45a)$$

$$\Delta a_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} Q_{ij} \Delta R \quad (7-45b)$$

θ_{ij} 为应力反向点到现有圆心 a_{ij} 的方向角。相应的应力应变关系为

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2G}\Delta s_{ij} + \frac{3}{2H'} \frac{s_{ij} - a_{ij}}{R^2} (s_{kl} - a_{kl})\Delta s_{kl} \quad (7-46)$$

或求逆后

$$\Delta s_{ij} = 2G\Delta e_{ij} - \frac{3}{2}(2G - H) \frac{s_{ij} - a_{ij}}{R^2} (s_{kl} - a_{kl})\Delta e_{kl} \quad (7-47)$$

其中 H' 为塑性模量

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2G} + \frac{1}{H'} \quad (7-48)$$

可按下列式计算

$$\text{初次加荷} \quad H = H_{\max} \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^2 \quad (7-49a)$$

$$\text{再加荷} \quad H = H_{\max} \left[1 - \frac{R}{(1 - \eta\beta)R_0}\right]^2 \quad (7-49b)$$

其中 $\beta = 1 - \left|\frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}}\right|$ 反映两个反向点应力水平差异的系数，双向对称加荷时 $\beta = 0$ ， η 则为反映荷载偏向一方时将引起的应变积累量的系数，被称为循环蠕变系数。此外，模型中还考虑了由于孔隙压力上升导致 H_{\max} 和 R_0 减小的所谓循环弱化。

以上模型仍旧只能用经验公式考虑孔隙压力的增长，或通过所谓的模量弱化的经验公式反映实质上的孔隙压力增量，因此与 Masing 模型并无本质上的区别。

3. 临界状态模型

剑桥模型用帽子型屈服面及相应的正交法则模拟软土的剪缩特性，推而广之，就可以模拟循环荷载下的孔隙压力上升。前面提到的 Dafalias 建议的边界面模型根据对偶应力点所在的椭圆形边界的法向确定塑性应变方向，正是这样一种模型。原则上这一类模型可以模拟硬粘土的循环剪胀和软粘土的循环剪缩，但鉴于在砂土中的应用效果也不理想，因此没有人深入探讨它们在粘土中的应用问题。

另一类模型放弃了边界面的概念，为了模拟应力点在屈服面内变动时仍会产生塑性应变这一现象，假定屈服面在荷载循环过程中会不断收缩，这样，重新加荷时又会推动屈服面而发生塑性变形。Sellers 等所建议的模型就属于这一类^[63]，但该模型只能用于单向荷载的反复压缩试验。

由于达到临界状态时体积不再收缩，这类模型一般不能模拟完全液化，目前已很少有人再在这方面做工作。

4. 粘塑性模型

前面模型未考虑应变速率的影响。Matsui 等在 Sekiguchi 的粘塑性势概念的基础上，见式 (2-244)，建议了一个适用于循环加载的粘塑性模型^[64]。Aubry 则建议了一个基于三滑移机构的粘塑性模型，并采用了下列过应力理论的粘塑性变形公式^[65]

$$\epsilon_{ij}^k = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\eta^k} \left(\frac{f^k}{f_0} \right)^n \right] n_{ij}^k = \sum_{k=1}^3 \lambda^k n_{ij}^k \quad (7-50)$$

式中： η^k 是 k 滑移机构的粘滞系数； f_0 是参考应力；屈服函数 f^k 和塑性应变方向 n_{ij}^k 分别定义为

$$\text{初始加荷} \quad f^k = |\bar{s}^k| - r \quad (7-51a)$$

$$\text{再加荷} \quad f_c^k = |\bar{s}^k - a^k| - r_c \quad (7-51b)$$

$$\text{式中} \quad n_{ij}^k = \frac{\bar{s}_{ij}^k - a_{ij}^k}{2|\bar{s}^k - a^k|} + \frac{\alpha}{2} \left(\sin\varphi - \frac{|\bar{s}^k - a^k|}{\sigma_m^k} \right) \quad (7-52)$$

$$\bar{s}_{ij}^k = \frac{s_{ij}^k}{\sigma_m^k \sin\varphi \left[1 - \lg \frac{\sigma_m}{\sigma_0 \exp(\beta \epsilon_0^k)} \right]} \quad (7-53)$$

$$a_{ij}^k = (s_{ij}^k)_c - r_c^k (n_{ij}^k)_c \quad (7-54)$$

分别代替归一化的偏应力张量及屈服面圆心位置， r 为其半径， $(s_{ij}^k)_c$ 和 $(n_{ij}^k)_c$ 为转向点应力及其外法向。上述式中 $|\cdot|$ 代表两点间距离， α 是剪胀系数， β 是压缩硬化系数。 r 和 r_c 分别为初始加荷和再加荷时的圆环半径，分别按下列剪切硬化规律计算

$$r = \frac{\gamma^k}{b + \gamma^k} \quad (7-55a)$$

$$r_c = \frac{\gamma^k}{b_c + \gamma^k} \quad (7-55b)$$

上式表示剪应力和剪应变的双曲线关系， b ， b_c 分别为初始斜率。由此可见，除了考虑粘滞性和采用三滑移机构以外，这一模型与前面模型不同之处还在于这里不再借用边界面来确

定塑性模量，而是直接假定了剪应力与剪应变关系，图 7-25 是用这一模型计算的循环三轴试验有效应力路径与试验结果的比较。

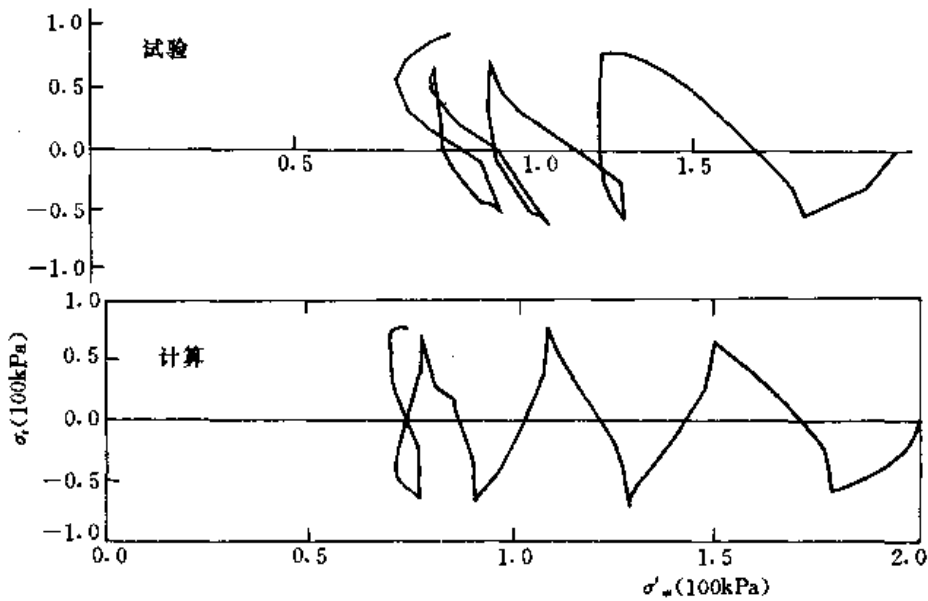


图 7-25 粘土循环三轴试验有效应力路径

四、应用实例

粘土的液化过程需要较长时间的荷载作用，因此地震荷载下的粘土液化问题较少遇到，一般需要研究的是风浪作用下海工建筑物的变形稳定，以及车辆荷载下的路堤变形问题。但是这类问题中循环荷载作用的次数往往多达数千次，继续按式 (7-18) 进行时域中的积分难以实现。为此，许多人采用半经验的办法。例如 Song 在分析一个海上贮油罐时只计算一个波的过程^[66]，假定其它波作用的动应力分布是一样的，然后按照修改后的 Seed 公式 (7-12) 计算孔隙水压力的增长。周健则应用自己的经验公式 (7-43b) 分析了一个防波堤在 6m 波高的风浪荷载作用 24 小时的残余变形^[56]。

第六节 流滑破坏理论

一、流滑破坏机理

流滑破坏是指饱和土体受到一次性轻微扰动引起孔隙压力持续上升而导致的破坏。扰动可以是波浪荷载或其它活荷载的一次作用，也可以是静荷载的一次增加。流滑现象发生在松砂和高灵敏度粘土中。这类土的孔隙比很大，受外荷载作用变形时体积收缩，在不排水条件下转化为孔隙压力上升和有效应力下降而导致土体弱化，这一弱化反过来又引起荷载不变甚至减小情况下变形进一步增大，最终导致土体的完全液化或滑坡。

发生流滑的内部条件是土体本身具有不稳定的大孔隙结构，外部条件是施加足以引起结构改变的外荷载，也即荷载要超过一定的门槛值。松砂的流滑现象已通过图 7-1 解释过。

图 7-26 中进一步引用 Casagrande 的试验结果, 说明当相对密度小于 44% 可能发生流滑现象, 而要引起流滑, 所加的剪应力必须达到峰值抗剪强度。同样, 对高灵敏度粘土 (快粘土), 一旦外加应力足以破坏其结构强度时, 流滑即可发生。

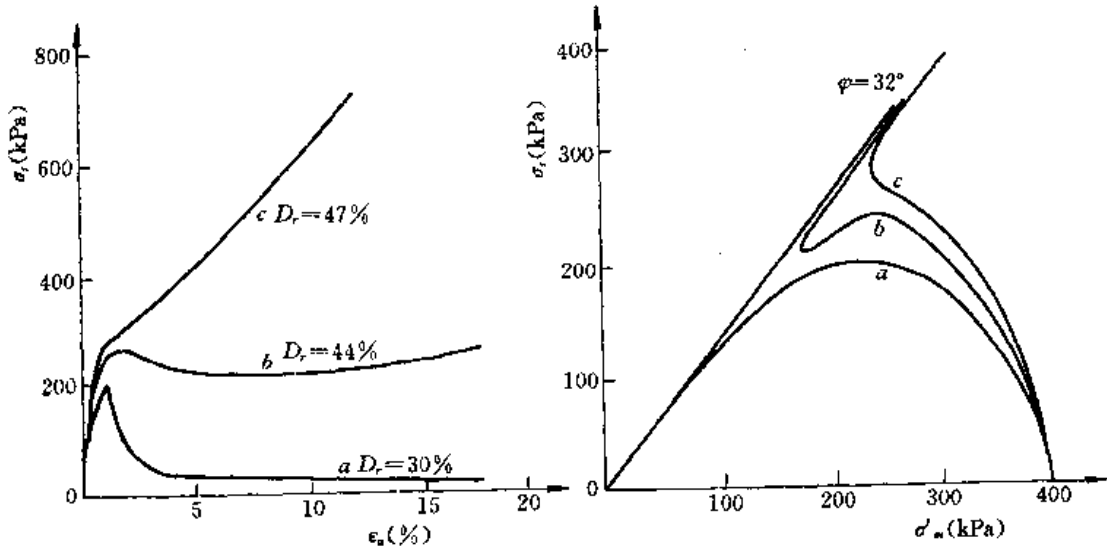


图 7-26 三种密度砂土的不排水剪切

二、砂土流滑的流动理论

Lade 等最先从下列 Drucker 失稳准则出发研究砂土的不稳定变形问题^[67,68]

$$\Delta w^2 = \Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij} = \Delta \sigma'_m \Delta \epsilon_v + \Delta \sigma_s \Delta \epsilon_s \leq 0 \quad (7-56)$$

对于不排水 $\Delta \epsilon_v = 0$ 的情况, 考虑到 $\Delta \sigma_s = G_s \Delta \epsilon_s$, 上式相当于 $G_s \leq 0$, 即表现剪切模量为负值。而在 $\Delta \sigma_s = 0$ 和 $\Delta \sigma'_m < 0$ 的情况下, 则要求 $\Delta \epsilon_s > 0$ 。由于此时弹性应变 $\Delta \epsilon_s^e < 0$, 故要求 $\Delta \epsilon_s^p > 0$ 。正交流动法则不可能满足这一要求, 为了解释这一现象, 必须求助于非正交流动法则, 即 $\Delta \epsilon_s^p \propto \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$, $g \neq f$, 如图 7-27 所示。按 Dubujet 的推导^[69], G_s 的表达式可以写为

$$G_s = 6GKH \frac{\frac{3}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} + \frac{1}{3K}}{9K \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} + 2G \frac{\partial g}{\partial \sigma_s} \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} + H} \quad (7-57)$$

式中: K 和 G 为弹性体积和剪切模量; H 为硬化模量。要满足 $G_s \leq 0$, 只有

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \leq -\frac{H}{9K} \quad (7-58)$$

在 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} < 0$ 的情况下, 这一条件只有 $\frac{\partial g}{\partial \sigma_m} > 0$ 才能满足, 而 $\frac{\partial g}{\partial \sigma_m} > 0$ 即相当于剪缩。因此, 式 (7-58) 无非说明, 剪缩是产生不稳定现象的必要条件。韦昌富等也推导了类似的公式^[70]。鉴于在排水条件下即使在 $\Delta \sigma_m < 0$ 的应力路线下发生剪缩, 也不产生不稳定现象, 因此他们认为只有当式 (7-58) 与不排水条件同时具备时才会出现不稳定现象。

Lade 把不排水剪切峰值剪应力的连线称为不稳定线 (图 7-28), 由于此线的倾角 φ_{un} 大大低于有效内摩擦角 ϕ , 由此可以解释一些很平缓 ($\alpha = 7^\circ$) 的海底沙滩也会发生流滑现象,

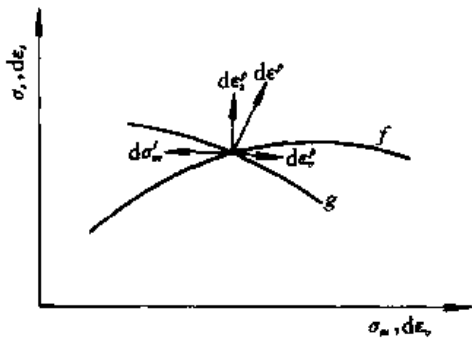


图 7-27 非正交流动法则

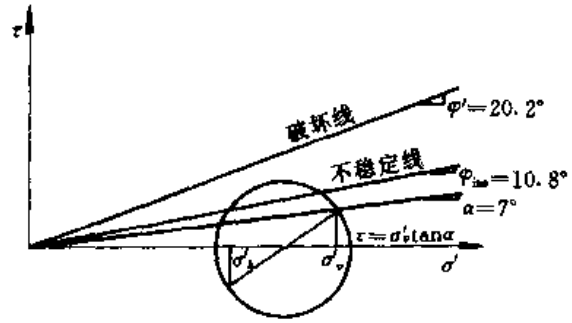


图 7-28 不稳定线与平缓沙坡的失稳

因为沙坡中的某些应力点已超过不稳定线。

三、砂土流滑的形变理论

上面推导的失稳条件完全可由下列形变理论得出。

设归一化的剪应力 $\eta = \tau / \sigma'_m$ 与剪应变 ϵ_s 之间存在唯一关系 $\eta = \eta(\epsilon_s)$ ，则相应的增量关系式为

$$\Delta \sigma_s = \eta d\sigma'_m + \sigma'_m \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon_s} \Delta \epsilon_s \quad (7-59)$$

令 $\mu = -\frac{\Delta \epsilon_{vd}}{\Delta \epsilon_s}$ 为剪胀系数, $h' = \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon_s}$, 考虑到不排水时 $\Delta \epsilon_v = \Delta \epsilon_{vd} + \Delta \epsilon_{vc} = 0$, $\Delta \sigma'_m = K' \Delta \epsilon_{vc}$

$$2G_t = \mu \eta k' + \sigma'_m h' \quad (7-60)$$

因此, $G_t \leq 0$ 的条件可以写为

$$\mu \cdot \eta / \sigma'_m \leq -\frac{h'}{k'} \quad (7-61)$$

η 与 ϵ_s 的关系可以假定为双曲线 (图 7-29 中虚线), $\epsilon_s \rightarrow \infty$ 时 $h' \rightarrow 0$, 因此, 当应变超过一定的数值时, 只要始终发生剪缩, $\mu < 0$, G_t 将一直小于 0, 最后导致完全液化 (图 7-29 中 a 线)。如果后期发生剪胀, μ 转为正值, 则不会导致完全液化 (图 7-29 中 b 线)。但如果土体处于斜坡上而承受一定的剪应力, 产生滑坡的可能性仍然存在。显然, 式 (7-61) 与式 (7-58) 相比, 无论形式上和内涵上均十分相似。

由以上分析可见, 一个砂土试件发生流滑的必要条件就是始终发生剪缩。如果剪胀系数与 η 之间呈线性关系

$$\mu = \frac{1}{\lambda} (\eta - \eta_c) \quad (7-62)$$

则为保证 η 从 0 到破坏状态 $\eta = \eta_f$, μ 始终为负, 必须

$$\eta_c \geq \eta_f \quad (7-63a)$$

而发生流滑的充分条件则是所加的剪应力达到不排水条件下的峰值强度 (门槛应力), 即

$$\tau \geq \tau_p \quad (7-63b)$$

或者如图 7-28 所示, 应力点超过不稳定线。如果双曲线关系用下式描述

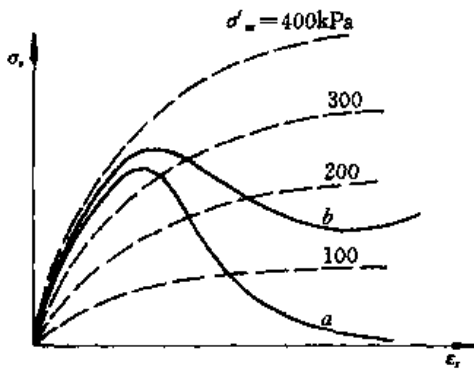


图 7-29 松沙的排水剪切和不排水剪切

$$\eta = \frac{\epsilon_s \eta_f}{a + \epsilon_s} \quad (7-64)$$

则

$$h' = \frac{(\eta_f - \eta)^2}{a\eta_f} \quad (7-65)$$

代入式 (7-61) 可得出出现不稳定的条件为

$$\frac{\mu\eta}{\sigma'_m} \leq -\frac{(\eta_f - \eta)^2}{a\eta_f k'} \quad (7-66)$$

如果式 (7-62) 中采用 $\eta_c = \eta_f$, 并假定 $K' = b\sigma'_m$, 可得下列相应于 $G_r = 0$ 的不稳定线公式。

$$\eta_{ins} = \frac{\lambda\eta_f}{ab\eta_f + \lambda} \quad (7-67)$$

显然, 一个合理的本构模型应当既能描述周期荷载下的液化, 也能描述单调荷载下的流滑, 如沈珠江建议的散粒体模型^[47]。为流滑问题另外单独建立一套理论其实并无必要。

四、粘土流滑问题

上述理论原则上也适用于粘性土, 但试验表明, 对于重塑粘土, 尽管其剪缩特性十分明显, 但不排水应力应变曲线的峰值并不明显。这就意味着粘土的不稳定线 η_{ins} 与 η_f 相当接近, 因此重塑粘土一般不会发生突然失稳现象。从式 (7-67) 分析, 粘土与砂土的最大差别可能在于 b 值, 即砂土的回弹模量 K' 显著大于粘土的, 从而导致 η_{ins} 明显低于 η_f 值。另一方面, 高灵敏度的天然粘土具有很高的孔隙比, 往往达到 1.5 甚至 2.0 以上, 一旦结构强度遭到破坏, 其残余强度将十分低, 这时就会像松砂流滑一样发生突然破坏。但是, 与砂土不同的是, 结构性粘土的峰值强度并不随围压的增大而增大, 因而不存在图 7-28 那样一条不稳定线。相反, 这一结构强度反而因围压增大而破坏, 因而, 结构性粘土产生流滑的门槛压力可以取为常量, 即等于无侧限压缩时的峰值强度 τ_p (图 7-30)。

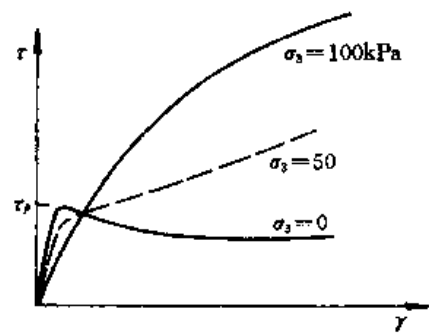


图 7-30 结构性粘土的排水剪切

显然, 以上分析只考虑土体中一点的应力状态。实际土体中各点的剪应力是变化的, 某一点满足上述条件只是破坏过程的开始, 最终是否发生流滑破坏, 属于应变软化材料的渐进破坏问题, 将在下一章讨论。

参 考 文 献

- 1 Casagrande A. Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills, J. of the Boston Society of Civil Engineering, 1940: 257~276
- 2 Castro G and Poulos SI. Factors affecting liquefaction and cyclic mobility. J. GED, ASCE, 1977, 103 (GT6): 501~516
- 3 汪闻韶. 土的动力强度和液化特性. 北京: 中国电力出版社, 1997
- 4 汪闻韶. 饱和砂土振动孔隙水压力的产生、扩散和消散. 见: 第一届土力学及基础工程学术会议论文

- 集. 北京: 中国工业出版社, 1964: 224~235
- 5 Martin G R, Finn W D L and Seed H B. Fundamentals of liquefaction under cyclic loading, J. GED, ASCE, 1975, 101 (GT5): 423~438
 - 6 沈珠江, 王仁钟. 反复荷载作用下砂土变形的平均过程理论. 水利水运科学研究, 1980 (4): 43~60
 - 7 沈珠江. 饱和砂土的动力渗流变形计算. 水利学报, 1980 (2)
 - 8 沈珠江. 砂土动力液化变形的有效应力分析方法. 水利水运科学研究, 1982 (4)
 - 9 沈珠江. A visco-elastic model for liquefaction analysis of sand, 11th Int. Conf. SMFE, San Frasisco, 1985, 1, 659~662
 - 10 Seed H B and Idriss I M. Simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential. J. SMFD, ASCE, 1971, 97 (SM9): 1249~1274
 - 11 Finn W D L, Byrne P M and Martin G R. Seismic response and liquefaction of sands. J. GED, ASCE, 1976, 102 (GT8): 241~856
 - 12 Hardin B O and Drnevich V P. Shear modulus and damping in soil, J. SMFD, ASCE, 1972, 98 (SM7): 667~692
 - 13 Bouckovalas G and Hoeg K. Computational model for saturated sand subjected to cyclic loading, Soils & Foundations 1987, 27 (4): 34~44
 - 14 Taniguchi E, Whitman R V and Marr W A. Prediction of earthquake induced deformation of earth dams, Soils & Foundations, 1983, 23 (4): 126~132
 - 15 八木刚男. 繰ク返しセク断にさろ砂の体积与过剩间隙水压. 土木学会论文报告集, 1978, 275.
 - 16 Ishibashi I, Serif M A and Tsuchiya C. Pore pressure rise mechanism and soil liquefaction, Soil & Foundations, 1977, 17 (2): 17~28
 - 17 Seed H B, Martin P P and Lysmer J. Pore water pressure changes during soils liquefaction, J. GED, ASCE, 1976, 102 (GT4): 323~346
 - 18 Finn W D L et al. Cyclic pore pressure under anisotropic condition. Earquake Engineering and Soil Dynamics, Proc. ASCE Geot. Eng. Div. Specialty conference, 1978, 1;
 - 19 徐志英, 沈珠江. 地震液化的有效应力二维动力分析方法. 华东水利学院院报, 1981 (3): 1~14
 - 20 Martin P P and Seed H B. Simplified procedure for effective stress analysis of ground response. J. GED, ASCE, 1979, 105 (GT6): 739~758
 - 21 Annaki M and Lee K L. Equivalent uniform cyclic concept for soil dynamics, J. GED, ASCE, 1977, 103 (GT6): 549~569
 - 22 沈珠江, 左元明. 不同应力路线和不等应变幅值的往复荷载试验. 水利水运科学研究, 1986 (1): 77~86
 - 23 沈珠江, 徐志英. 1976年7月28日唐山地震时密云水库白河主坝动力分析. 水利水运科学研究, 1981 (3): 46~63
 - 24 沈珠江. Analyses of seismic pore pressure and permanent deformation of an earth dam, Int. Symp. Earthquake and Dams, Beijing, 1988: 258~270
 - 25 郭锡荣, 王钟宁. 大同一阳高地震土坝震害. 岩土工程学报, 1992, 14 (3): 85~88
 - 26 谢定义, 张建民. 饱和砂土瞬态动力学特性与机理分析. 西安: 陕西科技出版社, 1995
 - 27 邵生俊, 谢定义. 饱和砂土的物态变化与孔隙水压力的关系. 见: 第五届全国土动力学学术会议论文集. 大连, 1998: 88~97
 - 28 李锦钟, 张清慧. 应力劳台角对孔压发展的研究. 岩土工程学报, 1994, 16 (4): 17~23

- 29 Matguoka H, Koyama H and Yamazaki H. A constitutive equation for sands and its application to analyses of rotational stress paths and liquefaction resistance, *Soil & Foundations*, 1985, 25 (1): 27~42
- 30 沈瑞福等. 动主应力旋转下砂土孔隙压力发展及海床稳定性分析. *岩土工程学报*, 1994, 16 (3): 70~78
- 31 Nakata Y et al. Flow deformation of sands subjected to principle stress rotation, *Soils & Foundations*, 1998, 38 (2): 115~128
- 32 栾茂田, 邵宇, 林皋. 土体地震反应非线性分析方法比较研究. 见: 第五届全国土动力学学术会议论文集. 大连, 1998: 203~208
- 33 Finn W D L, Lee K W and Martin G R. An effective stress model for liquefaction, *J. GED, ASCE*, 1977, 103 (GT6): 517~534
- 34 辛鸿博, Finn W D L. 1976 年大石河尾矿坝地震反应分析. *岩土工程学报*, 1996, 18 (4): 48~56
- 35 李万红, 汪闻韶. 土石坝非线性动力反应分析. *水利学报*, 1994 (2): 24~30
- 36 徐干成, 谢定义, 郑颖人. 饱和砂土循环动应力应变特性的弹塑性模拟研究. *岩土工程学报*, 1995, 17 (2): 1~12
- 37 Dafalias Y F and Herrmann L R. A bounding surface soil plasticity model, In: *Soils under Cyclic and Transient Loading*, 1980, 1: 335~346
- 38 Wang Z L, Dafalias Y and Shen C K. Bounding surface hypoplasticity model for sands, *J. Eng. Mech., ASCE*, 1990, 116 (5): 983~1001
- 39 陈生水, 沈珠江, 郇能惠. 复杂应力作用下无粘性土的弹塑性数值模拟. *岩土工程学报*, 1995, 17 (2): 20~28
- 40 Towhata L and Ishihara K. Modelling soil behavior under principal stress axes rotation, In: *5th Int Conf. Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, 1985, 1: 523~530
- 41 Iai S, Matsunaga Y and Kameoka T. Strain space plasticity model for cyclic mobility, *Soils & Foundations*, 1992, 32 (2): 1~15
- 42 刘汉龙, 井合进, 一井康二. 大型沉箱式码头岸壁地震反应分析. *岩土工程学报*, 1998, 20 (2): 26~30
- 43 Vermeer P A and Schotman G J. An extension to the deformation theory of plasticity, In: *2nd Int. Symp. on Numerical Model in Geomechanics*, Ghent, 1986: 33~41
- 44 Matsuoka H and Sakakihara K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation, *Soils & Foundations*, 1987, 27 (4): 73~88
- 45 沈珠江. A stress-strain model for sands under complex loading, In: *Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials*, Edited by Fang J & Sumio M, 1989, 1: 303~308
- 46 刘元雪, 郑颖人. 考虑主应力轴旋转对土体应力应变关系影响的一种新方法, *岩土工程学报*, 1998, 20 (2): 45~47
- 47 沈珠江. A granular medium model for liquefaction analysis of sands. *岩土工程学报*, 1999, 21 (5): 742~748
- 48 Lefebvre G and Pfeudler P. Strain rate and preshear effects in cyclic resistance of soft clay, *J. GED, ASCE*, 1996, 122 (1): 21~26
- 49 Sangrey D A, Henkel D J and Esrig M I. The effective stress response of a saturated clay soil to repeated loading, *Can. Geot. J.*, 1969, 6 (3): 241~

- 50 Yasubara K, Hirao K and Hyde A F L. Effects of cyclic loading on undrained strength and compressibility of clay, *Soils & Foundations*, 1992, 32 (1): 100~116
- 51 Matsui T, Bahr M A and Abe N. Estimation of shear characteristics degradation and stress-strain relationship of saturated clays after cyclic loading, *Soil & Foundations*, 1992, 32 (1): 161~172
- 52 Ohara S and Matsuda H. Study on the settlement of saturated clay layer induced by cyclic shear, *Soils & Foundations*, 1988, 28 (3): 103~113
- 53 Hyde A F L and Ward S J. A pore pressure and stability model for a silty clay under repeated loading, *Geotechnique*, 1985, 35 (2): 113~125
- 54 Hyodo M, Yasuhara K and Harao K. Prediction of clay behavior in undrained and partially drained cyclic triaxial test, *Soils & Foundations*, 1992, 32 (4): 117~127
- 55 阎澍旺. 往复荷载下重塑粘土的变形特性. *岩土工程学报*, 1991, 13 (4): 48~53
- 56 周健等. Settlement analysis of saturated soft clay under long-term dynamic loading, In: 2nd Int. Conf. Soft Soil Enging, Nanjing, 1996, I: 333~338
- 57 白冰, 刘祖德. 饱和软粘土的再固结性状. *岩土工程学报*, 1999, 21 (2): 189~195
- 58 郁寿松, 石兆吉. 土壤震陷试验研究. *岩土工程学报*, 1989, 11 (4): 35~44
- 59 王志良等. 不规则循环剪切荷载作用下的粘弹塑性模型. *岩土工程学报*, 1980, 2 (3): 10~20
- 60 李小军, 廖振鹏. 土应力应变关系的粘-弹-塑性模型. *地震工程与工程振动*, 1989, 9 (3): 65~72
- 61 Prevost J H. Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior, *Int. J. for Num. & Ana. Methods in Geom.*, 1977, (1): 195~216
- 62 王建华, 要明伦. 软粘土不排水循环特性的弹塑性模拟. *岩土工程学报*, 1996, 18 (3): 11~18
- 63 Sellers E J and Scheecl F. Model for cyclically loaded clay based on critical state theory, In: 7th Int. Conf. on Computer Methods & Advances in Geomechanics, Cairns, 1991, I: 783~788
- 64 Matsui M. A constitutive model for cyclic viscoplasticity of soils, *Soils & Foundations*, 1988, 28 (4): 19~37
- 65 Aubry D and Kodaissi E. A cyclic viscoplastic constitutive equation of soils with kinematial hardening, In: 2nd Int. Symp. on Numerical Model in Geom, Ghent. 1986: 815~825
- 66 Song E X and Verruijt A. Finite element analysis of pore pressure build-up beneath offshore gravity structures, In: 7th Int. Conf. Computer Methods & Advances in Geomech., Cairns, 1991, I: 789~794
- 67 Lade P V and Nelson Y M. Instability of granular materials with non-associated flow, *J. GED, ASCE*, 1988, 114 (12): 2173~2191
- 68 Lade P V. Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes, *J. GED, ASCE*, 1992, 118 (1): 51~71
- 69 Dubujet Ph and Doanh T. Theoretical analysis of the undrained instability of very loose sand in triaxial compression and extension using an elastoplastic model, In: 9th Int. Conf. Computer Methods & Advances in Geomech., Wuhan, 1997, I: 837~841
- 70 韦昌富, 江礼茂, 章德根. 饱和砂土的非稳定性. *岩土工程学报*, 1994, 16 (6): 39~46

第八章 渐进破坏理论

第一节 土体应变软化特性

一、软化机理

在第五章介绍的极限平衡理论中，假定土体破坏时塑性区内各点剪应力同时达到抗剪强度。这种情况只有对理想塑性材料和应变硬化材料方有可能，而且对于后者，只有当变形很大时才能近似地达到这一状态。大多数土体或多或少具有软化特征，尤其是带有一定胶结的天然土和超固结土。由于土体内的应力总是不均匀的，应力大的点先超过峰值强度而出现软化。软化后强度降低，原先承担的剪应力将超过抗剪强度。超额的剪应力转嫁给相邻的未软化的土体，引起这一部分剪应力的增大而超过其峰值强度，随之而发生软化。这一过程的持续进行将导致土体的最终破坏，这一现象就是渐进破坏。渐进破坏的概念最早由 Terzaghi 提出，至今已有 60 年的历史^[1]，但描述这一过程的理论至今尚不完善。

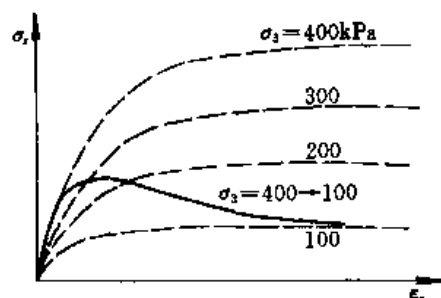


图 8-1 减压软化

根据产生的机理，沈珠江把应变软化区分为①减压软化，②剪胀软化和③损伤软化三类^[2]。下面分别讨论之：

1. 减压软化

减压软化是由土的压硬性所决定的。当剪切过程中围压降低时，剪切曲线就会出现峰值和随后的应变软化（图 8-1）。实际土体中产生这种软化现象均与土体内部孔隙压力升高有关，包括负孔隙压力即吸力的消失在内。例如开挖边坡由于雨水入侵引起的吸力丧失和松砂剪切过程中孔隙压力大幅上升引起的失稳（已见第七章）。

2. 剪胀软化

这是与剪胀过程中颗粒组构变化有关的一种软化，反映颗粒接触面状态的变化。包括三种因素：①随着体积膨胀单位土体内接触面积减小；②颗粒之间爬越必须克服的剪胀角也随体积膨胀而减小；③非圆颗粒沿剪切面定向排列而引起的剪胀角减小（图 8-2）。如果把砂土的摩擦强度分为颗粒表面摩擦力及颗粒爬越阻力两部分，则后一部分常称咬合力。剪胀软化相当于咬合力的丧失。

3. 损伤软化

当颗粒之间存在胶结时，相互滑动之前必须先发生胶结链的破坏。损伤软化就是这种粒间胶结破坏过程的反映。与前面两种软化不同，胶结破坏以后不能再恢复，且破坏应变较小，而摩擦强度的发挥需要较大的应变。另外，胶结破坏不但可以由

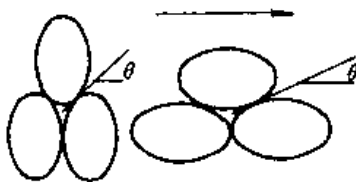


图 8-2 定向排列引起的软化

剪应力引起，也可以由围压增加引起。围压低的试样开始时未受损伤，剪切过程中的软化现象较为明显。围压增大后，一开始试样结构已经破坏，就不再有明显软化现象（图 7-30）。粘土沉积过程中往往先形成团粒，团粒内部胶结力强，团粒之间胶结力弱，损伤软化过程更象团粒逐渐破碎的过程。砂土和堆石料在围压增大过程中的颗粒逐渐破碎也是一种损伤软化过程。高围压下颗粒变细，剪胀性减小，应变软化现象也减弱。

以上三种机理经常同时存在。例如砂土剪胀过程中同时伴随着颗粒破碎。超固结粘土的软化则可分为两个阶段。开挖时先有围压的降低并伴随着膨胀而产生负的孔隙压力，接着是水分的入侵引起的吸力丧失使有效围压进一步降低，后来又随着变形的增大形成剪切带，带内颗粒逐渐沿剪切带定向，最后发展到只剩下残余强度。据 Skempton 介绍^[3]，粘土颗粒的残余内摩擦角是很低的，只有 $5^\circ \sim 15^\circ$ 。这就说明，第一阶段以减压软化为主，第二阶段以剪胀软化为主。

二、软化型应力应变曲线的描述

沈珠江^① 建议用下列经验公式描述软化型应力应变曲线

$$\tau = \frac{\gamma(a + c\gamma)}{(a + b\gamma)^2} \quad (8-1a)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_{v0} + \frac{\gamma(d + f\gamma)}{(d + e\gamma)^2} \quad (8-1b)$$

三个参数 a 、 b 和 c 与残余强度 τ_r ，峰值强度 τ_p 和相应的剪应变 γ_p 之间有下列关系

$$\tau_r = \frac{c}{b^2}, \tau_p = \frac{1}{4(b-c)}, \gamma_p = \frac{a}{b-2c} \quad (8-2a)$$

式(8-1b)中右边第一项 ϵ_{v0} 为压缩引起的体应变，第二项代表剪胀应变，3 个参数 d 、 e 和 f 与残余体应变 ϵ_{vr} ，峰值体应变 ϵ_{vm} 和相应的剪应变 γ_m 之间有下列关系

$$\epsilon_{vr} = \frac{f}{e^2}, \epsilon_{vm} = \frac{1}{4(e-f)}, \gamma_m = \frac{d}{e-2f} \quad (8-2b)$$

$f > 0$ 时残余应变为剪缩， $f < 0$ 时残余应变为剪胀（图 8-3）。

周鸿逵则建议过另一种指数函数如下^[4]

$$\sigma_1 - \sigma_3 = c\epsilon_s + 2d[\exp(-b\epsilon_s) - 1] \quad (8-3a)$$

$$\epsilon_v = g\epsilon_s + 2h[\exp(-f\epsilon_s) - 1] \quad (8-3b)$$

其中 $d = \frac{c-a}{2b}$ ， $h = \frac{g-e}{2f}$ 。 a 和 e 为初始切线斜率， c 和 g 为

软化后下降段的切线斜率， b 和 f 则为变量代换后得出的拟合直线的斜率。

Prevost 等曾针对体积不变的饱和土建议下列剪切曲线公式^[5]

$$\tau = a \frac{\gamma(1 + b\gamma)}{1 + \gamma^2} \quad (8-4)$$

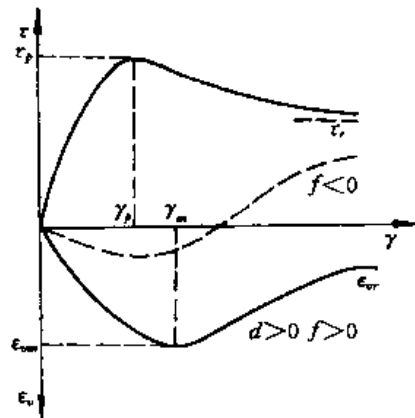


图 8-3 驼峰型应力应变曲线

① 沈珠江，坝料土的应力应变关系及其测定方法的初步研究，南京水利科学研究院研究报告汇编（1966~1978），1985：215~235。

b 由峰值时剪应变决定, 即 $\gamma_p = b + \sqrt{1+b^2}$, 残余强度为 $\tau_r = ab$, 而峰值强度 τ_p 由 γ_p 代入式 (8-4) 得到, 因此 τ_p , τ_r 和 γ_p 3 个参数中只能有 2 个是独立的。

许多学者往往把峰值前和峰值后曲线分开来讨论。例如 Yoshinaka 用反置的指数曲线拟合峰后曲线^[6], Lo 用反置的双曲线拟合峰后曲线^[7]。

许多人采用屈服面可以收缩的弹塑性理论描述应变软化现象, 如图 2-43 (a) 所示。类似于硬化函数常用对数曲线或双曲线描述一样, 软化函数也可以用以上经验公式之一进行描述。

三、软化型应力应变曲线的测定

迄今为止, 人们仍用通常方法测定软化型应力应变曲线, 即测定试样顶部的变位和荷载, 变位除以试样高度即为应变, 荷载除以试样面积即为应力。但是, 软化材料试验中往往伴随着变形的局部化和剪切带的形成。此时, 剪切带内的局部应变将远远大于上述量测方法得出的平均应变 (图 8-4)。由于剪切带内的真实应力应变曲线难以测定, 应变软化材料的测定技术是目前未能很好解决的一个问题。密砂在伸长试验中特别容易形成剪切带, 而剪切带内发生大应变, 颗粒定向明显。因此 Lade 认为常规伸长试验测定的内摩擦角偏低^[8]。为了避免剪切带的出现, 他采用了三层橡皮模夹两层钢片的试验外套以阻止剪切带的形成, 从而保证了试样的均匀变形, 并获得了较高的强度。但是, 采用这样的极端措施难免对试样产生过度约束, 所测定的应力应变曲线可能偏高。

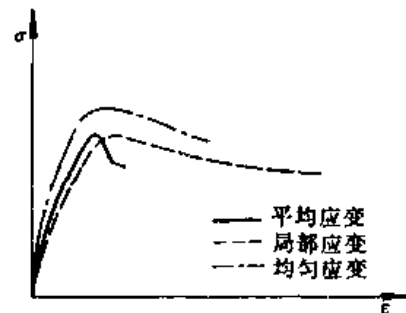


图 8-4 不同方法测定的应变

另一种比较可行的途径是在先建立合理的本构模型的基础上允许试样产生应变局部化, 但把试验结果当作边值问题处理, 根据测定的顶部变位和荷载数据通过反馈分析得出模型参数。然后通过计算间接得出剪切带内的应力应变曲线。其实, 土力学中不是从试验结果直接求参数, 而是通过拟合试验曲线间接求参数的办法早有先例。如固结系数就是通过用时间对数曲线或时间平方根曲线间接拟合求得的, 这是电子计算技术出现以前早期反馈分析求参数的范例。

四、剪切带的倾角

按照 Mohr-Coulomb 理论, 试样破坏时的滑裂面与大主应力轴之间的夹角应为

$$\alpha_a = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (8-5a)$$

剪切带的倾角应当符合这一条件。但实际的剪胀角 ψ 总是小于内摩擦角 φ , Roscoe 根据零伸长线理论认为剪切带的倾角应当符合以下条件 (图 8-5)

$$\alpha_b = \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \quad (8-5b)$$

Vermear 从理想塑性材料出发, 证明了 α 从 α_b 到 α_a 都是可能的^[9]。当 α 满足 Roscoe 条件时, 应力应变曲线没有峰值, 其它情况则均会出现峰后下降段, 而且当 α 满足下列条件时

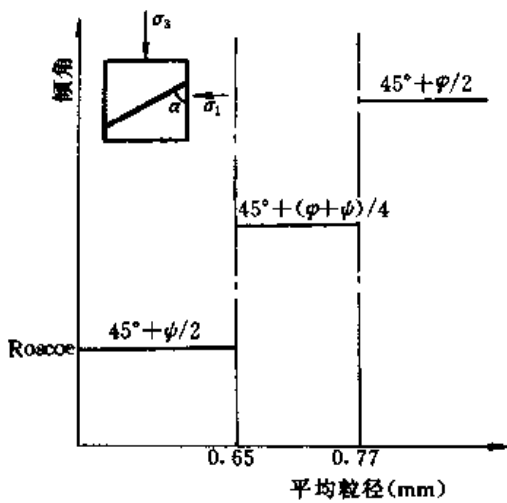


图 8-5 剪切带倾角

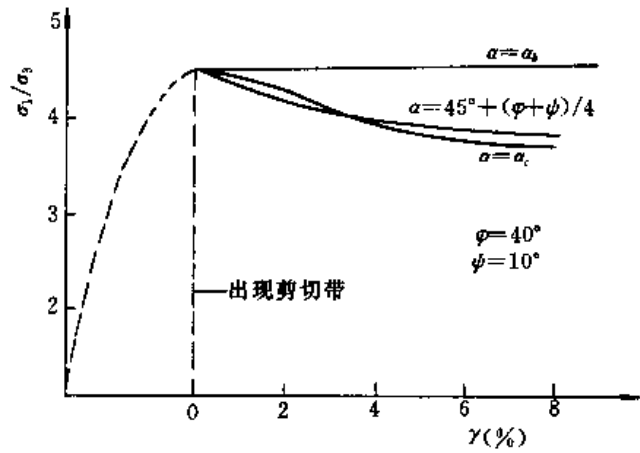


图 8-6 非正交法则理想塑性材料应力应变曲线

下降最多 (图 8-6)

$$\alpha_c = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2} \quad (8-5c)$$

其中 $\varphi_c = \arctg [\cos\psi \sin\varphi / (1 - \sin\psi \sin\varphi)]$ 。如果认为峰后残余强度最低者是最可能出现的破坏方式, 剪切带的临界倾角应满足 $\alpha = \alpha_c$, 而 φ_c 一般只比 φ 小 $4^\circ \sim 6^\circ$, 因而 α_c 将与 α_0 十分接近。

第二节 一维渐进破坏问题的解析解

蒋明镜把 Vesic 的柱孔和球孔一维扩张问题的解析解推广到应变软化材料^[10,11,12]。本节介绍柱孔扩张问题的有关解答。

一、理想弹脆塑性材料

理想弹脆塑性材料是指应力达到峰值强度 τ_p 后突然跌落到只有残余强度 τ_r , 如图 8-7。对 Tresca 材料, τ_p 和 τ_r 是常量, 且无剪切引起的体变。对于 Mohr-Coulomb 材料, 这种理想软化模型将有如图 8-8 所示的跌落前的初始屈服面 $f_p(\sigma_{ij})$ 和跌落后的后继屈服面 $f_r(\sigma_{ij})$, 并伴随着体积的一次性剪胀 ϵ_{vd} 。

这种跌落材料的边值问题可以划分软化区 Ω_d 和弹性区 Ω_e 来描述, 两区中间有一软化锋面 Γ 分隔。假定在某一 t 到 $t + \Delta t$ 时刻内应力和应变增量分别为 $\Delta\sigma_{ij}$ 和 $\Delta\epsilon_{ij}$, 则除了应力平衡和变形协调条件外, 还应当满足下列条件

$$\text{在 } \Omega_e - \Gamma, \text{ 内} \quad \Delta\sigma_{ij} = D_{ijkl} \Delta\epsilon_{kl} \quad (8-6a)$$

$$\text{在 } \Omega_d - \Gamma, \text{ 内:} \quad \Delta\sigma_{ij} = D_{ijkl}^p \Delta\epsilon_{kl} \quad (8-6b)$$

$$\text{在 } \Gamma^+ \text{ 上} \quad f_p(\sigma_{ij}^+ + \Delta\sigma_{ij}^+) = 0 \quad (8-6c)$$

$$\text{在 } \Gamma^- \text{ 上} \quad f_r(\sigma_{ij}^- + \Delta\sigma_{ij}^-) = 0 \quad (8-6d)$$

$$\text{在 } \Gamma, \text{ 上} \quad (\Delta\sigma_{ij}^+ + \Delta\sigma_{ij}^-) n_j = 0 \quad (8-6e)$$

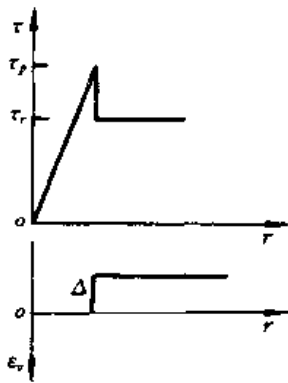


图 8-7 弹脆塑性模型

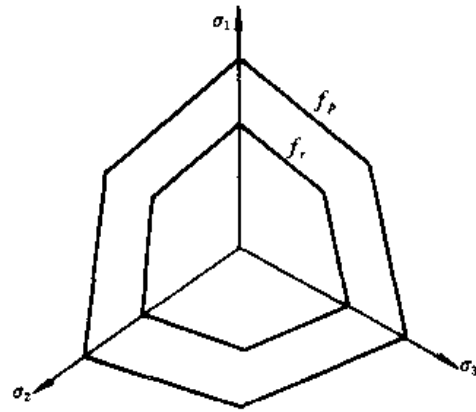


图 8-8 峰值和残余破坏面

n_j 为 Γ_i 面的法向，故上式即为法向应力连续条件。以上式中+和-分别代表跌落前和跌落后。根据软化面上应力跌落时总应变增量为 0 的条件可得

$$\Delta \epsilon_{ij}^e = -\Delta \epsilon_{ij}^p$$

代入 $\Delta \epsilon_{ij} = [D_{ijkl}]^{-1} \Delta \sigma_{i,jk}$ 和 $\Delta \epsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ 后，可得

$$\Delta \sigma_{ij} = D_{ijkl} \left(-\Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (8-7)$$

其中 g 为塑性势函数。再把此式代入式 (8-6d) 后可得

$$f_r \left(\sigma_{ij} - \Delta \lambda D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0 \quad (8-8)$$

由此可解出 $\Delta \lambda$ 。

对于轴对称的柱孔问题，基本方程式为

平衡方程式
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8-9)$$

几何方程式
$$\epsilon_r = -\frac{du}{dr}; \quad \epsilon_\theta = -\frac{u}{r} \quad (8-10)$$

弹性本构方程
$$\epsilon_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right); \quad \epsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) \quad (8-11)$$

屈服条件：

Tresca 材料

$$f_p = \sigma_r - \sigma_\theta - 2c_p = 0 \quad (8-12a)$$

$$f_c = \sigma_r - \sigma_\theta - 2c_r = 0 \quad (8-12b)$$

Mohr-Coulomb 材料

$$f_p = (\sigma_r - \sigma_\theta) - (\sigma_r + \sigma_\theta + 2p_0) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = 0 \quad (8-13a)$$

$$f_r = (\sigma_r - \sigma_\theta) - (\sigma_r + \sigma_\theta + 2p_0) \sin \varphi_r - 2c_r \cos \varphi_r = 0 \quad (8-13b)$$

p_0 代表土体中原来存在的均匀压力，只对压力敏感的 Mohr-Coulomb 材料有影响，而不影响 Tresca 材料的计算结果。下面讨论中的应力 σ_r, σ_θ 只是圆孔内压增加量 p 引起的应力改变。

设 r_0 和 r_1 分别为柱孔内径和软化锋面的半径 (图 8-9)，则对 $r > r_1$ 的弹性区，内压 p 引起的应力场和位移场分别为

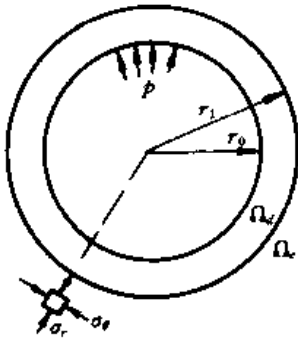


图 8-9 柱孔扩张

$$\sigma_r = p \frac{r_0^2}{r^2}; \sigma_\theta = -p \frac{r_0^2}{r^2} \quad (8-14)$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} p \frac{r_0^2}{r} \quad (8-15)$$

把 $r=r_0$ 时的应力值代入式 (8-12a) 和式 (8-13a), 可得孔壁应力达到峰值强度的临界压力为:

$$\text{Tresca 材料} \quad p_c = c_p \quad (8-16a)$$

$$\text{Mohr-Coulomb 材料} \quad p_c = c \cos \varphi + p_0 \sin \varphi \quad (8-16b)$$

当 $p > p_c$ 时, 柱体中将出现一个软化环。设 u_0 和 u_1 分别为环内径和外径处的变位, Δ 为软化区的平均体应变, 则由变形前后的体积平

衡可得

$$\pi[\bar{r}_0^2 - r_0^2] = \pi[\bar{r}_1^2 - r_1^2] + \pi(r_1^2 - r_0^2)\Delta \quad (8-17)$$

其中 $\bar{r}_0 = r_0 + u_0$, $\bar{r}_1 = r_1 + u_1$ 为变形后半径。

现在对 Tresca 和 Mohr-Coulomb 材料分别讨论软化区的解答。

1. Tresca 材料

满足式 (8-9) 和式 (8-12b) 的软化区的应力场为

$$\sigma_r = p - 2c_r \ln \frac{r}{r_0} \quad (8-18a)$$

$$\sigma_\theta = p - 2c_r \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} \right) \quad (8-18b)$$

在 $r=r_1$ 处, $\sigma_r = p_1$

$$p_1 = p - 2c_r \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (8-19)$$

在弹性区一侧的应力应当达到峰值状态, 因此 p_1 即相当于作用于 $r=r_1$ 的圆柱面上的临界压力 $p_c = c_p$ 。把此值代入式 (8-19) 后可得下列 r_1 随 p 增大而扩大的公式

$$r_1 = r_0 \exp \left(\frac{p - c_p}{2c_r} \right) \quad (8-20)$$

由式 (8-15) 可得弹性区及边界上的位移如下

$$u = \frac{1+\nu}{E} c_p \frac{r_1^2}{r} \quad (8-21a)$$

$$u_1 = \frac{1+\nu}{E} c_p r_1 \quad (8-21b)$$

在软化区, 由体积应变 $\epsilon_r + \epsilon_\theta = 0$ 的条件可得

$\frac{du}{dr} = -\frac{u}{r}$, 考虑 (8-21b) 的边界条件后可得相应的解为

$$u = \frac{1+\nu^2}{E} c_p \frac{r_1^2}{r} \quad (8-21c)$$

即与式 (8-21a) 完全一致。当内压达到某一极限时, 变位 u_0 迅速扩大, $u_0 \gg r_0$, 原先的空洞面积 πr_0^2 相对可以忽略不计, 则把式 (8-21) 代入式 (8-17) 并令体变 $\Delta = 0$ 后可得最大半径如下

$$\left(\frac{r_{1\max}}{r_0}\right)^2 = \frac{1}{2m - m^2} \quad (8-22)$$

其中 $m = \frac{1+\nu}{E}c_p$ 。把 $r_{1\max}$ 代入式 (8-19) 可得极限扩张压力如下

$$p_{\max} = c_p - c_p \ln(2m - m^2) \quad (8-23)$$

2. Mohr-Coulomb 材料

式 (8-13b) 可以写为

$$\sigma_\theta = \frac{1 - \sin\varphi_r}{1 + \sin\varphi_r}(\sigma_r + p_0 + c_p \operatorname{ctg}\varphi_r) - p_0 - c_p \operatorname{ctg}\varphi_r \quad (8-24)$$

代入式 (8-9)，积分后满足 $r=r_0$ 时 $\sigma_r=p$ 的解为

$$\sigma_r = (p + p_0 + c_p \operatorname{ctg}\varphi_r) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2\sin\varphi_r}{1+\sin\varphi_r}} - p_0 - c_p \operatorname{ctg}\varphi_r \quad (8-25)$$

在弹性区一侧 σ_r 应达到临界压力 p_c ，把 $r=r_1$ 与 $p_c = c\cos\varphi + p_0\sin\varphi$ 代入式 (8-25) 中可得 p 与 r_1 之间的关系如下

$$r_1 = r_0 \left[\frac{p + p_0 + c_p \operatorname{ctg}\varphi_r}{c\cos\varphi + c_p \operatorname{ctg}\varphi_r + (1 + p_0)\sin\varphi_r} \right]^{\frac{1+\sin\varphi_r}{2\sin\varphi_r}} \quad (8-26)$$

相应的弹性区的应力和位移为

$$\sigma_r = (c\cos\varphi + p_0\sin\varphi) \frac{r_1^2}{r^2} \quad (8-27a)$$

$$\sigma_\theta = - (c\cos\varphi + p_0\sin\varphi) \frac{r_1^2}{r^2} \quad (8-27b)$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} (c\cos\varphi + p_0\sin\varphi) \frac{r_1^2}{r} \quad (8-28a)$$

$$u_1 = \frac{1+\nu}{E} (c\cos\varphi + p_0\sin\varphi) r_1 \quad (8-28b)$$

现在假定 Δ 为某一常量，展开式 (8-17) 并略去 r_0^2 后可得最大塑性区半径 $r_{1\max}$ 如下

$$\left(\frac{r_{1\max}}{r_0}\right)^2 = \frac{1 + \Delta}{\Delta + 2m - m^2} \quad (8-29)$$

式中 $m = \frac{1+\nu}{E} (c\cos\varphi + p_0\sin\varphi)$ 。把上式代入式 (8-26) 相应的极限扩张压力为

$$p_{\max} = [c\cos\varphi + c_p \operatorname{ctg}\varphi_r + (1 + p_0)\sin\varphi_r] \left(\frac{1 + \Delta}{\Delta + 2m - m^2}\right)^{\frac{\sin\varphi_r}{1+\sin\varphi_r}} \quad (8-30)$$

二、线性剪胀软化材料

以上推导中回避了软化区的应变场。下面采用剪胀系数为某一常量的假设推导有关公式 (图 8-10)。

弹性区的应力和位移仍如式 (8-27) 和式 (8-28)，而在软化区 $\epsilon_r^p = \epsilon_r^e + \epsilon_r^s$, $\gamma^p = \epsilon_r^e - \epsilon_r^s$ 。代入剪胀系数 $\sin\psi = -\epsilon_r^s/\gamma^p$ ，可得

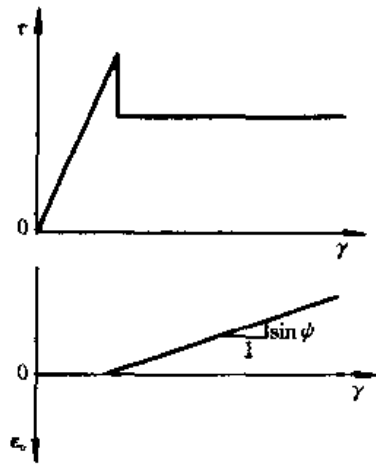


图 8-10 线性剪胀

$$\epsilon_{\theta}^e = -\frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} \epsilon_r^e \quad (8-31)$$

另一方面, 由式 (8-10)

$$\frac{du}{dr} = \epsilon_r^e - \epsilon_{\theta}^e = -\epsilon_r^e - \frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} \left(\frac{u}{r} + \epsilon_{\theta}^e \right) \quad (8-32)$$

由式 (8-28a) 可得 $r=r_1$ 处的弹性应变为

$$\epsilon_r^e = -\epsilon_{\theta}^e = \frac{1 + \nu}{E} (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \quad (8-33)$$

此值为常量。忽略应力跌落时弹性应变的减小, 把它代入式 (8-32) 后可得

$$\frac{du}{dr} = - (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \frac{1 + \nu}{E} \frac{2 \sin\psi}{1 + \sin\psi} - \frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} \frac{u}{r} \quad (8-34)$$

此式满足 $r=r_1$ 处边界条件的解为

$$u = - (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \frac{1 + \nu}{E} \left[\sin\psi - (1 + \sin\psi) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1 + \sin\psi}} \right] r \quad (8-35)$$

$$\epsilon_r = (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \frac{1 + \nu}{E} \left[\sin\psi + (1 - \sin\psi) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1 + \sin\psi}} \right] \quad (8-36a)$$

$$\epsilon_{\theta} = (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \frac{1 + \nu}{E} \left[\sin\psi - (1 + \sin\psi) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1 + \sin\psi}} \right] \quad (8-36b)$$

$$\epsilon_v = (c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi) \frac{1 + \nu}{E} 2 \sin\psi \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1 + \sin\psi}} \right] \quad (8-36c)$$

按定义

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} \epsilon_v r dr d\theta / \pi (r_1^2 - r_0^2)$$

积分后可得平均体应变为

$$\Delta = 2 \frac{c \cos\varphi + p_0 \sin\varphi}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1 + \nu}{E} \left[\sin\psi (r_1^2 - r_0^2) - (1 + \sin\psi) (r_1)^{\frac{2}{1 + \sin\psi}} \left(r_1^{\frac{2 \sin\psi}{1 + \sin\psi}} - r_0^{\frac{2 \sin\psi}{1 + \sin\psi}} \right) \right] \quad (8-37)$$

由此可见, Δ 随 r_1 而变, 不是常量。把 Δ 代入式 (8-29) 和式 (8-30), 即可得相应的最大半径和极限扩张压力。

三、折线型软化材料

现在假定峰值强度不是突然跌落到残余值, 而是沿着某一折线下降到残余强度。相应地剪胀曲线也分成两段, 其剪胀角分别为 ψ_1 和 ψ_2 , 其分界点应变分别为 γ_p 和 γ_r (图 8-11)。在中间段, 假定屈服函数在式 (8-13) 的 f_p 和 f_r 之间线性变化, 即

$$\bar{f} = (\sigma_r - \sigma_{\theta}) - (\sigma_r + \sigma_{\theta} + 2p_0) \sin\bar{\varphi} - 2\bar{c} \cos\bar{\varphi} = 0 \quad (8-38)$$

其中

$$\bar{\varphi} = \varphi - \frac{\gamma - \gamma_p}{\gamma_r - \gamma_p} (\varphi - \varphi_p) \quad (8-39a)$$

$$\bar{c} = c - \frac{\gamma - \gamma_p}{\gamma_r - \gamma_p} (c - c_r) \quad (8-39b)$$

本问题中, 开始时的弹性区应力和临界压力仍如式 (8-14) 和式 (8-16) 所示。以后随

着内压的增大, 出现第一个软化区, 其屈服条件满足式 (8-38)。当 $r=r_0$ 的内壁处剪应变达到 γ 时, 将出现第二个软化区, 其屈服条件满足 $\bar{f}=f_r$ 。此时, 在 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 处存在两个分界面, 把两个软化环分隔开来。弹性区及 $r=r_1$ 处的应力和变位公式仍如式 (8-27) 和式 (8-28), 而在第一个软化环中, 屈服函数 \bar{f} 与应变有关, 所以必须首先研究这一区内的变位和应变。

第一软化区的变位仍可用式 (8-34) 求解, 只需把剪胀角 ψ 改为 ψ_1 。相应地, 由式 (8-36a) 和式 (8-36b) 可得剪应变如下

$$\gamma = \epsilon_r - \epsilon_\theta = 2(c \cos \varphi + p_0 \sin \varphi) \frac{1+v}{E} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1-\sin \varphi_1}} \quad (8-40)$$

但按式 (8-38a), 此时 σ_r 与 σ_θ 之间关系将不再是线性的, 而与上式的 γ 有关, 因此式 (8-9) 将无法积分求得解析解, 而只能把它写成差分形式。先把式 (8-24) 中的 φ 用 $\bar{\varphi}$ 代人, 可得

$$\sigma_\theta = \frac{1 - \sin \bar{\varphi}}{1 + \sin \bar{\varphi}} (\sigma_r + p_0 + \bar{c} \operatorname{ctg} \bar{\varphi}) - p_0 - \bar{c} \operatorname{ctg} \bar{\varphi} \quad (8-41)$$

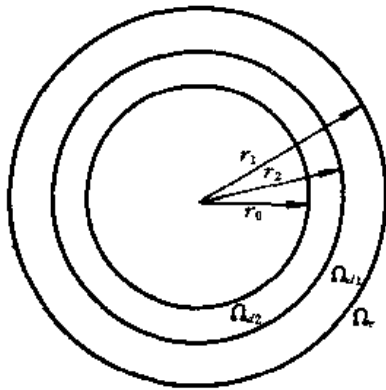


图 8-12 两个软化环

把 σ_θ 代入式 (8-10) 中, 并写成差分形式, 可得

$$\Delta \sigma_{r,i} = \frac{2 \sin \bar{\varphi}_{i-1}}{1 + \sin \bar{\varphi}_{i-1}} \frac{\sigma_{r,i-1} + p_0 + \bar{c}_i \operatorname{ctg} \bar{\varphi}_{i-1}}{r_i} (r_i - r_{i-1}) \quad (8-42)$$

从 $r=r_1$ 处 $\sigma_r = c \cos \varphi + p_0 \sin \varphi$ 开始, 逐点算出 $\Delta \sigma_{r,i}$ 和 $\sigma_{r,i}$, 并代入式 (8-41) 求出 $\sigma_{\theta,i}$, 即得出全部应力场。

按上述方法求得 $r=r_2$ 处应力和应变后, 第二软化区的应力场即可由式 (8-24) 和式 (8-25) 求得。再把 $r_1=r_2$ 处应力代入式 (8-11), 求得弹性应变 ϵ_r^e 和 ϵ_θ^e , 代入式 (8-

32) 后可得

$$\frac{du}{dr} = - \left(\epsilon_r^e + \epsilon_\theta^e \frac{1 + \sin \psi_2}{1 - \sin \psi_2} \right) - \frac{1 + \sin \psi_2}{1 - \sin \psi_2} \frac{u}{r} \quad (8-43)$$

其解为

$$u = \frac{1}{2} \sin \psi_2 [\epsilon_r^e (1 - \sin \psi_2) + \epsilon_\theta^e (1 + \sin \psi_2)] \left[\sin \psi_2 + (1 - \sin \psi_2) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{2}{1-\sin \psi_2}} \right] r \quad (8-44)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{2} \sin \psi_2 [\epsilon_r^e (1 - \sin \psi_2) + \epsilon_\theta^e (1 + \sin \psi_2)] \left[\sin \psi_2 - (1 + \sin \psi_2) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2}{1-\sin \psi_2}} \right] \quad (8-45a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2} \sin \psi_2 [\epsilon_r^e (1 - \sin \psi_2) + \epsilon_\theta^e (1 + \sin \psi_2)] \left[\sin \psi_2 - (1 - \sin \psi_2) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2}{1-\sin \psi_2}} \right] \quad (8-45b)$$

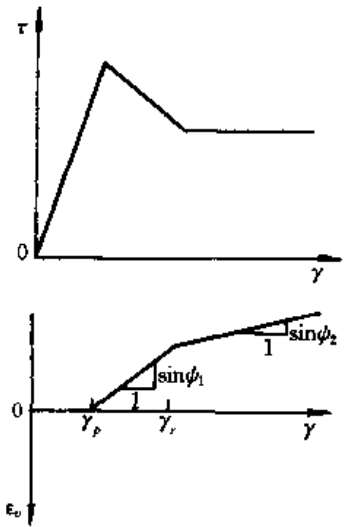


图 8-11 折线型软化

相应的平均体变和极限扩张压力可用与前面类似的方法得出。

四、曲线型软化材料

Prevost & Hög 应用式 (8-4) 所示的应力应变曲线求得无体变材料的解析解^[5]。

考虑到 $\epsilon_r + \epsilon_\theta = 0$, 由式 (8-10) 可得

$$du = \frac{r_0}{r} du_0, u = \frac{r_0}{r} u_0 \quad (8-46)$$

由此求得 ϵ_θ 和 ϵ_r 后, 可得剪应变 $\gamma = \epsilon_r - \epsilon_\theta$ 如下

$$d\gamma = 2 \frac{r_0}{r^2} du_0, \gamma = 2 \frac{r_0}{r^2} u_0 \quad (8-47)$$

现在把式 (8-4) 代入平衡方程式 (8-9)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -2 \frac{a}{r} \frac{\gamma(1+b\gamma)}{1+\gamma^2} \quad (8-48)$$

以 γ 代替 r 作为变量, 其解为

$$\sigma_r = 2a \left(\frac{b}{2} \ln \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma_1^2} + \operatorname{arctg} \frac{\gamma - \gamma_1}{1 + \gamma\gamma_1} \right) \quad (8-49)$$

γ_1 为 $r=r_1$ 处的剪应变。考虑到 $r_1 \rightarrow \infty$ 时 $\gamma_1 \rightarrow 0$, 上式简化为

$$\sigma_r = 2a \left[\frac{b}{2} \ln(1+\gamma^2) + \operatorname{arctg} \gamma \right] \quad (8-50)$$

σ_θ 可以直接从 $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\tau$ 得出, 即

$$\sigma_\theta = \sigma_r - 2a \frac{\gamma(1+b\gamma)}{1+\gamma^2} \quad (8-51)$$

图 8-13 为按式 (8-35) 和式 (8-26) 计算所得的 u_0/r_0 及 r_1/r_0 与内腔压力 p 之间的关系, 计算所用的参数为 $E=1.04 \times 10^5 \text{ kPa}$, $\nu=0.3$, $c=c_r=40 \text{ kPa}$, $\varphi=32^\circ$, $\varphi=28^\circ$, $p_0=0$, $r_0=1 \text{ m}$, 选用的不同剪胀角为 $\psi=28^\circ, 19.5^\circ, 11.5^\circ, 0^\circ$ 。

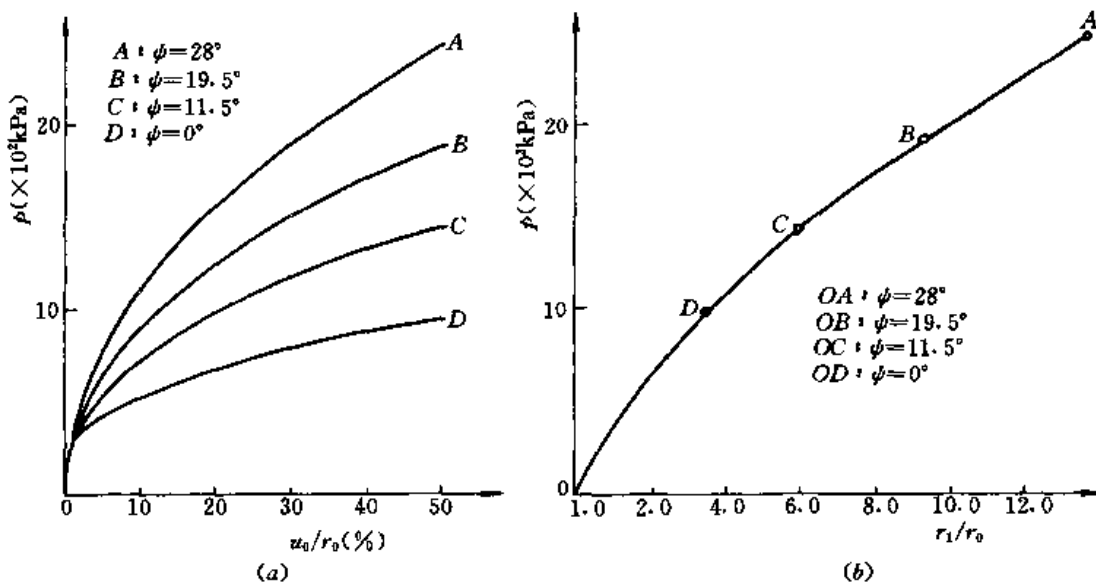


图 8-13 不同剪胀角的计算结果
(a) 内腔变位; (b) 软化区半径

第三节 应变局部化理论

一、结构软化的几何机制和物理机制

结构承载力的降低可能是几何原因引起失稳的结果，也可能是组成结构的材料特性所致。

轴向荷载下弹性杆件的失稳是一个典型的由于几何原因引起的结构软化现象。直剪试验后期，因剪切面积减小而引起的试样加速破坏也是几何软化的特例。Hill 最早研究了弹塑性连续介质的不稳定问题^[13]，Mandel 接着对服从非关联流动法则的硬化型 Mohr-Coulomb 材料进行研究^[14]，证明当硬化模量降低到某一临界值 H_c 时将出现解的分叉现象：一个解是试样继续发生均匀变形，并表现出硬化的趋势；另一个解是出现剪切带，并在宏观上表现出软化趋势（图 8-14）。

物理软化机制由材料本构特性所决定，第一节中已作过比较深入的探讨。图 8-15 从剪胀软化的观点出发解释了粘土试样中出现分叉的机制。在荷载增大过程中，片状颗粒的长轴逐渐偏向与大主应力垂直以增大粒间接触面积，这就是硬化的反映。理论上，如果全部颗粒达到定向排列，硬化达到极限，

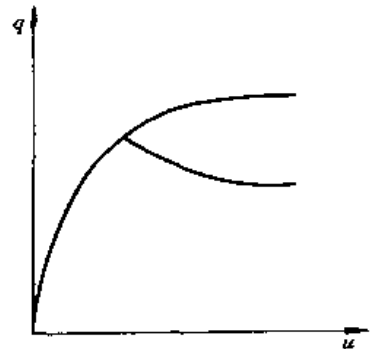


图 8-14 结构失稳引起的分叉

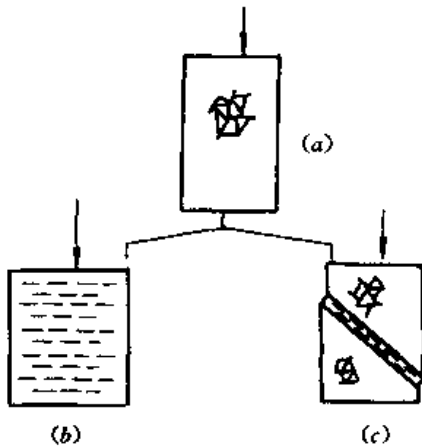


图 8-15 粘土试样分叉
(a)分叉前；(b)均匀变形；(c)局部变形

试样将不断发生均匀的压缩变形（图 8-15, b）。但是这样的变形方式并不是唯一的。因为，如果颗粒沿着剪切面定向，其抵抗外荷的能力将降低，这就是前面讨论过的定向软化。因此，在某一合适条件下，就会在试样中发展一条剪切带，主要的变形将局限在剪切带以内（图 8-15, c）。从物理机制分析，应变局部化往往与试样中存在薄弱点或应力集中点有关，颗粒的定向排列先从这一点开始，逐步扩展形成一条贯穿的剪切带。

大量试验资料表明，剪切带总是出现在密实砂土和硬粘土中，松砂和重塑软粘土中几乎不存在剪切带问题。因此，对于大体积的土体来说结构的几何软化可能只有理论上的意义，实际的软化总是与材料的软化特性密切相关。

二、分叉理论

几何上出现分叉的原因与结构劲度矩阵出现 0 本征值有关。按有限元法的常规表达方式，一个离散体系由荷载增量 $\{\Delta q\}$ 引起的变位增量 $\{\Delta u\}$ 应满足下列方程

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta q\} \quad (8-52)$$

对于一个稳定问题，上式的解 $\{\Delta u\}$ 应当存在而且是唯一的。但是在某一特定条件下，

可能出现解的不定和分叉。假设在基本解 $\{\Delta u_0\}$ 以外, 还存在一个分叉解 $\{\Delta u_1\}$, 均满足式 (8-52), 则由两式相减可得

$$[K]\{\delta u\} = 0 \quad (8-53)$$

其中 $\{\delta u\} = \{\Delta u_1\} - \{\Delta u_0\}$ 。显然, 此式要有非 0 解, 结构劲度矩阵 $[K]$ 的本征值必须满足下列条件

$$\det([K]) = 0 \quad (8-54)$$

这就是出现分叉解的必要条件。此外, 当荷载达到峰值时, Δq 也为 0。此时, 如果条件式 (8-54) 满足, 则任何 Δu 均满足式 (8-53), 也即出现解的不定性。

对于简单的试样剪切带问题, 设带上下的位移增量的改变为 $[g] = g_i = |g|m_i$, $[\cdot]$ 代表跳跃量, $|g|$ 为矢量 g_i 的模, m_i 为其方向余弦, 另外 n_i 为剪切带法向的方向余弦, 则位移梯度的跳跃量将为 (图 8-16)

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = |g|m_{i,j} \quad (8-55)$$

相应地应变跳跃量将为

$$[\Delta \varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}|g|(m_{i,j} + m_{j,i}) \quad (8-56)$$

如果把应力增量跳跃量写为

$$[\Delta \sigma_{ij}] = D_{ijkl}[\Delta \varepsilon_{kl}] \quad (8-57)$$

代入法向应力平衡条件 $[\Delta \sigma_{ij}] n_j = 0$ 可得

$$A_{ij}m_j = 0 \quad (8-58)$$

其中

$$A_{ij} = n_k D_{ijkl} n_l \quad (8-59)$$

由此可见, 存在 m_j 为非 0 解的条件为

$$\det(A_{ij}) = 0 \quad (8-60)$$

由于矩阵 A_{ij} 中同时包含材料的刚度矩阵 D_{ijkl} 和剪切带的方向角 n_i 两种因素, D_{ijkl} 的性质可以用硬化模量 H 代表, 则针对不同的 n_i , 可以找出满足式 (8-60) 的分叉点的临界硬化模量 H_c 。 H_c 越大, 分叉发生越早。相应于最大 H_c 的 n_i 即为最早出现的剪切带方向。

按照上述理论, 在结构或试样加荷过程中必须不断进行劲度矩阵本征值的计算。一旦出现本征值为 0 的情况, 就要改变计算方向, 除了基本解以外, 还要进行分叉解的搜索。

针对不同的本构模型, 可以得出不同的分叉时的临界硬化模量 H_c 及相应的剪切面与大主应力之间的方向角 α 。Mandel 最先对 Mohr-Coulomb 材料推导了下列 H_c 公式

$$H_c = \frac{G}{8(1-\nu)} (\sin\varphi^* - \sin\psi^*)^2 \quad (8-61a)$$

式中 G 为弹性剪切模量, φ^* 和 ψ^* 分别为发挥的剪切角和剪胀角, 即破坏时 $\varphi^* \rightarrow \varphi$, $\psi^* \rightarrow \psi$ 。Rudniki & Rice 考虑了中主应力影响, 得出了另一种公式如下^[15]

$$\frac{1+\nu}{9(1-\nu)} (\sin\varphi^* - \sin\psi^*)^2 - G \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\rho + \frac{\sin\varphi^* + \sin\psi^*}{3} \right) \quad (8-61b)$$

ρ 为 Lode 角, 相应的剪切面方向角为

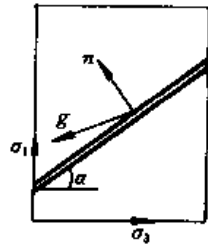


图 8-16 剪切带上变位改变

$$\alpha = \arctg \left(\frac{\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi} \right)^{1/2} \quad (8-62)$$

其中 $\xi = \frac{1+\nu}{3} (\sin\varphi^* + \sin\psi^*) - \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3}} \sin\rho$ 。 H_c/G 与 α 角随 Lode 角的变化规律如图 8-17 所示, 图中 $a = \frac{1}{3} (\sin\varphi^* + \sin\psi^*)$, $b = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)} (\sin\varphi^* - \sin\psi^*)^2$, 并假定 $\nu = 0.3$, $\varphi = 30^\circ$, $\psi = 0^\circ$ 。由该图可见, 对于正交流动法则, $\varphi^* = \psi^*$, $b=0$, H_c 均为负值, 即只有软化条件下才有出现分叉的可能, 三轴压缩时的剪切带方向角 $\sim 53^\circ$, 接近于 $(45^\circ + \psi/2)$ 。

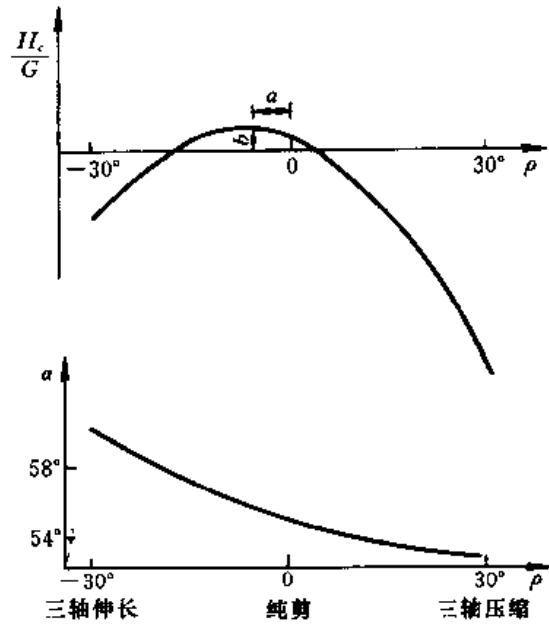


图 8-17 分叉点模量随 Lode 角的变化

Vermeer 和 Nova 通过更直观的途径推导了剪切带形成的条件及其倾角^[16,17]。设一

个荷载增量下剪切带内外的应力增量和应变增量分别为 $\Delta\sigma_n^i, \Delta\sigma_t^i, \Delta\tau_{nt}^i, \Delta\sigma_n^e, \Delta\sigma_t^e, \Delta\tau_{nt}^e$ 和 $\Delta\epsilon_n^i, \Delta\epsilon_t^i, \Delta\gamma_{nt}^i, \Delta\epsilon_n^e, \Delta\epsilon_t^e, \Delta\gamma_{nt}^e$, 则它们之间可以通过柔度矩阵联系起来

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_n^i - \Delta\epsilon_n^e \\ \Delta\epsilon_t^i - \Delta\epsilon_t^e \\ \Delta\gamma_{nt}^i - \Delta\gamma_{nt}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{nnnn} & C_{nnnt} & 2C_{nnnt} \\ C_{ttnn} & C_{tttt} & 2C_{tntt} \\ 2C_{ntnn} & 2C_{nttt} & 4C_{ntnt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_n^i - \Delta\sigma_n^e \\ \Delta\sigma_t^i - \Delta\sigma_t^e \\ \Delta\tau_{nt}^i - \Delta\tau_{nt}^e \end{Bmatrix} \quad (8-63)$$

根据平衡和连续条件, $\Delta\sigma_n^i = \Delta\sigma_n^e, \Delta\tau_{nt}^i = \Delta\tau_{nt}^e, \Delta\epsilon_t^i = \Delta\epsilon_t^e$ 。可见出现 $\Delta\sigma_t^i \neq \Delta\sigma_t^e$ 的必要条件为柔度矩阵元素 $C_{ntt} = 0$ 。设 α 为剪切带的方向角, 经过坐标转换后, 可把 C_{ntt} 转换为

$$C_{ntt} = C_{1111}\sin^4\alpha + (C_{1133} + C_{3311} + 4C_{1313})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + C_{3333}\cos^4\alpha \quad (8-64)$$

此式要有实解, 含平方根的系数项必须为 0

$$(C_{1133} + C_{3311} + 4C_{1313})^2 - 4C_{1111}C_{3333} = 0 \quad (8-65)$$

相应的解为

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm \left[\frac{C_{1133} + C_{3311} + 4C_{1313}}{2C_{1111}} \right]^{1/2} \quad (8-66)$$

按弹塑性理论, 主应力条件下柔度矩阵的表达式为

$$C_{ijj} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}; C_{1313} = \frac{1}{4G} \quad (i = 1, 3; j = 1, 3) \quad (8-67)$$

代入式 (8-65) 后可得临界硬化模量

$$H_c = \frac{(1 + \nu)G \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} - \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \right)^2}{2 \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right)} \quad (8-68)$$

当 f 服从 Mohr—Coulomb 准则时上式可写为

$$H_c = \frac{1 + \nu}{2} G (\sin \varphi^* - \sin \psi^*)^2 \quad (8-69)$$

把式 (8-67) 代入式 (8-66), 并考虑到出现剪切带 H_c 已经比较小, 可以略去, 则得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^*}{2} \right) + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi^*}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (8-66a)$$

以上推导中假定剪切带内外均属于加荷状态, Nova 的进一步推导表明, 只有当 $H < 0$ 时, 才可能出现带内加荷而带外卸荷的情况。

分叉理论的物理含义可以解释如下。引起均匀变形和引起变形局部化所需要做的功各不相同。达到分叉点时, 两种变形方式消耗的能量恰好相等。此后, 变形局部化方式的耗能将小于均匀变形方式, 结构最终以这一方式破坏。显然, 在分叉点附近, 解的唯一性失去保证, 此时, 矩阵 $[K]$ 变成病态, 从而难以保证计算结果的正确性。此外, 上述分叉理论也未对剪切带的厚度问题作任何交待。

三、Cosserat 理论

为了克服分叉理论的缺点, 一些学者起用了 Cosserat 早年提出的粒状材料理论^[18]。

Cosserat 模型假定材料为均匀直径的球状或棒状颗粒的集合体, 颗粒除了移动以外, 还可转动。因此, 在原来对连续介质定义的应力 σ_{ij} 之外还需增加力偶项 μ_j , 而应变 γ_{ij} 之外还需补充旋转项 κ_{ij} 。针对二维棒状颗粒集合体, M ühlhaus 等根据虚功原理推导了宏观应力 σ_{ij} , μ_j 与应变增量 $\delta\gamma_{ij}$, $\delta\kappa_{ij}$ 和微观接触力 F_i 与接触点变位增量 Δu_i 之间的关系如下^[19]

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_j \delta \kappa_j = M \int_0^{2\pi} A(\theta) F_i(\theta) \delta \Delta u_i d\theta \quad (8-70)$$

其中 M 为单位体积内接触点数; $A(\theta)$ 为组构张量, 即 θ 方向接触点的分布密度, $\int_0^{2\pi} A(\theta) d\theta = 1$, Δu_i 由两颗粒之间的相对位移及转动计算

$$\Delta u_i = 2R(\gamma_{ij} + R e_{3ij} \kappa_{3k} n_k) n_j \quad (8-71)$$

$e_{3ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, n_i 为接触面法向, R 为颗粒半径, $\kappa_{3k} = \omega_{3,k}^c$ 为旋转量在 k 方向的梯度, 而 γ_{ij} 的定义为

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + e_{3ij} \omega_3^c \quad (8-72)$$

上述式中足标 i, j, k 分别取 1 和 2, 3 代表圆棒长度方向。进一步假定 F_i 由法向力 P 和切向力 T 组成, 且 Δu_n , Δu_t 和 k_n , k_t 分别为接触点法向和切向位移及法向和切向刚度, 并选取函数 A 具有下列各向异性

$$A = \frac{1}{2\pi} \int (1 - a \cos 2\theta) d\theta \quad (8-73)$$

式中 $1+a$ 和 $1-a$ 分别为椭圆形分布函数的长轴和短轴，则最终可得下列应力应变关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= (B + G)\epsilon_{11} + (B - G)\epsilon_{22} + \frac{1}{2}B_a\epsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= (B + G)\epsilon_{22} + (B - G)\epsilon_{11} - \frac{1}{2}Ba\epsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= 2G\epsilon_{12} - 2G'\omega - aG'(\epsilon_{12} - \omega) \\ \sigma_{21} &= 2G\epsilon_{12} + 2G'\omega + aG'(\epsilon_{12} + \omega) \\ \mu_{31} &= 2G'R^2(1 - \frac{a}{2})\kappa_{31} \\ \mu_{32} &= 2G'R^2(1 + \frac{a}{2})\kappa_{32} \end{aligned} \right\} \quad (8-74)$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \frac{1-n}{2\pi} mK_n \\ G &= \frac{1-n}{4\pi} m(K_n + K_t) \\ G' &= \frac{1-n}{2\pi} mK_t = 2G - B \end{aligned} \quad (8-75)$$

式中 m 为配位数，即一个颗粒与周围颗粒的接触点数，且

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \\ \omega &= \frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) - \omega_3 \end{aligned} \quad (8-76)$$

上面建立了 Cosserat 材料的弹性应力应变关系，作者们又进一步把它推广为基于 Drucker-Prager 准则的弹塑性关系式

$$f = \tau + p \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (8-77)$$

其中 $p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$; $\tau = \left(a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + \frac{a_3}{R^2} \mu_{3i} \mu_{3i} \right)^{\frac{1}{2}}$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$ 。把应变增量分成弹性和塑性两部分后，塑性应变增量可以写为

$$\{\Delta \epsilon^p\} = \Delta \lambda \frac{\partial \tau}{\partial \{\sigma\}} \quad (8-78)$$

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \frac{1}{R} \mu_{31} \quad \frac{1}{R} \mu_{32} \right\}^T$$

$$\{\epsilon\} = \left\{ \gamma_{11} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad R\kappa_{31} \quad R\kappa_{32} \right\}^T$$

下面对土层表面作用剪切力的问题比较了按传统弹塑性理论与按 Cosserat 理论计算结果。土层厚 $h =$

100mm，从其中切出一狭条，划分成 2, 4, 10, 20 和 200 个三角形单元（图 8-18 显示划分 20 个单元的情况）。传统弹塑性计算中选用参数为 $G = 4000 \text{ N/mm}^2$ ，初始屈服应力 100 N/mm^2 ，屈服以后的软化模量是 $H = -0.125G$ ，并且假定中间两个单元为薄弱单元，其屈服应力低于其它单元以促成应变局部化的形成。Cosserat 理论计算中另外选用旋转剪切模量 $G' = 2000 \text{ N/mm}^2$ 和 $R = 12 \text{ mm}$ 。这时不必假定有薄弱单元，但选择边界条件时假定土层

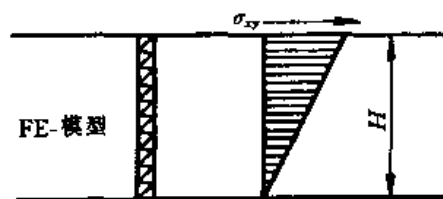


图 8-18 水平剪切的土层

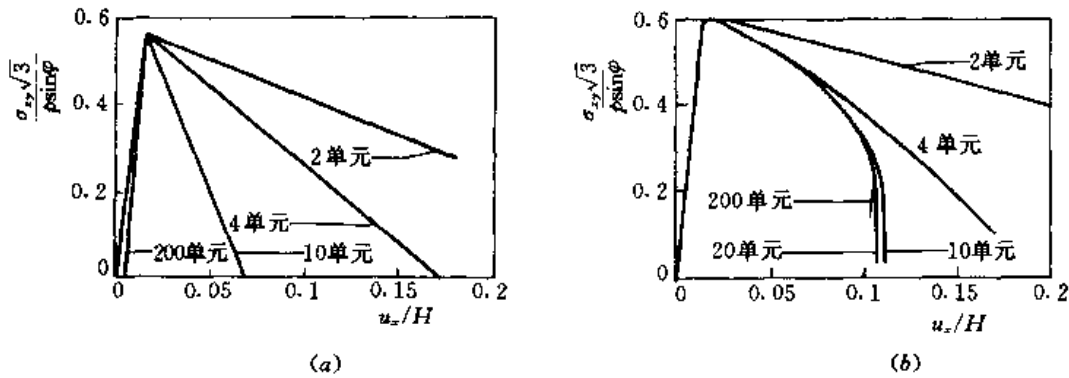


图 8-19 两种理论计算结果
(a) 传统理论; (b) cosserat 理论

表面和底面的 $\omega_3 = 0$, 也即上、下两层颗粒不产生转动。两种理论计算结果如图 8-19 所示。由该图可见, 传统理论的计算结果随单元划分的不同而不同, 即表现出单元敏感性, 而且最后收敛于错误的结果。这时, 剪切带的厚度也始终限于原先假定的两个薄弱单元, 因此, 随着单元的加密及其尺寸的减小, 剪切带的厚度也不断减小。Cosserat 理论的计算结果则无单元敏感性, 并且随着单元数的增加收敛到一个比较合理的结果。此时, 剪切带位于土层中部, 厚度基本不变。

Papanastasion & Vordoulakis 曾用类似的 Cosserat 模型分析钻孔的非对称不稳定破坏过程^[20], 得到了合理的结果 (图 8-20)。

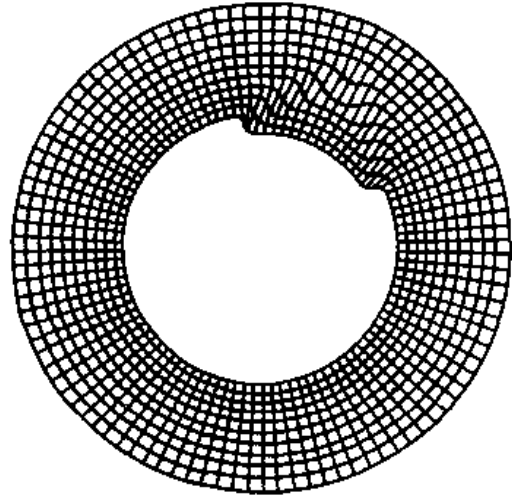


图 8-20 圆柱孔的局部破坏

四、非局部应变理论

传统的本构理论只就连续介质中孤立一点进行考察。单元越小, 剪切带越薄, 破坏时耗散的能量也就越少, 最终导致图 8-19 (a) 所示能量耗散趋势于 0 的错误结果。为了使能量耗散保持常量, Bazant 引入与颗粒尺寸类似的特征长度 l , 并让某点应力与以 l 为半径的范围内各点的塑性应变之间建立关系^[21]。这就是塑性应变非局部化的思路。具体说来, 就是把传统的弹塑性应力应变关系式 (2-21) 写为

$$\{\Delta\sigma\} = [D](\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\bar{\lambda}\{n\}) \quad (8-79)$$

这里塑性乘子 $\Delta\bar{\lambda}$ 已经不是就每一单元进行计算, 而是由 l 范围内所有单元加权平均得出。Adachi 等建议取权函数为正态误差分布函数, 则以一维问题为例, $\Delta\bar{\lambda}$ 的平均值将为^[22]

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{1}{A} \int_{-l}^{+l} \exp(-s^2/l^2) \lambda(s) ds \quad (8-80)$$

其中 $A = \int_{-l}^{+l} \exp(-s^2/l^2) ds$, s 为积分点到考察点的距离, l 为选定的积分范围。但他们所做的算例中并未有剪切带出现。

五、梯度塑性理论

考虑相邻应变影响的另一种思路是在应力应变关系中加入塑性应变的梯度项，这就引出梯度塑性理论。这一理论在某种意义上把塑性应变类比为可扩散的流体而影响相邻点的应力应变关系。

如果在硬化规律中除硬化参数 h 外还加入硬化参数的散度项，则屈服函数将可写为

$$F(\{\sigma\}, h, \nabla^2 h) = 0 \quad (8-81)$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子，即 $\nabla^2 h = \text{div} \cdot \text{grad} h$ 。上式的增量关系即所谓的一致性条件为

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} + \frac{\partial F}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 h} \nabla^2 \Delta h = 0 \quad (8-82a)$$

或用塑性乘子 $\Delta \lambda$ 取代 Δh 后可得

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} - H \Delta \lambda + b \nabla^2 \Delta \lambda = 0 \quad (8-82b)$$

其中 H 为硬化模量， $b = -H \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 h} \frac{\partial F}{\partial h}$ 。把 λ 作为独立变量，并用 Galerkin 有限元法对上式进行离散，最后与位移方程加在一起，可得下列代数方程组

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\lambda} \\ K_{\lambda u}^T & K_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-83)$$

其中

$$K_{uu} = \int [B]^T [D] [B] d\Omega$$

$$K_{u\lambda} = - \int [B]^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \{N\}^T d\Omega$$

$$K_{\lambda\lambda} = \int \left[\left[H + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right] \{N\} \{N\}^T - b \{N\} \{ \nabla^2 N \}^T \right] d\Omega \quad (8-84a)$$

其中 $\{N\}$ 和 $\{N\}$ 分别为 $\{\Delta u\}$ 和 $\{\Delta \lambda\}$ 的插值函数， ΔF 为荷载增量。 $K_{\lambda\lambda}$ 中最后一项的存在将使系数矩阵不对称，在小应变条件下可以简化为下列对称化表达式

$$K_{\lambda\lambda} = \int \left[\left[H + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right] \{N\} \{N\}^T - b \{ \nabla N \} \{ \Delta N \}^T \right] d\Omega \quad (8-84b)$$

与上述 de Borst 推导的思路不同^[23]，多数学者不是把 λ 作为独立变量，而是仍然只求解位移方程，但是在形成劲度矩阵时把 $\nabla^2 \lambda$ 项引入弹塑性矩阵中。例如 Vardoulakis 等建议下列应力应变关系^[24]

$$\{\sigma\} = [D] \{\Delta \epsilon\} - [N] \{ \nabla^2 \epsilon \} \quad (8-85)$$

其中

$$[N] = K \sin \varphi^* l^2 \{\delta\} \frac{\{A\}^T}{H}$$

$$\{A\} = \frac{\{s\}}{\|s\|} + \frac{K}{G} \beta \sin \varphi^* \{\delta\}$$

$$\bar{H} = 1 + \beta \frac{\sigma_m}{G} \frac{d \sin \varphi^*}{d \gamma^p} - \frac{K}{G} \beta \sin \varphi^* \left(\sin \varphi^* - \frac{d \sin \varphi^*}{d \gamma^p} l^2 \nabla^2 \gamma^p \right)$$

上述式中 $\beta = \exp \left(-\frac{K}{\sigma_m} \sin \varphi^* l^2 \nabla^2 \gamma^p \right)$ ， l 为某一特征长度，使 $l^2 \nabla^2 \gamma^p$ 成为无因次量。经与试验比较， l 约为 $1.3d_{50}$ 。

宋二祥则把式 (8-82b) 改写为^[25]

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Delta \sigma \} - H \Delta \lambda^* = 0 \quad (8-82c)$$

其中 $\Delta \lambda^* = \Delta \lambda + l^2 \nabla^2 \Delta \lambda$ (8-86a)

$l = \left[\frac{\partial F}{\partial \nabla^2 h} / \frac{\partial F}{\partial h} \right]^{1/2}$ 相当于特征长度。用 $\Delta \lambda^*$ 代替式 (8-79) 中的 $\Delta \lambda$, 即可用常规弹塑性有限元方法进行计算。但 $\nabla^2 \Delta \lambda$ 的计算精度很差, 为了克服这一缺点, 他改用下列误差函数的积分式代替式 (8-86a) 计算 $\Delta \lambda^*$

$$\Delta \lambda^* = (1 - \alpha) \Delta \lambda + \frac{\alpha}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{l^2}\right) \Delta \lambda(s) ds \quad (8-86b)$$

式中 α 被称为局部应变调整系数。可以证明, 当 $\alpha=1$ 时

$$\Delta \lambda^* = \Delta \lambda + \frac{1}{4} l^2 \nabla^2 \Delta \lambda \quad (8-86c)$$

此时的 $\Delta \lambda^*$ 即等于均值 $\Delta \bar{\lambda}$, 因而与前面 Bazant 的建议一致, 而当选用 $\alpha=4$ 时, 由式 (8-86b) 算出的 $\Delta \lambda^*$ 即与式 (8-86a) 一致。他采用 15 结点的三角形单元进行了若干算例两种单元网格的对比计算, 证明上述方法克服了单元敏感性。

当 $\Delta \lambda$ 当作独立变量进行求解时, 需要为它规定边界条件, 例如常采用法向梯度等于 0 的边界条件, 但无充分的根据。这也是式 (8-83) 不便推广应用的原因。

六、复合体理论

Pietraszczak & Niu 把剪切带看作与原土体不同的另一种材料, 然后把包含剪切带的单元当作由两种材料构成的复合单元, 求出其平均的模量矩阵, 然后按此平均模量进行有限元应力应变分析。以二维问题为例, 他们推导得出的平均应力应变关系为

$$[\Delta \sigma] = [D][S_1]\{\Delta \epsilon\} \quad (8-87)$$

其中 $[D]$ 为带外土体的刚度矩阵

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \quad (8-88)$$

而 $S_{11}, S_{12} \dots$ 等为下列 2×3 矩阵 $[S]$ 的元素

$$[S] = \left([I] + \frac{1}{\mu} [B] \right)^{-1} \left([A] + \frac{1}{\mu} [B][I] \right) \quad (8-89)$$

其中 $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 2×2 矩阵 $[B]$ 和 2×3 矩阵 $[A]$ 由带外土的硬化模量和带内土的软化模量加权平均方法得出, 而 $\mu = l/A$, A 为单元面积, l 为单元内所含剪切带的长度。由于剪切带的存在, 式 (8-87) 中的刚度矩阵 $[D][S_1]$ 将是各向异性的。上述理论在推导过程中考虑了带内土和带外土的综合影响, 在某种意义上也是一种非局部化理论。

Hazaika 等发展了上述方法^[27], 他们假定一个单元内存在相交的双剪切带, 求得了相应的平均化应力应变关系, 并用于挡土墙后土体渐进破坏分析。

七、增量非线性理论

与通常的弹塑性模型相比,式(2-108)的次弹性模型和式(2-197)的次塑性模型均假定刚度或柔度矩阵不但与应力总量有关,而且也决定于应力增量,从而构成了增量非线性模型。由于增量型应力应变关系的系数矩阵本身与应变增量有关,从而增加了求解的复杂性。应当说明,严格意义上普通的弹塑性矩阵也是增量非线性的,因其与加荷-卸荷条件有关,即加荷时选用弹塑性矩阵,卸荷时选用弹性矩阵。前面针对式(2-120)已经证明,单屈服面的塑性柔度矩阵是不可逆的,只有加上弹性项以后形成的弹塑性矩阵才是可逆的。增量非线性模型的柔度矩阵的可逆性得到改善,因此这一类模型有一定的积极意义。

Darve 最先应用式(2-108)的增量非线性模型进行过应变局部化分析^[28]。近来 Bauer & Huang 又应用次塑性模型推导了剪切带形成的条件,其基本思路介绍如下^[29]。

把式(8-57)中的 D_{ijkl} 改为式(2-197)所示的非线性增量形式

$$[\Delta\sigma_{ij}] = L_{ijkl}[\Delta\epsilon_{kl}] - \lambda N_{ij} \quad (8-90)$$

其中 $\lambda = [\|\Delta\epsilon_{ij}\|]$ 为带内外应变增量模数的跳跃量, L_{ijkl} 和 N_{ij} 分别为刚度矩阵的线性部分和非线性部分。把上式代入法向应力平衡条件,式(8-58)可改写为

$$A_{ij}m_j = \lambda N_{ij}n_j \quad (8-91)$$

其中

$$A_{ij} = n_k L_{ijkl}n_l \quad (8-92)$$

如果软化性质只反映在非线性部分,线性模量矩阵 L_{ijkl} 为硬化型,则 A_{ij} 将是可逆的,由此可得

$$m_i = \lambda A_{ij}^{-1} N_{jk}n_k \quad (8-93)$$

m_i 是跳跃量 g_i 的方向余弦,跳跃量的非零解要求 $\|m\| = 1$,由此条件可得下列剪切带方向角的公式

$$b_4 \cos^8 \alpha + b_3 \cos^6 \alpha + b_2 \cos^4 \alpha + b_1 \cos^2 \alpha + b_0 = 0 \quad (8-94)$$

式中 $b_0 \cdots b_4$ 为 σ_{ij} 和 λ 的函数。

但是,以上模型仍不能克服有限元分析中的单元敏感性问题。后来 Teichman & Bauer 又把 Cosserat 的力偶项引入系数矩阵 L 和 N 中,得出剪切带厚度随颗粒直径增大而增加的结果^[30]。

八、广义孔隙压力理论

以上各种理论均未涉及产生应变局部化的物理机制。前面把软化机制归纳为减压软化、剪胀软化和损伤软化三种。如果把剪胀软化理解为咬合力丧失的结果,把损伤软化理解为结构吸力丧失的结果,并把这两种力与毛管吸力一起统称为广义吸力,则所有软化均可以解释为广义孔隙压力升高引起的减压软化。

按照这一理论,如果 $\Delta\bar{u}_w$ 代表广义孔隙压力增量, $\Delta\sigma'' = \Delta\sigma - \Delta u''_w$ 为广义有效应力增量,则弹塑性应力应变关系可以写为

$$\{\Delta\sigma''\} = [D]_{ep} \{\Delta\epsilon\} \quad (8-95a)$$

或

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{ep} \{\Delta\epsilon\} + \Delta u''_w \{\delta\} \quad (8-95b)$$

由于传统理论把屈服面看作塑性应变等值面,加荷时屈服面必须扩大。但对软化材料,

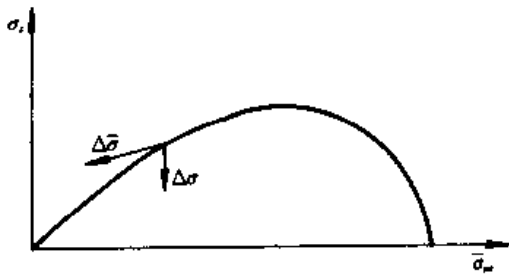


图 8-21 广义有效应力屈服面

塑性应变增大时应力增量指向屈服面内侧，按理应判为卸荷。为了克服这一矛盾，许多人不得不假定软化时屈服面将收缩。如果按上述广义有效应力概念定义屈服面，则对软化材料广义有效应力增量 $\Delta\bar{\sigma}$ 的作用将使屈服面扩大(图 8-21)，从而通常的等值面理论仍可适用于软化材料。

广义孔隙压力 u''_w 可以有两种定义方法： $u''_w = p(\{\epsilon\})$ 和 $u''_w = \bar{p}(\{\sigma\})$ 。把它们代入式(8-95a)中可得

$$\{\Delta\sigma\} = [\bar{D}]_{\epsilon, p} \{\Delta\epsilon\} \quad (8-96)$$

其中

$$[\bar{D}]_{\epsilon, p} = [D]_{\epsilon, p} + \{\delta\} \left[\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right]^T \quad (8-97a)$$

或

$$[\bar{D}]_{\epsilon, p} = \left([I] - \{\delta\} \left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \sigma} \right\}^T \right)^{-1} [D]_{\epsilon, p} \quad (8-97b)$$

以第一种方案为例，假定广义孔隙压力与大主应变 ϵ_1 之间关系可用下列指数函数描述(图 8-22)

$$p = p_m \left[1 - \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_m} \right) \exp\left(-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_m}\right) \right] \quad (8-98)$$

p_m 和 ϵ_m 为两个参数， $\epsilon_1 = \epsilon_m$ 时广义孔隙压力产生率达到最大值 $(dp/d\epsilon_1)_{max} = p_m/2.72\epsilon_m$ 。把式(8-98)代入式(8-97a)中可得

$$[\bar{D}]_{\epsilon, p} = [D]_{\epsilon, p} + \frac{p_m \epsilon_1}{\epsilon_m^2} \exp\left(-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_m}\right) \{\delta\} \left\{ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \epsilon} \right\}^T \quad (8-99)$$

此式右边第一项 $[D]_{\epsilon, p}$ 中硬化模量均为正值，而第二项的系数也均为正值， $[\bar{D}]_{\epsilon, p}$ 无疑是正定的，从而求解中将不会遇到麻烦。

以上推导中广义孔隙压力只是一个过渡参数，最后形成的变位方程中并未出现。如果把它作为独立变量，则可参照 Biot 固结理论推导出有关公式。其中变位方程仍如式(4-27a、b、c)，而孔隙压力公式(4-27a)应改写为

$$\frac{\bar{k}}{\rho_l g} \text{div} \bar{u}_w - \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} = 0 \quad (8-100)$$

式中 \bar{k} 可以称为广义渗透系数。如果 \bar{u}_w 仍按式(8-98)计算，则

$$\frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \epsilon_1} \left\{ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial u} \right\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \quad (8-101)$$

从而相应的有限元公式仍与式(4-172a)类似

$$\begin{bmatrix} K & C_1 \\ -C_2 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta u_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-102)$$

$[C_1]$ 仍与 $[C]$ 一致，而 $[C_2]$ 则由 $\frac{\partial p}{\partial \epsilon_1} \left\{ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial u} \right\}^T$ 算出。此式与式(8-83)类似， u''_w 与该式的 λ 含义接近，也即假定广义孔隙压力可以有某种扩散，从而影响相邻的区域。如果选取 \bar{k} 为各向异性，即在剪切带厚度方向 \bar{k} 值远小于沿长度方向，广义孔隙压力容易沿长度方向扩

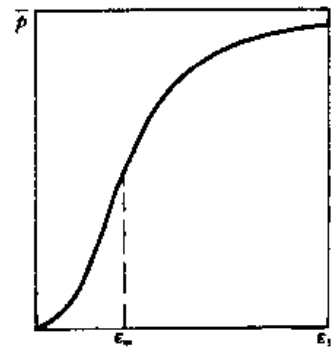


图 8-22 广义孔隙压力

散，剪切带就将沿带长度方向扩展。

第四节 应变局部化的数值分析

一、软化阶段劲度矩阵的特性

先考察刚度矩阵的特性。设 K 、 G 、 P 和 Q 分别为压缩模量、剪切模量、压硬模量和剪缩模量，即

$$\Delta\epsilon_v = \frac{\Delta\sigma_m}{K} + \frac{\Delta\tau}{Q}; \Delta\gamma = \frac{\Delta\tau}{G} - \frac{\Delta\sigma_m}{P} \quad (8-103)$$

第二式中减号表示压硬后剪应变减小。限于二维问题，相应的刚度矩阵为

$$[D] = \frac{PQ}{KG + PQ} \begin{bmatrix} K + G & K - G & -KG/Q \\ K - G & K + G & -KG/Q \\ KG/P & KG/P & G \end{bmatrix} \quad (8-104)$$

由此可得二次功的增量 $\Delta W = \{\Delta\epsilon\}^T \{\Delta\sigma\}$ 为

$$\begin{aligned} \Delta W = \frac{PQ}{KG + PQ} [& K(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y)^2 + G(\Delta\epsilon_x - \Delta\epsilon_y)^2 + G\Delta\gamma^2 \\ & + KG(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q})\Delta\gamma(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y)] \end{aligned} \quad (8-105)$$

式中右边前三项只含应变分量的平方项，因此，不考虑剪缩和压硬时， ΔW 恒为正，即正定性得以保证。如果 $P=Q$ ，第四项为 0，则可以得到同样的结论。反之，当 $P \neq \infty$ ，甚至 $P > 0$ 和 $Q < 0$ ，即对压硬剪胀材料，在应变分量 $\Delta\epsilon_x$ 、 $\Delta\epsilon_y$ 和 $\Delta\gamma$ 的一定组合下， ΔW 可能小于 0，从而失去正定性。同样，当 K 和 G 中有一项为负时，也可能失去正定性。如果不计 P 和 Q ，则当 K 和 G 均为负时， ΔW 恒为负，相应的 $[D]$ 矩阵将是负定的。

正定性是用有限元法求解椭圆形方程的保证。对 K 和 G 均为正值的硬化材料，最后形成的结构劲度矩阵也将是正定的，因而可以求得边值问题的唯一解。对于只含软化区的负定问题，原则上也可以求得唯一解。但是，当硬化区和软化区同时存在时，就可能出现解的不定性。原因在于两区交界面附近，叠加后形成的矩阵主对角元素可能出现 0 或接近于 0，或者在矩阵分解过程中主对角元素出现 0 或接近于 0，从而导致计算无法进行或出现很大的误差。沈珠江曾结合具体算例探讨了这一问题^[31]。

在第五章中已经讨论过，对于 $G=0$ 的理想塑性材料，其控制的数学方程属于双曲线型，宜用特征线法求解。在硬化和软化的过渡区，情况正与此类似，也即此处的控制方程失去了椭圆性。这是软化问题数值解法所遇到的最大困难。

二、常规有限元法

由于增量劲度矩阵失去椭圆性，不能直接分解求逆，一般有限元分析中均用初应力法迭代求解。具体迭代方法又可分为常刚度法、变刚度法和混合迭代法几种（图 8-23）。常刚度法对软化单元也用初始模量 G_0 形成劲度矩阵，变刚度法则常取一个比较小的正模量 G_1 取代实际的负模量。这些方法在有限元文献中经常见到，此处不再赘述。

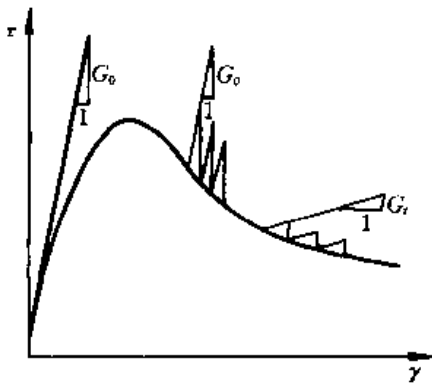


图 8-23 软化问题的初应力迭代法

用有限元法求解软化问题时经常遇到单元敏感性问题
和网格锁定问题。前者已在图 8-18 算例中介绍过。网格锁定问题是指特定条件下单元结点无法自由变位导致单元刚度不合理地增大。这种情况通常在不可压缩材料的变形计算及计算进行到接近破坏荷载时遇到。前一种情况是模量比 $G/K \rightarrow 0$ ，后一种情况是 $G \rightarrow 0$ ，都与控制方程失去椭圆性有关。为了解决这一问题，不少学者在单元类型的选择和积分方法上作过大量探索，并取得一定的进展。主要研究结果可以归纳为两点。一是要选用合适的单元形态，例如 15 结点的三角形单元，四个三角形单元合成一个四边形单元等。另一是采用缩减积分点的方法，例如四边形等参单元中由 9 个积分点减为 4 个甚至 1 个积分点。宋二祥对此有过详细的介绍^[32]。

应变软化问题适用于给定边界位移（应变控制）的方法求解。当给定边界荷载时，荷载跨越峰值后需要减小，采用通常的办法难以做到这一点，为此常采用弧长法调整荷载增量。此法把荷载分布形状固定，只留一个比例系数作为未知量，并与结点变位一起求解。

软化分析中的一个关键问题是保证剪切带的出现。如果不采用相应措施，对于均匀边界条件，常规有限元只能得出均匀变形解。为了得出应变局部化的解答，往往需要假定一个弱单元作为局部化的起点^[33]。弱单元可以采用几何弱化的办法，例如对边界上单元加一微小的缺口，或采用物理弱化的办法，例如把内摩擦角降低 2° 。绝对均匀只是理想化的假设，薄弱环节客观上总是存在的，但是计算中假定弱单元位置不同，得出的解将不同，从而存在一定的任意性。对于不均匀边界条件，例如试样顶部存在摩阻力，土体内应力分布不均匀，应变局部化自然在应力集中点最先出现。显然，绝对均匀化的边界条件也只是一种理想化的假设，土体内存在不均匀应力场，从而触发应变局部化，这也是符合实际的。

在荷载增大到一定程度而有可能出现分叉解后，不断对式 (8-52) 切线劲度矩阵进行本征值的分析，这是理论上比较完善的一种抓住局部化初次出现的办法。原则上当最小本征值为 0 时即可出现分叉，实际计算中当发现本征值为一很小的负值时可认为出现了分叉点。de Borst 就分叉后的分析建议了一种特殊的分析方法^[34]，即在按均匀变形求出位移增量的初步解 $\{\Delta u^*\}$ 后用下式构造新的位移解

$$\{\Delta u\} = \alpha \{\Delta u^*\} + \beta \{v_1\} \quad (8-106)$$

其中 $\{v_1\}$ 为最小本征值相应的本征矢量。参数 α 和 β 由以下两式解出

$$\{\Delta u\}^T \{\Delta u^*\} = 0; \{\Delta u^*\}^T \{\Delta u^*\} = \{\Delta u\}^T \{\Delta u\} \quad (8-107)$$

de Borst 采用 8 结点四边形元和 15 结点三角形元两种单元形态对均匀受荷的矩形试件进行分析，计算中选用的参数为 $\varphi=40^\circ$ ， $\psi=0$ ， $\nu=0.2$ ， $E=100\text{N/mm}^2$ 。4 种方案所作的分叉点的 φ 角发挥值 φ^* 分别为： 39.55° （四边形 9 积分点）， 39.48° （三角形 24 单元）， 39.41° （四边形 4 积分点）， 39.23° （三角形 96 单元），而式 (8-61) 的理论解为 39.23° （图 8-24）。另一方面，图 8-20 所示的柱孔分叉解是在初始条件完全均匀对称条件下，仅仅由于运算过程中微小的舍入误差积累而导致的结果。这一点说明 Cosserat 理论的合理性。

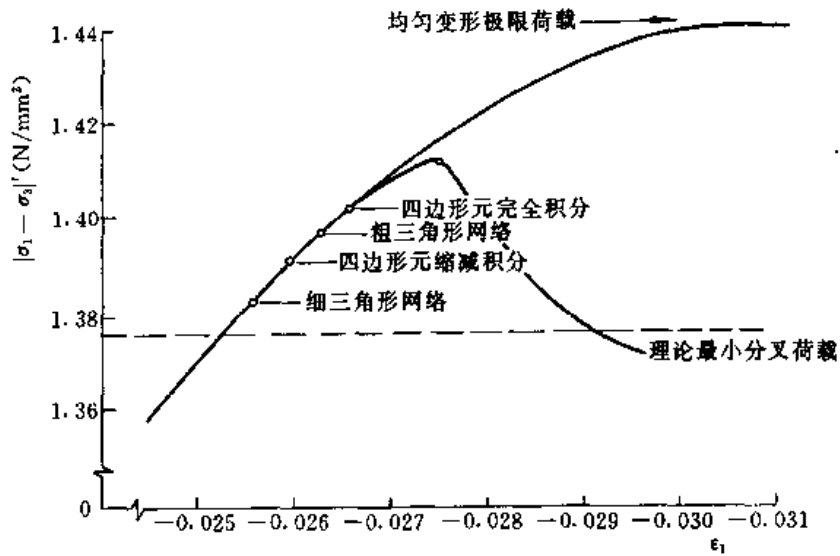


图 8-24 不同单元形态计算的分叉点

三、自适应有限元法

采用固定的单元网格计算时，在应变梯度大的地方必然形成较大的误差，应变局部化问题恰恰是应变分布极不均匀的问题，因此按常规有限元计算必定精度不高。近来，Zienkiewicz, Tie 和王建华等人把自适应有限元方法用于应变局部化的分析，取得了较好的结果^[35,36,37]。

自适应有限元包括两个内容：一是误差估计，二是网格自动加密。其大致步骤是选用一种较粗的网格进行第一级加荷计算，以后随着荷载增加和土体中应变分布不均匀程序的增加逐渐加密单元网格。每次加密前先进行各结点应力的误差估计。误差超过允许值的结点周围单元即为需要加密的区域。图 8-25 和图 8-26 是 Hicks 用这一方法分析 $\varphi=37^\circ$ 的砂土试样，在平面应变条件下压缩试验的结果^[38]。分析中假定试样两端完全粗糙，并采用了双屈服面弹塑性模型和非正交流动法则。排水试验分 160 个荷载级计算，共进行了 17 次网格

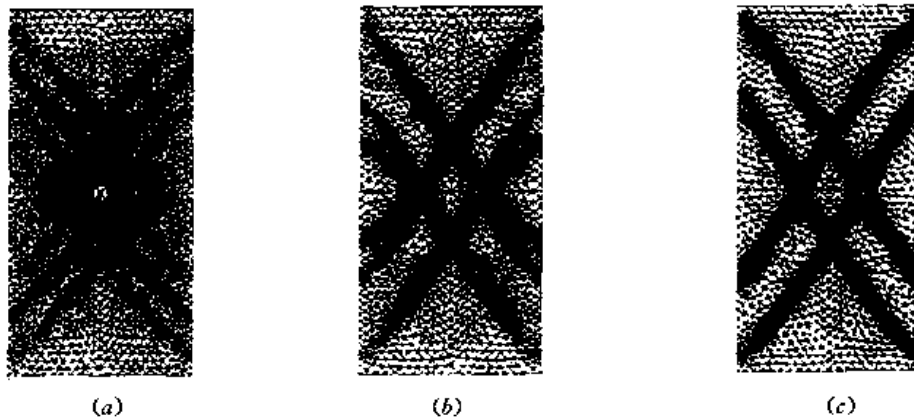


图 8-25 排水条件下的网格

(a) 11 次更新网格 (1122 单元); (b) 13 次更新网格 (1660 单元);
(c) 15 次更新网格 (1759 单元)

更新。图 8-25 显示经过 11, 13 和 15 次更新后的网格。不排水试验分 200 级计算, 进行了 21 次网格更新。图 8-26 显示 8、11 和 16 次更新后的网格。比较两图可见, 剪切带倾角由排水条件下的 54° 降低到不排水条件下的 45° 。图 8-26 是假定孔隙水不流动得出的, 如果假定孔隙压力可以扩散, 计算的结果将与排水条件下的结果接近。以上两图还说明, 自适应有限元的另一个好处是网格分布能直观地反映剪切带的形状。

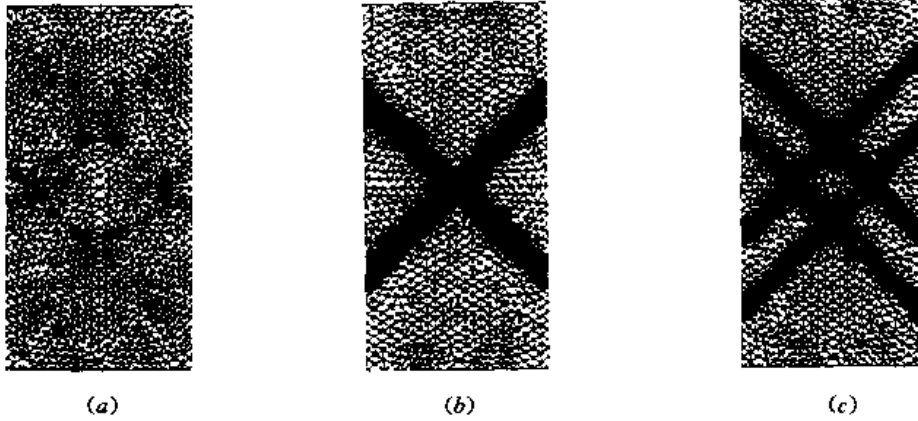


图 8-26 不排水条件下的网格
(a) 8 次更新网格 (613 单元); (b) 11 次更新网格 (1214 单元);
(c) 16 次更新网格 (1413 单元)

四、嵌套单元法

嵌套单元法与前面介绍的复合材料理论有某种相似之处, 也是一种单元内平均化的方法。如果单元的劲度矩阵写成下列形式

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (8-108)$$

则复合材料理论的办法是修改刚度 $[D]$ 为 $[\bar{D}]$, 使其能平均地反映带内外材料的共同影响, 而嵌套单元法则采用修改几何矩阵 $[B]$ 的办法, 使得出的平均矩阵 $[\bar{B}]$ 能得到等效的结果。按 Belytschko 的推导, 这种等效矩阵可用下式表示^[39]

$$[\bar{B}]_i = \left[[I] + \alpha \left(\frac{l}{b} - 1 \right) [T][T]^T \right] [B] \quad (8-109a)$$

$$[\bar{B}]_e = ([I] - \alpha [T][T]^T) [B] \quad (8-109b)$$

式中: 足标 i 代表带内, 角标 e 代表带外, $[T] = (m, n_i + m, n_e) / \|m, n_i + m, n_e\|$ 。就一维单元而言, 设 Δu 代表两结点位移差, 则上式代表的应变分布将如图 8-27 所示。设 n_{int} 为积分点的数目, 则把式 (8-109) 代入式 (8-108) 后可得

$$[K] = \sum_{j=1}^{n_{int}} \left[\frac{b}{l} [\bar{B}]_i [D]_i [\bar{B}]_i + \left(1 - \frac{b}{l} \right) [\bar{B}]_e [D]_e [\bar{B}]_e \right] W_j J_j \quad (8-110)$$

式中: W_j 和 J_j 分别为积分点的权系数和 Jacobi 值。上式中参数 α 与带内外应变跳跃量有

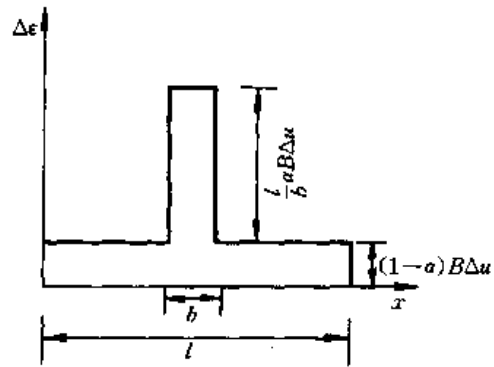


图 8-27 嵌套单元的应变场

关,在计算中可以根据带内外法向应力连续的条件确定,但剪切带的相对宽度 b/l 需要事先假定。Sabatini 通过具体计算发现,此比值对计算结果的影响较大^[40]。

五、附加应变法

对于应变局部化问题,采用四边形等参单元的效果不理想,改用 4 个常应力三角形单元组成的四边形可以得到明显的改善。Ortiz 等则建议在采用等参单元时在常规应变场之外另加一个可以反映应变不连续的附加应变场,其基本思路如下^[41]。

设单元内存在 n_i 个应变不连续面, n_β 和 g_β 分别是第 β 个面的方向角和相应的变位跳跃量,则可以假定单元内的位移场由两部分相加而成

$$u_i(x) = \sum_{a=1}^{n_e} u_{ia} N_a(x) + \sum_{\beta=1}^{n_i} g_\beta M_{i\beta}(x) \quad (8-111)$$

式中: n_e 为单元结点数; N_a 为型函数。上式可简写为

$$\{u\} = [N]\{u\} + [M]\{g\} \quad (8-112)$$

而相应的应变场为

$$\{\epsilon\} = [B_1]\{u\} + [B_2]\{g\} \quad (8-113)$$

附加应变场的插值函数可以写为

$$M_{i\beta}(x) = -(1 - \lambda_\beta) m_{i\beta} [-n_\beta(x - \xi_\beta)] + \lambda_\beta m_{i\beta} [m_\beta(x - \xi_\beta)] \quad (8-114)$$

式中: $\lambda_\beta = A_\beta^- / A_\beta$; $A_\beta = A_\beta^+ + A_\beta^-$; A_β^+ 和 A_β^- 分别为第 β 个不连续面以上和以下的单元面积; ξ_β 为积分点的坐标(图 8-28)。设 $F_{ij\beta} = \frac{1}{2} (m_{i\beta} m_{j\beta} + m_{j\beta} + n_{i\beta})$, 则 $g_\beta F_{ij\beta}$ 代表通过 β 不连续面的应变跳跃量,而式(8-113)中矩阵 $[B_2]$ 的元素可以写为

$$(B_2)_{ij\beta} = \begin{cases} \lambda_\beta F_{ij\beta} & n_\beta(x - \xi_\beta) > 0 \\ -(1 - \lambda_\beta) F_{ij\beta} & n_\beta(x - \xi_\beta) < 0 \end{cases} \quad (8-115)$$

定义 $K_{11} = \int [B_1]^T [D] [B_1] d\Omega$, $K_{22} = \int [B_2]^T [D] [B_2] d\Omega$, $K_{12} = K_{21}^T = \int [B_1]^T [D] [B_2] d\Omega$ 则由下列单元方程

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-116)$$

可解出 Δg , 并代回到上式后得

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \quad (8-117)$$

式中: $[K] = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$ 。

把式(8-113)改写成增量形式并把前面解出的 Δg 代入后可得

$$\{\Delta \epsilon\} = [\bar{B}]\{\Delta u\} \quad (8-118)$$

式中: $[\bar{B}] = [B_1] - [B_2] [K_{22}]^{-1} [K_{21}]$ 。因而最后的单元劲度矩阵可以写为

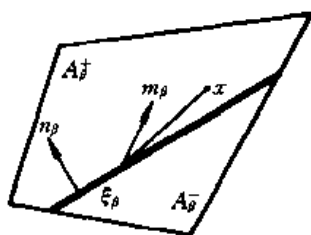


图 8-28 单元内不连续面

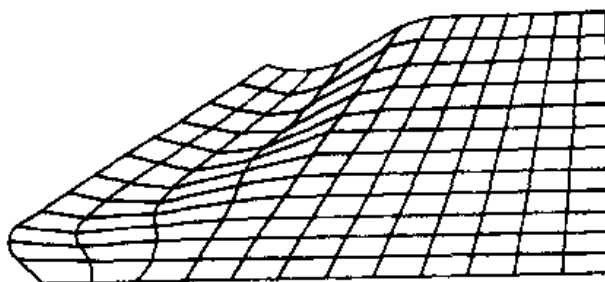


图 8-29 土坡的集中变形

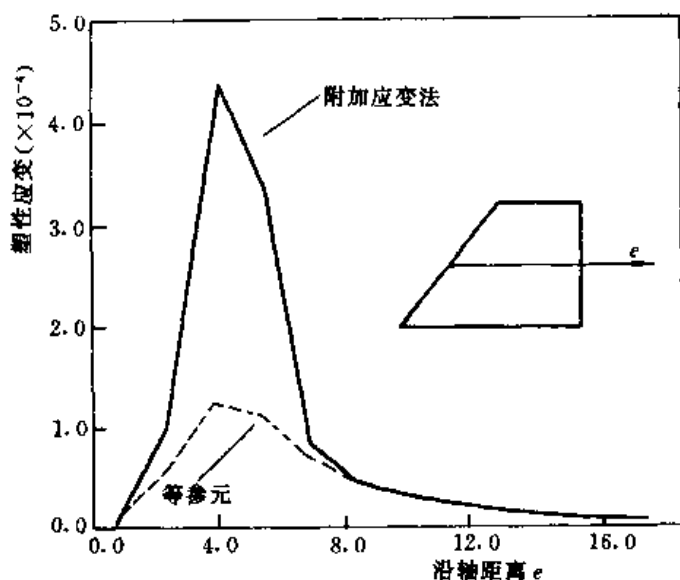


图 8-30 土坡内的应变分布

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (8-119)$$

由此可见,与式(8-110)类似,这也是一种修改[B]矩阵的办法。

图 8-29 是用上述方式计算的边坡在自重 ρg 作用下的变形,图 8-30 中则比较了上述方法与常规等参有限元计算所得的坡中应变分布,可见此法算出的应变较为集中。计算中采用非正交的 Ducker-Prager 模型, $\varphi=20^\circ$, $\psi=10^\circ$, $c=2000$, 屈服前的弹性常数为 $E=2 \times 10^8$, $\nu=0.25$, 假定 ρg 逐渐由 0 增大到 3000。后来, Leroy & Ortiz 又用上述方法分析了一个三维土坡的算例,取得了

较好的结果^[42]。

Pietraszczak 等提出过一个更简单的思路^[44], 即在用通常方法算出每个单元总应变增量后,按下式计算剪切带内的塑性应变

$$\{\Delta \epsilon^p\} = (\{\Delta \epsilon\} - \{\Delta \epsilon^e\}) \sqrt{A_s/A_e} \quad (8-120)$$

式中: A_e 和 A_s 分别为单元和剪切带面积。

六、混合单元法

李锡夔从胡海昌—鹭津变分原理出发,建议了用混合应变元结合梯度塑性理论的求解方法。采用四边形单元,假设单元内的位移场由三角形元的一次函数和四边形等参元的二次函数混合组成,即^[45,46]

$$\{u\} = \{a_0\} + \{a_1\}\{x\} + \{a_3\}h \quad (8-121)$$

式中: $h=A_e \xi \eta / 4$; A_e 为单元面积; ξ, η 为等参元坐标。相应地单元内的应力场和应变场将有常数和线性变化两部分组成,即

$$\{\sigma\} = \{\sigma^0\} + [H_s]\{\sigma^*\}, \{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + [H_s]\{\epsilon^*\} \quad (8-122)$$

由此推导得出的单元劲度矩阵为

$$[K] = [B]^T [D] [B] + G [\Gamma]^T [H^*] [H]^{-1} [H^*] [\Gamma] \quad (8-123)$$

其中 $[B] = [B] + [H_b] [\Gamma]$ 。上述式中 $[H]$, $[H^*]$, $[H_a]$, $[H_b]$ 和 $[\Gamma]$ 均为与 h 或其梯度项有关元素组成的矩阵。下一步是采用下列 Drucker-Prager 屈服面

$$f = \sigma_s - A\sigma_m - B = 0 \quad (8-124)$$

其中

$$A = \frac{2\sin\varphi^*}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi^*)}; B = \frac{6c^* \cos\varphi^*}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi^*)} \quad (8-125)$$

式中: φ^* 和 c^* 是下列等效剪应变及其梯度的函数

$$c^* = c_0 + a_1 \gamma^p - b_1 \nabla^2 \gamma^p \quad (8-126a)$$

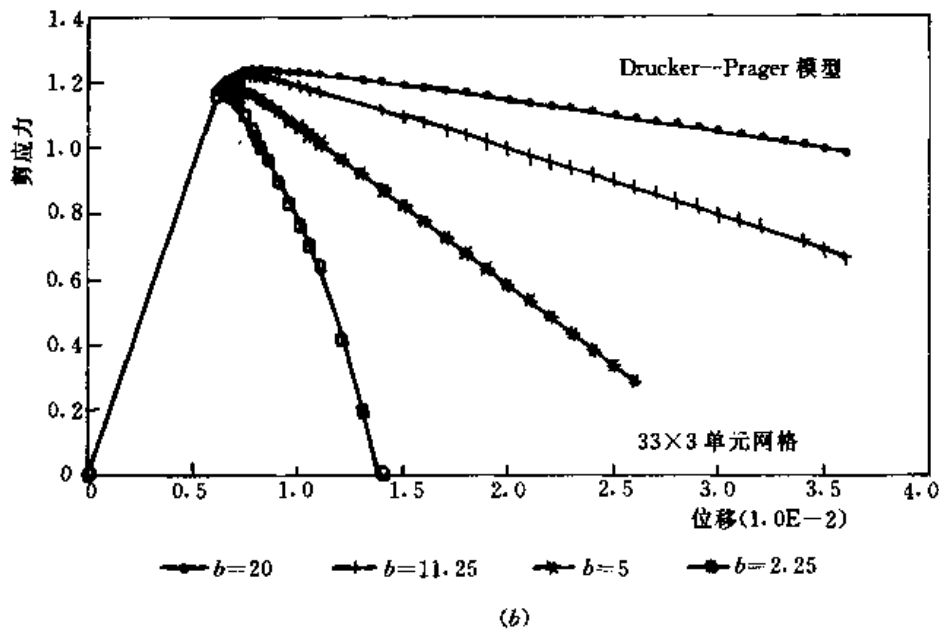
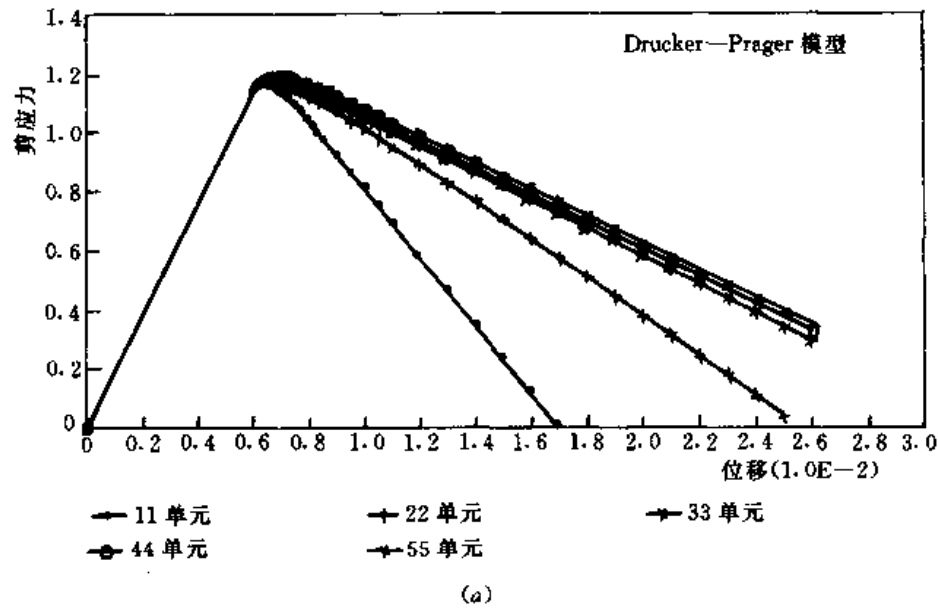


图 8-31 一维剪切的应力—位移曲线
(a) 改变单元数; (b) 改变参数

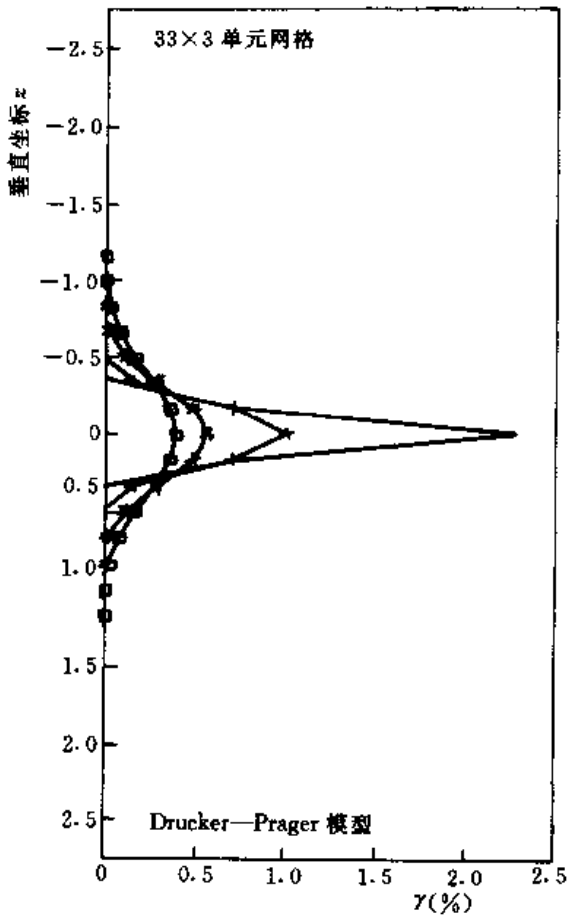


图 8-32 一维剪切的剪应变分布

高度分布则如图 8-32 所示。 $b_1=5$ 时剪切带的宽度约为 0.8, 与 de Borst 推导的下列理论解公式相当接近

$$w = 2\pi \sqrt{-\frac{b}{a}} \quad (8-128)$$

其中 $b = \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \nabla^2 \gamma^p} \Delta \gamma^p$, $a = -\frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \gamma^p} \Delta \gamma^p$ 。本例中 $b = -b_1$, $a = a_1$ 。

七、硬化和软化区分开解法

前面提到, 硬化区形成的劲度矩阵是正定的, 软化区则是负定的, 如果能把两个区域分开来单独求解, 则都可以求得确定的解。解的不定性或失去椭圆性起源于两种劲度矩阵叠加后出现主对角元素等于 0。第二节中对一维软化问题正是采用了分区求解的办法。但是, 对于二维问题, 这样做难度很

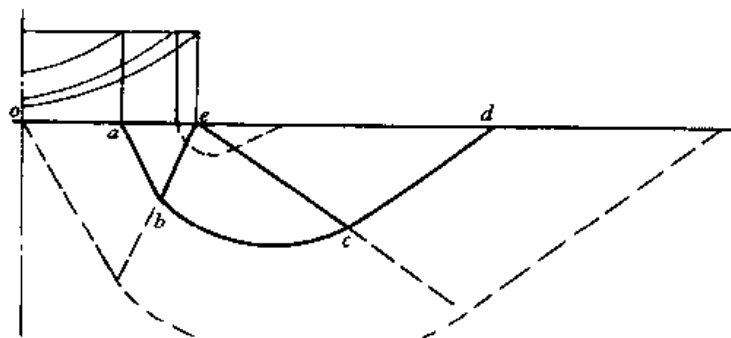


图 8-33 刚性压板下软化区的逐渐扩散

$$\varphi^* = \varphi_0 + a_2 \gamma^p - b_2 \nabla^2 \gamma^p \quad (8-126b)$$

式中: c_0 和 φ_0 为 c 和 φ 的弹性门槛值, 即发挥值 c^* 和 φ^* 小于此值时只产生弹性应变, a_1 , b_1 和 a_2 , b_2 为 4 个参数。每个积分点的 $\nabla^2 \gamma^p$ 由相邻积分点 (对内部积分点须大于 6 点) 的 γ^p 值用多项式拟合后求取。采用正交流动法则 $\{\Delta \gamma^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$, 可得等效剪应变的公式

$$\Delta \gamma^p = \lambda \left(1 + \frac{\sigma_m}{|\sigma_m|} \frac{A}{\sqrt{3}} \right) \quad (8-127)$$

在以上公式基础上, 可以利用虚功原理推导出一致性切线劲度矩阵。

把上述方法用于图 8-18 所示一维剪切问题。计算中所用的几何参数和物理参数为: 高度 5.5 ($z: -2.75 \sim +2.75$), $E=21000$, $\nu=0$, $\varphi=40^\circ$, $c_0=2.0$, $a_1=-200$, $b_1=5$, $a_2=b_2=0$ 。单元划分成三排, 每排数分别为 11, 22, 33, 44 和 55 个。在中心部位 $z=0$ 处设一个弱单元, $c_0=1.8$ 。5 种网格所得的顶部位移与剪应力关系如图 8-31 (a) 所示。另外单元数固定为 33 个, 改变 b_1 为: 20, 11.25, 5 和 2.25, 所得结果如图 8-31 (b) 所示。而相应的塑性剪应变沿

大，因为两区分界线的位置事先不知道。

如果软化以后应力跌落到残余强度，则由第五章极限平衡理论可知，软化区的控制方程属双曲线型，而硬化区仍为椭圆型方程。前者宜用特征线法求解，后者则仍适用有限元或边界元等求解变形问题的方法求解。因此，理论上这是两种数学方程混合求解的问题，而且两个区的边界是不定的，目前还没有普遍的解法。只是对于某些特定问题，有可能求得相应的解答。

蒋明镜和沈珠江按照上述思路研

究了刚性压板下的地基渐进破坏问题^[47]。从弹性理论知道刚性压板边缘处的接触应力为无穷大，因而塑性流动或软化必然从这一奇异点开始，并逐渐向外扩展（图 8-33）。据此，我们可以先用特征线法求得软化区内应力场，然后以最外一条特征线作为边界，把用特征线法求得的应力加在边界上，采用有限元法或边界元法进行硬化区的应力应变分析。根据分析结果检查一下硬化区的是否存在剪应力超过峰值强度的点。如果没有，则以上的解答将是正确的。下面以 Prandtl 问题为例，说明具体的求解过程。

(1) 先根据 Prandtl 的理论解式 (5-44)，确定边缘点的最大接触应力。例如 $\varphi=32^\circ$ 和 $c=40\text{kPa}$ 的土， $q_f=1419.3\text{kPa}$ 。而对一次跌落的软化问题，设残余内摩擦角 $\varphi=28^\circ$ ，相应的值为 $q_{fr}=1032.1\text{kPa}$ 。

(2) 假定一个由小到大的软化区边界长度 de ，用特征线法求得软化区范围 $abcde$ 。

(3) 用特征线法求得的法向和切向应力作用在 $abcd$ 面上，在 oa 边上设定一个总荷载，进行有限元或边界元分析，求得硬化区内变位和应力，并得出边界 oa 的刚性垂直位移和接

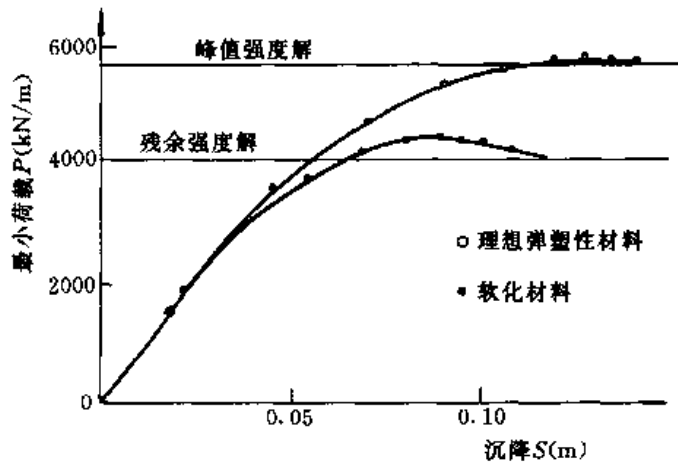


图 8-34 理想塑性和软化地基的荷载-沉降曲线

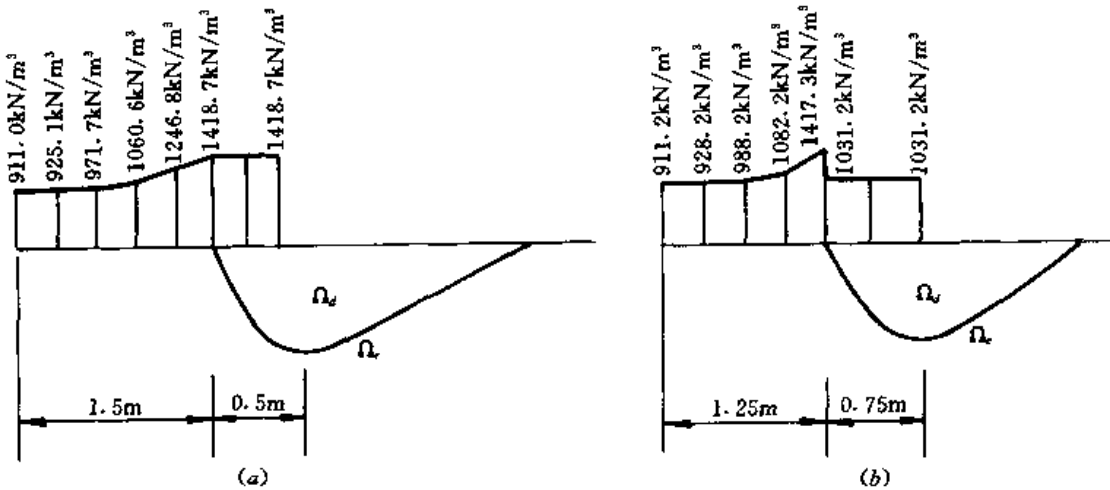


图 8-35 某一中间荷载下底面接触应力分布
(a) 理想弹塑性模式；(b) 应力一次跌落软化模式

触应力分布。总荷载的设定需要用迭代办法，其收敛条件是界线上的 a 点的接触应力需等于 q_f 值。

(4) 根据刚性位移条件， ae 边界上位移与 oa 边界位移相同，由此再用特征线法进行运动分析，求得软化区内变位场。

图 8-34 是一个算例的荷载沉降曲线，假定压板宽度为 4m，计算参数为：软化区， $c=c_r=40\text{kPa}$ ， $\varphi=32^\circ$ ， $\varphi_r=28^\circ$ ；弹性区， $E=104000\text{kPa}$ ， $\nu=0.3$ 。对弹性区采用边界元法求解。图 8-35 显示某一中间状态下底板接触应力分布。

第五节 土坡渐进破坏分析

一、土坡渐进破坏的机理

超固结粘土坡的渐进破坏是土力学中最早关注的渐进破坏问题。Skempton, Bjerrum, Bishop 等早期研究集中在长期荷载下强度丧失的机理及稳定分析中强度指标取值问题上^[48,49,50]。以后不断有人提出稳定分析方法的改进意见，或者采用有限元法等先进分析方法进行研究。

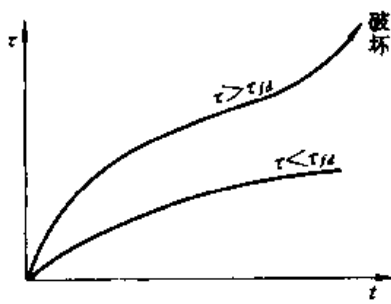


图 8-36 长期强度

土坡的渐进破坏主要与硬粘土强度的逐步丧失有关。强度丧失的机理可以分减压软化、剪胀软化和损伤软化三种，已在前面讨论过。但是也有一些学者提出蠕变软化的主张，或者所谓的长期强度问题^[51,52,53]。诚然，强度随试验所用的应变速率的增大而增大，这是任何材料的共同特性。对于粘塑性材料，达到同一应变时慢速加荷者受到的应力自然比快速加荷者低，因此，三轴剪切试验中如果统一用应变达到 15% 为破坏标准，则慢速加荷试样的强度自然降低。但是长期强度主张者讨论的不是这一问题。他们认为存在一个长期强度 τ_{fd} ，如果作用应力 $\tau < \tau_{fd}$ ，则应变速率将随时间减慢，变形最后趋于稳定。如果 $\tau > \tau_{fd}$ ，则应变速率经历初期衰减后将转向加速破坏(图 8-36)。 τ_{fd} 显著低于峰值强度 τ_{fp} ，但与残余强度 τ_{fr} 的关系不够明确。我们认为，如果存在 τ_{fd} ，则 $\tau_{fd} = \tau_{fr}$ 。长期荷载作用下的强度降低不过是上述三种机理的反映，即是土体吸水，颗粒定向和胶结破损等因素造成的，单纯时间因素可以引起加速破坏的说法难以理解，Nelson 等人只解释为胶结破损也不够全面^[54]。

经历长期荷载作用下的软化过程以后，再受到一个荷载增加，往往触发土坡滑动。这里降雨引起的渗透力的增加可能是最主要的因素。

二、滑弧分析法

Law, Srbulov 和 Chugh 等曾对通常的滑弧法进行修改以考虑渐进破坏过程，为此必须设法求出局部安全系数以取代常规方法的总体安全系数^[55,56,57]。近来，Yamagami 等又对这类方法作了改进^[58]。下面介绍求取局部安全系数的基本思路。

设从滑弧体中取出一个土条, 其上的作用力如图 8-37 所示。从土条上的水平力, 垂直力和力矩平衡只能建立三个方程式。假定土条左边的作用力 T_{i-1} , E_{i-1} 和作用点位置已由前面土条的分析求得, 则尚有 S_i , N_i , T_i , E_i 和其作用点 d_i 5 个未知数, 为了求得确定的解, 必须先作两个假设。一个假设是 E_i 的作用点已知, 例如 Janbu 假定 $d_i = h_i/3$, h_i 是土条高度; 其二是如 Morgenstern-Price 法那样假定土条侧面上的切向力 T_i 与法向力 E_i 之间存在下列关系

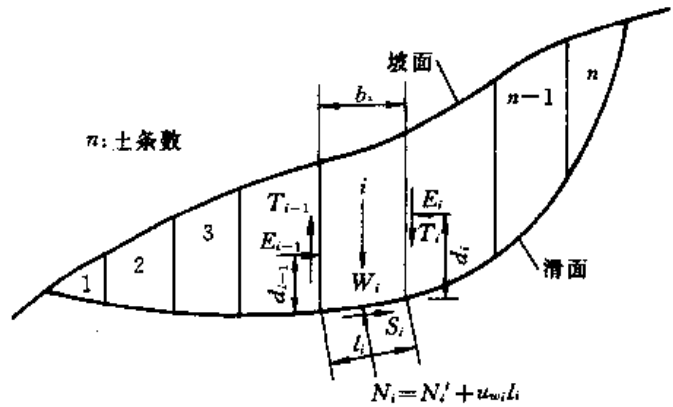


图 8-37 土条上的作用力

$$T_i = \lambda f_i E_i \quad (8-129)$$

式中: λ 为常数; f_i 为土条位置的函数, 需事先设定。显然, 这里侧面上作用的孔隙压力已包括在 E 之中。我们认为, 一种更合理的假设是

$$T_i = \lambda [c h_i + (E_i - \bar{u}_w h_i) \operatorname{tg} \varphi] \quad (8-130)$$

式中 \bar{u}_w 是侧面上的平均孔隙压力。在这一假设下, λ 可以理解为侧面上的强度发挥系数。有了这两个假设后, 即可根据力矢和力矩平衡条件求得三个未知数 E_i , N_i , 和 S_i 。相应的局部安全系数公式为

$$F_{si} = \frac{c l_i + N_i \operatorname{tg} \varphi}{S_i} \quad (8-131)$$

对第一块和最后一块土条, 存在下列边界条件

$$E_0 = 0; E_n = 0 \quad (8-132)$$

$E_0 = 0$ 的条件事先设定, 而 $E_n = 0$ 则是从求解 n 块土条得出的, 不一定能满足。为此, 必须采用迭代的办法, 即先假定式 (8-130) 中的 λ 值, 然后对每一土条计算一遍, 最后得出 E_n 。如不满足 $E_n = 0$ 的条件, 则修改 λ 值, 直至 $|E_n|$ 小于规定的误差。最后, 总体安全系数可以用下式计算

$$\bar{F}_s = \frac{\sum_{i=1}^n (c l_i + N_i \operatorname{tg} \varphi)}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (8-133)$$

以上分析中 λ 设定为一常量, 如果算出各土条的局部安全系数 F_{si} 均大于 1, 分析的结果是合理的。但是, 一旦 $F_{si} < 1$, 则必须令 $F_{si} = 1$, 从而 S_i 将可从下式计算

$$S_i = c l_i + N_i \operatorname{tg} \varphi \quad (8-134a)$$

或对一次跌落的软化材料

$$S_i = c_i l_i + N_i \operatorname{tg} \varphi_i \quad (8-134b)$$

这时 λ 将可以从力矢和力矩平衡方程式求出, 而不能任意设定。因此我们认为更合理的办法是对各土条设定一个 λ_i 值, 总数为 n 个。 λ_i 取值的限制条件为 ① $0 \leq \lambda_i \leq 1$; ② λ_i 的组合应满足 $E_n = 0$ 的边界条件, 最后可以根据式 (5-28a) 的潘家铮的极大原理, 寻求 λ_i 的最优

组合, 使求得的总体安全系数达到极大值。类似于式 (5-50) 的数学表达式为

$$\begin{aligned} \max \bar{F}_s(\{\lambda\}) \\ \text{s. t. } 0 \leq \lambda_i \leq 1; E_n = 0 \end{aligned} \quad (8-135)$$

而包括软化土条在内的总体安全系数表达式为

$$\bar{F}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (c_i l_i + N_i \text{tg} \varphi_i) + \sum_{i=n_1+1}^n (c_i l_i + N_i \text{tg} \varphi_i)}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (8-136)$$

式中: n_1 为软化土条数。最后应当说明, 以上计算是针对某一选定的滑弧的。对于一个具体的算例, 还必须假定不同的滑弧, 寻求总体安全系数的最小值 \bar{F}_{\min} 。

三、有限元法

与表面加荷的地基问题和土压力问题不同, 土坡的变形和破坏是体积力引起的, 从而增加了分析的难度。土坡的有限元分析始终是一个热门的课题, 如早期的 Zienkiewicz 和近来的 Ugai 所做的工作^[59,60], 而且分析结果往往与常规的滑弧分析结果进行比较。考虑应变软化特性的土坡渐进破坏分析早期由 Lo & Lee 进行过^[61]。由于采用具有争议的初应力法, 结果的正确性难以认定。以后不断有人进行过类似的工作, 特别是围绕一个实际破坏工程 Carsington 坝, Potts 和 Chen 都进行过详细的有限元分析^[62,63,64]。但是, 把基于应变局部化理论的先进的分析方法用于土坡渐进破坏问题, 尚未有人深入研究过。

参 考 文 献

- 1 Terzaghi K. Stability of slopes of natural clay. In: Proc. 1st Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Harvard, 1936, 1: 161~165
- 2 沈珠江. 应变软化材料的广义孔隙压力模型. 岩土工程学报, 1997, 19 (3): 14~21
- 3 Skempton A W. Residual strength of clay in landslide, folded strata and the laboratory test. Geotechnique, 1985, 35 (1): 1~18
- 4 周鸿逵, 王儒圣. 用指数函数拟合土的 $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_s$ 和 $\epsilon_v \sim \epsilon_s$ 实测曲线, 见: 第二届华东地区岩土力学讨论会论文集. 杭州: 浙江大学出版社, 1992: 166~171
- 5 Prevost JH and Høeg K. Soil mechanics and plasticity analysis of strain softening. Geotechnique, 1975, 25 (2): 279~297
- 6 Yoshinaka R et al., Formulation of stress-strain behavior in work-softening portion, In: 5th Int. Conf. Num. Meth. in Geomech., Nagoya, 1985, 1: 503~508
- 7 Lo KY. An approach to the problem of progressive failure. Can. Geot. J., 1972, 9 (4): 407~429
- 8 Lade P V, Yamamuro J A and Skeyers B D. Effects of shear band formation in triaxial extension test. Geot. Testing J., 1996, 19 (4): 398~410
- 9 Vermeer P A. The orientation of shear bands in biaxial tests. Geotechnique, 1990, 40 (2), 223~236
- 10 Vesic AS. Expansion of cavities in infinite soil mass. J. SMFD, ASCE, 1972, 98 (3): 265~290
- 11 蒋明镜, 沈珠江. 考虑材料应变软化的柱孔扩张问题. 岩土工程学报, 1995, 17 (4): 10~19
- 12 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的线性软化柱形化扩张问题. 岩石力学与工程学报, 1997, 16 (6): 550

- 13 Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1958, 6: 236~249
- 14 Mandel J. Conditions de stabilite et postulate de Drucker, In: *IUTAM Symp. Reology & Soil Mech*, 1964, Grenoble, 58~68
- 15 Rudnicki J W and Rice J R, Conditions for the localization in pressure-sensitived dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1975, 23: 371~394
- 16 Vermeer P A, A simple shear-band analysis using compliance, In: *IUTAM Conf. Deformation and Faliure of Granular Materials*, 1982, Delft; 493~499
- 17 Nova R. An engineering approach to shear-band formation in geological media. In: *5th. Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, 1985, Nagoya, 1: 509~516
- 18 de Borst R. Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum, *Engng Computations*, 1991, 8: 317~332
- 19 Mühlhaus H B, de Borst R and Aifantis E C. Constitutive models and numerical analyses for inelastic materials with microstructure, In: *7th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech.*, Cairns, 1991, 1: 377~385
- 20 Papanastasion P C and Vardoulakis F G. Numerical analysis of progressive failure in deep boreholes. In: *7th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech.*, Cairns, 1991, 1: 399~405
- 21 Bazant Z P and Pijaudier-Cobot G. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.*, ASME, 1988, 55: 287~293
- 22 Adachi T et al. Finite element analyses with strain softening constitutive model. In: *7th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech.*, Cairns, 1991, 1: 535~540
- 23 de Borst R and Mühlhaus H B. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. in Engng*, 1992, 35: 521~539
- 24 Vardoulakis I G. Mühlhaus H B and Aifantis E C, Continuum models for localized deformation in pressure sensitire materials, In: *7th Int. Conf. Comp. Meth. & Advamces in Geomech.*, Cairns, 1991, 1: 441~448
- 25 宋二祥. 软化材料有限元分析的一种非局部方法. *工程力学*, 1995, 12 (4): 83~101
- 26 Pietraszczak S and Niu X. On the description of localized deformation. *Int. J. Num. Ana. Meth. in Geomech.*, 1993, 17 (11): 791~806
- 27 Hazarika H, Terado Y and Nasutake O. A new method for progressive failure analysis of granular material considering the inception of shear band, In: *9th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech.*, Wuhan, 1997, 3: 1847~1852
- 28 Darve F. An incrementally nonlinear constitutive law of second order and its application to localization. In: *Mechanics of Eng. Materials*, Ed. By Desai C & Gallagher R, 1984: 179~196
- 29 Bauer E and Huang W. The dependence of shear banding on pressure and density in hypoplasticity. In: *Proc. 4th Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils & Rocks*, Gifu, Japan, 1997;
- 30 Tejchmar J and Bauer E. Numerical simulation of shear band formation with a polar hypoplastic constitutive model. *Comp. & Geotech.*, 1997, 19 (3): 221~244
- 31 沈珠江. 应变软化材料变形计算中的若干问题. *江苏力学*, 1982 (1): 6~9

- 32 宋二祥. 结构极限荷载及软化性态的有限元分析. 工程力学增刊, 上册, 1995, 71~80
- 33 Asaoka A and Noda T. Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils & Foundations*, 1995, 35 (1): 83~100
- 34 de Borst R. Bifurcations in finite element models with a nonassociated laws, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 1988, 12: 99~116
- 35 Zienkiewicz O C and Huang M. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 1995, 19: 127~148
- 36 Tie B and Aubry D. Hierarchical and adaptive mesh refinement for F E computation in geomechanics. In: 9th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech., Wuhan, 1997, 1: 397~402
- 37 Wang J and Yang L. Comparison of several smooth stresses in the mesh refinement of adaptive FEM. In: 9th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech., Wuhan, 1997, 1: 403~408
- 38 Hicks M A. An adaptive mesh study of localization in a saturated soils. In: 9th Int. Conf. Comp. Meth. & Advances in Geomech., Wuhan, 1997, 3: 1853~1858
- 39 Belytschko T, Fish J and Englemann B E. A finite element with embedded localization zones. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, 1988, 70 (1): 59~89
- 40 Sabatini P J and Finno R J. Effect of consolidation on strain localization of soft clays. *Computers & Geotech.*, 1996, 18 (4): 311~339
- 41 Ortiz M, Leray Y and Needleman A. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, 1987, 61 (2): 189~214.
- 42 Leroy Y and Ortiz M. Finite element analyses of strain localization in friction material, *Int. J. Num. Ana. Meth. Geomech.* 1989, 13: 53~74.
- 43 Larsson R, Runesson K and Ottosen N S, Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1993, 36: 2087~2105
- 44 Pietraszczak S and Mroz Z. Finite element analysis of deformation of strain softening materials. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1981, 17: 327~334
- 45 Li X and Cescotto S. A mixed element method in gradient plasticity for pressure dependent materials and modelling of strain localization. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, 1997, 144: 287~305
- 46 李锡夔, Cescotto S. 梯度塑性的有限元分析及应变局部化分析. *力学学报*, 1996, 28 (5): 575~584
- 47 蒋明镜, 沈珠江. 考虑材料软化特性的地基承载力分析计算. *水利水运科学研究*, 1996 (1): 42~47
- 48 Skempton A W. Long-term stability of clay slopes. *Geotechnique*, 1964, 14 (2): 77~102
- 49 Bjerrum C. Progressive failure in slopes of overconsolidated plastic clay and clay shales. *J. SMFE, ASCE*, 1967, 93 (5): 3~49
- 50 Bishop A W. The influence of progressive failure in the choice of the method of stability analysis. *Geotechnique*, 1971, 21 (2): 168~172
- 51 Christian J T and Whitman R V. A model for progressive failure, In: 7th Int Conf. SMFE, 1969, 2: 541~545
- 52 Vaugh P R and Walbanckle H T. Pore-pressure change and delayed fracture of cutting slope in over consolidated clay. *Geotechnique*, 1973, 23 (4): 531~539
- 53 Cavounidis. Hypothesis for progressive failure in a Marl, *J. GED, ASCE*, 1980, 106 (6): 659~671
- 54 Nelson J D and Thompson E G. A theory of creep failure in overconsolidated clay. *J. GED, ASCE*, 1977, 103 (4): 147~152

- 55 Law K T and Lumb P. A limit equilibrium analysis of progressive failure in the stability of slopes. *Can. Geot. J.* , 1978, 15: 113~122
- 56 Srbulov M M. A simple method for the analysis of stability of slopes in brittle soil. *Soils & Foundations*, 1995, 35 (4): 123~127
- 57 Chugh A K. Variable factor of safety in slope stability analysis, *Geotechnique*, 1986, 36 (1): 57~64
- 58 Yamagami T, Takimazaka Z and Jiang J. Progressive failure analysis of slopes based on LEM. In: *Performance and Evaluation of Soil Slopes under Earthquake and Rainstorm*, Dalian, 1998: 35~48
- 59 Zienkiewicz O C, Humpheson C and Lewis R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*. 1975, 25 (4): 671~689
- 60 Ugai K. A method of calculation of total safety factors of slopes by elasto-plastic FEM. *Soils & Foundations*, 1989, 29 (2): 190~195
- 61 Lo K Y and Lee C F. Stress analysis and slope stability in strain softening materials. *Geotechnique*, 1973, 23 (1): 1~11
- 62 Potts D M, Dounias G T and Vaughan P R. Finite element analysis of progressive failure of Carsington embankment. *Geotechnique*, 1990, 40 (1): 79~101
- 63 Chen Z, Morgenstern N R and Chan D H. Progressive failure of the Carsington Dam; a numerical study. *Can. Geotech. J.* , 1992, 29 (6): 971~988
- 64 Ramsamooj D V and Lin G S. Prediction of progressive failure in heavily overconsolidated slope. *J. GED*, 1990, 116 (9): 1368~1380

通用符号

a	加速度	$u_i, \{u\}$	位移矢量
c	凝聚力	$\{\dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$	速度和加速度
C_c, C_r	压缩和回弹指数	$v_i, \{v\}$	速度矢量
$C_{ij\mu}, [C]$	柔度矩阵	w	含水量
$D_{ij\mu}, [D]$	刚度矩阵	W	功
e	孔隙比	x, y, z	直角坐标
$e_{ij}, \{e\}$	偏应变张量	* * *	
E	杨氏模量	γ	剪应变, 容重
f	屈服函数	Γ	边界
F_s	安全系数	$\delta_{ij}, \{\delta\}$	单位张量
g	重力加速度, 势函数	$\epsilon_{ij}, \{\epsilon\}$	应变张量
G	剪切模量	$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主应变
h	水头, 硬化参数	ϵ_v, ϵ_s	体应变和广义剪应变
H	厚度, 硬化模量	φ	内摩擦角
k	渗透系数	ψ	剪胀角
K	体积模量	ρ	密度, Lode 角
K_0	静止侧压力系数	ρ_a, ρ_w, ρ_f	孔隙气, 水密度和液体密度
K_c	固结应力比	ν	泊松比
n	孔隙率	τ	剪应力
$n_i, \{n\}$	法向矢量	τ_f	抗剪强度
p_a	大气压力	η	应力比, 粘滞系数
r	半径	η_c	临界应力比
s	秒, 吸力	$\sigma_{ij}, \{\sigma\}$	应力张量
$s_{ij}, \{s\}$	偏应力张量	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力
S_r	饱和度	σ_c, σ_d	固结应力和动应力
S_l	剪应力水平	σ_m, σ_s	平均压应力和广义剪应力
u_a, u_w	孔隙气压, 孔隙水压	Ω	计算域

名 词 索 引

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------|-------------|
| A | | 弹塑性矩阵 | 37 |
| B | | 弹性半空间理论 | 101 |
| 板 | 107 | 弹性地基 | 100 |
| 变弹性模型 | 13, 30 | 等价粘弹性模型 | 16, 62, 264 |
| 变形单元法 | 206 | 等价应力理论 | 15, 45 |
| 边界面模型 | 16, 55, 274 | 等效振次 | 266 |
| Biot 固结理论 | 137, 153 | 等向硬化 | 14 |
| Bishop 理论 | 27, 231 | 等值面理论 | 15, 44 |
| 波的传播 | 118 | 地基极限荷载 | 214 |
| 波的折射与反射 | 122 | 定向张量 | 67 |
| 波动过程理论 | 270 | 动力固结方程 | 166 |
| Boussinesq 解 | 85 | 冻土融沉 | 257 |
| 不连续解 | 196 | Drucker 公设 | 17 |
| Byrne 模型 | 33 | Duncan—张模型 | 31 |
| C | | 对称性原理 | 17 |
| 残余变形 | 265 | 对偶应力理论 | 15, 16, 44 |
| 残余孔隙压力 | 265 | 多次屈服面 | 16, 55 |
| 残余强度 | 23, 292 | 多重屈服面 | 15, 39, 52 |
| 超弹性模型 | 14 | 多环屈服面 | 55 |
| 超固结土 | 23, 26 | 多滑移机构模型 | 69, 271 |
| 滞后变形模型 | 17, 64 | E | |
| 次固结 | 21, 61 | F | |
| 次弹性模型 | 13, 309 | 非饱和土 | 27, 230 |
| 次塑性模型 | 58, 275, 309 | 非局部应变理论 | 306 |
| Cosserat 理论 | 304 | 非线性模型 | 29 |
| D | | 非正交流动法则 | 52 |
| 大变形固结理论 | 180 | 分叉理论 | 301 |
| 单剪应力理论 | 11 | 峰值强度 | 23 |
| 单剪切角理论 | 12 | 封闭屈服面 | 49 |
| 单屈服面 | 38 | Fredlund 理论 | 27 |
| 单相流固结理论 | 246 | 复合体理论 | 308 |
| 单元件模型 | 9 | 复合体模型 | 73 |
| 单桩 | 113 | 复元件模型 | 10 |
| 弹脆塑性模型 | 294 | G | |
| 弹塑性理论 | 14, 37 | 刚度矩阵 | 31 |

刚塑性模型 11, 187
 刚性压板 89, 190
 各向异性 20, 72, 209
 Gibbs 自由能 19
 固结方程 136, 235
 广义虎克定律 13, 81
 广义孔隙压力 309
 广义塑性模型 59
 广义吸力 240, 309
 过应力理论 17, 63

H

滑动面 189
 滑弧分析法 225, 320
 滑块平衡法 202
 滑块推力法 321
 滑块单元法 204
 混合单元法 316
 黄土浸水变形 248

I

Illushin 公说 18

J

加荷准则 14
 结构破坏压力 22
 结构强度 25
 结构性 19, 67
 结构性模型 66, 240
 极大极小原理 192
 极限分析 187
 极限平衡 187
 极限土压力 220
 接触胀量 67
 剑桥模型 46
 渐进破坏理论 291
 剪切带 293, 301
 剪胀模量 20
 剪切带倾角 293
 剪切波 119
 剪胀软化 291
 剪胀性 20
 延迟记忆原理 17
 减压软化 291

净应力
 九参数模型 36
 矩形板 111

K

可动解 201
 可解解 196
 孔周围应力 97
 客观性原理 17

L

梁 101
 联合强度理论 28
 临胀角 47
 流变性 21
 流动法则 15, 38, 88
 流动系数 17
 流滑破坏理论 284
 Love 波 121

M

帽盖屈服面 44
 Masing 模型 88
 Melan 解 88
 Merchant 模型 10
 Mindlin 解 86
 Mohr—Coulomb 准则 12
 模量场 274

N

Naylor 模型 31
 内时模型 57
 能量法 204
 能量守恒定律 18
 粘弹塑性模型 16
 粘弹性固结方程 172
 粘土液化 263, 279

O

P

潘家铮原理 187, 194, 226, 321
 膨胀土地基 255
 膨胀土简化固结理论 246

平均过程理论 263
 破坏准则 10
 Prandtl-Reuss 法则 42

Q

七参数模型 34
 砌块体模型 74
 强度理论 23
 嵌套单元法 314
 群桩 117
 屈服面 14
 屈服函数 14

R

Rayleigh 波 120
 热流耦合固结理论 254
 热源问题 255
 软化机理 291
 柔度矩阵 13, 38

S

三参数模型 33
 三剪切角理论 12
 三剪切机构模型 69, 276
 三剪应力理论 12
 三屈服面模型 54
 三元件模型 10
 散粒体模型 70
 上限定理 193
 滴增大定律 18
 砂井固结问题 146, 174
 砂土液化 262, 270
 沈珠江模型 33
 双变量理论 231
 双参数模型 31, 100
 双重屈服面模型 53
 双弹簧模型 73
 双剪切角理论 12
 双剪应力理论 12
 双相流固结理论 250

双元件模型 10
 双硬化模型 51
 水滴形屈服面 47
 水平承载桩 104
 四参数模型 32
 塑性乘子 14
 塑性势 15
 塑性系数 14, 15
 损伤比 73
 损伤函数 74
 损伤软化 291

T

特征线法 190
 Terzaghi-Rendulic 固结理论 139
 梯度塑性理论 301
 统一屈服面 50
 统一变形理论 240
 土坡极限平衡 225
 土坡渐进破坏 322
 土楔应力 96
 椭圆屈服面 46
 驼峰型应力应变曲线 292

U

V

W

王志良模型 275
 微结构变量 67
 Winkler 模型 100
 无屈服面理论 16, 57

X

吸力 231
 吸力状态方程 241
 下限定理 193
 卸荷准则 14
 相变耦合固结理论 257

Y

压硬模型 20

液化机理	262
液化破坏理论	262
一般变分原理	194
应变局部化	301
应变强化	21
应变软化	21, 291
应力转折	16, 17
硬化规律	14, 44
有效固结应力法	210
有效强度理论	25
有效应力	133
有效应力原理	133, 231
圆板	109
运动硬化	14

Z

增量非线性理论	36, 309
真强度理论	24
折中定理	195
折减吸力	231
桩	113
自适应有限元	313
总强度理论	25
组构张量	67
阻滑桩	224
阻尼比	62, 264, 280

031-25 3206
 11

7

序

理论土力学是土力学的核心部分，它奠定了土力学在解决各种实际问题时需要依赖的理论基础。尽管太沙基早在 1943 年就出版了理论土力学专著，但当时人们对土的认识还是比较粗浅的。土力学理论来源于实践的总结，其发展过程十分缓慢，到今天也未能形成一个完整的理论体系。正因为今天所掌握的理论还不十分成熟，所以在解决复杂的岩土工程问题时常感到无能为力。为此，岩土工程与其他学科相比不得不更加注重实验和工程资料的积累，并从资料的反分析中寻找客观的规律性，从而使理论体系逐步充实和完善。本书正是在土力学理论已有长足的进步，但尚不十分完善的背景下问世的。

本书总结了太沙基理论土力学问世后的 50 多年，特别是近 20 年来土力学理论研究的重大成果。全面论述了理论土力学的核心问题，即土的强度和本构关系；介绍了古典土力学的各个基本理论，如弹性应力理论，多孔弹性介质理论，以及极限平衡理论；提出了现代土力学的理论框架，即非饱和土固结理论，饱和土液化理论，土体渐进破坏理论。此外，还探讨了与土体宏观力学特性相关的微观理论。

学术专著的撰写一般有两种方法。一种是介绍作者本人的成果和观点；另一种是以本人的思想、观点和方法为主导对一个恢弘的学科领域进行综述或诠释。随着科学技术的发展，各个学科领域越来越复杂和精深，个人的创造发明能够涵盖整个学科的自然很少。因此，较多的专著都是把精力花在综述和诠释方面。但是我觉得本书却兼有上述二者之长。

本书既体现作者及其学生们研究内容和理论成果，又较全面地介绍了国内外相关学派的研究成果。所以，尽管重点在于介绍我国的成就，但本书还是给读者提供了有关土力学理论体系的比较完整的概念。多年来还没有看到这样的宏篇。

我十分欣赏作者开拓的思路，严密的逻辑，精辟的论断，简炼的文字和踏实的作风。这些都在本书中得到淋漓尽致的体现。我毫不怀疑本书对推动理论土力学的发展，对促进现代土力学学科体系的形成和对指导岩土工程实践都将作出贡献。

我向莘莘学子们，硕士、博士们，以及其他一切致力于岩土工程研究的朋友们推荐本书。相信本书一定可以使各位得到教益。

本书的出版受到黄文熙院士的关注，标志着我国土力学研究在国际上已占据了重要的位置。希望年轻同行们继承老一辈的传统，为把我国岩土工程事业提高到一个新水平作出贡献。为此年轻朋友们应在开拓思路和踏实作风两方面加强自己的锻炼和修养。切不可在尚未认识客观世界的复杂性之前，就企图建立一个可以支配一切的理论体系；也不要以为可以不通过长期艰苦的努力，就可以一劳永逸地得到一个全新成果。

未来属于刻苦钻研和勇于实践的年轻朋友们！

蒋彭年

1999年8月18日

于南京水利科学研究所土工所